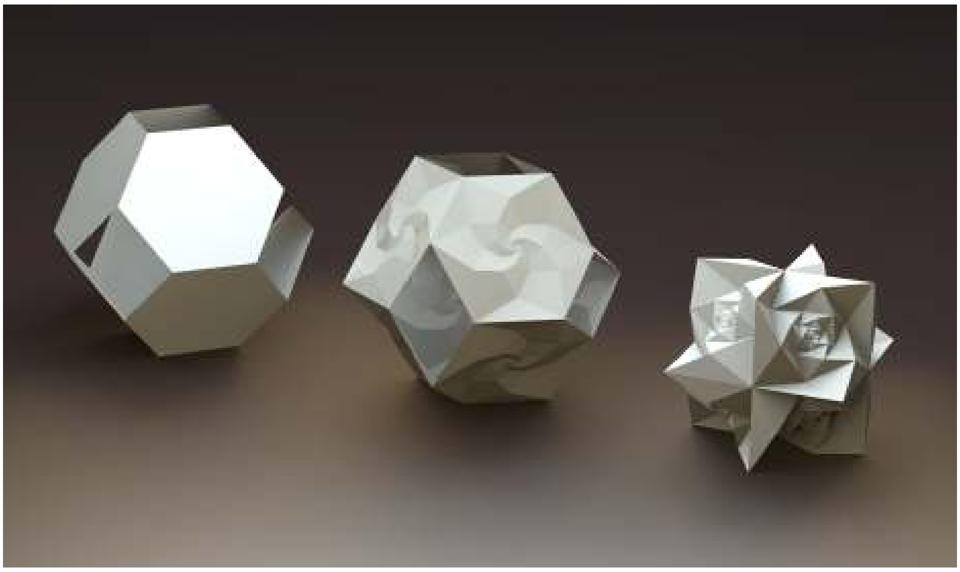
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 103 – Agosto 2007 - Anno Nono



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 102 ha diffuso 1393 copie e il 31/07/2007 per Google eravamo in 33'100 pagine.

Citiamo: "Uno *Spidron* è definito come una sequenza di triangoli isosceli alternantesi che, una volta ripiegati, esibiscono interessanti proprietà." Definizione tutt'altro che chiara, ma forse la seconda immagine (che, ad ogni passaggio, sostituisce una faccia del solido con uno *Spidron*) aiuta a capire. Non abbiamo la più pallida idea di come tradurre "spidron", ma conveniamo che una cosa del genere poteva nascere solo nella patria di Erno Rubik.

1. Non dire gatto...[1]

Penso, dunque sono.
(Renè Descartes)

…Allora perché raccontarlo? Vi rendete conto che tutto ciò non ha nessun interesse? Dovete capire che vi sono due mondi: quello che è senza che se ne parli, e lo si chiama mondo reale, perché non si ha nessun bisogno di parlarne per vederlo. L'altro è il mondo dell'arte, e di questo bisogna parlarne, perché altrimenti non esisterebbe…
(Oscar Wilde)

A quanto pare anche alcuni animali sanno contare. Secondo le ricerche, la scoperta dei numeri potrebbe coincidere con la definizione dell'individuo: "io sono diverso da tutti gli altri", oltre ad essere il primo vagito dell'autocoscienza, conterrebbe implicitamente anche una sorta di definizione del numero uno, al quale fa da contraltare tutto il resto. Il passo successivo lo hanno probabilmente fatto le specie in cui la riproduzione avviene con un partner fisso; sembra infatti lecito aspettarsi che riescano a contare fino a due: "io, mio marito e poi tutti gli altri", per dirla come la direbbe la signora Pinguino[2]. Poi arrivano i primati, che chissà, forse sono arrivati a contare anche i loro figli, e infine noi, gli esseri umani, alcuni dei quali sono dei veri fenomeni, a contare.

Per noi che fin dalle elementari veniamo tormentati con concetti astrusi e perversi come le frazioni (per non parlare dell'infinito, che qualche crudele maestro tenta di prefigurare già a quella tenera età), saper contare fino a uno o due può non sembrare una performance da tramandare negli annali di famiglia, ma in fondo Cartesio decise proprio di partire da questo punto; e lo fece proprio perché aveva ben chiara l'intenzione di arrivare piuttosto lontano. È bene ricordare, ogni tanto, che per raggiungere qualsiasi destinazione bisogna comunque partire dall'inizio, ricominciare da capo: quasi fosse necessario riscoprire l'innocenza dei bambini – e non in quanto bambini, ma in quanto ignoranti. "*L'idea del continuo ci sembra semplice. In qualche maniera abbiamo perso di vista le difficoltà che sottintende… Narrano che un numero come la radice di due sconvolse Pitagora e la sua scuola al punto da causarne la fine. Proprio perché siamo abituati a numeri tanto esotici fin dalla prima giovinezza, dobbiamo fare attenzione a non sottovalutare l'intuizione matematica di quei saggi; la loro preoccupazione aveva ben solide basi*[3]*.*".

[1] "…finché non l'hai nel sacco", disse un famoso allenatore di calcio. Frase che lo rese ancor più famoso e ancor più bersaglio di ironici strali. Strali meritatissimi, beninteso, anche se dubitiamo che molti dei fustigatori si ricordassero la ragione (o meglio l'aneddoto) che spiega perché sia corretto, in questa frase, dire "quattro" anziché "gatto". In fondo, come si vedrà più avanti, i gatti e i sacchi – o meglio i gatti e le scatole – vanno decisamente d'accordo.

[2] Alcuni degli esperimenti volti a determinare se (e quanto) gli animali sappiano contare sono davvero ingegnosi. Ne rammentiamo uno, destinato a verificare le capacità enumerative delle galline: su un nastro trasportatore si presenta alla gallina una sfilza di chicchi di mais, solo che alcuni sono liberi e mangiabili, mentre altri invece sono incollati al nastro e non commestibili. Se si alternano in modo regolare i "buoni" ai "cattivi", le galline, dopo qualche imbarazzato tentativo, cominciano a beccare solo i chicchi buoni, non provando neppure ad affrontare i chicchi incollati, mostrando così di saper contare fino a uno. In seguito si mette un chicco buono e libero seguito da *due* chicchi incollati: e anche così, perfino i cervelli di gallina dopo un po' capiscono l'antifona e beccano solo un chicco ogni tre. Andando avanti, se ben ricordiamo, alcune galline riescono a cavarsela anche con serie di tre e forse anche quattro chicchi incollati, salvo poi cedere del tutto e cominciare a beccare i chicchi assolutamente a caso, quando il numero dei chicchi incollati cresce ulteriormente.

[3] *The idea of the continuum seems simple to us. We have somehow lost sight of the difficulties it implies ... We are told such a number as the square root of two worried Pythagoras and his school almost to exhaustion. Being used to such queer numbers from early childhood, we must be careful not to form a low idea of the mathematical intuition of these ancient sages; their worry was highly credible.* (Erwin Schrödinger)

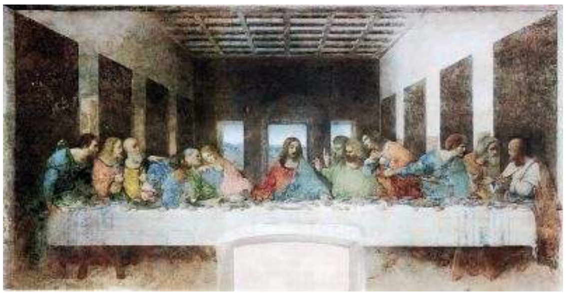
Il punto è che imparare è difficile, ma una volta imparato qualcosa, è difficilissimo tornare indietro. Non intendiamo sottovalutare la piaga feroce dell'analfabetismo di ritorno, sia ben chiaro: ma è evidente che qualsiasi attività umana trasmissibile alle generazioni successive possiede la capacità di svilupparsi, evolversi, trasformarsi, fino a diventare qualcosa generalmente assai diverso dalle sue proprie origini. E, magari, non più in grado neanche di riconoscere quanto fossero difficili e complicati i primi passi di quel lungo cammino. Pensate che gli esempi basati sulla matematica e la scienza siano troppo evidenti e banali, in questo contesto? Se è così, prendete l'arte.

Arte nelle grotte di Lascaux

È probabile che gli uomini delle caverne non riservassero troppa importanza all'arte; dopotutto non riempiva le pance, non riparava dal freddo e non serviva neppure per proteggersi dagli animali feroci, e ai quei tempi queste erano più o meno le sole cose che avessero davvero importanza. E allora è proprio con questa consapevolezza che bisognerebbe entrare nella grotta di Lascaux, o in luoghi del genere: immaginando di avere nella testa solo pochissimi pensieri che potevano permettersi il lusso di non essere dedicati alla fame o alla paura; con una memoria e un'esperienza che verosimilmente conservavano una limitatissima capacità di stupirsi, soverchiate com'erano da tensioni costanti, perennemente più urgenti. Eppure – pur in questo stato d'animo – qualcuno ha inciso la pietra, ha usato colori, ha creato figure componendole con dei segni di selce: figure che rappresentavano, ricordavano qualcosa che si vedeva nel mondo fuori della caverna. La nostra testa di uomini ormai civilizzati non riesce neanche più a domandarsi davvero cosa significa "interpretare una figura": ne abbiamo milioni intorno ogni giorno, e abbiamo imparato a leggerle già nella culla. Foto, disegni, fotogrammi, simboli, segni. Tutti in grado di essere decifrati secondo qualche codice preciso: non andiamo a scuola per riconoscere la mamma nella foto della mamma, ma questo non significa che non si utilizzi comunque un sistema di "lettura", di decifrazione; e non significa neanche che tale codice non sia – in qualche misura – complesso. Solo che noi ormai lo possediamo, mentre l'uomo che incideva le rupi di Lascaux lo stava appena inventando. E i suoi compagni, guardando le incisioni, lo imparavano da lui e con lui. E imparare a riconoscere nelle rughe della pietra l'animale da cacciare doveva essere una rivelazione nuova e profonda, una catarsi intellettuale realmente rivoluzionaria, tale da staccare degli "oh" di meraviglia a chi per la prima volta realmente "vedeva", riconosceva nei segni sulla parete la preda da cacciare. Gli inizi sono sempre dannatamente difficili, eppure si finisce sempre con il considerarli banali, scontati, una volta che le incredibili difficoltà che li caratterizzano sono superate e dimenticate.

I passi successivi sono forse meno rivoluzionari, anche se forse ci appaiono ancora tali perché ci sono cronologicamente – culturalmente – più vicini. Superano difficoltà di lettura certo meno essenziali, ma che ancora siamo in grado di ricostruire, di condividere, e l'identificazione con l'artista è più facile.

Il primo passo – riconoscere una forma attraverso segni tracciati su rupi – fu astrazione fortissima: un salto quantico iniziale e necessario. Ma questo non basta, per quanto importante possa essere. Le forme del mondo hanno tre dimensioni, la superficie dove vengono rappresentate solo due. Questo crea una distanza continua tra quello che l'occhio vede nel mondo e quello che vede nel disegno. Già gli antichi Egizi si erano alacremente sforzati di dare il senso della profondità ai loro dipinti, rappresentavano movimenti accennati, personaggi piegati in posizioni innaturali, ricorrevano a dimensioni diverse: tutti artifici usati allo scopo di dare un'idea della terza dimensione, così difficile da disegnare sulle pareti delle piramidi. Terza dimensione, profondità di campo: cose che vengono infine domate dalla scoperta della prospettiva – e anch'essa è un codice, anche essa si è dovuto "imparare a leggerla" – e di tecniche pittoriche sempre migliori, al punto che con l'andare del tempo le rappresentazioni hanno raggiunto l'obiettivo ultimo di riprodurre sempre più e sempre meglio gli aspetti della realtà rappresentata, fino al più piccolo dettaglio letto dall'occhio osservatore.



Il cenacolo di Leonardo

Che cosa avrebbe potuto dire – supponendo che potesse parlare – l'artista di Lascaux, di fronte al Cenacolo di Leonardo? Avrebbe aperto la bocca nella meraviglia di tale perfetta rappresentazione, o piuttosto avrebbe fatto fatica a leggere la scena rappresentata – e non solo per le complesse tecniche usate, ma anche perché così lontana dalla sua esperienza? È ancora leggibile, o è invece un messaggio già troppo codificato, quello che Leonardo gli propone? E come potrebbe allora solo provare a leggere l'arte successiva, quella che non mira più a rappresentare la realtà? Perché può forse essere nata con l'intento di rappresentare la realtà, ma ha oramai certo abbandonato il suo scopo iniziale[4]: oggi tenta – forse – di catturare non più la realtà che si presenta agli occhi, ma piuttosto quella che tanto visibile non è: quei significati che è particolarmente difficile esprimere. Aprite un libro di storia dell'arte, e stupitevi nel contare quanti messaggi, palesi o meno, sembrano confluire nella lettura di un qualunque capolavoro artistico. Sono questi i significati che più interessano; non è più considerata arte quella che si limita a rappresentare: la tecnica è acquisita, e proprio per questo viene data per scontata, ritenuta non più interessante.

Non è la tecnica che ha saputo realizzare il rosseggiare del cielo, a rendere un capolavoro l'*Urlo* di Munch: eppure l'artista di Lascaux sarebbe rimasto stupefatto, di fronte a quei rossi per lui così difficili da rendere. Non è lo scolastico fluire prospettico del parapetto verso l'orizzonte a colpire, per quanto il tecnicismo sarebbe certo bastato a meravigliare i predecessori di Piero della Francesca. È piuttosto l'angoscia di un uomo che ha visto molto più in là di quello che avrebbe voluto, e il modo in cui quell'angoscia riesce ad essere descritta non solo dalla faccia urlante, ma anche proprio da quella fuga di prospettiva, da quel furore rosso nel cielo. Un'angoscia certo diversa da quella che si prova rifiutando d'accettare la radice di due, ma in ultima analisi ugualmente sfuggente, inconoscibile, e forse proprio per questo terrorizzante.

