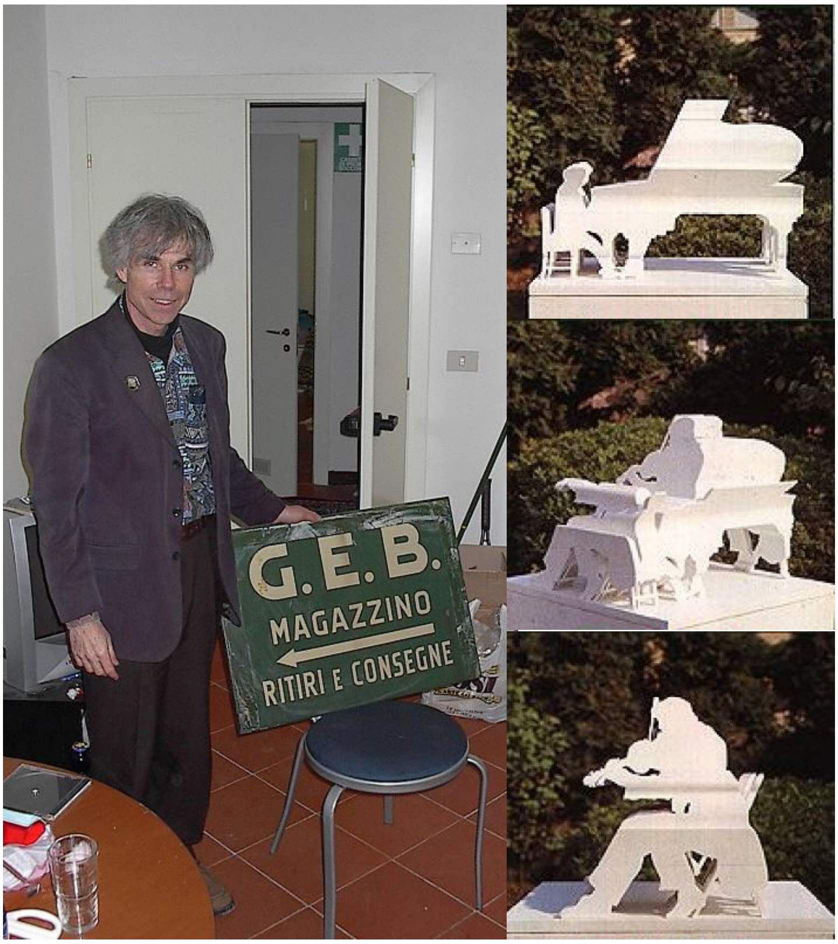
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 101 – Giugno 2007 - Anno Nono



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 100 ha diffuso 1335 copie e il 02/06/2007 per Google eravamo in 22600 pagine.

Alcuni anni fa, con le lettere "G.E.B." ***Douglas Hofstadter*** (foto: cortesia di ***.mau.***) aveva creato delle interessanti variazioni nel suo libro più conosciuto. ***Shigeo Fukuda***, pur nella semplificazione dell'usare solo due personaggi, ha provato a rendere un po' più complicata la cosa; sulla destra, un (mezzo) giro attorno alla sua scultura "Duetto".

1. La Compagnia del Ginnasio

Certo, una fiaba è un'evasione dal carcere. Ma questo è un merito, e chi lo tratta come fosse invece una colpa si macchia di un errore - forse anche insincero - mettendo sullo stesso piano la sacra fuga del prigioniero con la diserzione del guerriero (…) Le fiabe parlano di cose eterne: non di lampadine elettriche, ma di fulmini. Autore o amatore di fiabe è colui che non si fa servo delle cose presenti.
(J. R. R. Tolkien)

La fantasia è una naturale attività umana, la quale certamente non distrugge e neppure reca offesa alla Ragione, né smussa l'appetito per la verità scientifica, di cui non ottunde la percezione. Al contrario: più acuta e chiara è la ragione, e migliori fantasie produrrà.
(J. R. R. Tolkien)

Conosco la metà di voi soltanto a metà; e nutro, per meno della metà di voi, metà dell'affetto che meritate.
(Bilbo Baggins / J. R. R. Tolkien)

La nostra è un'era di sognatori, e sognatori lo siamo un po' tutti. Perché di sognare abbiamo bisogno: basti pensare al continuo revival del genere Fantasy, ai draghi di Harry Potter, alle sempiterne fate e ai maghi di tutte le età; per non parlare del gran ritorno di interi stuoli di supereroi al cinema.

Difficile dire se il bisogno di ricorrere alla fantasia nasca dal semplice desiderio di fuggire una realtà che sembra sempre più tristemente concreta e sempre meno gratificante spiritualmente, o se scaturisca invece dalla voglia di ritrovare un mondo in cui i buoni ed i cattivi sono di facile identificazione. Quantomeno, in questi giorni in cui sembra peraltro regnare un'accidia assoluta e una costante caduta di valori, sembra evidente il ritorno del "bisogno di eroi" e di tutte le buone intenzioni che gli eroi usualmente veicolano. Del resto, malgrado i notiziari giornalieri siano pieni di notizie di guerra dalle varie parti del mondo, la nostra vita pare scorrere senza grandi traumi: la quotidiana conta dei morti in Iraq (con annesse immagini di corpi dilaniati) è ormai una tale abitudine che il commento più comune al telegiornale della sera è diventato "mi passi il sale, per favore?". E questo senza contare che quello iracheno è di gran lunga il conflitto più documentato e seguito del momento: di decine di altri non conosciamo neppure il nome. Forse non abbiamo veramente bisogno di fuggire dalla realtà, forse è la realtà stessa ad esserci sfuggita di mano.

Certo è che il Fantasy non è un'invenzione recente: parte dal mito e dalla leggenda e costruisce mondi in cui i buoni sono fortissimi o bellissimi o intelligentissimi (o, più frequentemente, tutti questi superlativi insieme), e vincono sempre la battaglia contro il Male. Gli elementi di base si ritrovano fin dagli albori della scrittura: l'Iliade e l'Odissea sono certo meno banali e non cadono nella manichea classificazione tra buoni e cattivi (forse perché tremila anni fa la morale guerresca era comunque più articolata di quella odierna), ma la raffigurazione e la definizione dell'eroe vi è già pienamente conchiusa. L'epica poi procede e si sviluppa, si aggiorna, si rinnova: da Virgilio fino ad Ariosto e Tasso, o alle leggende nordiche, passando per Re Artù e i suoi Cavalieri della Tavola Rotonda; e poi via ancora fino ai giorni nostri. Tutte le leggende di cui si può ricordare il nome hanno il loro eroe perfettamente riconoscibile ed il loro articolato succedersi verso il momento in cui il Bene trionferà. Di questo siamo ormai pienamente convinti, che "*comunque vada, sarà un successo*", come diceva Chiambretti qualche anno fa. E che ci sia guerra intorno non importa, anzi. In fondo, guerra e distruzione e sangue sono necessari, perché il Bene possa alla fine vincere in qualche modo.

Quello che forse ci stiamo dimenticando è che nelle leggende, quelle vere[1], ogni personaggio, anche il più insignificante, ha un suo ruolo e scopo. Uno degli esempi più evidenti ci sembra essere quello degli Hobbit, protagonisti di un capolavoro della letteratura fantastica tornato alla ribalta per la recente versione cinematografica; stiamo naturalmente parlando de "Il Signore degli Anelli", scritto da quello che oggi è considerato il padre del genere: John Ronald Reuel Tolkien.

Prima che scrittore, Tolkien era uno studioso di linguaggi; affascinato soprattutto da quelli più antichi e poco comuni (tanto per dire, era uno dei rarissimi amanti del finnico privo di origini finlandesi al mondo), a tempo perso inventava perfino nuovi idiomi. Dato che aveva sempre posseduto un'innata passione per il mondo delle favole e dei miti, pensò ad un certo punto di inventare un mondo in cui le sue lingue inventate potessero avere un'acconcia ambientazione. Così, per ragioni essenzialmente linguistiche, la "Terra di Mezzo" cominciò lentamente a prendere forma e sostanza. Una terra che, in breve tempo, si assunse il compito di rappresentare una versione allegorica delle origini del mondo, completa di esseri magici e fantastici ben connotati sia dal punto fisico che socio-politico, con i loro diversi sistemi di governo, di organizzazione, di vita e anche di comunicazione con il resto del mondo. E ovviamente, era una terra piena zeppa di amici e di nemici, di alleanze e di intolleranze.

Per Tolkien, il gioco delle lingue era cominciato durante gli studi: insieme ad alcuni compagni di scuola aveva fondato una società quasi segreta (TCBS, Tea Club and Barrovian Society) con un linguaggio proprio; il palese intento fondamentale dei soci era quello di ispirarsi a vicenda nelle loro composizioni. Solo confrontando gli scritti di quegli anni (stiamo parlando dell'inizio del Novecento) con quelli dei suoi colleghi si può immaginare cosa sarebbe potuto scaturire dal TCBS; purtroppo la Grande Guerra era alle porte, e aveva deciso altrimenti per quasi tutti i membri del gruppo. Tolkien, invece, sopravvisse; e nelle sue storie ancora si leggono vivide immagini e titaniche interpretazioni delle esperienze che in quei tempi si impressero nella sua memoria. Da qui nascono soprattutto le tantissime piccole "storie nella storia", quelle che continuano ad essere uno degli elementi di maggior fascino dell'intera saga.