L'Urlo di Munch

La matematica ha seguito lo stesso tragitto evolutivo: ha iniziato contando, e non accontentandosi di contare solo fino a uno o due come la signora Pinguino. Ha proseguito misurando, rapportando, e soprattutto mettendo in relazione gli oggetti. Ma si è poi anche staccata dagli oggetti, per astrarre da essi solo alcuni concetti che – forse per definizione – sono quelli che oggi chiamiamo concetti matematici. Anche se a prima vista può non sembrare, è attraverso queste azioni che la matematica ha sempre più – sempre meglio – cercato di descrivere il mondo, anche se per farlo ha dovuto spingersi sempre più lontano dalla "visualizzazione" che tanto aiutò i primi seguaci di Euclide. La sacra alleanza tra Fisica e Matematica discende dalla storia di entrambe, con buona pace non solo delle barzellette, ma anche delle definizioni programmatiche delle

[4] Resta da vedere quanto abbia contato, in quest'abbandono, il sopravanzate di tecniche sostanzialmente automatiche nella riproduzione della realtà. Non siamo esperti del campo, ma difficilmente si può considerare una coincidenza che l'esplodere delle correnti non figurative abbia visto la luce in tempi non distanti dalla scoperta della fotografia.

due scienze. La fisica immagina nuovi universi, e capita che per essi ci sia bisogno di nuove geometrie; o, più semplicemente, un nuovo elemento può apparire nelle teorie e nei laboratori di Fisica pur non essendoci ancora il linguaggio opportuno per descriverlo: è la Matematica che, solerte, di solito riesce a classificarlo, descriverlo, talvolta anche a prevederne il comportamento futuro. Analogamente e parallelamente, nuove frontiere matematiche sono spesso state varcate grazie alle analogie fornite dalla Fisica: insieme procedono e si aiutano, per fortuna. Ma, altrettanto inevitabilmente, insieme procedono e reciprocamente si complicano. Così come l'*Urlo* di Munch non è più leggibile come rappresentazione ingenua del mondo reale; così come l'arte sta andando in direzioni piuttosto difficili da comprendere, non più *elementari*, allo stesso modo la Matematica e la Fisica hanno ormai superato quella soglia entro la quale si poteva sperare di descriverle per analogie ed immagini. La nostra sembra ormai essere un'era in cui la realtà appare troppo complessa per essere espressa attraverso il nostro stesso linguaggio.

Non che sia davvero una scoperta dell'ultima ora: lo sforzo richiesto agli esploratori del mondo fisico è sempre stato elevato, rigoroso, immaginifico. Le prime teorie termodinamiche richiedevano di immaginare il misterioso e invisibile fluido "calorico", perché molti degli effetti degli scambi di calore tra i corpi potevano spiegarsi con la meccanica dei fluidi. Ma fin qui siamo ancora nel normale esercizio dell'analogia, strumento da sempre essenziale per i filosofi naturali di ogni epoca. Ma già l'elettromagnetismo è decisamente più difficile da maneggiare: anzi, da visualizzare. I nostri trisavoli, se avevano la fortuna di interessarsi alla scienza, erano chiamati a fronteggiare teorie che cercavano di spiegare i fenomeni elettrici pur senza però saper definire in maniera soddisfacente l'elettricità. Finché la natura atomica della materia non verrà definitivamente accettata – e questo non è poi successo troppo tempo fa – loro devono affaticarsi nell'immaginare – nel visualizzare – concetti complessi come l'energia, il potenziale, la carica, e a doverli coniugare con cose ancora misteriosissime come l'elettricità. Come dev'essere stato, per loro, lo sforzo di immaginare l'elettricità sposata all'ancor più misterioso magnetismo? Quanto deve essere stato scioccante scoprire, magari attraverso la splendida sintesi delle Equazioni di Maxwell, un concetto tutt'altro che elementare quale quello di "campo elettromagnetico"?

James Clerk Maxwell

L'innocenza della Fisica – se è lecito chiamare innocenza quell'età della scienza in cui ogni conoscenza aveva un riscontro diretto, evidente, immediato nel mondo che ci circonda – è già passata. Che cos'è davvero un *campo elettromagnetico*? È un oggetto tangibile, o forse solo il modello matematico di qualcosa di tangibile? È una mappa mentale, o è proprio un pezzo di natura? E, soprattutto, come possiamo rispondere a queste domande? L'unico modo per rispondere è accettare di perdere ancora altri pezzi d'innocenza, rinunciando al desiderio d'avere una risposta immediata e collocabile nelle nostre visualizzazioni mentali, rinunciando a volere una risposta trasmissibile attraverso il linguaggio di tutti i giorni.

Maxwell – e tutta la Fisica con lui – vuole che prima si paghi lo scotto: "Impara a leggere le equazioni", dice il vecchio scozzese. "Impara a immaginare le onde, e le equazioni che le onde descrivono. Impara le derivate parziali, impara a leggere cosa significano". E lo dice perché sa che solo dopo si riuscirà a capire bene perché la luce sia un'onda, e perché sia un'onda di natura elettromagnetica. Certo, la comprensione non è né immediata né facile, ma è radicale. E le cento inevitabili domande iniziali – perché onda, perché sinusoidale, perché elettrica, perché magnetica, perché visibile, perché invisibile – non avranno cento risposte disgiunte e scorrelate, ma si coaguleranno in un'unica visione complessiva che eliminerà tutte le cento domande. Non è il rosso del cielo, non è l'espressione del volto, non è il parapetto che si perde all'orizzonte, a fare un urlo dell'*Urlo* di Munch. È tutto l'insieme, che urla.

La Teoria dei Quanti, la prima e vecchia Teoria dei Quanti muove i primi passi senza l'intenzione di rivoluzionare alcunché. Non c'è una fronda di fisici tesa a sostenere una teoria opposta a quella in auge: la rivoluzione, se di rivoluzione si tratta, è fatta da rivoluzionari che non sanno di esserlo. La luce è fatta di onde, dicono i nostri bisnonni, che hanno fatto una fatica del diavolo a capire James Clerk Maxwell. La luce è fatta di particelle, torna invece a dire Albert Einstein, e occorre prestargli orecchio. Non perché prima di lui l'avesse già detto Isaac Newton, ma perché qualcosa in laboratorio si spiega solo rinunciando all'idea delle onde. E se cambiano gli eventi in laboratorio, se cambiano le cose da descrivere, deve cambiare anche il linguaggio. In fondo, anzi, sembra quasi che tutta la capacità e la difficoltà della scienza sia legata al linguaggio che, di volta in volta, essa decide di usare. L'elettromagnetismo è forse la prima grande teoria unificatrice, visto che riesce a sintetizzare in quattro equazioni tutta l'elettrostatica, l'elettrodinamica, il magnetismo e l'ottica. E se ogni disciplina poteva – prima dell'unificazione – permettersi un proprio linguaggio, matematico o verbale che fosse, ora il linguaggio dev'essere unico, visto che la teoria riconosce come diversi aspetti di una sola realtà i fenomeni apparentemente diversissimi. Ma quasi ogni nuova teoria è teoria unificatrice: la Relatività Ristretta salda insieme la cinematica e l'elettromagnetismo; la Relatività Generale unifica alla Ristretta anche la gravitazione, e così via. Di volta in volta, il linguaggio scientifico, se deve poter esprimere con le stesse "parole" concetti diversi, deve complicarsi.

E se non unificano, le teorie della fisica complicano. E allora un linguaggio già complesso deve adattarsi a descrivere un mondo non solo difficile, ma anche complicato. La luce è onda; la luce è particella; la luce è tutte e due. La materia è particella, ovvio. No, la materia è onda anche essa[5]. No, anch'essa è tutte e due le cose insieme. Non è solo la lingua comune, il parlato di tutti i giorni, a fare fatica nel seguire le apparenti contraddizioni delle frontiere della scienza. È anche il linguaggio stesso della scienza, a soffrire. Perché le "visualizzabili" particelle che rotolano e rimbalzano diventano assai meno visualizzabili – anche per le formule! – quando devono perdere contorni e solidità per comportarsi in maniera ondulatoria. E quando, alla fine, con l'opportuno allenamento d'esercizi e d'equazioni si riesce quasi ad accettare questo strano alternarsi di stati – corpuscolare, ondulatorio, ondulatorio, corpuscolare – rimangono ancora altri salti da fare, perché un conto sono le onde di diffrazione dei fotoni, degli elettroni, dei reticoli cristallini; un altro conto sono le onde di probabilità. Queste onde nuove e concettualmente rivoluzionarie arrivano *sull'onda* delle precedenti, come clandestini travestiti da passeggeri col biglietto di prima classe. Forse, una volta accettata la natura ondulatoria della materia, potrebbe non essere troppo difficile accettare anche la natura "probabilistica" delle funzioni d'onda quantistiche: o forse no. Einstein, ad esempio, non era disposto a fare quest'ulteriore "salto quantico": "*Più la teoria dei quanti ha successo, più sembra una sciocchezza*", diceva. Ma anche se si chiamava Einstein, non significa per questo che avesse ragione: la Natura se ne frega delle carte d'identità.

Nel linguaggio delle parole, che dovrebbe alla fin fine essere comunque quello più facilmente trasmissibile, si può descrivere una delle caratteristiche principali della Teoria dei Quanti così: "lo stato di una particella è descritto da una funzione d'onda dalla quale si può dedurre una *distribuzione di probabilità* della posizione e della velocità della particella ad ogni dato istante. Le due grandezze (posizione e velocità) sono legate in modo tale che se una delle due è perfettamente determinata (il che significa che non è più probabilisticamente valutata, ma totalmente definita, con probabilità collassata al valore

[5] A dirlo è Louis De Broglie. L'aristocratico francese compì la sua notevolissima *révolution*, con questa scoperta.

1 della certezza), l'altra è allora totalmente indecidibile". È il Principio di Indeterminazione, anzi solo una delle sue molteplici possibili forme. E non stupisce che il suo architetto, Werner Heisenberg, abbia una volta commentato: "*Penso che la fisica moderna abbia infine deciso a favore di Platone. Infatti le unità della materia non sono oggetti fisici nel senso ordinario del termine; sono forme, idee che possono essere espresse senza ambiguità solo nel linguaggio matematico*[6]. Se le parole non bastano, si ricorra alle formule. Se le formule non chiariscono, ci si rifugi allora nelle metafore. Se le metafore restano solo un compromesso, che siano perlomeno un compromesso divertente. Alla fin fine, se la natura della Meccanica Quantistica fosse stata più semplice, se il linguaggio matematico e quello ordinario fossero davvero riusciti a farci capire al volo il significato di cose visceralmente controintuitive come il Principio di Sovrapposizione, avremmo perso l'occasione di conoscere il più caratteristico protagonista della zoologia quantistica moderna: stiamo parlando, ovviamente, del Gatto di Schrödinger.

Erwin R. J. A. Schrödinger

Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger nacque il 12 Agosto 1887 a Vienna, da un piccolo industriale austriaco e una madre per metà inglese, e imparò subito a parlare le due lingue (l'inglese ed il tedesco) come fossero entrambe lingue madri, sostanzialmente senza rendersi conto di quale stesse di volta in volta usando[7]. Si rivelò subito studente brillante dai molteplici interessi, anche se i primi scritti da lui pubblicati, inclusa la tesi in fisica sperimentale per l'abilitazione, non furono ritenuti di valore eccezionale. Forse perché non trovava l'ambiente viennese sufficientemente stimolante, o più probabilmente per l'imminenza e poi per lo scoppio della guerra; o più banalmente perché dovette cambiare innumerevoli lavori per ottenere un salario sufficiente a poter sposare la donna di cui all'epoca era innamorato, Anny Bertel, o magari per tutte queste ragioni insieme, il suo rendimento scientifico iniziale non fu tale da sembrare destinato alla storia. Le sue prime pubblicazioni sulla Meccanica Quantistica sono del 1917, ma solo dopo essersi finalmente sposato e trasferito a Zurigo nel '22 comincia la sua collaborazione con Weyl[8] e Einstein, e comincia anche la produzione dei suoi contributi più importanti alla matematica e alla fisica. Nel '27 Erwin si trasferisce a Berlino, dove prende la cattedra di Fisica Teorica lasciata da Planck, e diventa un diretto collega del padre della Relatività.

Quasi a voler confermare che le relazioni tra particelle elementari non sono affatto semplici da capire, e che occorrono menti aperte per coglierne gli aspetti intricati e complessi, anche le relazioni sentimentali degli studiosi del campo apparivano abbastanza complicate. Erwin aveva un debole per la moglie di un suo collaboratore, Arthur March, pratica non particolarmente originale nell'ambiente: sua moglie Anny, a sua volta, preferiva le attenzioni di Weyl alle sue. Certo è che le "relazioni pericolose" che intrecciavano alcune tra le menti più brillanti dell'epoca non riuscivano minimamente ad essere pericolose quanto la situazione politica in Germania. In breve, rimanere nel Reich

[6] "*I think that modern physics has definitely decided in favour of Plato. In fact the smallest units of matter are not physical objects in the ordinary sense; they are forms, ideas which can be expressed unambiguously only in mathematical language.*"

[7] E se questo non vi si sorprende almeno un po', significa che non avete ancora ben chiaro cosa si intenda per Principio di Sovrapposizione.

[8] Di lui si parla in RM082.

diventò impossibile per i colleghi ebrei di Schrödinger, e lui, per quanto cattolico e "ariano", scelse di partire per l'Inghilterra: l'intolleranza verso i suoi simili per motivi religiosi o razziali gli sembrava inconcepibile. In un curioso sovrapporsi tra rigore etico (per cose fondamentali come la tolleranza razziale) e rilassato permissivismo (per i rapporti sentimentali individuali), ottenne di portarsi appresso March come assistente. Passarono poi l'estate seguente in Tirolo, e Hilde March, ormai incinta, diventa di fatto parte della famiglia estesa di Erwin. Il modo con cui lasciò Berlino non gli fu mai perdonato in Austria, e neppure la sua connivenza con scienziati ebrei.

Ad Oxford, tutto sommato, Schrödinger sembrava dovesse rimanere solo un paio di stagioni, visto che già nella primavera del 1934 l'Università di Princeton, ricettacolo di tutti i maggiori scienziati europei in fuga dalla guerra, gli offrì una cattedra e uno stipendio. E la tentazione di accettare era molta, visto il prestigio e la sicurezza che gli Stati Uniti sanno offrire; ma alla fine l'Atlantico restò invalicato. Ai molti pregi e vantaggi professionali, Princeton non era in grado di aggiungere quel minimo di tolleranza che era indispensabile al fisico viennese. Viveva con due donne, una che era ufficialmente sua moglie senza esserlo di fatto, e una che invece, pur sposata ad un altro uomo, stava per dare alla luce sua figlia. La morale accademica statunitense del 1934 non era in grado di accettare una tale situazione, e Schrödinger decise di rimanere ad Oxford. Qui i suoi complessi rapporti familiari non passarono certo inosservati, ma l'inglese concetto di privacy era già sviluppato abbastanza da rendergli tollerabile la vita sociale. Poi, è proprio mentre sta ad Oxford che scopre di aver vinto il Nobel per la Fisica del 1933. Erano quelli anni di eccezionale abbondanza, per la fisica: anni nei quali anche l'aver scritto l'Equazione Fondamentale della Meccanica Quantistica non basta per meritarsi un Nobel tutto intero. Infatti, il premio di Erwin era da condividere con una giovane promessa della fisica e della matematica moderna, a nome Paul Dirac.


Paul Adrien Maurice Dirac

Paul Adrien Maurice Dirac era nato l'otto Agosto del 1902 nell'inglesissima Bristol, ma suo padre era di origine svizzera (francese). Anche Dirac parlava correntemente due lingue[9] a casa (il francese e l'inglese), ma a differenza di Erwin era cresciuto da autentico rampollo della leggendaria educazione albionica. Fin dall'inizio, il padre lo stimolò con il rigore classico di quei tempi a dedicarsi alla matematica.

Era un giovane schivo, e la vita ne fece un carattere piuttosto difficile: il giovane Paul aveva dovuto accettare il suicidio del fratello, per cause che si possono supporre legate in qualche modo ai difficili rapporti con il padre (indizio significativo, a questo riguardo, è che Dirac interruppe ogni contatto con il genitore dopo l'evento). Per quanto la matematica fosse il suo principale interesse, studiò e si laureò in ingegneria elettrotecnica, per il desiderio di non dedicarsi all'insegnamento. Ma la sua forma mentis era così smaccatamente teorica che assai difficilmente poteva adattarsi ad un mestiere sostanzialmente applicativo. Tornò a studiare, o quantomeno a cercare di farlo, anche se Cambridge non fu particolarmente generosa in questo senso, a causa della troppo recente cittadinanza britannica del padre. Ma grazie alle sue evidenti doti riuscì a fruire d'una borsa di studio a Bristol, e da qui arrivò in breve di nuovo a

[9] Dovrebbe essere ben chiaro che, tra le molte coincidenze e somiglianze che ci sono tra Erwin e Paul (entrambi fisici matematici, entrambi mostri sacri della MQ, entrambi sostanzialmente bilingui, entrambi premi Nobel per la fisica ed entrambi nel 1933), quella che a noi piace di più e fa più comodo è che siano entrambi nati in Agosto.

Cambridge, per merito, con un posto di ricercatore. Da questi anni in poi fu completamente circondato dalla Teoria della Relatività e dalla Meccanica Quantistica, sulla quale gli fu dato da studiare il lavoro di Heisenberg. Leggenda vuole che all'improvviso, mentre passeggiava in campagna, si rese conto della possibilità di mettere in collegamento la meccanica di Hamilton, le teorie matriciali di Heisenberg e i bracket[10] poissoniani. Da quella passeggiata per lui uscì la tesi di dottorato, e per la fisica un capitolo essenziale della Meccanica Quantistica.

Dirac era entrato nella fase di maggior produttività della sua vita e cominciò a viaggiare: lavorò con Bohr a Copenhagen, interagì con Oppenheimer, visitò l'Unione Sovietica parecchie volte. Scoprì la connessione tra la meccanica quantistica e la relatività, le particelle a spin semi-intero: il lavoro che gli valse il Nobel fu anche il suo testo più celebre, pubblicato nel 1930, "I principi della Meccanica Quantistica", ancora presente praticamente sullo scaffale di ogni laureato in fisica. Nonostante una spiccata asocialità[11], si produsse in un'enorme mole di conferenze e partecipazioni a congressi negli anni successivi alla pubblicazione, e questo esporsi deve essergli costato molto, dal punto di vista caratteriale. Basti pensare che aveva inizialmente pensato di non ritirare il Premio Nobel perché temeva la pubblicità che ne sarebbe ovviamente discesa. Decise poi di andarlo a ritirare quando qualche saggio amico gli fece notare che, dal punto di vista della pubblicità, ne avrebbe avuta assai di più se avesse perseverato nell'idea di rifiutare il premio.

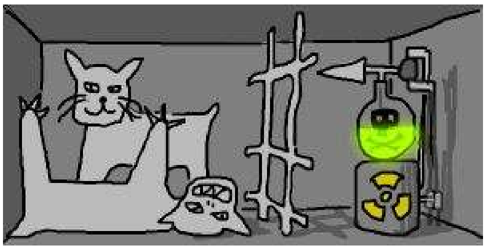
Anche se si incrociano nella serata di gala a Stoccolma, Erwin e Paul restano ancora su strade diverse; Dirac, benché solo trentenne, ha già pubblicato il suo libro principale e continua i suoi viaggi tra Russia, Londra, Cambridge e Oxford, a porre le basi per quella QED (Elettrodinamica Quantistica) che sarà poi il capolavoro di Feynman. Tra le molte tracce di sé che ha lasciato in MQ, una delle più rimarchevoli è la statistica che prende il suo nome e quello del maggior fisico italiano moderno. Così come la statistica di Bose-Einstein è riservata ai "bosoni", particelle a spin intero, quella di Fermi-Dirac è fatta per i fermioni, a spin semintero. Oltre a ciò, ebbe modo di farsi definitivamente riabilitare da Cambridge, che all'inizio si era mostrata non troppo gentile con lui: gli assegnò la più prestigiosa delle cattedre di matematica, la lucasiana che fu di Newton[12], che tenne fino al 1969.

Erwin, invece, seppur già quarantacinquenne, non ha ancora scritto il suo testo più famoso: lo pubblica nel 1935 con il titolo "Il punto della situazione sulla Meccanica Quantistica". Diviso in tre parti, tra le altre cose introduceva il famoso paradosso del gatto, da quel momento in poi e per sempre chiamato "il gatto di Schrödinger".

[10] Ancora oggi, una delle poche cose che distinguono i fisici che fanno calcoli di MQ dai matematici che talvolta fanno le stesse cose, sono i bra e i ket, una notazione vettoriale assai efficiente in MQ, inventati da PAM Dirac. "Bracket" significa "parentesi", e di fatto i bra e i ket sono ognuno "mezza parentesi": ad esempio <a| è un bra, mentre |a> è un ket. L'uso dei bra e ket è davvero efficiente, e riesce a far dimenticare il loro difetto essenziale: e cioè che, specialmente quando usati insieme ad oltre notazioni come i "kernel" (nucleo), abbreviati in "ker", e nei loro coniugati, i "co-ker", tra cocker e bracchetti sembra davvero di trovarsi nel bel mezzo d'un pensionato per cani. E di gatti dobbiamo ancora parlare…

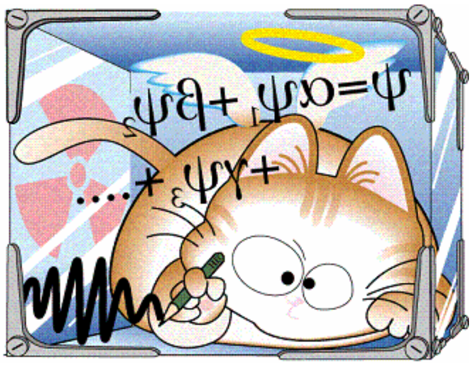
[11] Gli aneddoti sulla scarsa socialità di Dirac sono quasi infiniti, e quasi tutti basati sul fatto che parlava pochissimo e solo per affermare cose incontrovertibili. Al commensale che ad una cena gli rivolse la parola con un "Bella serata, vero?" sembra abbia risposto un laconico "Sì" solo dopo essersi alzato ed essere andato a verificare le condizioni meteorologiche alla finestra. Altri narrano che tutto il suo vocabolario di lingua "parlata" si limitasse a "Sì", "No" e "Non lo so". Il più celebre e crudele sembra comunque essere l'aneddoto che narra come, alla fine d'una lezione, dopo il classico "Ci sono domande?" uno studente abbia avuto la ventura di chiedergli "Non ho capito quel certo passaggio…", per sentirsi rispondere un glaciale "Questa non è una domanda, è un'affermazione".

[12] La stessa che adesso occupa Stephen Hawking.



Il gatto di Schrödinger

Vale la pena di dare la parola direttamente ad Erwin, per l'occasione. Gli animalisti e i gattofili – categorie nelle quali ci riconosciamo pienamente – stiano tranquilli: l'esperimento è solo teorico: "*Si rinchiuda un gatto in una scatola d'acciaio insieme con la seguente macchina infernale (che occorre proteggere dalla possibilità d'essere afferrata direttamente dal gatto): in un contatore di Geiger si trova una minuscola porzione di sostanza radioattiva, così poca che nel corso di un'ora forse uno dei suoi atomi si disintegra, ma anche in modo parimenti verisimile nessuno; se ciò succede, allora il contatore lo segnala e aziona un relais di un martelletto che rompe una fiala con del cianuro. Dopo avere lasciato indisturbato questo intero sistema per un'ora, si direbbe che il gatto è ancora vivo se nel frattempo nessun atomo si è disintegrato. La prima disintegrazione atomica lo avrebbe avvelenato. La funzione Ψ dell'intero sistema porta ad affermare che in essa il gatto vivo e il gatto morto non sono stati puri, ma miscelati con uguale peso*". Cioè il gatto è sia morto che vivo finché non si apre la scatola, quando osservando lo stato del gatto, compiendo la misurazione, l'equazione d'onda collassa su uno degli stati possibili. Lo scopo dell'invenzione della scatola e del gatto in scatola è essenzialmente solo quella di costruire un ponte per far giungere nel mondo macroscopico alcuni dei bizzarri e contro-intuitivi aspetti della Meccanica Quantistica. La funzione d'onda Ψ, regina assoluta dell'Equazione di Schrödinger, è quella che descrive il sistema quantistico.



Sempre lui: il gatto di Schrödinger[13]

Ma proprio la Ψ[14] ha la caratteristica di essere matematicamente descritta come una "sovrapposizione di stati", ognuno chiaramente leggibile dal punto di vista fisico, ma anche tra loro mutuamente esclusivi. Quest'imbarazzante attributo non è l'effetto di qualche complicato evento, ma sembra essere semplicemente una caratteristica degli enti fisici, al punto che fa il suo ingresso in Fisica non come una "legge", ma direttamente come "principio". Il Principio di Sovrapposizione, appunto. Per quello che l'Equazione di Schrödinger descrive, gli stati coesistono e si sovrappongono senza distinzione, fino al momento cruciale dell'osservazione. A questo punto, la determinazione dello stato effettivo del sistema è possibile solo se la sovrapposizione cessa, quindi se solo uno degli stati possibili "collassa" e diventa lo stato "accaduto". Già negli eventi microscopici, richiamare il Principio di Sovrapposizione è un misero placebo di fronte alla frustante situazione che generano gli esperimenti quantistici: il celeberrimo esperimento delle "due fenditure", dove si vede la luce comportarsi in maniera ondulatoria o corpuscolare a seconda della presenza o meno dell'osservatore è assolutamente esemplare, da questo punto di vista. Il ripetersi che esiste un principio di natura che rende conto della cosa non gratifica, ma almeno in parte consola.

[13] Qui sta studiando il modo per far collassare il suo stato in modo opportuno… Il GC dice che c'è qualcosa da capire anche da questa figura… il solito premio – un abbonamento per un anno a RM – al primo che capisce l'indovinello e la soluzione.

[14] Già per suo conto, a prescindere dal suo aspetto formale, la Ψ ha sollevato infinite discussioni e diatribe tra fisici e filosofi in merito al proprio significato "fisico". Il fatto che venga comunemente considerata come la funzione che, in modulo quadro, esprime la densità di probabilità di posizione della particella è in ultima analisi solo un'interpretazione (quella di Max Born), per quanto autorevole e consolidata.

Quando però il Gatto di Schrödinger si assume l'ingrato compito di "amplificare" per noi abitanti del macromondo le bizzarrie quantistiche, allora tutto assume una immanenza decisamente superiore. Non si tratta più solo di veder passare attraverso una fenditura un fotone (particella) quando ci aspettavamo invece di veder passare un'onda, ma si tratta di ritrovare un gatto vivo o un gatto morto, sapendo che la Natura attende di decidere quale "stato quantico" promuovere solo a causa della nostra apertura della scatola. Non è semplice identificarsi con un pacchetto d'onde, ma identificarsi con Silvestro è invece facilissimo.

È con questa sovrapposizione di stati "gatto vivo" e "gatto morto" che dobbiamo fare i conti. E se questo sembra già troppo distante dal senso comune, sappiate che il meglio (o il peggio) deve ancora venire. Per quanto ideale, l'esperimento del gatto di Schrödinger ha innumerevoli – e diversissime – interpretazioni. La prima (interpretazione di Copenhagen), sostenuta da Bohr e da Heisenberg, è quella che abbiamo presentato: l'atto della misurazione causa l'istantaneo collasso della funzione d'onda, scegliendo a caso uno dei possibili stati permessi dalla funzione d'onda, che cambia istantaneamente per riflettere questa scelta. Tra coloro che di questa teoria non volevano nemmeno sentir parlare c'era Einstein, che, già irritato per l'interpretazione "probabilistica" della funzione d'onda[15], commentava ironicamente "Allora sostenete che la luna non esiste quando nessuno la osserva?".

In un'altra interpretazione (cosiddetta a "Molti Mondi"), la misurazione genera una miriade di universi paralleli, uno per ogni possibile risultato dell'operazione di misura. No, non proveremo neppure a citare tutti i romanzi di fantascienza che approfittano dell'idea. Naturalmente, le conseguenze d'una tale interpretazione sono ancora più spettacolari di quelle implicate dall'interpretazione di Copenhagen. Ad esempio, si è immaginato un esperimento teorico che presuppone che un fisico decida di prendere una bomba atomica per farsela esplodere in mano. Se l'interpretazione a Molti Mondi ha senso, dovrà allora esserci almeno un universo parallelo in cui per qualche ragione il nostro sperimentatore riesce a sopravvivere; da qui il nome ad effetto dell'esperimento: "*Immortalità Quantistica*". Per *evidenti ragioni di simmetria* deve anche esistere l'esperimento duale, quello del "*Suicidio Quantistico*" (anche se, a ben vedere, si tratta solo di suicidio per modo di dire, visto che gioca spudoratamente anch'esso sulle ipotesi favorevoli del Principio di Sovrapposizione): consiste nel porre il coraggioso scienziato (o, più probabilmente, un suo collaboratore sottopagato) davanti a una pistola che può essere fatta detonare per decadimento radioattivo (sì, tale e quale alla storia del gatto nella scatola). Sempre sulla base dei "Molti Mondi", il poveretto morirà in alcuni universi, ma anche a sopravvivere ripetutamente in altri. Col che può sembrare che i fisici teorici abbiano finalmente dimostrato l'assoluta identità tra immortalità e suicidio, nonostante la gente comune tenda a vedere le due cose come ragionevolmente diverse.