L'eroe de "Il Signore degli Anelli" è Frodo, un ometto piccolo, di una razza che ama la tranquillità, il buon cibo, bere birra e fumare la pipa[2]. Il suo aiutante (perché ogni eroe deve avere un braccio destro) è – almeno nominalmente - il suo giardiniere, Samwise Gamgee. Ma le sue tutt'altro che nobili origini non fanno che consolidare una tradizione di saggezza che risale almeno fino al Don Chisciotte di Cervantes: Sancho Panza non è certo figura epica quanto il Cavaliere della Mancha, ma dall'alto del suo umile somaro scendono spesso reali perle di saggezza e di buon senso. Quasi alla stessa maniera, a Sam tocca spesso il compito di ricondurre nei binari del mondo reale l'avventura fantastica, e quindi per definizione irreale. Sue sono le frasi più toccanti del libro, come, ad esempio: *"Credevo che i meravigliosi protagonisti delle leggende partissero in cerca di esse, perché le desideravano, essendo cose entusiasmanti che interrompevano la monotonia della vita, uno svago, un divertimento. Ma non accade così nei racconti veramente importanti, in quelli che rimangono nella mente. La gente si trova coinvolta all'improvviso, e quello, come dite voi, è il loro destino. Penso che anche essi come noi ebbero molte occasioni di tornare indietro: ma non lo fecero. E se lo avessero fatto noi non lo sapremmo, perché sarebbero stati dimenticati. Noi sappiamo solo di coloro che proseguirono, e non tutti verso una felice*

[1] … e questo sembra un ossimoro, ma certo non lo è. Realtà e Leggenda sono spesso in antitesi, ma anche le Leggende hanno un diverso grado di "realtà": e l'Uomo Ragno deve ancora arrampicarsi su molti muri, prima di assurgere alla "realtà leggendaria" di Achille.

[2] E, almeno limitatamente a questi due ultimi aspetti, RM ha in forza un elemento che potrebbe serenamente tener testa a tutta la genia degli hobbit, non solo a Frodo.

fine, badate bene. Comunque, non verso quella che i protagonisti di una storia chiamano una felice fine."

Ed è proprio racchiuso nella frase di Samwise (che non è certo "wise"[3] per caso) il senso reale del mito e della leggenda: non è solo una storia degna di essere ricordata, è anche – deve esserlo – una storia vissuta con coraggio. Achille è solo in parte un eroe; perché figlio di dea, e quindi in qualche modo è obbligato all'eccezionalità. Ma Ettore è eroe autentico, perché ha il coraggio di affrontarlo anche se sa che non sopravvivrà al duello fatale. Sacrificio e senso del destino immanente; e certo anche la voglia di andare avanti per tutti quelli che non riescono a farlo, perché ognuno, in ogni storia, ha la sua parte da recitare, che prima o poi diventerà essenziale alla trama.

Questa esaltazione dei ruoli minori come comunque fondamentali per il buon esito della missione è però – se non del tutto nuova – davvero particolarmente esaltata nell'economia narrativa di Tolkien: in fondo, nella precedente epica guerresca (e, in fondo, gran parte della storia del Signore degli Anelli è autentica storia di guerra) gli eroi si muovevano sì numerosi sullo sfondo delle battaglie, ma sostanzialmente come individui separati e "separatamente eroici", se così si può dire. Qui invece è più forte il senso collettivo, di squadra o, per dirla al meglio, di "compagnia". È proprio la formazione e la dinamica della Compagnia dell'Anello che occupa la prima parte della saga, e che marchia a fuoco tutto il resto della narrazione. E per quanto ci siano delle evidenti differenze tra tutti gli elementi della Compagnia (anche perché hanno tutti ruoli e compiti diversi), ma ben più importanti delle differenze sono le identità, che sono tutte generate dalla coincidenza dell'obiettivo, dello scopo, o – per dirla con la dovuta enfasi epica – del Fine Ultimo. In questo, il Signore degli Anelli è un libro essenzialmente moderno, nonostante l'ambientazione fantastica e vagamente medievale.

La costituzione di un gruppo[4] di persone è un processo non banale, ed esistono numerosi studi di psicologia che ne dissezionano tutta l'evoluzione, dalla formazione iniziale fino alla naturale dissoluzione, passando attraverso le inevitabili fasi di "conflitto" e di "regolamentazione". Gli scrittori, comunque, non hanno mai avuto bisogno della teorizzazione accademica per comprendere certi meccanismi, e si trovano in letteratura diversi esempi indicativi che narrano di genesi di gruppi: forse il più esplicito e coinvolgente, perché tratta – abbastanza spietatamente - di gruppi di bambini e adolescenti, è "Il Signore delle Mosche" di William Golding[5]. Ma a prescindere da tutte le altre condizioni al contorno, ci sono almeno due banali condizioni che è necessario soddisfare perché un gruppo, una compagnia, possa formarsi: e queste sono semplicemente la coincidenza degli elementi del gruppo nello stesso tempo e nello stesso luogo. La considerazione, che è talmente ovvia da rientrare direttamente nel novero delle banalità, è comunque bene che sia tenuta presente, perchè sono assai frequenti nella storia accadimenti, scoperte, fatti rimarchevoli e improvvisi sconvolgimenti che sono generati, in ultima analisi, solo dalla felice concomitanza di tempi e di luoghi. Tanto per fare un esempio specifico e non troppo scontato, gli studenti di Fisica spesso hanno una sorta di "complice invidia" nei confronti di Johann Jakob Balmer. Questi era un insegnante svizzero di Losanna, e senza voler nulla togliere ai suoi innegabili meriti, non

[3] "Wise" significa "saggio", e "Samwise" suona inevitabilmente come "Sam il Saggio", anche a prescindere dal ruolo nella storia e dall'aspetto dell'amico di Frodo.

[4] Come spesso accade nei compleanni di RM, diversi tipi di linguaggi si intersecano e rischiano di generare confusione. La cosa, naturalmente è premeditata e tutt'altro che innocente: qui per "gruppo" si intende serenamente "gruppo di persone", senza nessuna relazione diretta con la Teoria dei Gruppi. Poco più avanti, la frase capziosa "si trovano in letteratura diversi esempi di …" usa appositamente un luogo comune della "letteratura scientifica", per parlare invece della più usuale letteratura "letteraria".

[5] Anche se, naturalmente, avete piena libertà di non condividere il nostro giudizio, nel caso che aveste letto il romanzo e non vi fosse piaciuto. Ci consola a questo proposito che come noi l'abbia pensato la Reale Accademia Svedese, che a Golding attribuì il Nobel per la Letteratura nel 1983, sostanzialmente proprio per questo romanzo.

è che fosse un luminare della Fisica dei suoi tempi; era un onesto matematico che onestamente onorava il suo meritato titolo di studio insegnando e tenendosi aggiornato. Ma erano proprio i "suoi tempi" ad essere eccezionali: erano quella terra di nessuno che giace tra il massimo splendore della Fisica Classica dell'Ottocento e le grandi rivoluzioni concettuali del Novecento, la Relatività e la Meccanica Quantistica. Erano i tempi in cui si raccoglievano i primi importanti elementi che avrebbero portato alla crisi della visione classica, e li si analizzava con rinnovata attenzione. Così, nel 1885, Balmer – che pur essendo matematico non disdegnava il fascino arcano della numerologia e della cabala – notò che le righe dello spettro dell'idrogeno potevano essere ben descritte da una formula semplice. La formula funzionava benissimo[6], per quanto fosse empirica, ed era una splendida scorciatoia per il calcolo delle lunghezze d'onda, coniugandole opportunamente con un paio di parametri numerici interi. Lo studio degli spettri atomici, a fine Ottocento, è cosa talmente importante e vitale che la formula basta e avanza a rendere immortale il nome di Balmer, ed è da qui che nasce quella che abbiamo chiamato "la complice invidia": lo studente medio di Fisica sogna inizialmente di diventare più bravo di Einstein e Bohr, ma rapidamente si accorge che riuscirci non è del tutto agevole, anzi: occorre genio, applicazione e fatica anche solo per dare un piccolo, trascurabile contributo che – se si è fortunati – sarà poi riconosciuto da una ristretta cerchia di esperti e colleghi. Ma la serie di Balmer, beh… senza nulla togliere allo svizzero, la sensazione più comune è proprio quella che "bastava guardare": prima o poi qualcuno avrebbe certo provato a leggervi una regolarità, e questa regolarità sarebbe saltata fuori senza troppo sforzo. E lo studente, anche se certo capisce che il nocciolo di tutto sta proprio nel "guardare dove altri non hanno ancora guardato", rimane comunque con la sensazione che Balmer si sia guadagnato l'immortalità soprattutto grazie ad un clamoroso colpo di fortuna.

A prescindere dalle opinioni degli studenti invidiosi, è certo che trovarsi al momento giusto nel posto (o nell'"argomento") giusto è essenziale per la riuscita di qualsiasi progetto: e trovarsi tutti insieme, nello stesso posto, luogo e con la stessa intenzione è essenziale per la creazione di un gruppo. Sia essa la Compagnia dell'Anello o un altro tipo di compagnia.

San Pietroburgo è città dai molti nomi. Fondata da Pietro il Grande nel 1703 per diventare la nuova capitale dell'Impero, ebbe fin dalla nascita il nome destinato ad onorare il primo apostolo. Ma già durante la prima Guerra Mondiale, prima ancora della rivoluzione del 1917, cambiò nome per volontà dello Zar, perché "Sankt Peterburg" aveva un suono troppo tedesco (e i tedeschi erano ormai nemici) e troppo poco slavo:e la città passò a chiamarsi Petrograd. Nel cambio aveva perso il riferimento alla santità, e in qualche maniera sembrava ora celebrare, più che il primo papa, proprio quello Zar che ebbe il merito di fondarla. Dopo la rivoluzione e la morte di Lenin, nel 1924 Pietrogrado divenne Leningrado, in onore del padre fondatore della Repubblica dei Soviet; poi, al successivo scossone della storia, nel 1991, tornò al suo nome originale. Curiosamente, la provincia (*oblast*) di San Pietroburgo continua a chiamarsi "Oblast di Leningrado", e la città stessa ritorna al nome comunista il 9 Maggio di ogni anno, in occasione della celebrazione dell' "Assedio di Leningrado". Nel 1897 il nome era ancora quello originale e attuale, e una delle scuole secondarie si chiamava, con pari semplicità, "Secondo Ginnasio di San Pietroburgo".