È quasi certo che, arrivati fin qui, almeno due cose dovrebbero essere collassate allo stato di certezza: la prima è che, con tutto questo parlare di fisica e di gatti, vi sarà tornato in mente il complesso sistema dinamico composto dal gatto con del pane imburrato sulla schiena[16]. L'altra è che ormai le parole non bastano: anzi, forse contribuiscono ad intrecciare e complicare i significati – che sono sempre più spesso distinti nell'uso tecnico

[15] Da cui quella che è forse la sua citazione più famosa: "Dio non gioca a dadi".

[16] Si prenda un gatto e gli si assicuri sulla schiena una fetta di pane ben imburrato, in modo che il lato asciutto del pane sia a contatto con la schiena del gatto e il lato imburrato libero verso l'alto, sul suo dorso. Si sollevi il gatto ad apprezzabile altezza, indi lo si lasci precipitare al suolo. La nota legge biodinamica ("i gatti cadono sempre in piedi") è controbilanciata dalla non meno nota e altrettanto infallibile legge empirica ("le fette di pane imburrato cadono sempre dalla parte imburrata"). Ne consegue ineluttabilmente che si genererà una rotazione perpetua generata dalla coppia, e sarà talmente energetica da ricondursi concettualmente ad un meccanismo antigravitazionale, dacché il sistema gatto-pane rimarrà a mezz'aria senza collassare in nessuno stato definito. Particolarmente indicati per l'esperimento antigravità sembrano essere i gatti trovati ancora vivi (ovvero quelli in cui è stato lo stato "Gatto Vivo" a collassare) dopo l'apertura della scatola dell'esperimento avvelenante di Schrödinger.

e nell'uso comune – e quel che è peggio, forse non basta più neanche la matematica. O forse la matematica fa ancora bene il suo mestiere, ma siamo noi che non riusciamo a leggerla. Diceva Feynman[17]: "*Ci fu un tempo, dicono i giornali, in cui solo dodici uomini comprendevano la Teoria della Relatività. Io non credo che questo tempo ci sia mai stato. D'altra parte, penso che si possa affermare con sicurezza che nessuno comprenda la Meccanica Quantistica.*"

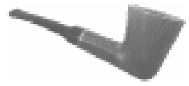
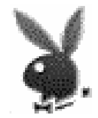
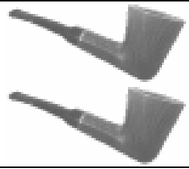
Wassily Kandinsky, On White II

La radice di due di Pitagora e i graffiti di Lascaux non erano *per niente* semplici. Per quegli uomini era più difficile riconoscere la preda nei segni della parete di quanto sia per noi, oggi, riconoscere l'intenzione rappresentativa del genio di Kandisky. Per Pitagora era molto più devastante assorbire la non commensurabilità di ciò che era stato creato esclusivamente per commensurare, di quanto possa essere complicato per noi accettare l'idea di essere una complicata sovrapposizione di stati, alcuni dei quali sono "vivo", "morto", "triste", "felice", sempre che queste caratteristiche possano sempre essere ricondotte ad uno stato quantico.

E in tutto questo c'è qualcosa di profondamente consolatorio. Diceva Dirac "*…se si parte dal presupposto di ottenere la bellezza nelle proprie equazioni, e se uno ha una buona intuizione, si è di sicuro in una direzione che porta al progresso. Se non c'è perfetto accordo tra l'esperimento ed il lavoro ottenuto non bisogna lasciarsi scoraggiare, perché la differenza può essere dovuta a minuzie che non sono state incluse nel calcolo e che sicuramente verranno prese in considerazione nei prossimi sviluppi della teoria*". La bellezza di una formula matematica era tutto, per Dirac. Era la sua guida. E certo vedeva bellezza nelle complicate equazioni della fisica del Novecento. Come Kandisky, che, anche senza dover ripercorrere tutta l'arte a partire dalle caverne, riesce a comunicarci il bello nelle sue tele. Certo, noi non capiamo del tutto le sue opere, siamo ancora un po' come gli amici del pittore di Lascaux: intuiamo la bellezza, ma siamo ancora distanti dal viverla per intero. Come Schrödinger e Dirac, che anche senza ripartire dalla radice di due riescono a comunicarci un po' del fascino delle loro equazioni e dei loro misteriosissimi significati, anche se fatichiamo a comprenderne del tutto l'essenza. Ma siamo bravi cavernicoli, e bravi spettatori: e ci contentiamo di quella poca bellezza che riusciamo a vedere.

[17] L'abbiamo già citato, ma vale la pena ricordare di lui un'altra frase famosa: "La fisica è come il sesso: di sicuro ha dei risultati pratici, ma non è questo il motivo per cui la pratichiamo".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Alinghi			
Parlando del cugino...			

2.1 Alinghi

La nostra Redazione Estera ha seguito le varie fasi della Coppa America con insolita passione; infatti, a un paio di domande del Capo (per l'organizzazione di questo problema) ha risposto snocciolando una serie di notizie tanto impressionante quanto interessante, tra le quali spiccava il fatto che il nome deriva dalla prima barca che ha partecipato; resta il dubbio se l'"America" fosse uno schooner o una goletta, ma sopravviveremo tranquillamente a questa lacuna (almeno sin quando non scopriremo la differenza tra i due).

Va detto che la parte restante della Redazione era più che altro perplessa; il fatto che un paese di cui non si ricordano sbocchi sul mare neanche compulsando i libri di storia vinca la coppa più prestigiosa della vela marina "fa strano". Rudy (sempre pronto a tirare in ballo qualche aneddoto di famiglia) si è limitato a ricordare che suo cugino una decina di anni fa partecipò al Giro d'Italia a vela.

"E cosa c'entra con la Svizzera?"

"Il suo sponsor era lo Sci Club Cervinia".

Tra le varie notizie fornite, l'affermazione che la gara era "al meglio delle nove regate", ossia:

1. Ad ogni regata vince sempre uno dei due
2. Chi vince cinque regate ha vinto la gara.

Il che gli ha ricordato un problema semplice ma simpatico: supponiamo che la probabilità di Alinghi di vincere una regata sia p (costante); a questo punto, ci chiediamo quale sia la probabilità per i mangiatori di *röstli* di vincere l'intero torneo; non solo, ma a quante regate (vento permettendo) vi aspettate di assistere, posto che la cosa vi interessi?

Soddisferemo infine la vostra insana curiosità dicendovi che il team al quale apparteneva il cugino di Rudy è arrivato ultimo: gli altri concorrenti li avevano soprannominati "i montanari".

2.2 Parlando del cugino...

...a Rudy è venuto in mente un grazioso problema; infatti, il suddetto cugino aveva acquistato, tempo fa, uno di quei ridicoli orologi che vanno in senso *antiorario*; non solo, ma questo aggeggio aveva solo dei puntini sui numeri e le due lancette erano perfettamente identiche tra di loro; chi sapeva il trucco di solito piuttosto che rischiare il mal di testa preferiva andare a guardare l'orologio nell'altra stanza *[Rudy, dopo tanti anni posso dirtelo. Sul muro di fronte c'era lo specchio di mia sorella (Il Cugino di Rudy)].*

Ora, partendo dalla ormai consunta battuta (di Mark Twain? Non ricordiamo) che un orologio fermo segna l'ora esatta due volte al giorno, quante volte al giorno l'orologio "antiorario" segna l'ora esatta (non nello specchio! In genere... oh, insomma, avete capito)?

...E se vi sembra facile, rileggetevi il problema.

3. Typo da Spiaggia

...nel senso che, essendo agosto, vorremmo proporvi un succedaneo alla ormai consunta (nel senso che ormai avete finito tutti i giochi) "Settimana Enigmistica", da portarvi in spiaggia ma che non richieda un eccessivo lavorio matematico, essendo qui privilegiata la ricerca tranquilla rispetto al ragionamento forsennato. Ve ne proponiamo tre nel seguito, Rudy ritiene si tratti di una valida alternativa al sudoku, ma non fatela diventare un'abitudine.

E "typo" nel senso che, se ci scappa un errore tipografico, sono guai grossi.

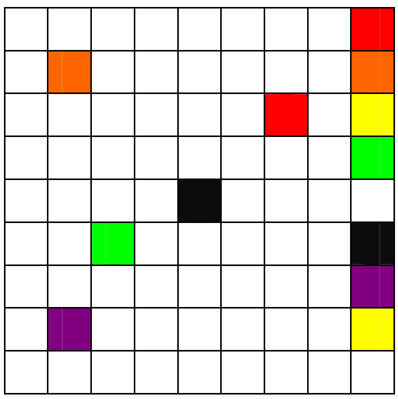
3.1 Prima ci disegnamo sopra...

Abbiamo diviso la scacchiera da dama (internazionale) in una serie di rettangoli secondo le righe che delimitano i quadrati; all'interno di ogni rettangolo scriviamo la sua area (in quadrati di scacchiera), e poi cancelliamo i bordi dei rettangoli. A voi ricostruirli, considerato che "A" significa "10".

					A				
6									
			4				6		6
	2	4						2	
						A			
					2				
		8		4				9	
						4			
			6						6
5				6					

3.2 ...poi la verniciamo...

Qui, a parte ridurre la scacchiera a una riga e una colonna in meno, siamo partiti con sei colori avanzati dalla ristrutturazione della casa di Rudy (no, non sono proprio quelli, ma l'importante è che si tratta di sei colori distinguibili tra loro); ogni casella è colorata, e i quadretti dello stesso colore sono connessi attraverso (almeno) un lato. Siccome a forza di ridipingere muri ci fa male la spalla, ve ne abbiamo verniciato solo qualcuno; siete pregati di finire il mural, grazie...



3.3 ...e quindi ci cade in acqua.

La nostra malridotta scacchiera, in questo ultimo passaggio, oltre a perdere un'ulteriore riga e colonna (quindi ormai va bene per giocarci a scacchi) ci finisce pure a mollo. Adesso, infatti, viene a rappresentare la mappa di un lago con ***ventun*** isolette, ciascuna della superficie di un quadrato.

Le isole sono collegate tra di loro da alcuni ponti; i ponti collegano sempre due e solo due isole tra di loro, sono paralleli ai bordi delle caselle, non si intersecano mai tra di loro e (altrimenti le vostre ferie sarebbero troppo corte) possono esserci più ponti che collegano la medesima coppia di isole.

Il numero di ponti partenti da ogni isola è indicato all'interno della casella rappresentante l'isola; riuscite a ricostruire i ponti?

	4			5			4
2			2			4	
		3			2		
	1		3			5	
4		2		1			
	2		4				
				3		3	
2			3				3

E, come dicevo da piccolo: "Salvagente a paperella, liquido antisqualo... sì, c'è tutto!"

4. Bungee Jumpers

Provate che se i numeri positivi α e β hanno la proprietà che negli insiemi

$$[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\ldots;\quad [\beta],[2\beta],[3\beta],\ldots$$

ogni numero naturale appare esattamente una volta, allora α e β sono numeri irrazionali per cui $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$. Inversamente, se α e β sono numeri irrazionali per cui $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, allora ogni naturale N appare esattamente una volta nella sequenza $[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\ldots;\quad [\beta],[2\beta],[3\beta],\ldots$.

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

Beh, qui bisogna mettersi subito d'accordo.

Quello che state leggendo è il numero di Agosto, lo ricordate? E se state leggendo il numero d'Agosto, vuol dire che adesso siete in vacanza. Oppure che eravate in vacanza quando qualche tapino della redazione scriveva solerte queste "Soluzioni & Note". Oppure che state per andare in vacanza, e di questo numero di RM in fondo ve ne cala pochissimo, perché non ce la fate più ad aspettare. Oppure che siete furibondi perché quest'anno le vacanze non potete farle. Insomma, come la si mette la si mette: la parola chiave di questo periodo è pur sempre "vacanze", qualunque sia il modo con il quale voi abbiate deciso di coniugarla.

Da parte nostra – ovvero, tanto per ricordarlo, da parte della Solerte Redazione della Prestigiosa Rivista Italiana di Matematica Ricreativa – questo periodo è passato con un terzo della Redazione a far finta di fare sette giorni di vacanza quando invece erano solo sette giorni di catalessi ricostituente post-trasloco, un altro terzo a far finta di fare una decina di giorni di vacanza al natio borgo selvaggio mentre invece era una maratona dissanguante ad uso matrimonio in famiglia, e l'ultimo terzo impegnatissimo nel countdown dei giorni che mancavano alle ferie a causa d'un feroce soprassalto aggressivo degli ultimi giorni lavorativi. Insomma, un meriggiare pallido e assorto, quando non proprio devastato.

Del resto, se in un solo paragrafo si citano ben due versi diversi di diversi versatori, è ovvio che di vacanze ce ne sia un gran bisogno, a queste latitudini. Anche perché, come se non bastasse l'impegno quotidiano della professione e quello quotidianissimo di RM, Alice si è proclamata dittatrice quel tanto che è bastato per mettere in atto il restyling del sito. E se non avete idea di cosa voglia dire questo, beh, provate a chiederlo agli due tapini della Redazione… anzi, no, meglio: chiedetelo a Yan, che aveva l'ingrato compito di tradurre in html le vibrazioni creative della treccia di Treccia. O, quantomeno, prendetevi l'onere di fare un giro su www.rudimathematici.com, e poi scrivetele che è stata bravissima. Niente critiche, per favore, perché se arrivano a farne le spese saremo noi.

Poi, tanto per scrupolo… Il compleanno del mese scorso era in parte incentrato sul concetto di informazione, e sul fatto che l'eccesso di informazione non filtrata rischia di essere un problema nell'acquisizione delle conoscenze. Per farlo, si è cercato di adottare uno stile un po' provocatorio, scrivendo le prime pagine dell'articolo come avrebbe potuto scriverle un ipotetico negatore dello sbarco sulla Luna del Luglio 1969. Forse non siamo stati abbastanza bravi da far cogliere la cosa, ma l'idea era proprio quella di far vedere come possano facilmente allignare, in una rete stracarica di informazioni e per natura priva di contraddittorio diretto, anche convinzioni errate. Insomma, noi, allo sbarco sulla Luna, ci crediamo. E se adesso dovremo subire le lettere di chi invece non ci crede, amen…

A questo punto, sempre che vi sia ben chiaro che abbiamo pochissima voglia di lavorare, direi che si può passare alla prima parte del titolo del capitolo (a proposito, ma secondo voi, perché le "Soluzioni e Note" sono sempre scritte come se fossero le "Note e Soluzioni"?)

5.1 [101]

5.1.1 Il contrario d'un vecchio problema

Di questo problema e delle sue soluzioni vi abbiamo già informato nel numero scorso. Se ne riparliamo non è per tornare a discutere in merito a calcoli e metodi risolutivi, ma per questioni di deontologia, dimostrazioni di correttezza ed esempi di civiltà formale. Il fatto è che, se una Redazione affranta dal caldo sbaglia nell'attribuire una brillante soluzione, assegnandola a Tizio quand'invece essa è frutto maturo del genio alacre di Caio, cosa si può attendere la suddetta Redazione? Ovviamente una valanga di improperi da parte di Caio, ingiustamente defraudato Ma questo succede nelle riviste normali, che hanno lettori e solutori normali: non su RM.

Infatti, poco tempo dopo l'"errore di attribuzione noi riceviamo invero una mail da parte di Caio – anzi no, diamine, è tempo di uscire di metafora: da parte di ***Michele***; ma il fatto è che la sua breve mail è sostanzialmente una lettera di complimenti alla rivista e ai suoi solutori (segnatamente al ***Cid***, per la sua brillante analisi), che solo nel post-scriptum, quasi per accidente e con una delicatezza propria dei gentiluomini, ci fa notare che eravamo occorsi in un errore di attribuzione. Non abbiamo fatto in tempo neppure a lanciare libere per l'aere il giusto numero di "perdindirindina", che ci arriva un'altra mail stavolta di Tizio – cioè di ***Trekker*** – che con pari delicatezza e solerzia ci informa che no, diamine, quella bella soluzione di cui andrebbe fiero non è la sua, cavolo.

Beh, che dire? La soluzione è di ***Michele, Trekker*** è stato forse stimolato da questo a produrre altre meritevolissime cose (ma di questo parleremo fra poco), ed entrambi si sono mostrati d'una correttezza encomiabile. Roba che ci viene voglia di sbagliare di nuovo, e di farlo apposta, magari…

5.2 [102]

5.2.1 Pagina 46

Beh, prima ancora delle Soluzioni di RM102, è bene parlare delle "correzioni". ***Luigi*** ci segnala – e si merita perciò il nostro ringraziamento – che nella "Pagina 46", a pagina 20, siamo incorsi in ben due refusi:

> "…la soluzione 2025 per a_0=2 non è corretta, poiché 2425/225=10.77777. Il numero corretto è 2475, infatti 2475/275=9"

E poi (ma a ben vedere non è un refuso, è una mancanza):

> "Per a_0=7 esiste anche la soluzione 70875, infatti 70875/7875=9"

5.2.2 Botte da Orbi

Una delle cose più divertenti di questo problema è che, pur avendo già di per sé un nome tutt'altro che accademico, ha subito negli scambi epistolari una sorta di mutazione, fino a diventare il problema "dei paraventi". Se pensate che dietro tutto ciò ci sia una velata intenzione di usare il termine "paraventi" in una accezione non propriamente mobiliare ma piuttosto (nel senso centroitalico del termine) affettuosamente di giudizio, beh, che dirvi? Avete ragione (nota di merito a ***FraPao***, primo ad usare il termine nel senso suddetto).

Chi si è paraventaticamente paraventato coi paraventi? Un bel po' di gente: ***PuntoMauPunto***, ***FraPao*** (imperlappunto), l'immarcescibile ***Cid***, ***Fausto***, ***Luigi*** (lo stesso del paragrafo precedente), ***Trekker***, ***Socram*** e ***Val316***. Proprio a quest'ultimo concediamo l'onore di aprire le danze:

> Quando ho letto per la prima volta il testo del problema proposto mi son venute in mente tante associazioni che mi hanno fatto sorridere. Mi sembrava di vedere Alberto come un novello Moretti (il regista) intento, in Palombella Rossa, a decidere dove indirizzare la palla per battere il roccioso portiere ungherese:
>
> "A sinistra, a sinistra, devo puntare a sinistra…" E immancabilmente l'avrebbe lanciata a destra tra le braccia dell'avversario. Oppure Fred con in braccio il famoso gatto di Schrödinger[18] e qualche fisico serioso ad elucubrare sullo stato asciutto+bagnato prima dell'annuncio (apertura della scatola) della posizione effettiva (misurazione_doccia). Allora mi son deciso di presentare una soluzione. La prima difficoltà in cui mi son imbattuto è stata quella di decidere cosa come si potesse definire una strategia ottimale per un gioco di questo tipo…
>
> Non ho trovato di meglio che assegnare ai due Validi Assistenti una strategia puramente probabilistica escludendo qualsiasi riferimento ad ogni intersoggettività. Questo ci garantisce di poter adottare tecniche note, il che è sempre un bene: possiamo sfruttare l'onesto lavoro degli altri! (parafrasando Russell a proposito del metodo assiomatico…)
>
> Dicesi catena di Markov un processo stocastico in cui la probabilità di un sistema di trovarsi in un certo stato in un certo "istante" dipende esclusivamente dallo stato del sistema ad un "istante" strettamente precedente ed in piu' omogeneo se la suddetta probabilità e' invariante per traslazione "temporale".

[18] Dal che si dimostra che i lettori di RM (compresi quelli appena arrivati) posseggono grandiose capacità divinatorie. Val316 non poteva certo sapere che avremmo parlato del celebre felino in questo numero di RM e, da parte nostra, avevamo già completato (per una volta!) il compleanno che ne parla, quando è arrivata la sua mail.

Quindi adottando una strategia puramente casuale Alberto e Fred si comportano guidati da due catene di Markov omologhe. Per chi dei due cerca l'effetto doccia risulteranno favorevoli gli istanti in cui le due catene si incontrano, per chi cerca di evitarlo risulteranno vincenti gli istanti in cui non s'incontreranno.

Indichiamo con $X : \mathrm{N} \to \{0,1,2\}$ il processo stocastico tipo per il problema. Sia P la matrice di transizione della catena. Allora possiamo scrivere:

$$P(X(n) = i \,/\, X(n-1) = j) = (P)_{ij} = p_{ij} \text{ per i,j =0,1,2}$$

in cui

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

I valori di matrice sono ricavati semplicemente dai vincoli imposti.

Se dichiaro di essere nel paravento 0 o 2, posso con eguale probabilità rimanere dove sono o spostarmi al centro. Se mi trovo al centro posso andare ovunque (sorprendente metafora politica!).

Poiché il comportamento asintotico ci è fornito dalle potenze successive della matrice P, tutto sta ora a determinare in forma chiusa la matrice P^n. Per far questo cerchiamo di scrivere P in forma normale

$$P = T D\, T^{-1}$$

con D matrice diagonale, di modo che

$$P^n = T D^n\, T^{-1}$$

Senza dilungarci troppo nei calcoli, scrivo di sotto il risultato della trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(-1)^n}{6^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

Oppure, evidenziando gli infinitesimi:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{2^n}\right) & \frac{3}{7}+o\left(\frac{1}{6^n}\right) & \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{6^n}\right) & \frac{3}{7}+o\left(\frac{1}{6^n}\right) & \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{6^n}\right) \\ \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{2^n}\right) & \frac{3}{7}+o\left(\frac{1}{6^n}\right) & \frac{2}{7}+o\left(\frac{1}{2^n}\right) \end{pmatrix}$$

Alla fine otteniamo la matrice di transizione asintotica:

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^\infty = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Per Fred possiamo dire che asintoticamente la probabilità che si trovi dietro il paravento i è:

$$P(X_F(\infty)=i)=\frac{2}{7}P(X_F(0)=0)+\frac{3}{7}P(X_F(0)=1)+\frac{2}{7}P(X_F(0)=2) \quad per\ \ i=0,1,2$$

E analogamente per Alberto:

$$P(X_A(\infty)=i)=\frac{2}{7}P(X_A(0)=0)+\frac{3}{7}P(X_A(0)=1)+\frac{2}{7}P(X_A(0)=2) \quad per\ \ i=0,1,2$$

Per cui la probabilità che Alberto "freddi" Fred

$$\begin{aligned} P_{AF} &= P(X_F(\infty)=0)P(X_A(\infty)=0)+P(X_F(\infty)=1)P(X_A(\infty)=1)+P(X_F(\infty)=2)P(X_A(\infty)=2) \\ &= 3P(X_F(\infty)=0)P(X_A(\infty)=0) \end{aligned}$$

Se Fred dichiara di essere all'inizio dietro il paravento 0 o 2

$$P(X_F(0)=0)\vee P(X_F(0)=2)\Rightarrow P_{AF} = 3\frac{2}{7}\frac{2}{7}=\frac{12}{49}$$

Se Fred dichiara di essere all'inizio dietro il paravento 1

$$P(X_F(0)=1)\Rightarrow P_{AF} = 3\frac{3}{7}\frac{3}{7}=\frac{27}{49}$$

Per il secondo quesito le probabilità sono le stesse. In una strategia probabilistica c'è poco da decidere se voler prendere o mancare.

E se sotto l'ombrellone sentivate la mancanze di matrici a di Markov, con questo dovreste essere serviti…

Poco più sopra, anticipavamo che ***Trekker*** deve in qualche modo essere rimasto colpito dal vedersi attribuire i meriti della soluzione di Michele, perché questo mese si è prodotto in accurate mail risolutorie. Relativamente ai paraventi, ecco cosa ci scrive:

In base alle regole del gioco se Fred dichiarasse di essere nascosto:

- dal paravento 0: allora potrebbe, nel turno successivo, e con probabilità pari a 1/2, restare dietro il medesimo paravento o spostarsi al paravento 1;

- dal paravento 1: allora potrebbe, nel turno successivo, e con probabilità pari a 1/3, restare dietro il medesimo paravento o spostarsi indifferentemente al paravento 0 o 2;
- dal paravento 2: allora potrebbe, nel turno successivo, e con probabilità pari a 1/2, restare dietro il medesimo paravento o spostarsi al paravento 1.

Le condizioni delle regole del gioco si possono sintetizzare con questo grafo:

Indicando con $P_0(t)$, $P_1(t)$ e $P_2(t)$ le probabilità che Fred al tempo t (con t intero positivo) sia nascosto rispettivamente dai paraventi 0, 1 e 2, ed assumendo (e questo è irrilevante ai fini del caso richiesto di "gioco che va avanti a lungo") che inizialmente sia il paravento 0 a nascondere Fred, possiamo scrivere, in base alle osservazioni precedenti, il seguente sistema di equazioni:

$$P_0(t+1) = \frac{1}{2}P_0(t) + \frac{1}{3}P_1(t)$$

$$P_1(t+1) = \frac{1}{2}P_0(t) + \frac{1}{3}P_1(t) + \frac{1}{2}P_2(t)$$

$$P_2(t+1) = \frac{1}{3}P_1(t) + \frac{1}{2}P_2(t)$$

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1$$

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0$$

Poiché siamo interessati alla condizione $\overline{P}_0, \overline{P}_1, \overline{P}_2$ asintotica di equilibrio (="gioco che va avanti a lungo") , basta risolvere il sistema:

$$\overline{P}_0 = \frac{1}{2}\overline{P}_0 + \frac{1}{3}\overline{P}_1$$

$$\overline{P}_1 = \frac{1}{2}\overline{P}_0 + \frac{1}{3}\overline{P}_1 + \frac{1}{2}\overline{P}_2$$

$$\overline{P}_2 = \frac{1}{3}\overline{P}_1 + \frac{1}{2}\overline{P}_2$$

$$\overline{P}_0 + \overline{P}_1 + \overline{P}_2 = 1$$

la cui soluzione, come si verifica facilmente, è: $\overline{P}_0 = \frac{2}{7};\ \overline{P}_1 = \frac{3}{7}; \overline{P}_2 = \frac{2}{7};$

La probabilità P(colpito) che Alberto colpisca Fred si può scomporre in questo modo:

$$\sum_{i=0,1,2} P(colpito\,/\,Fred\;era\;dietro\;i)\cdot\overline{P}_i = \frac{1}{2}\cdot\overline{P}_0 + \frac{1}{3}\cdot\overline{P}_1 + \frac{1}{2}\overline{P}_2 = \frac{3}{7}$$

> dove con $P(colpito / Fred\, era\, dietro\, i)$ si intende la probabilità che Alberto colpisca Fred sapendo che Fred ha dichiarato nel turno precedente di essere nascosto dal paravento i. Poiché Fred ed Alberto giocano con le medesime regole, la loro probabilità di essere bagnati è la medesima (cioè 3/7) - o viceversa la probabilità di non esserlo è 1-3/7=4/7 -.

Nonostante il solleone che vi picchia sulla testa, avrete avuto modo di notare come le due soluzioni pubblicate abbiano risultati non coincidenti. Questo dovrebbe farvi pensare; ad esempio potreste pensare che siamo abbastanza perfidi da volervi costringere ad optare per l'una o per l'altra soluzione proposte, e quindi continuare a pensare al problema, perché noi, nella nostra somma generosità, vogliamo farvi risparmiare i soldi che di solito spendete per le riviste di enigmistica. Oppure, potreste pensare che siamo noi troppo pigri per decidere chi abbia ragione, e lasciamo l'incarico al quel gigantesco Italico Bourbaki composto dall'insieme degli RMers. Scegliete voi la versione che più vi aggrada: nel frattempo, sappiate però che, tra le altre soluzioni ricevute, abbiamo avuto anche dichiarati risultati pari a ½, 1/3, 4/9, ¼, 8/9, et cetera. No, vabbè, in realtà, messa in questa maniera sembra che la soluzione sia ancora lontanissima e confusa, e a dire il vero le cose non stanno così. Molti dei valori sono argomentati e specifici; ma ciò non toglie che, se avete tempo da perdere in spiaggia, potreste indagare sui pregi e sui difetti dei due approcci.

5.2.3 È arrivata la Pagaia?

Potremmo crudelmente iniziare la disamina di questo problema come facevano i burberi professori di una volta: ovvero entrando in aula con l'aria ingrugnita, guardando solo verso la cattedra e non degnando d'uno sguardo la classe, lanciando con precisione millimetrica il fascio dei fogli protocollo piegati a metà sul ripiano e sedendosi con palese sufficienza. Un minuto buono di silenzio greve e assoluto, fino allo sbotto finale: "Non c'è stato nessuno in grado di risolvere il punto principale!".