In quell'anno, due studenti tutt'altro che ordinari si ritrovarono nella medesima classe: Alexander Friedmann e Yakov Tamarkin.

[6] Si capirà, pochi anni dopo, che la formula che genera la Serie di Balmer è un caso specifico della più generale formula di Rydberg.

Alexander Friedmann

Aleksandr Aleksandrovich Friedmann nacque il 16 Giugno[7] 1888 nella grande città sulla Neva, figlio di genitori artisti.

Dalle informazioni che abbiamo di lui, frequentò il ginnasio di San Pietroburgo, mostrando all'inizio risultati "nella norma"; ma non appena cominciò a stringere amicizia con Tamarkin il suo rendimento diventò eccellente e i due erano tra i migliori studenti della scuola.

Jacob David Tamarkin

Yakov Davydovich Tamarkin (che quando emigrò negli Stati Uniti prese il nome di J. D. Tamarkin o Jacob David Tamarkin) era nato l'undici luglio 1888 e apparteneva ad una famiglia benestante, che si trasferì a San Pietroburgo proprio nell'anno in cui Jacob doveva frequentare il ginnasio.

Il Ginnasio di cui stiamo parlando, comunque, non era proprio uno qualsiasi: era la scuola secondaria più vecchia in città[8], fondata nel 1806. Grazie ad un direttore illuminato e dotato di molta influenza negli ambienti scientifici, era abbastanza indipendente dal punto di vista politico, che per una scuola è cosa quasi sempre vitale. Di certo, i tempi erano maturi e il luogo era quello giusto per una compagnia di matematici: ai due brillanti studenti si aggiunge presto anche Vladimir Ivanovich Smirnov, anche lui nato proprio a San Pietroburgo, il 10 giugno[9] del 1887, e quindi giusto un anno più vecchio di Friedmann e Tamarkin.

Vladimir Ivanovich Smirnov

Nel 1905 Friedmann e Tamarkin scrivevano già insieme a proposito dei numeri di Bernoulli; è bene perdere i pochi secondi che servono a fare una sottrazione per capire che i nostri avevano al tempo la miseria di diciassette anni. Per quanto giovani, sottoposero il loro articolo nientepopodimeno che a Hilbert; questi lo trovò abbastanza interessante da concedere la dignità di pubblicazione sulla sua celebre rivista, i *"Mathematische Annalen"*. Il 1905 è "annus mirabilis" a casa Einstein, ma non si può certo dire che sia un anno tranquillo nella Russia degli Zar: in questo periodo Friedmann e Tamarkin non si limitavano a scrivere articoli di matematica, ma partecipavano anche alle manifestazioni di protesta contro le repressioni scolastiche. Erano giovani, appassionati, entusiasti: e, manco a dirlo, insieme si iscrissero all'Università di San Pietroburgo, nel 1906.

---

[7] Data ricalcolata in base all'attuale calendario. Nel 1888 in Russia non era ancora attiva la riforma gregoriana, ma questo è niente: alcune fonti riportano come data di nascita di Friedmann il 29 Giugno, a causa di due errori distinti: la data giuliana del 4 Giugno fu inizialmente convertita nel 17 (e qui c'è il primo errore, perché nel 1888 i giorni di differenza erano 12, e quindi il giorno ricalcolato sarebbe dovuto essere il 16), poi, senza accorgersi che il ricalcolo era già stato effettuato, da alcuni la data venne ulteriormente riconvertita, aggiungendo così altri 12 giorni e arrivando (17+12) al 29 giugno.

[8] Se vi state chiedendo come possa la "scuola più vecchia della città" avere per nome l'ordinale "Secondo", sappiate che ce lo siamo chiesto anche noi, senza vedere il dubbio risolto. Potremmo ipotizzare che il fantomatico "Primo Ginnasio" fosse già polvere, nel 1888, ma questa è pura illazione.

[9] È notorio che esistono delle regole ben precise per i compleanni di RM: la principale è che il matematico celebrato deve essere nato nel mese di uscita della rivista. Questa regola è stata violata solo per Archimede (o meglio: c'è una probabilità pari a 11/12 che la regola sia stata violata nel caso di Archimede) e per Littlewood, che era cointestatario con Hardy di un compleanno uscito a Febbraio, mese di nascita di quest'ultimo. Un altro compleanno doppio (Babbage-Lovelace) fruiva dell'eccezionale coincidenza del mese di nascita dei due protagonisti (Dicembre), ma non potevamo avere una speranza ragionevole di triplice concomitanza per un compleanno che intenda celebrare tre distinti individui. Ciò non di meno, avere due nati nello stesso mese su tre ci pare già un'ottima prestazione (senza contare che il terzo letteralmente "sfiora" il mese topico, e magari, potrebbe esserci qualche sovracorrezione gregoriana anche in quell'undici Luglio di Tamarkin…)

I primi anni del Novecento sono anni decisamente interessanti dal punto di vista storico e scientifico, e i nostri giovanotti perfetti abitatori dei loro tempi. Niente affatto disposti a lasciar disperdere la Compagnia del Ginnasio, all'università la confermano e allargano: fondano un gruppo di studio per l'Analisi Matematica e la Meccanica a cui parteciperanno, oltre a loro tre, anche Petelin, Schokhat, Besicovitch; e gli argomenti di discussione, oltre a quelli programmatici, erano naturalmente le giovani Teoria dei Quanti, la Relatività e la nascente Cosmologia. Questa "classe di studenti" aveva come professori, tra gli altri, Markov e Steklov, che non avevano certo difficoltà a rendersi conto dell'eccezionale valore dei loro studenti.

I nostri tre eroi venivano descritti così da una loro compagna: "*Friedmann, Tamarkin e Smirnov andavano spesso in giro insieme e venivano chiamati 'i ragazzi del Secondo Ginnasio'. Erano sempre eleganti e brillanti, e tra loro si chiamavano –anche in pubblico– con nome di battesimo e patronimico*". E chiamarsi con nome e patronimico, per i russi, equivale e darsi del tu.

Aleksandr Aleksandrovich era particolarmente interessato alle applicazioni fisiche della matematica, e verso la fine degli studi cominciò ad occuparsi di aeronautica e meteorologia teorica: si ritrovò ben presto a far parte di veri e propri voli sperimentali in aeroplano. Yakov Davydovich e Vladimir Ivanovich, invece, rimasero a lungo sotto l'ala protettiva di Steklov, e si dedicarono ad un approccio essenzialmente teorico e accademico, per intraprendere la carriera di docenza e ricerca. Il più prolifico dei tre nelle pubblicazioni scientifiche fu fin dall'inizio Smirnov[10], che peraltro pubblicò i suoi primi scritti in stretta collaborazione con gli altri due. Ma a parte queste differenze, tutto sommato poco significative, tutti e tre partecipavano attivamente nella vita universitaria e proseguirono gli studi per il dottorato, che conseguirono brillantemente. Fu a questo punto che, proprio mentre erano pronti ad iniziare le loro certo brillanti carriere, scoppiò la Grande Guerra. È il 1914, è il momento in cui la loro città cambia nome per la prima volta, diventando Petrograd; e c'è da chiedersi come deve aver vissuto la "degermanizzazione dei nomi" chi aveva cucito addosso un cognome poco slavo come Friedmann.

Forse anche per mostrare la sua fedeltà alla madre Russia, Aleksandr si arruolò immediatamente nel battaglione aereo; ma continuò a studiare matematica anche mentre volava e lanciava bombe. Sono anni eroici per l'aviazione, e tutto è ancora da inventare, perfino le tristi arti della guerra aerea: lo testimoniano le sue lettere dirette a Steklov, nelle quali descrive le sue osservazioni sulle traiettorie delle bombe, sottoponendo a verifica i calcoli teorici eseguiti precedentemente. È probabilmente proprio per questi meriti metà militari e metà matematici che gli fu assegnata una medaglia al valore; ma la Russia stava ormai per cadere preda alla doppia violenza della guerra e della rivoluzione. Mentre l'esercito russo si ritira dal fronte, Friedmann fu inviato a Kiev a tenere corsi di aeronautica per piloti, e poi a Mosca.

Tamarkin e Smirnov, nel frattempo, continuavano ad insegnare, il che, per quei tempi, significava semplicemente cercare di sopravvivere. Nei confusissimi tempi della Rivoluzione Russa, quando le Armate Rossa e Bianca lottavano per il controllo di ogni piccolo angolo di paese, l'Università di San Pietroburgo riuscì in qualche modo a creare una piccola isola ragionevolmente tranquilla, almeno se commisurata agli stravolgimenti tutto intorno. Nel 1916 era infatti stata creata, quasi per partenogenesi da quella di San Pietroburgo (pardon, Petrograd) l'Università di Perm. Era istituzione indipendente e divenne presto una sorta di rifugio dalle tempeste rivoluzionarie. Era un buon posto per ricostituire la Compagnia del Ginnasio, specialmente se si considera che nuovi elementi freschi sembravano avere tutte le caratteristiche per entrare a far degnamente parte del gruppo. Yakov Tamarkin ci lavorò a lungo come professore e decano (si era nel frattempo

[10] E siamo certi che la cosa non sorprende affatto coloro che hanno ancora, in libreria, tutti i tomi del suo celeberrimo "Corso di Matematica Superiore". E non saranno pochi, tra i lettori di RM…

sposato), e Aleksandr ci arrivò nel '18. Vladimir Smirnov restò assente alla chiamata: si era trasferto a Simferopol, nel sud dell'Ucraina. Ma altri nomi, altri "pupilli di Markov" arrivarono a Perm, e tra questi nomi destinati a diventare ben celebri, come quelli di Besicovitch[11] e Vinogradov.