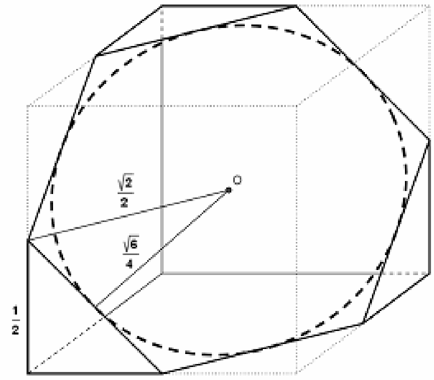
Questo dicevano, i professori d'una volta. E questo diciamo noi, parimenti sdegnati. Diamine, sono arrivate una pletora di soluzioni, e manco uno che si sia degnato di indovinare la citazione cinematografica! Ma vi pare possibile? Ah, che disperazione!

Per quanto riguarda il problema in sé, invece, non possiamo davvero lamentarci. L'ingrato compito d'incastrare un hula-hoop in una scatola è il tipo di lavoretto che colpisce la fantasia del maschio italiano, specie se ciò gli dà l'occasione di evitare altri lavoretti meno intellettualmente gratificanti, come ad esempio spostare per cinque piani di scale il frigorifero da duemila litri. Tra gli altri, abbiamo ricevuto dettagliate istruzioni sull'impacchettamento dei cerchi da parte di ***Socram, Franco, Trekker, Cid, FraPao, Fausto, Ftsoft, El Filibustero, il Panurgo, Zar, PuntoMauPunto***, e se ce ne erano altri ce li siamo persi per strada per crisi di crescenza.

Il problema diventa adesso a chi dare la parola… il fatto è che quasi tutti hanno, manco si fossero passati la notizia in segreto, parificato l'hula-hoop all'esagono che lo circoscrive, e quindi – dotati di ferrea memoria – fatto il dovuto riferimento al celebre problema dell'Iper-Kiai, che a suo tempo ebbe larga fama su queste colonne. Ad esempio, ***Zar*** liquida il tutto con una prosa degna dei grandi e una buona fiducia sulla "bontà" degli esagoni:

> Il problema ricorda quello dell'iper-kiai, in RM084. Allora si dimostrò che è possibile tagliare un cubo in modo da ottenere un esagono regolare. Ora andiamo avanti: se si deve iscrivere un cerchio dentro a un poligono, è bene che il poligono sia regolare, se si vuole che il cerchio sia grosso. Se poi si deve scegliere il tipo di poligono, è bene ricordare che più lati ci sono, più grande è il cerchio. Quindi l'esagono regolare inscritto nel cubo è un Buon Poligono, ai fini del nostro problema. Se il cubo ha lato 1, l'esagono ha lato $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e apotema pari a $\frac{\sqrt{6}}{4}$. L'apotema

> dell'esagono è proprio il raggio del cerchio cercato. Si noti che il cerchio in questione è tangente a *tutte* le facce del cubo, e questo fatto ci conforta, anche se non è una vera dimostrazione del fatto che il cerchio è effettivamente il più grande possibile.



Non c'è che dire: il rigore esaustivo forse è assente, ma quell'approccio "di confidenza" col problema, quel suo familiare "ci conforta" riferito al fatto che tutte le facce del cubo sono tangenti al cerchio, mostrano una certa classe, quasi da gentleman inglese della matematica. Senza chiamare in causa il concetto (che noi troviamo delizioso) di "buon poligono", anche ***PuntoMauPunto***, ***il Panurgo, El Filibustero*** e ***Franco*** giungono esattamente alla stessa conclusione. La figura di repertorio, qui a lato ce l'ha offerta ***il Panurgo***.

Nelle altre risposte, la soluzione è stata talvolta accompagnata da acute osservazioni di problem solving e di dura vita quotidiana. Ci piace ad esempio riportare l'osservazione pertinente di ***Socram***, che fa un preambolo interessante:

> Il problema presenta una soluzione ovvia e abbastanza semplice, i termini del problema non ci dicono che l'hula-hoop deve essere conservato intero, lo si potrebbe tagliare in tanti pezzettini e farlo entrare in qualunque scatola cubica, al limite i pezzettini potrebbero essere infinitamente piccoli e quindi in una scatola di qualsiasi dimensione (con lato del cubo di qualsiasi lunghezza) ci entra un hula-hoop di circonferenza infinita.

Esiste sempre un problema di fondo, nelle dematematizzazioni (che non si ricorda il significato della parola, vada in castigo) e ***Socram*** lo ha ben evidenziato. I poveri autori devono, per forza devono, usare dei congegni fisici per sceneggiare l'ambientazione di un problema, e quindi diventa necessario parlare di traslochi, scatole cubiche di cartone e hula-hoop, invece che di puri cubi e immacolati cerchi euclidei: solo che poi bisogna anche ricordarsi di mettere gli opportuni vincoli fisici, sennò il primo Socram che passa ci fa legittimamente a fettine l'avatar del nostro cerchio euclideo…

Sul medesimo fronte, ecco alcune osservazioni di ***Fausto*** (anche lui si è lasciato ben guidare dall'esagono incubato), che trascendono la pura geometria:

> sono stato "beccato" da un amico mentre scarabocchiavo quadrati e circonferenze, mi ha chiesto spiegazioni, gli ho descritto il problema e lui mi ha risposto "SEMPLICE, BASTA METTERLO PER STORTO". Non sopporto neanche il tema, infatti l'ovvia realtà è che quando si incrocia l'h.h., lo si butta nella spazzatura di nascosto dalla moglie (o dalla figlia) insieme a tutte quelle altre tonnellate di cose che non si sono buttate prima, rammaricandosi di non averlo già fatto (ovviamente anche le altre cose da buttare sono della moglie o della figlia, dò per scontato che le NOSTRE sono tutte assolutamente indispensabili). Questo mi porta a chiedermi, dato per scontato che almeno qualcosa lo si butta, perché, dopo il trasloco, avendo meno oggetti di quelli di partenza, essi non entrano più nello stesso armadio? Scommetto che questo non lo risolve nessuno.

In effetti, bisogna riconoscere che il problema ha la sua giusta ragion d'essere. Anche a costo di passare per gente che non sa distinguere un armadio da una libreria, suggeriamo qui un metodo banale e a basso costo per risolvere la medesima situazione nel caso di trasporto di libri e librerie: fotografatele. Adesso che le foto non richiedono l'intevento del fotografo che sviluppa e stampa, le si può usare come i kleenex, usandole finchè servono e poi buttandole via ad uso terminato. E avere una bella foto della libreria "prima" del trasloco in bella vista sul pc quando la stessa è desolantemente vuota in mezzo ad una marea di libri a terra, può essere davvero consolatorio.

Ma eravamo sempre rimasti con una pagaia, anzi con un hula-hoop, da impacchettare. ***FraPao***, controcorrente, ritiene che il quadrato sia più "buon poligono" dell'esagono, e il bello è che, al momento, anche se l'esagono ha riscosso più favori popolari, non siamo ancora arrivati a vedere una dimostrazione rigorosa della superiorità esagonale (o no?).

Comunque, controcorrente per controcorrente, anche ***Cid*** non si allinea. Questo è quel che ci scrive:

> Il più grande Hula Hoop che può stare dentro un cubo deve avere un raggio pari a: $\sqrt{\frac{3}{8}}$ il lato del cubo.
>
> Cominciamo per via empirica.
>
> Per trovare la più grande circonferenza che possa essere inscritta in un cubo, si può procedere nel seguente modo: si prende una moneta e la si inserisce in una scatola cubica aperta inserendola tra due spigoli opposti; arrivati a toccare il fondo della scatola, se la moneta è più alta della scatola, si comincia ad inclinare la moneta per riuscire a chiudere la scatola. A questo punto è facile dedurre (per evidenti ragioni di simmetria) che la più grande moneta che si riesce ad inserire è quella che, oltre a toccare il fondo della scatola e le quattro pareti laterali, è tangente anche al coperchio della scatola. Quindi, la più grande circonferenza che si può inscrivere in un cubo è quella che risulta tangente a tutte e sei le facce del cubo. Giunti a questo punto, risulta utile sfruttare la soluzione del problema Iper-KIAI di RM84, e considerare quindi la circonferenza inscritta nell'esagono che si ottiene appendendo il cubo per un vertice e tagliandolo lungo un piano orizzontale passante per il centro del cubo[19]. (In quanto tale circonferenza risulterà tangente a tutte e sei le facce del cubo).Prendo ora come unità di misura il lato del cubo, per cui il lato del cubo è uguale a 1.
>
> Dalla soluzione di Iper-KIAI so che l'esagono avrà allora lato uguale a $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Quindi il raggio della circonferenza inscritta è (per il teorema di Pitagora):
>
> $$\sqrt{\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}=\sqrt{\frac{3}{8}}$$
>
> A proposito, mi è giunta recentemente voce che il Gran Capo abbia partecipato lo scorso autunno ad un Grand Tour interplanetario[20] (giro turistico dei pianeti del Sistema Solare); ed ho anche saputo che nel realizzare i lavori di trasloco si è accorto che gli era rimasto in casa il pallone che i figli del Capitano Grant (no, mi pare che il Capitano si chiamasse Scott) avevano prestato a Fred ed Alberto.
>
> Naturalmente, per poterlo restituire al Capitano Scott deve spedirlo via posta interplanetaria ed immagino sappiate che le norme relative alle spedizioni postali nel sistema solare prevedono l'uso di pacchi a forma di ipercubo (a 4 dimensioni)[21].

[19] Visto? Questa è quasi la fine di RM… i buoni e affezionati solutori (prima ***Zar***, ora ***Cid***, e altri ancora…) si ricordano *tutti* i problemi pubblicati, e a noi non resta che scappare in Papuasia.

[20] Per coloro ancora sufficientemente innocenti da non cogliere il riferimento: Cid sta riferendosi ad un problema presentato su Coelum, rivista d'astronomia, con la quale collaboriamo. Il riferimento è al numero 100 di Coelum, consultabile su www.edicoladigitale.it

[21] No, noi non lo sapevamo… ma sappiamo benissimo di aver creato un mostro, ormai.

A questo punto, ho pensato di calcolarmi qual è l'ipercubo più piccolo in cui possa essere contenuto il pallone. (Sperando così di potergli essere di aiuto) Analogamente al caso precedente dovrò trovare una sfera che sia tangente all'ipercubo in tutte le sue facce; siccome le facce dell'ipercubo sono costituite in questo caso da 8 cubi, sempre sfruttando la soluzione del problema Iper-KIAI dovrò quindi utilizzare la relazione tra il lato di un ottaedro e il raggio della sfera in esso inscritta. (Vedi *Nota da Wikipedia*, poco oltre).

Se l'ipercubo avesse lato unitario, dalla soluzione di Iper-KIAI risulterebbe che l'ottaedro avrebbe spigolo uguale a $\sqrt{2}$. Il raggio della sfera sarebbe quindi:

$$\sqrt{\frac{1}{6}} * \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Quindi l'ipercubo dovrà avere il lato uguale a: $\sqrt{3}$ volte il raggio della sfera.

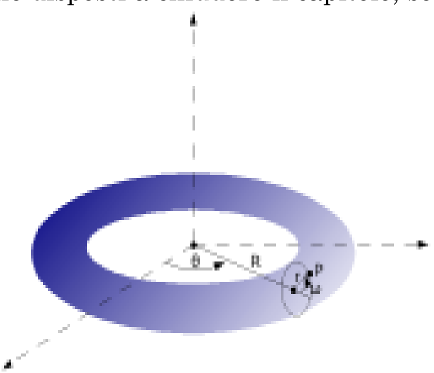
Nota da Wikipedia:

Proprietà metriche dei solidi platonici-La tabella seguente raggruppa alcune delle principali proprietà metriche dei solidi platonici.

Sia d la misura dello spigolo di un poliedro; si possono calcolare in funzione di d i raggi r, R, ρ, rispettivamente della sfera inscritta, circoscritta, di quella tangente agli spigoli, nonché l'area S della superficie ed il volume V. Dalle formule della tabella possono dedursi quelle inverse.

Nome	**r**	**R**	**ρ**	**S**	**V**
Tetraedro	$\frac{\sqrt{6}}{12}d$	$\frac{\sqrt{6}}{4}d$	$\frac{\sqrt{2}}{4}d$	$\sqrt{3}d^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}d^3$
Cubo o Esaedro	$\frac{1}{2}d$	$\frac{\sqrt{3}}{2}d$	$\frac{\sqrt{2}}{2}d$	$\mathbf{6d^2}$	$\mathbf{d^3}$
Ottaedro	$\frac{\sqrt{6}}{6}d$	$\frac{\sqrt{2}}{2}d$	$\frac{1}{2}d$	$2\sqrt{3}d^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}d^3$
Dodecaedro	1/[illegible] $\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{5})d$	$\frac{1}{4}(3+\sqrt{5})d$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}d$	$\frac{1}{4}(15+7\sqrt{5})d$
Icosaedro	$\frac{\sqrt{3}}{12}(3+\sqrt{5})d$	$\frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}d$	$\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})d$	$5\sqrt{3}d^2$	$\frac{5}{12}(3+\sqrt{5})d^3$

Non so cosa ne pensiate voi che leggete, ma noi che scriviamo saremmo anche a posto così. Come succede quasi sempre, il GC tira fuori dal cappello un paio di problemi, e dal mondo dei lettori si scatena l'inferno (anche questa è una citazione cinematografica, ma è recente, non vale riconoscerla). E quindi saremmo anche disposti a chiudere il capitolo, se non fosse che… se non fosse che ve lo avevamo detto, no, che ***Trekker*** si è scatenato, questo mese, forse per farci vedere che non c'è bisogno che noi gli si attribuisca meriti non suoi, visto che è decisamente in grado di procacciarsene da solo? Ebbene, guardate cosa è riuscito a produrre, il nostro, in merito a pagaie e hula-hoop:



Approccio ad una soluzione generale

Il metodo di soluzione presentato è abbastanza complicato, ma ha il vantaggio di essere estendibile a scatole contenitore qualsiasi (beh, devono essere abbastanza "regolari") e contenuti qualsiasi (anche loro abbastanza "regolari"). Sviluppiamo però l'idea sull'esempio proposto ovvero con contenitore cubico e contenuto a forma di toro[22].

Siano R ed r, con R>>r>0, i due raggi del toro in questione. Nel sistema di riferimento "naturale" del toro (vedere la figura a lato), le coordinate di un generico punto P della superficie del toro si possono esprimere con:

$$P((R+r\cos(\omega))\cos(\theta);(R+r\cos(\omega))\sin(\theta);R\sin(\omega)),\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\omega\le 2\pi$$

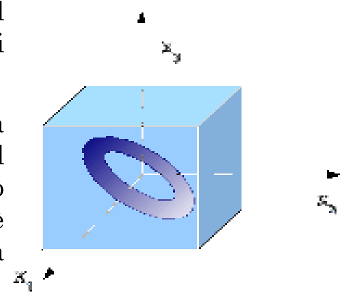
Il problema proposto è equivalente a trovare il più grande raggio R tale che il toro sia completamente contenuto in un cubo di lato L.

Poniamo, per semplicità di notazione:

$$p_1(R,r,\theta,\omega)=(R+r\cos(\omega))\cos(\theta)$$
$$p_2(R,r,\theta,\omega)=(R+r\cos(\omega))\sin(\theta)$$
$$p_3(R,r,\theta,\omega)=R\sin(\omega)$$

Poiché il toro è un corpo rigido (beh, lo assumiamo per semplicità) bastano sei coordinate indipendenti (=gradi di libertà) per definire completamente la sua posizione nello spazio. Ricordiamo anche che una generica trasformazione degli assi cartesiani (o corrispondentemente lo spostamento di un corpo rigido) è esprimibile con rotazioni (ad esempio individuate con i tre angoli di Eulero φ_1, φ_2 e φ_3 , oppure con i coseni direttori α_{ij} degli angoli formati fra gli assi "vecchi" e "nuovi") ed una traslazione (ad esempio utilizzando le coordinate q_1, q_2 e q_3 della "vecchia" origine relativamente alla "nuova").

Prendiamo ora un sistema di riferimento "centrato" nel centro del cubo di lato L e con gli assi paralleli agli spigoli.



Scegliendo ad esempio la "strada dei coseni direttori" (ma sarebbe analogo utilizzando i tre angoli di Eulero), al generico punto P posto sulla superficie del toro si può associare una terna di coordinate cartesiane x_1, x_2 e x_3 (è più compatto usare questa notazione invece che la "classica" terna x,y,z), precisamente:

$$P \Leftrightarrow P_i(R,r,\theta,\omega,a_{ij})=q_i+\sum_{j=1,2,3}a_{ij}p_i(R,r,\theta,\omega),\quad i=1,2,3$$

Affinchè il toro sia completamente incluso (senza deformazione) nel cubo di lato L bisogna che:

$$\left|P_i(R,r,\theta,\omega,a_{ij})\right|\le\frac{1}{2}L,\quad i=1,2,3$$

Si può quindi ridurre il quesito alla soluzione di un problema di **programmazione non lineare** consistente nel trovare il massimo di una funzione dati alcuni vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza.

Possiamo quindi scrivere:

[22] Notata la finezza? Quasi tutti i solutori – e senz'altro tutta la Redazione – hanno assimilato l'hula-hoop ad un cerchio; ma chi di dematematizzazione ferisce di dematematizzazione perisce. È sacrosanto notare che l'hula-hoop è oggetto toroidale e tridimensionale, e non circolare.

$$\max f(R) = R$$
$$\left|P_i(R,r,\theta,\omega,a_{ij})\right| \le \frac{1}{2}L, \quad i=1,2,3$$
$$\sum_{j=1,2,3} a_{ij}^{\ 2} = 1, \quad \sum_{j=1,2,3} a_{ji}^{\ 2} = 1, \quad i=1,2,3$$
$$\sum_{j=1,2,3} a_{ji}a_{ki} = 0 \ , \quad \sum_{j=1,2,3} a_{ij}a_{ik} = 0, \ j \ne k \, con \, i,j,k = 1,2,3$$
$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \omega < 2\pi, \quad R > r > 0$$

dove la prima riga indica la "massimizzazione" della funzione f(R)=R (ciò corrisponde a trovare il toro più "grande", noto che sia il raggio r), le seconde disequazioni (attenzione, "sviluppando" il valore assoluto si trovano in totale 6 relazioni) esprimono il vincolo che il toro sia contenuto completamente (senza deformazione) nel cubo, le terze e le quarte relazioni esprimono i vincoli a cui devono sottostare tutti i coseni direttori "di questo mondo" (con il simbolo di Kronecker avremmo potuto scrivere anche qualcosa di più compatto).Per risolvere questo problema di programmazione non lineare si può scrivere la funzione **Lagrangiana "generalizzata",** "attingere" alle condizioni di **Karush-Kuhn-Tucker** (vedere http://en.wikipedia.org/wiki/Karush-Kuhn-Tucker)[23] e... avere tanta pazienza nel calcolare gradienti e tutto il resto. Magari prima di "imbarcarsi" in questi calcoli conviene sfruttare qualche simmetria (ad esempio ipotizzando che il centro del toro "massimo" coincida col centro del cubo).

Spero in qualche lettore di RM (in possesso di qualche tool software per la risoluzione di questi problemi) desideroso di verificare analiticamente la soluzione. È evidente che la soluzione del problema è molto complessa ma... è molto generale. Che faremmo se, andando in vacanza presso un agriturismo, volessimo portarci la nostra sella da cavallo (invece dei vecchi hula-hoop) avendo a disposizione una scatola cilindrica?

E, per la miseria, queste sono affermazioni che ci sentiamo di condividere in pieno! La matematica è bella se applicata, e l'urlo di dolore che si leva dall'ugola di ***Trekker*** non può certo rimanere inascoltato. Orsù, allora! C'è una spettacolare generalizzazione impostata, non vorremo mica lasciarla appassire così, no? E non crediate che l'aver impostato su linee generali la soluzione dell'inscatolamento dell'hula-hoop sia stato solo un basso trucco per non risolvere il problema specifico. Infatti, il nostro, oltre all'*approccio per la soluzione generale*, ha intrapreso anche la via dell'…

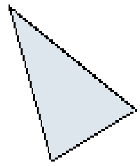
Approccio ad una soluzione intuitiva

Tagliando con un piano generico un cubo di lato L si possono ottenere sezioni triangolari, quadrate, romboidali, rettangolari, pentagonali ed esagonali (di più non si può, essendo il cubo limitato da sei facce). Ora ipotizziamo che il nostro hula-hoop si possa considerare, con "ragionevole approssimazione", una circonferenza. Il problema si riconduce a trovare la più grande circonferenza inscritta nella sezione piana risultante dal taglio del cubo con un piano. L'"intuizione" della simmetria suggerisce di cercare fra le circonferenze inscritte nelle sezioni tagliate da piani passanti per il centro del cubo e secanti figure piane regolari (che possono essere triangoli equilateri, quadrati, rombi ed esagoni ma non pentagoni).

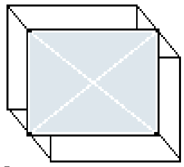
Se il piano (contenente il centro del cubo):

[23] E con questa sono già due le citazioni di Wikipedia in quest'articolo. Wikipedia ci è simpatica e ci sono sompatici i wikipedisti; tra i nostroi lettori ce ne sono diversi. Crediamo che faccia piacere anche a loro vedere come "l'enciclopedia libera" stia davvero diventando un punto di riferimento per la rete.

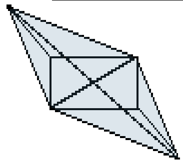
- passasse per un vertice e per la diagonale della faccia opposta, si formerebbe rispettivamente o un rettangolo (che non è interessante perché non "regolare") o il più grande triangolo equilatero di lato pari a $L\sqrt{2}$, la cui circonferenza inscritta avrebbe raggio $L\frac{\sqrt{6}}{6} \cong 0{,}4082L$



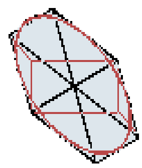
- fosse parallelo ad una coppia di facce del cubo, la sezione sarebbe un quadrato di lato L e quindi la circonferenza inscritta avrebbe raggio pari a $\frac{L}{2} = 0{,}5L$.



- passasse per due vertici opposti e per il punto medio di due spigoli "laterali" (vedere la figura), si otterrebbe un rombo di lato $L\frac{\sqrt{5}}{2}$ con diagonali pari a $L\sqrt{3}$ e $L\sqrt{2}$ e la cui circonferenza inscritta avrebbe raggio $L\frac{\sqrt{30}}{10} \cong 0{,}5477L$



- passasse per opportuni punti medi di opportuni spigoli (vedere la figura) si otterrebbe un esagono regolare di lato $L\frac{\sqrt{2}}{2}$, la cui circonferenza inscritta avrebbe raggio $L\frac{\sqrt{6}}{4} \cong 0{,}6124L$.



E questo dovrebbe essere la più grande circonferenza inscrivibile nel cubo …

Beh, cosa dire? E soprattutto, *chi* deve dire qualcosa, in merito a cotanta analisi? Non certo la Redazione, che non può certo dedicarsi a cotanti certamen. Per quel che ci riguarda, il cerchio, di questi tempi, è solo la forma disegnata dall'ombrellone. Cubico il portabagagli, entro il quale non c'entra mai niente, men che mai un hula-hoop, euclideo o minkowskiano che sia. Il toro, poi, neanche a parlarne… per quel che ci riguarda è fatto di gomma, molto colorato, e usualmente ha anche un'appendice a forma di testa di papera.

6. Quick & Dirty

Qui non è la prima risposta che è sbagliata: è la risposta giusta, che è sbagliata...

Cominciamo con $N = 2$. Prendete un quadrato, dividetelo in quadranti. Tracciate i quattro cerchi inscritti in ognuno dei quadranti. Al centro del quadrato originale, tracciate il cerchio tangente ai quattro cerchi inscritti. Non dovreste avere problemi a calcolare il raggio di questo cerchietto.

...ma la domanda è questa: quando passate da quadrati e cerchi a cubi, ipercubi, sfere ed ipersfere, il raggio dell'aggeggio al centro, resta suppergiù uguale?

7. Pagina 46

Siano α e β due numeri che soddisfano le condizioni del problema; per un dato intero positivo N, consideriamo tutti gli interi della sequenza $[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\ldots$ che non sono maggiori di N, indicandoli come $[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\ldots[n\alpha]$. Essendo $[n\alpha] \le N$, dove n è il massimo valore per cui ciò avviene, abbiamo $[(n+1)\alpha] > N$ e quindi

$$n\alpha < N+1,$$
$$(n+1)\alpha \geq N+1,$$
$$N+1 > n\alpha \geq N+1-\alpha \text{ o } n\alpha = N+l,$$

dove $1 > l \geq 1-\alpha$.

In modo perfettamente identico si può mostrare che esistono m e l' per cui $m\beta = N + l'$, in cui $1 > l' \geq 1-\beta$.

Siccome nelle sequenze date incontriamo ogni intero positivo esattamente una volta, deve seguire che $n + m = N$; questo implica che:

$$\frac{N+l}{\alpha} + \frac{N+l'}{\beta} = N$$

o

$$N\left[1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right] = \frac{l}{\alpha}+\frac{l'}{\beta};$$

e

$$\frac{1}{N}\left(\frac{l}{\alpha}+\frac{l'}{\beta}\right) = 1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right).$$

Dalle diseguaglianze che coinvolgono l e l' segue che:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} > \frac{l}{\alpha}+\frac{l'}{\beta} \geq \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-2.$$

Imponendo $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = t$ e dividendo tutti i termini per N si ottiene:

$$\frac{t}{N} > 1-t \geq \frac{t-2}{N},$$

che deve essere soddisfatta per qualsiasi intero positivo N . Siccome però il primo e il terzo membro di questa diseguaglianza possono essere resi comunque piccoli, segue che deve essere $1-t=0$, ossia che $t = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$. Inoltre, è facile vedere che α e β devono essere irrazionali in quanto se fosse $\alpha = \frac{p}{q}$ dovrebbe essere $\beta = \frac{p}{p-q}$ e quindi $[q\alpha] = [(p-q)\beta]$, in contraddizione con le condizioni poste dal problema.

Assumiamo ora che α e β siano numeri irrazionali per cui valga $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} = 1$. Dovendo essere necessariamente $\alpha > 1$ e $\beta > 1$, non sarà possibile trovare due numeri uguali nelle serie $[\alpha],[2\alpha],[3\alpha],\ldots;\quad [\beta],[2\beta],[3\beta],\ldots$.

Mostriamo ora che dato un intero N, è possibile trovare un intero n per cui $[n\alpha]=N$ o un intero m per cui $[m\beta]=N$ e che le due condizioni non possono sussistere simultaneamente. Sia

$$[(n-1)\alpha]<N\leq[n\alpha],$$
$$[(m-1)\beta]<N\leq[m\beta].$$

Queste disuguaglianze implicano che:

$$n\alpha-\alpha<N, \qquad n\alpha>N;$$
$$m\beta-\beta<N, \qquad m\beta>N$$

(né $n\alpha$ né $n\beta$ possono essere pari a N, in quanto α e β sono irrazionali); ossia,

$$n\alpha=N+d,$$
$$m\beta=N+d',$$

dove $0<d<\alpha$, $0<d'<\beta$. Segue che:

$$\begin{aligned} n+m &= \frac{N}{\alpha}+\frac{d}{\alpha}+\frac{N}{\beta}+\frac{d'}{\beta} \\ &= N\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\frac{d}{\alpha}+\frac{d'}{\beta}\right)=N+\left(\frac{d}{\alpha}+\frac{d'}{\beta}\right) \end{aligned}$$

e, di conseguenza,

$$\frac{d}{\alpha}+\frac{d'}{\beta}=n+m-N$$

viene ad essere un intero. Ma essendo $0<\frac{d}{\alpha}<1$, $0<\frac{d'}{\beta}<1$, abbiamo:

$$0<\frac{d}{\alpha}+\frac{d'}{\beta}<2.$$

Da cui si giunge all'uguaglianza:

$$\frac{d}{\alpha}+\frac{d'}{\beta}=1,$$

che, essendo $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, è possibile solo nel caso che uno dei numeri d o d' sia minore di 1 e l'altro sia maggiore di 1. Ma questo significa che tra gli interi $[n\alpha]=[N+d]$ e $[m\beta]=[N+d']$, nessuno dei quali è minore di N, uno deve essere pari a N e l'altro deve essere maggiore di N.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Si poteva fare di meglio

Non nel senso che non ci piaccia, anzi. Ma sicuramente si poteva fare di meglio, o più esattamente "di più".

Ci riferiamo a "Galleria di quadri", di Escher; secondo alcuni di noi, probabilmente una delle migliori idee alla base di un quadro; consci di violare una serie di diritti ma altrettanto pronti a cedere il 50% di quanto guadagneremo, ve lo riproduciamo qui di fianco.

Figura 1 – "Prententententoonstelling"

Ora, per prima cosa cerchiamo di capire come sia stato fatto il disegno, cercando di seguire il ragionamento di Escher.