Friedmann è inquieto come gli anni che sta vivendo: da Perm torna a Petrograd ,e qui comincia una attività sfrenata: insegna all'Università e al Politecnico, lavora per il dipartimento di Aeronautica Applicata[12], all'Accademia Navale e contribuisce alla Commissione Atomica dell'Istituto dell'Ottica. Col senno di poi – non disgiunto da una buona dose d'irrazionale fatalismo – si potrebbe anche pensare che sentisse in qualche modo che non gli erano concessi molti giorni da vivere. Ma se fosse mai vero che, come dice Menandro, "muor giovane colui ch'al cielo è caro", va quantomeno riconosciuto che il cielo concesse a Friedmann il tempo per fare la sua scoperta più grande. La Relatività Generale, per quanto scritta nel 1915 e pubblicata nel 1916, era rimasta sostanzialmente sconosciuta in Russia a causa della Grande Guerra prima e della Rivoluzione poi. Ciò non di meno, Friedmann procedette ad analizzarla partendo dagli assiomi einsteniani della Relatività Ristretta. Da questi arrivò ad una conclusione sorprendente, che riportò in una memoria titolata "Sulla Curvatura dello Spazio" che pubblicò nel 1922 sullo "*Zeitschrift für Physik"*. Il senso ultimo dell'articolo era dirompente: in tempi nei quali la possibilità di un Universo in espansione era lontanissima da qualsiasi ipotesi cosmologica, Friedmann mostra che il raggio di curvatura dell'Universo poteva non solo essere una variabile crescente, ma addirittura anche un parametro ciclicamente dipendente dal tempo. In un'epoca in cui neppure la vivissima immaginazione di Albert Einstein era pronta a visualizzare un Universo che non fosse pigramente stazionario, la scoperta di Aleksandr Friedmann non riceve la dovuta attenzione. Einstein, venuto a conoscenza della tesi di Friedmann, scrive una lettera in cui lascia intendere che i calcoli del russo sono sbagliati, e non soddisfano le equazioni di campo. Con una certa classe, Friedmann prende in mano carta e penna, scrive una seconda lettera al padre della Relatività allegandogli tutti i calcoli fatti, e concludendo con la garbata richiesta: "*Se doveste ritenere che i presenti calcoli sono corretti, vorreste essere così gentile da informare della cosa gli editori del Zeitschrift für Physik? Forse voi potreste, in questo caso, pubblicare una correzione al vostro iniziale giudizio, o far in modo che una parte di questa mia lettera sia pubblicata…"* che mostra come il nostro non avesse in realtà davver nessun dubbio che a sbagliare, per una volta, fosse stato proprio Einstein.

Seppur in ritardo – e anche per cause indipendenti dalla sua volontà – Einstein venne in possesso della lettera di Friedmann solo dopo qualche anno: non esitò a quel punto a riconoscere il proprio errore. Nel frattempo Aleksandr aveva cominciato a viaggiare molto e conosciuto matematici europei in Germania e Danimarca. Intensamente come solo lui sapeva vivere, nel 1925 aveva già terminato la sua parte dell'avventura terrena per colpa d'una febbre tifoidea. Ma aveva lasciato alle sue spalle una nuova teoria che avrebbe cambiato il mondo: di lui dissero che "*come Copernico aveva fatto ruotare la terra intorno al sole, Friedmann aveva fatto espandere l'Universo, e posto le basi per la teoria del Big Bang"*.

E gli altri della Compagnia del Ginnasio?

[11] In lui Friedmann vide l'autentico erede di Markov, e non solo per meriti matematici. Quando nel 1919 anche l'università di Perm finì nell'occhio del ciclone delle lotte tra le armate, solo Besicovitch mantenne la calma necessaria a salvare il salvabile, mentre tutti gli altri si lanciavano in fughe disordinate. Scrisse a questo proposito Aleksandr Aleksandrovic: "*La sola persona a non perdere la testa che riuscì a salvare quanto rimaneva della sua proprietà fu Besicovitch, che si dimostrò pertanto discepolo di Markov non solo in matematica, ma anche per ciò che riguardava il modo di agire deciso, preciso e risoluto."*

[12] È un divertente segno dei tempi notare che il citato "Dipartimento di Aeronautica Applicata" fosse una sezione del più comprensivo "Istituto d'Ingegneria Ferroviaria".

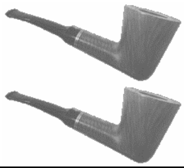
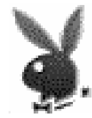
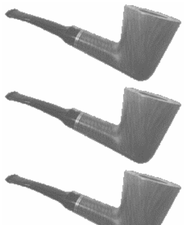
Nell'anno in cui Friedmann moriva, dopo aver prodotto numerosi scritti e libri di testo per ingegneri e matematici, Yakov Tamarkin cominciava a soffrire troppo la pressione politica. Era di famiglia benestante, mal sopportava il regime sovietico, e infine riuscì a emigrare in America. Qui contribuì radicalmente alla formazione di quella cultura matematica che solo nel ventesimo secolo attecchisce pienamente nel nuovo mondo: spese vent'anni a promuovere la ricerca e fu estremamente attivo come partecipante e espositore in conferenze e attività nel mondo matematico americano. A lungo vicepresidente della prestigiosa American Mathematical Society, si spense per un attacco di cuore nel 1945. Vladimir Smirnov, invece, era tornato a San Pietroburgo – ora Leningrad – nel '22. Da lì fu il massimo esponente della Società Matematica sovietica, e continuò attivamente nel ruolo di divulgatore fino alla fine, nel 1974.

A guardare indietro, i tre della Compagnia del Ginnasio sembrano proiettare ombre dello stesso colore, ma di ben diversa estensione. È comparabile la lunga, ma tutto sommato tranquilla e priva di acuti carriera di Smirnov, con la forte personalità ribelle di un Tamarkin, che, rifugiato politico, scappa da una rivoluzione per cambiare continente e fecondare una nuova era matematica in un nuovo posto? E, per quanto questo possa essere notevole, è mai paragonabile con la fervida e luminosa breve vita di Friedmann, che vedeva la matematica sia sui simboli nelle lavagne che dall'alto dei biplani, e che ebbe il coraggio di lasciar crescere, evolvere, sviluppare l'intero Universo che tutti, perfino il sommo Einstein, si ostinava e vedere pigro e fermo? Ha senso, ricondurre tutti allo stesso liceo, ai loro quindici anni, al quartiere della loro città dai molti nomi? Sia il vecchio professore russo morto quasi novantenne, sia il giovane genio che sembra vestire il verso di Menandro ancor meglio di quanto lo faccia il Pelide Achille?

Certo che ha senso. Nell'epopea della Compagnia dell'Anello, persino il più debole e fragile, persino Gollum ha il suo ruolo essenziale: perché non è misurabile quel che lui fa e produce, senza contare come influenza e come viene influenzato dagli altri. Se Friedmann alla fine brilla di più degli altri, è anche vero che all'inizio era colui che meno brillava, dei tre. Ma la compagnia di Tamarkin e di Smirnov ha compiuto la trasformazione. Avrebbe davvero visto l'inimmaginabile fuga delle Galassie, Friedmann, senza le lunghe ore passate a discutere con i suoi due compagni?

Non possiamo saperlo; ma siamo pronti a scommettere di no.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Una di otto con uno da sei			
Il contrario di un vecchio problema			

2.1 Una di otto con uno da sei

Prima una domanda retorica. Dell'epica narrazione dei festeggiamenti per il centesimo numero, quale argomento ritenete abbia causato il massimo spargimento di inchiostro virtuale da parte dei nostri lettori?

Poi una risposta retorica. Il numero cento? Nooo! Come ci eravamo scambiati i ruoli[13]? Nooo! La storia dei microprocessori Intel? Nooo! Semplicemente, che cosa avevamo bevuto.

Va detto che, per l'occasione, era stato scelto un ristorante *serio*, con un menù *serio* e una dotazione di vini *seria*; talmente seria che anche Rudy, ad un certo punto, si è trovato in dubbio. Infatti a suo insindacabile giudizio c'era la possibilità di abbinare le cibarie a ***otto*** vini che considerava ugualmente validi; siccome Alice e Doc avrebbero dovuto guidare (dovreste ricordare che questo è un onere che Rudy lascia volentieri ad altri) e visto quello che guadagnamo da questa rivista, la soluzione "ce ne beviamo otto" era assolutamente improponibile; si è quindi deciso di affidare la decisione al caso, fornendo un'egual probabilità a tutti i vini. E qui è nato il problema.

Infatti, Rudy aveva un solo dado; una volta tanto "sano", ma inesorabilmente a 6 facce! La proposta di tirarlo 3 volte in modo da avere uno spazio dei risultati multiplo di 8 veniva immediatamente bocciata (per evidenti motivi: se non ve li ricordate, provate con due dadi: si chiama "distribuzione triangolare"); non solo, ma (data la *serietà* del ristorante) non potevamo aprire una specie di bisca lanciando un mucchio di volte un dado, e ci siamo messi a pensare...

Con l'arsura che ormai prosciugava i neuroni, Alice ha ad un certo punto trovato un modo che garantiva una distribuzione uniforme dei risultati con pochi lanci; abbiamo applicato il metodo e, scelta la bottiglia, finalmente è cominciata la festa.

[13] Nota a margine: come narriamo in altra parte della rivista, lo scambio di ruoli non ha coinvolto Rudy, che considera la notazione decimale una mera convenzione. Quando gli è stato chiesto per che numero ha intenzione di festeggiare, dopo la scontata battuta che con certi collaboratori ci sarebbe da festeggiare tutti i mesi già solo per il fatto che si riesce ad uscire, ha sadicamente proposto "Chiedetelo ai lettori... Ormai dovrebbero conoscermi abbastanza bene". Data l'aleatorietà della risposta, *a tutti i partecipanti* al gioco verrà regalato un abbonamento a RM.

Verso la metà bottiglia, Doc se ne è uscito con un "Si può fare con meno!", bellamente ignorato dai commensali impegnati in una faraonica grigliata mista; arrivati ai formaggi (e a fondo bottiglia) Rudy ha esclamato "...con ***molto*** meno!".

Insomma, si tratta di sceglierne (uniformemente) ***una*** tra ***otto*** tirando il minor numero di volte possibile un dado da ***sei***... Avete delle idee?

Comunque, un paio di risposte ve le diamo: ha vinto il Carema, ma per il formaggio (decisamente stagionato) Rudy ha imposto un Passito di Caluso.

2.2 Il contrario di un vecchio problema

Sapete tutti che a Rudy è particolarmente simpatico il calcolo delle probabilità, e sapete tutti che ad Alice il suddetto risulta particolarmente antipatico; se comunque chiedete a Rudy quale sia il suo concetto preferito in quest'ambito, vi risponderà sicuramente che è il "valore atteso"; potete indovinare facilmente quale sia per Alice il concetto più antipatico[14].

Qualche tempo fa vi avevamo presentato in merito un problema bellissimo (opinione di Rudy: il titolo era "Un comportamento disgustoso") in merito, nel quale venivano annodati spaghetti sino ad ottenere un certo numero di anelli... Ma non è questo il problema. Anzi, una soluzione è il problema. Il dato fondamentale è che la nonna (paterna) di Fred taglia la pizza con le forbici, e quindi al momento del primo, dopo gli stuzzichini a base di pizza, sovente restano sul tavolo a non fare assolutamente nulla; Fred, di fronte alla sua abbondante razione di spaghetti annodati, è rimasto zitto per quasi tutto il tempo e ora, di fronte all'unico anello (non quello di Tolkien, quello di spaghetti) rimasto, si chiede che guaio combinare.

Impugnate le forbici, comincia a tagliare in punti accuratamente scelti a caso l'anello, ottenendo dopo n tagli una serie di n pezzi (giusto? Sì, giusto. Sbaglio sempre di ± 1, in questi casi); dopo un certo tempo ce ne accorgiamo e partono gli ordini di smetterla subito e comunque di mangiare quella roba. Rudy, però, ha l'aria doppiamente pensosa...

"Ma quanto ci si aspetta che sia lungo il pezzo più lungo?"

"E quanto ci si aspetta che sia corto il pezzo più corto?"

Siccome Fred sta mangiando piuttosto velocemente (ve l'abbiamo detto, che sta ingrassando? Soprannome Homer Simpson), ormai è tardi per l'approccio sperimentale; secondo voi, quali sono i valori attesi?

3. Bungee Jumpers

Provate il (piccolo) Teorema di Fermat: se p è primo, allora qualunque sia $a \in N$, $a^p - a$ è divisibile per p.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Giù la maschera, ragazzi, sono decisamente scocciata con voi.

So che leggete un po' queste righe, e lo fate perché non vedete l'ora di scoprire come altri hanno affrontato i problemi che vi hanno fatto più o meno penare durante lo scorso mese,

---

[14] Non vorremmo che le legioni di supporter di Doc si sentissero in ambasce: in questi casi di solito lui comincia a concionare sul fatto che proprio per il fatto di chiamarlo "atteso" questa idea sviluppa simpatia: anzichè limitarsi a dire quante volte può andare male, misura quale debba essere la tua "tigna" (termine da lui molto amato) prima di cominciare a pensare che qualcuno sta barando.

o per trovar loro gli errori per far penare qualcun altro il mese prossimo... per cui niente scuse.

Insomma, il mese scorso la Redazione prova a scambiare ruoli, e solo ***Zar*** se ne accorge. Solo ***Zar***! Ma avete un'idea di cosa stiamo parlando? Ogni mese: più di milletrecento persone ricevono la rivista in posta; più di una ventina di nuove persone si iscrivono; almeno una cinquantina degli iscritti ci scrivono con assiduità, sempre gli stessi, che ormai consideriamo come parte della famiglia; riceviamo quasi duecento mail tra soluzioni, commenti, lamentele, iscrizioni, proposte (ovviamente spam esclusa), e ad ogni mail il nostro Postino risponde con commenti personalizzati; vi inviamo tra le venticinque e le trenta pagine di sudore e fatica. E nessuno si è accorto di qualcosa di diverso.

Diciamocelo, siete un vero disastro, ma vi vogliamo bene lo stesso, anche perché questo mese ci avete fornito tantissimo materiale per la rubrica delle soluzioni. E poi perché in tanti ci avete mandato auguri e giochi di parole sul numero cento. Cercherò quindi di essere breve e passarvi la parola.

4.1 [099]

4.1.1 Problema di economia

Ritorniamo su questo problema come promesso, anche perché ***Trekker*** non si è lasciato sfuggire la sfida e ha mandato nuovo materiale. Per prima cosa ha mandato una soluzione "classica":

> Proviamo a generalizzare un poco il problema.
>
> Sia *M* (M come Milione) il numero delle monete che vengono coniate ed immesse in circolazione all'inizio di ogni anno (nel caso proposto *M*=1'000'000).
>
> Sia (1-*q*) la "frazione" delle monete circolanti che vengono ritirate alla fine dell'anno (nel caso proposto 1-*q*=0.1, cioè *q*=0.9).
>
> Si ipotizzi che, essendo il numero delle monete "grande", sia "abbastanza lecito" trascurare che il numero delle monete circolanti, per sua natura, è un numero intero, ovvero diciamo che il numero Ni di monete circolanti nel corso dell'anno "i" è ... un numero reale.
>
> Supponiamo che all'inizio di ogni anno la sequenza delle operazioni della Zecca sia la seguente:
>
> 1. valutazione del valore atteso della moneta piu' antica circolante (qui, per me, "piu' antica" non significa necessariamente "coniata nell'anno zero");
> 2. "drenaggio" delle monete in circolazione nella misura di $(1\text{-}q)N_i$ (e quindi ne restano qN_i)
> 3. immissione di nuove *M* monete
>
> Con queste ipotesi è facile scrivere la seguente equazione alle differenze:
>
> $$N_{i+1} = M + qN_i \text{, con } i=0,1,2, \ldots$$
>
> Questa facile equazione alle differenze ha come soluzione "a regime" $\overline{N} = \frac{M}{1-q}$, cioè, per il caso proposto, $\overline{N} = 10^7$. Ponendo ora $B_i = N_i - \frac{M}{1-q}$ si ricava l'equazione (più semplice): $B_{i+1} = qB_i$, avente come soluzione $B_i = B_0 q^i$ e quindi $N_i = \frac{M}{1-q} + B_0 q^i$.

Ponendo ora $N_0 = M$ si ricava facilmente

$$N_i = \frac{M}{1-q} + \left(1 - q^{i+1}\right), \text{ con } i=0,1,2,3, \dots$$

Mettiamoci ora all'inizio dell'anno k e chiediamoci quale è il valore atteso delle monete più antiche circolanti.

Dobbiamo però fare una digressione.

Pensando al "drenaggio" delle monete verrebbe logico considerare che, togliendone globalmente $(1-q)N_k$, ovvero lasciandone qN_k , nella medesima proporzione vengano tolte dalla circolazione le monete coniate nell'anno 0, le monete coniate nell'anno 1,...., le monete coniate nell'anno (k-1). Ritenendo valida questa ipotesi "semplice" resterebbero, all'inizio dell'anno k, quindi, Mq^k monete coniate al tempo 0, Mq^{k-1} monete coniate al tempo 1, ..., Mq^{k-h} monete coniate al tempo h.

Ma così facendo non terremmo conto della "velocità di diffusione" delle monete nel territorio. Le monete immesse nel mercato nell'anno "h" saranno inizialmente "concentrate" vicino alla Zecca (o meglio nei punti di immissione delle monete) e, piano piano, in relazione agli scambi fra venditori e compratori, si diffonderanno nel territorio. La "costante di diffusione" dipende dal grado di "sviluppo economico" della società considerata, dalla quantità di monete già in circolazione, dalla sua rete di trasporto, dal PIL, dalla facilità di accesso a finanziamenti, etc. Diciamo anche che una società popolata prevalentemente da "Internet natives", probabilmente, eseguirà la maggior parte delle transazioni via Internet, Carta di Credito, Bancomat, o altri mezzi di tipo peer-to-peer, "rallentando" la diffusione delle monete coniate. Analogamente i centri di "rastrellamento" delle monete vecchie potrebbero essere distribuiti sul territorio. Tenendo conto di tutte queste variabili macro-economiche, riassumiamo dicendo che il valore medio delle monete coniate al tempo "i" rimaste in circolazione fino all'inizio dell'anno "k" è esprimibile con $Mp(i,k)$ (con l'ipotesi "semplice" si avrebbe $p(i,k)=q^{k-i}$).