L'idea originale era di definire "...un anello di espansione ciclica senza inizio né fine..."; ammettiamo che la cosa non sia chiarissima, e probabilmente non lo era neanche per MCE, che racconta nei suoi diari come la cosa gli abbia causato "...degli incredibili mal di testa".

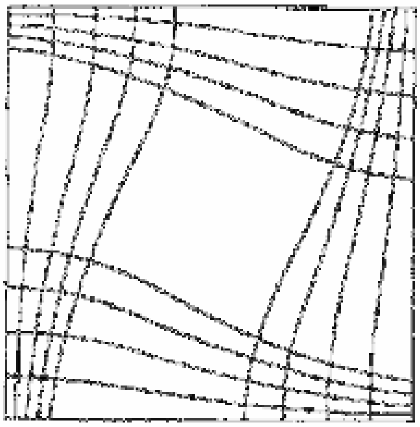


Figura 2 – Lo schema della griglia finale

I primi abbozzi del quadro tentavano di realizzare questa espansione utilizzando una serie di linee rette che definivano un insieme di quadrati roteanti e convergenti verso il centro; deluso dai risultati ottenuti, passò a delle curve che rendevano più "sfumata" la trasformazione; in *Figura 2*, vedete una schematizzazione della griglia pensata.

In realtà la griglia effettivamente utilizzata da Escher era leggermente più complicata, per riuscire a tenere conto delle variazioni di dimensioni degli oggetti in alcune zone particolari; la grigia effettivamente utilizzata la trovate in *Figura 3*.

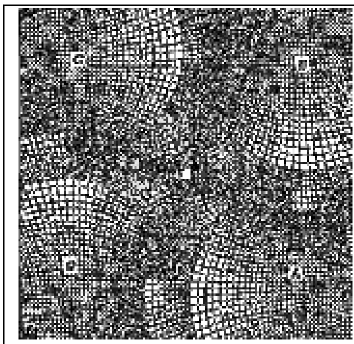


Figura 3 – La griglia "vera"

Ora, supponiamo di trovarci nella posizione A e di camminare verso il punto D; nel compiere questo movimento, subiamo un'espansione di un fattore 4 (non ce ne accorgiamo in quanto tutto l'universo si espande insieme a noi del medesimo fattore[24]); quindi, nel momento stesso in cui effettuiamo un giro completo $ABCD$, espandendoci ad ogni passaggio di un fattore 4, terminiamo il giro al punto di partenza, ma espansi di un fattore $4^4 = 256$.

[24] Questa tra un po' ve la spiega un amico... Non fate domande. Compratevi il libro appena esce, vi faremo sapere.

Adesso, ci serve l'originale, nel senso di un disegno della scena reale. Escher per preparare questa scena ne ha fatti svariati ma, come tutti gli artisti, ha ritenuto opportuno fare anche altri disegni sullo stesso foglio: interessantissimo per quanto riguarda la storia dell'arte, ma dal punto matematico fa solo disordine. Fortunatamente, *Richter* e *Hofstra* hanno messo ordine, e possiamo vedere la scena in *Figura 4*.

Notate che anche qui "manca un pezzo", ma è inutile: il rettangolo bianco al centro, infatti, contiene esattamente la stessa scena in dimensioni ridotte (indovinate di che fattore...), al cui interno c'è la stessa scena in dimensioni ridotte, eccetera.

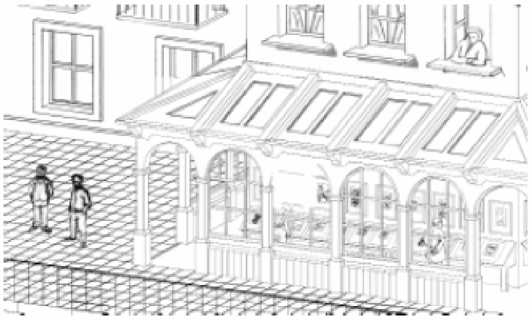


Figura 4 – Prima della cura

Ora che abbiamo la scena originale, possiamo cominciare a tracciare il quadro; quello che ci serve è riuscire ad associare ad ogni punto del nostro quadro bianco, che considereremo come ***piano complesso***, un valore di colore (semplifichiamoci la vita: bianco e nero, OK?), imponendo la condizione di periodicità che abbiamo visto prima. Possiamo riassumere il tutto in due espressioni:

$$\begin{cases} f: C \to \{bianco, nero\} \\ f(256z) = f(z), \quad \forall z \in C \end{cases}$$

Per chiarirci le idee, cerchiamo di capire come una cosa nel mondo normale venga fuori nel mondo del quadro (lo sappiamo benissimo che è una litografia, ma il ragazzo sta guardando un quadr[at]o); prendiamo, ad esempio, un quadrato 5×5 e tracciamolo nel reticolo "dell'immagine" (va bene così?). Trovate il risultato in *Figura 5*.

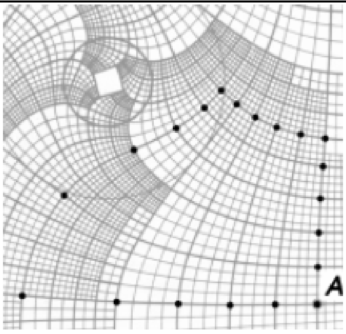


Figura 5 – Un giro quadrato

"Tutto 'sto spiegone per una cosa così semplice?" Tutt'altro che semplice: date un'occhiata alla *Figura 7*, in cui il quadrato che abbiamo considerato ha dimensioni 7×7: non si chiude! O meglio, si chiude ma non si chiude: quello disegnato è (per ogni realtà, anche quella "del quadro") un quadrato, anche se non sembra. Idealmente, quindi, il punto ***A'*** dovrebbe avere secondo la nostra funzione lo stesso colore del punto ***A***; diciamo "idealmente" in quanto è proprio qui quello che ci lascia dubbiosi nel quadro di Escher: lui, quella zona, l'ha lasciata bianca.

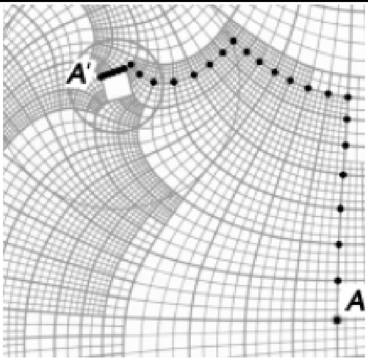


Figura 6 – Un altro giro quadrato (anche se non sembra)

Siccome stiamo lavorando sul piano complesso, ***A*** e ***A'*** sono numeri, e possiamo calcolare il rapporto (complesso):

$$\gamma = \frac{A}{A'}$$

e ottenere, da misurazioni sul disegno, che $|\gamma| < 20$ e che l'argomento deve essere almeno pari a 3; se prendete un punto qualsiasi del quadrato $ABCD$ ed effettuate queste misurazioni, vedete che questo valore è ***costante***; quindi, ogni punto (del quadrato) viene ruotato in senso orario di circa 160° e ridotto di un fattore 20, andando a posizionarsi nel quadrato centrale.

Definendo ora genericamente una funzione g avente dominio C e che assuma valori in $\{bianco, nero\}$ e permetta l'utilizzo dell'intera griglia, ci si accorge immediatamente che l'origine (centro del quadro) rappresenta una singolarità; quindi, il dominio della nostra funzione deve essere ridefinito come l'insieme complesso *meno l'origine*, ossia $C^* = C/\{0\}$; in questo modo si può richiedere che g agisca sull'*intero* dominio, lasciando solo un punto in cui non possiamo disegnare, e ci permette di definire il colore non solo all'interno della litografia, ma anche tutta l'area all'esterno.

Insomma, abbiamo a che fare con due funzioni: f, effettivamente utilizzata da Escher, e g, che ci fornisce una figura decisamente più soddisfacente; entrambe le funzioni devono sottostare a condizioni simili:

$$f(256z) = f(z); \quad g(\gamma w) = g(w).,$$

dove w è, genericamente, un numero complesso.

Il problema consiste nel determinare γ in un modo matematicamente più soddisfacente rispetto al misurarlo sul quadro. La cosa si può fare, nel momento stesso in cui si tenga presente che Escher cercava un *isomorfismo conforme,* ossia una funzione analitica (non proprio: in realtà è una *varietà* analitica: unidimensionale) di cui dobbiamo esaminare il kernel[25]; siccome non vogliamo lo zero tra i piedi, questa funzione potrebbe essere un'esponenziale; con i soliti "semplici ma noiosi passaggi" (ricerca dei poli e degli zeri, suppergiù), si ottiene:

$$\gamma = e^{\frac{2\pi i \cdot \ln 256}{2\pi i + \ln 256}} \approx e^{3.1172277221 + 2.7510856371 i},$$

da cui $|\gamma| \approx 22.58$, leggermente più grande del valore usato da Escher.

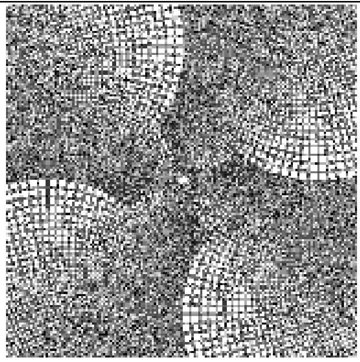


Figura 7 – Adesso si comincia a ragionare

Questo porta ad un'interessante conseguenza: se guardiamo la griglia risultante (che ora è *perfettamente conforme*) in *Figura 7*, vediamo che il "buco" centrale (indisegnabile) è decisamente più piccolo, e quindi che la zona bianca centrale diventa insignificante.

"Ma siete sicuri che fosse così importante, quella zona bianca?" Beh, a voler essere pignoli c'è dentro una metà abbondante dell'universo: se volete farvi un'idea, *Joost Batenburg* si è preso la briga di calcolare l'inversa della "Funzione di Escher" e, dandola in pasto ad un programma scritto da lui, di calcolare la "realtà" partendo dal quadro: il risultato lo vedete in *Figura 8* e, come dicono alcuni di voi, ciò non è bello.

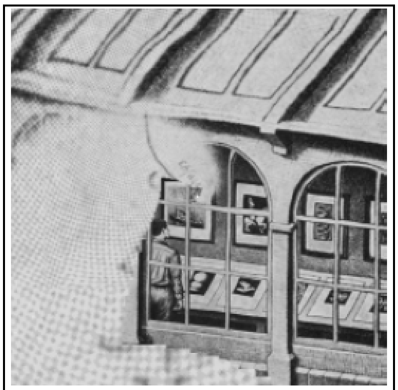


Figura 8 – Il buco

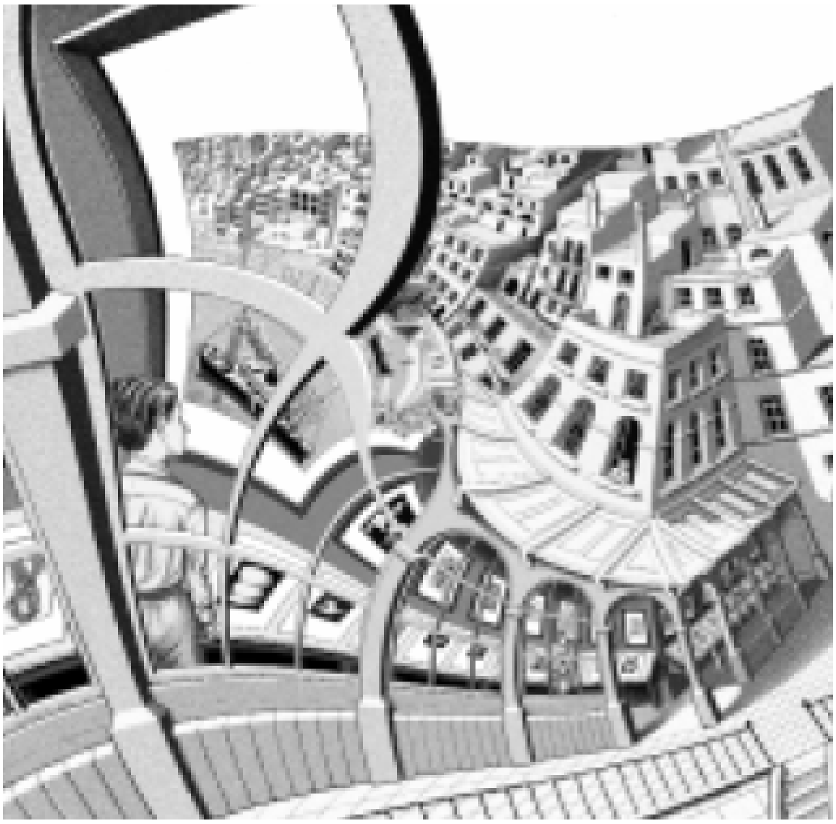
Siamo ragionevolmente certi che a qualcuno di voi sta venendo in mente di citare Francesco Guccini: "Fattelo te l'universo, se sei capace!".

[25] ...e se non vi ricordate cos'è un kernel, vuol dire che non avete letto con attenzione il Compleanno di questo mese.

Fortunatamente (conoscete la nostra inettitudine nel disegno) Ritcher e Hofstra (gli stessi di prima) hanno provveduto, aggiungendo anche i livelli di grigio; giusto per farvi capire quanto sia semplice la cosa, vi passiamo la loro spiegazione:

> *[...] per quanto riguarda i problemi della risoluzione discontinua e del cambiamento dello spessore delle linee, abbiamo deciso che la via più semplice per superarli era di richiedere che la densità dei pixel sulla funzione ellittica fosse uniforme secondo una misura di Haar[26]; in termini pratici, abbiamo trasformato il disegno secondo la funzione esponenziale ottenendo un'immagine doppiamente periodica in C, sulla quale abbiamo aggiunto i grigi [...].*

Il che ha permesso, finalmente, di avere il disegno completo:



Volendo attenuare l'affermazione che fa da titolo a questo pezzo, ci chiediamo: ma l'occupazione del centro, vale il dover avere quell'orribile bordo bianco in alto a destra?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[26] Una buona notizia dal trasloco di Rudy: è saltato di nuovo fuori un vecchio testo sull'elaborazione delle immagini; citiamo. "La trasformata di Haar può essere collegata ad un processo di campionamento dell'immagine nel quale l'immagine è campionata con risoluzione sempre più fine, diminuendo il passo di campionamento con potenze di 2. Il codominio di Haar presenta alte concentrazioni di energia differenziale nelle zone di campionamento ad alta densità" [Cappellini, 1985]. Insomma, quando l'immagine si fa dura, Haar campiona più fine. Quindi verso il centro del nostro disegno fa molta più attenzione.