Ora l'incaricato del Ministero del Tesoro all'inizio dell'anno k (con k "grande[15]") si chiede quale è la probabilità che ci siano monete coniate all'istante zero ancora in circolazione. Diciamo che la risposta è rappresentabile col rapporto fra monete residue coniate nell'anno zero e le monete totali circolanti (prima del k-esimo ritiro e prima della nuova immissione) cioè:

$$\frac{Mp(0,k)}{N_{k-1}} \text{ e queste monete hanno un'età pari a } k$$

Lo stesso incaricato si chiede quale è la probabilità che siano le monete coniate al tempo 1 quelle più vecchie. Si può ritenere che questa probabilità sia uguale alla probabilità che ci siano ancora in circolazione monete coniate al tempo 1 moltiplicato per la probabilità che NON ci siano più monete in circolazione coniate

---

[15] Per k=1 è facile stimare che le monete più antiche in circolazione sono quelle coniate al tempo 0 (con età=1). Mentre per tutti i k interi positivi tali che $k \le 1 + \frac{q}{1-q}\left(1-q^k\right)$, sicuramente esisterebbero monete coniate al tempo 0 (con età=k) in circolazione poiché se, nel caso più "sfavorevole", il "drenaggio" riguardasse soltanto queste monete "speciali" servirebbero, **di sicuro**, alcuni anni per farle sparire completamente, precisamente il più grande numero k di anni tali che $\sum_{i=0}^{k-1}(1-q)N_i \le M$ (da cui con semplici elaborazioni si trova la formula di cui sopra). Ad esempio, nel caso proposto, per i primi 4 anni il valore atteso dell'età delle monete più antiche corrisponde proprio all'età delle monete "speciali" coniate al tempo 0.

nell'anno zero. La probabilità che ci siano monete coniate nell'anno 1 è rappresentabile col rapporto fra monete residue coniate nell'anno 1 e le monete circolanti, cioè $\frac{Mp(1,k)}{N_{k-1}}$, mentre la probabilità che NON ci siano monete coniate al tempo 0 è, per quanto visto prima, rappresentabile con $1-\frac{Mp(0,k)}{N_{k-1}}$. In sintesi la probabilità che le monete coniate al tempo 1, viste all'istante *k* prima del *k*-esimo ritiro, siano le più antiche si può esprimere con:

$\frac{Mp(1,k)}{N_{k-1}}\left(1-\frac{Mp(0,k)}{N_{k-1}}\right)$ e queste monete hanno un'età pari a (*k*-1)

In generale all'inizio dell'anno *k*, le monete coniate al tempo *h* (con *h*<*k*) saranno le più antiche – e con un' età pari a (*k*-*h*) - solo se non ci saranno più monete in circolazione coniate in (*h*-1), (*h*-2), ..., 1, 0. La probabilità che questo sia vero è rappresentabile con

$\frac{Mp(h,k)}{N_{k-1}}\prod_{i=0}^{h-1}\left(1-\frac{Mp(i,k)}{N_{k-1}}\right)$ e queste monete hanno un'età pari a (*k*-*h*).

In sintesi il valore atteso E_k (valutato prima del *k*-esimo ritiro) dell'età delle monete più antiche è esprimibile con:

$$E_k = k\frac{Mp(0,k)}{N_{k-1}} + \sum_{n=1}^{k-1}(k-h)\frac{Mp(h,k)}{N_{k-1}}\prod_{i=0}^{h-1}\left(1-\frac{Mp(i,k)}{N_{k-1}}\right), \quad k \quad grande$$

$$N_i = \frac{M}{1-q}\left(1-q^{i+1}\right), \qquad i = 0,1,2,3,...$$

...formula sufficientemente "complessa" da "meritare" una soluzione solo... "numerica"...

Ed ora la seconda versione di ***Trekker***:

Proviamo a generalizzare un poco il problema.

Sia *M* (M come Milione) il numero delle monete che vengono coniate ed immesse in circolazione all'inizio di ogni anno (nel caso proposto *M*=1'000'000).

Sia (1-*q*) la "frazione" delle monete circolanti che vengono ritirate alla fine dell'anno (nel caso proposto 1-*q*=0.1, cioè *q*=0.9).

Supponiamo che all'inizio di ogni anno *k* la sequenza delle operazioni della Zecca sia la seguente:

1. valutazione dell'età della moneta piu' antica circolante (qui, per me, "piu' antica" non significa necessariamente "coniata nell'anno zero");
2. ritiro di parte delle monete in circolazione[16];
3. immissione di nuove M monete

Supponiamo che le monete coniate nel passato ad ogni "ritiro" si riducano tutte nella medesima proporzione, cioè il ritiro delle monete in circolazione "colpisca" tutte le monete con la medesima probabilità.

[16] Se la valutazione dell'età della moneta più antica fosse fatta dopo il "ritiro" la stessa età della moneta più antica differirebbe di 1 da quanto ci accingiamo a calcolare

Mettiamoci ora all'inizio dell'anno k (che per il momento supponiamo "grande" abbastanza, riservandoci di precisare successivamente che cosa si intenda) e chiediamoci quale è l'età delle monete più antiche circolanti.

Le monete coniate nell'anno (k-1) sono M (giova ripetere ancora che abbiamo deciso di misurare l'età delle monete rimaste prima del k-esimo ritiro) ed hanno età pari a 1; le monete coniate in (k-2) sono rimaste qM ("trascuriamo" il fatto che il numero delle monete dovrebbe essere un numero intero) ed hanno età pari a 2; le monete coniate in (k-h) sono rimaste $q^{h-1}M$ ed hanno un'età pari a h; ed infine le monete coniate in (k-h-1), cioè ancora prima, sono rimaste q^hM.

Forse conviene sintetizzare in una tabella.

Monete coniate all'istante	**all'istante k (prima dell'operazione di ritiro) sono**	**ed hanno età pari a**
k-1	M	1
k-2	qM	2
k-3	q^2M	3
…	…	…
k-h	$q^{h-1}M$	h
k-h-1	q^hM	h+1

Supponiamo per il momento che, in modo che la tabellina di cui sopra abbia senso, k-h-1≥0 (l'avevamo detto che k doveva essere "grande").

Le monete più antiche in circolazione saranno quelle coniate in (k-h) se di quella annata ne è rimasta almeno una in circolazione e se, contemporaneamente, dell'annata precedente, cioè quelle coniate in (k-h-1), non ne restano più (e a maggior ragione per le monete delle annate ancora più remote).

Possiamo quindi scrivere il seguente sistema di disequazioni:

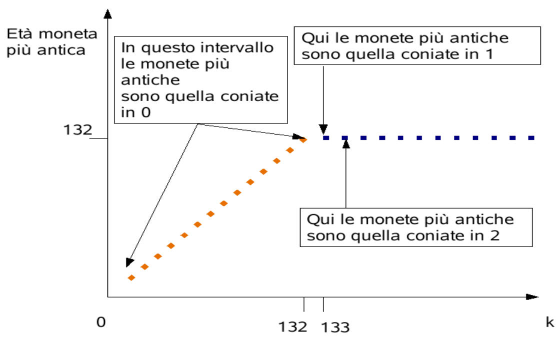
$$\begin{cases} Mq^{h-1} \geq 1 \\ Mq^{h} < 1 \\ k-h-1 \geq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è (come si ricava facilmente prendendo il logaritmo neperiano di entrambi i membri delle prime due disequazioni ed elaborando un pochino):

$$\begin{cases} \dfrac{-\ln(M)}{\ln(q)} < h \leq 1 - \dfrac{\ln(M)}{\ln(q)} \\ k \geq h+1 \end{cases}$$

Nel caso proposto con M=10^6 e q=0.9 si ha h=132 e k≥133[17].

In sintesi a partire dall'anno k=133 in avanti, la moneta più antica in circolazione ha un'età di 132 anni ed è stata coniata nell'anno (k-132) – in particolare nell'anno 133 la moneta più antica è quella coniata nell'anno 1-. Per tutti gli anni k tali che 1≤k≤132, la moneta più antica in



[17] Avremmo ottenuto h=131 e k≥ 132 se avessimo prima ritirato le monete e poi misurato l'età della moneta più antica.

circolazione ha un'età pari a k ed è stata coniata nell'anno 0. Il disegno a lato dovrebbe aiutare a comprendere l'evoluzione dell'età della moneta più antica.

Chissà se questo chiude la questione?

4.2 [100]

4.2.1 Aprile, finalmente!

Il problemino di logica è piaciuto molto: le soluzioni sono arrivate da ***FraPao***, ***Gabriel***, ***Fausto*** (benvenuto tra i solutori!), ***Socram*** (nuovissimo iscritto, che ci aveva mandato le soluzioni di RM099 proprio mentre distribuivamo RM100, benvenuto!), ***Zar***, ***Cid***, ***Michelangelo*** (che ha creato un bel programma java che trova la soluzione), e mentre chiudevamo il numero ***Cripol*** (benvenuto!).

Il problema era moderatamente facile, e vanta numerose citazioni in rete, ma come ben sapete a noi le soluzioni che piacciono di più sono le vostre, anche se non le possiamo pubblicare tutte. Ve ne passiamo due dai nostri solutori più instancabili, cominciando con ***Zar***:

Indichiamo la sequenza delle 20 risposte in questo modo:

```
12345678901234567890
aaaaaaaaaaaaaaaaaaaa
bbbbbbbbbbbbbbbbbbbb
cccccccccccccccccccc
dddddddddddddddddddd
eeeeeeeeeeeeeeeeeeee
```

La risposta alla domanda 20 è facile, ovviamente è la (e), e quindi arriviamo a

```
12345678901234567890
Aaaaaaaaaaaaaaaaaaa_
Bbbbbbbbbbbbbbbbbbb_
Ccccccccccccccccccc_
Ddddddddddddddddddd_
eeeeeeeeeeeeeeeeeeeE
```

Analizziamo ora la coppia 10-16: l'unica risposta ammissibile per la 10 è la (a), per la 16 è la (d), e quindi arriviamo a

```
12345678901234567890
aaaaaaaaaAaaaaa_aaa_
bbbbbbbbb_bbbbb_bbb_
ccccccccc_ccccc_ccc_
ddddddddd_dddddDddd_
eeeeeeeee_eeeee_eeeE
```

Qualunque sia la risposta che diamo alla domanda 7, osserviamo che questa implica che la 8 ha come soluzione (e):

```
12345678901234567890
aaaaaaa_aAaaaaa_aaa_
bbbbbbb_b_bbbbb_bbb_
ccccccc_c_ccccc_ccc_
ddddddd_d_dddddDddd_
eeeeeeeEe_eeeee_eeeE
```

Notiamo che la domanda 2 prevede che solo due domande consecutive abbiano risposte identiche (e non tutte le coppie di domande consecutive sono ammissibili, quindi possiamo cominciare a togliere alcune possibilità, e ci ricordiamo di farlo ogni volta che troviamo una risposta):

```
12345678901234567890
aaaaaaa_aAaaaaa_aaa_
bbbbbbb_b_bbbbb_bbb_
ccccccc_c_ccccc_ccc_
ddddddd_d_dddd_D_dd_
```

```
eeeeeeeEe_eeeee_ee_E
```

La risposta (a) alla domanda 13 è contraddittoria: se fosse vera sarebbe falsa. Quindi la scartiamo.

```
12345678901234567890
aaaaaaa_aAaa_aa_aaa_
bbbbbbb_b_bbbbb_bbb_
ccccccc_c_ccccc_ccc_
ddddddd_d_dddd_D_dd_
eeeeeeeEe_eeeee_ee_E
```

Le risposte (a) e (b) alla 1 sono contraddittorie, e anche la (c) è inaccettabile perché abbiamo almeno due risposte (e). Inoltre, siccome (b) è falsa, anche (2b) è da scartare. Infine, (3a) e (3b) sono automaticamente da scartare.

```
12345678901234567890
_a_aaaa_aAaa_aa_aaa_
___bbbb_b_bbbbb_bbb_
_cccccc_c_ccccc_ccc_
ddddddd_d_dddd_D_dd_
eeeeeeeEe_eeeee_ee_E
```

La domanda 9 non può avere come risposta (a), perché implicherebbe la (13a) che è stata esclusa. Quindi la 9 e la 10 non possono avere risposte identiche, quindi la (2d) è falsa. Scartiamo (7e) perché 7 e 8 non possono essere uguali. Se (5a) fosse vera, dovremmo avere (1a), no. Se (5b) fosse vera, dovremmo avere (2b), no. Se (1e) fosse vera avremmo che anche (5b) dovrebbe esserlo, no. Quindi cancelliamo (1e) e troviamo la risposta alla domanda 1. Questa ci dà automaticamente la risposta alla domanda 4, che è (b). E quindi (11a) è falsa, perché una (b) l'abbiamo già. Dunque 10 e 11 non possono essere uguali, e quindi scartiamo (2e). Infine scartiamo anche (5d), perché (4d) è falsa.

```
12345678901234567890
_a___aa__A_a_aa_aaa_
___B_bb_b_bbbbb_bbb_
_cc_ccc_c_ccccc_ccc_
D_d__dd_d_dddd_D_dd_
__e_ee_Ee_eeeee_ee_E
```

Ora consideriamo la coppia 6-17: se fosse (6a) dovremmo avere (17c), ma se fosse (17c) dovremmo avere (6e), quindi (6a) è da cancellare. Se fosse (17a) dovremmo avere (6c), ma se fosse (6c) dovremmo avere (17e), e questo non va bene nonostante la strana risposta (17e). Cancelliamo (17a) quindi. A questo punto possiamo rispondere alla 13: (13b) è assurdo perché (11a) è falso, (13c) anche perché contraddittorio, (13e) idem perché (17a) è falso. Rimane quindi (13d). Che subito ci dice che (15a) è vera, e quindi lo è anche (12a). Cancelliamo anche (14a) e (14d) per la 2. Anche (9c) è contraddittorio, perché implicherebbe (12c). Se (9e) fosse vero, questo vorrebbe dire che (14e) è vero, e che quindi ci sarebbero 10 domande con risposta (d): questo sarebbe impossibile, non ci sarebbero abbastanza domande disponibili. Quindi cancello (9e). Quindi 8 e 9 certamente non hanno risposte uguali, e arrivamo così a scartare (2c). Rimane quindi (a) come risposta alla 2. Come conseguenza si devono scartare (7a) e (6e).

```
12345678901234567890
_A_______A_A__A__aa_
___B_bb_b_b__b__bbb_
__c_ccc___c__c__ccc_
D_d__dd_d_d_D__D_dd_
__e_e__E__e__e__ee_E
```

Da (8e) deduciamo che ci sono solo 8 vocali; 6 ne abbiamo già trovate, al più una tra (18a) e (19a) possono essere vere, quindi ci sarà sicuramente almeno un'altra (e). Quindi (3c) è falsa. (6b) implicherebbe (17d), ma (17d) è falsa, quindi cancelliamo (6b). (6c) implicherebbe (17e), ma (17e) significa che tutte le risposte vanno bene nella 6, il che è assurdo. Quindi cancelliamo (6c), e così abbiamo trovato la risposta alla 6, cioè (d). Questo lascia libere solo le due possibilità (17a) e (17b), ma visto che (17a) è falsa rimane (17b). (E, in effetti, la riposta alla domanda 6 è proprio (d)). Dunque per la 2 anche (7d) è vera. E cancelliamo anche (18b) per la 2.

```
12345678901234567890
_A_______A_A__A__aa_
___B____b_b__b__B_b_
____c_____c__c___cc_
D_d__DD_d_d_D__D_dd_
__e_e__E__e__e___e_E
```

Vediamo ora la domanda 5: se fosse (5c) avremmo (3c), assurdo. Quindi (5c) è falso e rimane (5e). Il numero di domande precedenti alla 11 con risposta (b) potrebbe essere 1 o 2, quindi (11d) e (11e) sono da cancellare. Anche (14e) è impossibile, non ci sono abbastanza (d). Se poi fosse (9b) questo significherebbe (11b), ma avremmo 2 risposte precedenti alla 11 con risposta (b), e questo è contro (11b). Quindi cancelliamo (9b), trovando quindi (9d) come risposta. Troviamo quindi anche (11b). Inoltre (18c) non è più accettabile. Non dimentichiamo la 13: (19a) è falso. Allora, per la (4b), (18a) è vero. Siccome le 8 possibili vocali sono già state tutte usate (per (8e)), allora (3e) è falsa, e rimane (3d).

```
12345678901234567890
_A_______A_A__A__A__
___B______B__b__B_b_
_____________c____c_
D_D__DD_D___D__D__d_
____E__E___________E
```

Siccome ci devono essere 5 risposte (b), grazie alla (18a), dobbiamo scegliere la (14b) e la (19b), e così abbiamo finito.

```
12345678901234567890
_A_______A_A__A__A__
___B______B__B__B_B_
____________________
D_D__DD_D___D__D____
____E__E___________E.
```

Cid usa un altro metodo grafico e parte da un altro punto:

Sono partito dall'ipotesi che per ogni domanda esista una sola risposta giusta.

Di conseguenza essendo la risposta E della domanda 5 sicuramente vera, il primo dato certo è la risposta alla domanda 5.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e															

Un'altra domanda a cui è facile rispondere è la domanda 12, siccome il numero delle domande le cui risposte sono consonanti è un numero intero sicuramente o è pari o è dispari, di conseguenza le ultime tre risposte non sono giuste, di conseguenza so che il numero delle domande le cui risposte sono consonanti non è un quadrato perfetto (escludo 1, 4, 9, 16), non è un numero primo (escludo 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) e non un numero divisibile per 5 (escludo 5, 10, 15, 20).

Ho escluso tutti i numeri dispari, per cui deduco che è un numero pari.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e							a								

Per cui, di conseguenza, ho ricavato la risposta anche alla domanda 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e							a			a					

e di conseguenza anche alla domanda 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e							a	d		a					

La domanda 20 ammette una sola risposta ammissibile.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e							a	d		a					e

Le domande 10 e 16 ammettono una sola combinazione di risposte che le soddisfi entrambe

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
				e					a		a	d		a	d				e

La risposta alla domanda 1 si ricava facilmente, osservando che non può essere A perché si cadrebbe in contraddizione e per lo stesso motivo non può essere B, non può essere E perché la risposta alla domanda 5 non è B, non può essere C perché il numero di domande con risposta E è sicuramente maggiore di 1 (in quanto la domanda 5 e la domanda 20 hanno come risposta E). Dunque, la risposta alla domanda 1 è D.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d				e					a		a	d		a	d				e

e di conseguenza la risposta alla domanda 4 è B. (Quindi ci sono 5 domande con risposta A)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d			b	e					a		a	d		a	d				e

Siccome so che il numero delle domande le cui risposte sono consonanti è un numero pari, anche il numero delle domande le cui risposte sono vocali è un numero pari. Di conseguenza, essendo dispari il numero di risposte che hanno come risposta A, il numero di domande con risposta E deve essere un numero dispari). Per cui, la risposta alla domanda 3 è D, in quanto il numero di domande con risposta E deve essere un numero dispari maggiore di 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d		d	b	e					a		a	d		a	d				e

Da cui ricavo che la risposta alla domanda 8 è E (lo ricavo da: 5 + 3 = 8)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d		d	b	e			e		a		a	d		a	d				e

Siccome dalla domanda 2 so che la domanda 16 e la domanda 17 non possono avere risposta identica, deduco che la sola combinazione di risposte che soddisfi la domanda 6 e la domanda 17 è la seguente (D come risposta alla 6, e B come risposta alla 17)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d		d	b	e	d		e		a		a	d		a	d	b			e

La risposta alla domanda 2 si ricava notando che non può essere B, in quanto la risposta alla domanda 7 non può essere E avendo già trovato tutte e tre le domande con risposta E, non può essere C, in quanto la risposta alla domanda 9 non può essere E avendo già trovato tutte e tre le domande con risposta E, non può essere D perché le domande 2 e 3 non possono avere la stessa risposta altrimenti la domanda cadrebbe in contraddizione, non può essere E in quanto la risposta alla domanda 11 non può essere A avendo la domanda 4 la risposta B. Da cui ricavo che la risposta alla domanda 2 è A e la risposta alla domanda 7 è D.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	d	b	e	d	d	e		a		A	d		a	d	b			e

Per ricavare la risposta alla domanda 9 noto che: non può essere A a causa della risposta alla domanda 2, non può essere B perché se lo fosse allora la risposta alla domanda 11 non sarebbe B, non è C perché la risposta alla domanda 12 è A e non può essere E in quanto ho esaurito le domande con risposta E. Di conseguenza la risposta è D

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	d	b	e	d	d	e	d	a		A	d		a	d	B			e

Da cui deduco che la risposta alla domanda 11 è B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	d	b	e	d	d	e	d	a	b	A	d		a	d	B			e

La risposta alla domanda 18 la ricavo cosi: non può essere B in quanto finora non ho trovato domande con risposta C (quindi le domande con risposta C sono sicuramente meno di 5), non può essere C, in quanto ho già trovato 7 domande con risposta D (quindi le domande con risposta D sono sicuramente più di 5), non può essere D perché ci sono solo 3 domande con risposta E (quindi le domande con risposta E sono sicuramente inferiori a 5). Non può essere E in quanto ho esaurito le domande con risposta E. Di conseguenza la risposta è A.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	d	b	e	d	d	e	d	a	b	a	d		a	d	b	a		e

A questo punto, siccome devo avere cinque domande con risposta B deduco che la risposta alla domanda 14 e alla domanda 19 è B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
d	a	d	b	e	d	d	e	d	a	b	a	d	b	a	d	b	a	B	e

La domanda 14 è verificata in quanto ho sette domande con risposta D e la domanda 19 è ugualmente verificata.

Per cui risulta dimostrato che la soluzione trovata è l'unica soluzione possibile partendo dall'ipotesi che ogni domanda abbia una sola risposta.

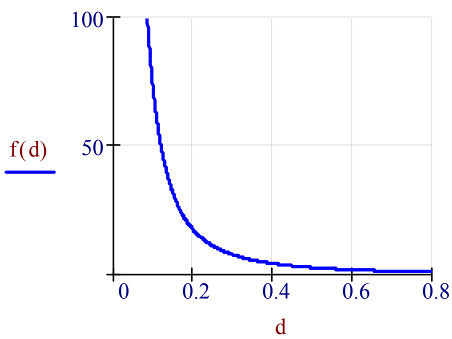
Tutti sono rimasti curiosi dell' *"arghatura"* del Capo, per cui vi diamo la sua (del GC in persona) spiegazione:

C'è qualcuno che comincia a chiedere dov'è l'*"Argh"* nel primo problema. È l'ultima domanda. L'originale era "Chi ha scritto questo pezzo è convinto che se al mattino ci sono le nuvole, piove". Le risposte erano tutte assurde (una coinvolgeva le conoscenze di storia degli idraulici), tranne la "E" che recitava "Siccome stamattina è nuvoloso, secondo l'estensore piove". L'*"Arghatura"* mia è consistito nel renderla completamente autoreferenziale, anche se forse sarebbe stato meglio mettere come risposte "(a):B; (b):C; (c):D; (d):A; (e):E".

Per finire, chiunque pensi che siamo degli sporcaccioni per la soluzione (*"Dad bedded a bad bad babe*[18]"), è uno sporcaccione per averlo pensato...

4.2.2 Il contrario di "Supertask"

In Redazione sono arrivate talmente tante soluzioni di questo problema di Cocacola che non sappiamo nemmeno più dove metterli, nei nostri scaffali virtuali. Grazie a tutti: ***Michele***, ***Giampietro Nardone***, ***MaMo***, ***Trekker***, ***Franco***, ***Fausto***, ***Filippo***, ***Frapao***, ***Michelangelo***, ***Cid***, ***BR1***, ***AGUP***. Vi assicuriamo che scegliere è difficilissimo, ma deve essere fatto. Il Capo si aspettava tutti si precipitassero a calcolare quale dovesse essere il rapporto tra la cannuccia e il bicchiere per poter effettivamente effettuare il task in un numero intero di passaggi. Da bravi matematici, ben pochi si sono avventurati in questa limitazione dettata dalla mera realtà... Un approccio di ***Michele***:

> Indichiamo con r_1 il raggio della cannuccia e con r_2 il raggio del bicchiere, e sia $d=\frac{r_1}{r_2}$ il loro rapporto. Sia h_n l'altezza della Coca-Cola nel bicchiere di Alberto al tempo n, cioè dopo aver effettuato n estrazioni della cannuccia piena. La successione h_n è descritta in modo ricorsivo come segue:
>
> $$h_{n+1} = h_n - d^2 h_n = \left(1-d^2\right) h_n .$$
>
> Si tratta dunque di una successione esponenziale di base $1-d^2$ e valore iniziale h_0:
>
> $$h_n = h_0 \left(1-d^2\right)^n .$$
>
> Il contenuto dei due bicchieri sarà uguale quando risulterà $h_n = \frac{1}{2} h_0$, cioè
>
> $$h_0 \left(1-d^2\right)^n = \frac{1}{2} h_0 ;\ \left(1-d^2\right)^n = \frac{1}{2} .$$
>
> e si vede che il risultato non dipende dall'altezza iniziale h_0 della Coca-Cola nel bicchiere di Alberto, ma solo dal rapporto tra i diametri della cannuccia e del bicchiere.
>
> Il numero di passaggi è dunque una funzione di d: $n = f(d) = \dfrac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(1-d^2\right)}$, il cui grafico nell'intervallo $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (con $d = \sqrt{2}/2$ basta 1 passaggio) è qui a destra.
>
> 
>
>
> Se, ragionevolmente, il diametro della cannuccia è da 1/40 a 1/25 del diametro del bicchiere, ci vogliono circa da 430 a 1100 passaggi. A meno di non usare una cannuccia delle dimensioni di una putrella, al ritmo di un passaggio ogni 3 secondi, ci vuole un'oretta buona per completare l'operazione (e nel

[18] Papà si è portato a letto una bambola particolarmente aggressiva... sic.

frattempo la Coca-Cola sarà in buona parte evaporata ...).

A noi la putrella ha fatto molto ridere, soprattutto perché in un messaggio successivo il Nostro ha commentato *"...ma si sa, questo non turba i matematici..."*, messaggio non in conflitto con le aspettative del Capo. La prossima è di ***Michelangelo***:

> Sia d il rapporto tra l'area della base della cannuccia e l'area della base del bicchiere. Il valore di d è strettamente compreso tra 0 e 1. Sia 1 il livello di Coca-Cola iniziale, sia 1/2 il livello a cui si vuole arrivare, sia n_i il livello al passo i.
>
> Il livello di Coca-Cola nel bicchiere soddisfa le 2 seguenti condizioni:
>
> 1) $n_i = n_{i-1} - n_{i-1} \cdot d$
>
> 2) $n_0 = 1$
>
> Si può dimostrare per induzione che se 2 funzioni soddisfano queste condizioni, allora le 2 funzioni sono uguali. C'è quindi al più una funzione che soddisfa le 2 condizioni. Si può ora dimostrare che esiste una e una sola funzione che soddisfa le 2 condizioni, esibendo una tale funzione.
>
> Sia $f(n) := (1 - d)^n$. Si può dimostrare che f soddisfa le 2 condizioni semplicemente sostituendo e calcolando. Ora, suppongo che quello che voi volete sapere è per quali valori di d esiste n tale per cui $1/2 = (1 - d)^n$.
>
> Infatti è solo per tali valori che il lavoro è possibile in un numero di passi finito. I valori del tipo $1 - 1/\sqrt[m]{2}$ sono soluzioni. La verifica è semplice: basta assegnare a n il valore m.
>
> Ora bisogna dimostrare che tutte le soluzioni sono di questo tipo. Siano $d1$ e $d2$ soluzioni diverse per un dato n.
>
> Si ha $1/2 = (1 - d1)^n = (1 - d2)^n$; poichè $d1$ e $d2$ sono entrambi comprese tra 0 e 1, $(1 - d1)$ e $(1 - d2)$ sono valori positivi, per cui si può estrarre la radice ennesima ed ottenere $1 - d1 = 1 - d2$, cioè $d1 = d2$, contraddizione. Per un dato n, ci può quindi al massimo essere una sola soluzione.
>
> Dato un n, $1 - 1/\sqrt[n]{2}$ è soluzione (si dimostra con il semplice calcolo). Questo significa che i numeri del tipo $1 - 1/\sqrt[n]{2}$ sono tutte e sole le soluzioni.

Giampietro, per non esagerare alla suo primo invio di soluzioni, ce ne ha inviato addirittura tre versioni, di cui pubblichiamo le ultime due, una molto matematica e l'altra no:

> Di seguito vi propongo un diverso procedimento per risolvere il problema della coca-cola. Chiamo r e R, con $r < R$ i raggi delle circonferenze di base rispettivamente della cannuccia e del bicchiere di Alberto, da cui derivano $V_c = r^2\pi h$ e $V_b = R^2\pi h$ i rispettivi volumi (h è ovviamente l'altezza). Dopo il primo passaggio di Alberto, il volume rimasto nel bicchiere sarà: $V_1 = V_b - V_c = h\pi(R^2 - r^2)$; e ricordando che $h_2 = \frac{h\pi(R^2 - r^2)}{R^2}$, al secondo passaggio avremo:
>
> $$V_2 = V_1 - V_c = h\pi(R^2 - r^2) - h_2\pi r^2 = \frac{h\pi(R^2 - r^2)^2}{R^2}$$

ad intuito oserei dire: $V_n = \dfrac{h\pi(R^2 - r^2)^n}{R^{2(n-1)}}$; e poiché ci interessa sapere quando questa quantità sia uguale esattamente a metà volume del bicchiere, dobbiamo risolvere la seguente equazione in funzione di n: $\dfrac{(R^2 - r^2)^n}{R^{2(n-1)}} = \dfrac{R^2}{2}$; da cui:

$$n = -\frac{\log 2}{\log\left(\dfrac{R^2 - r^2}{R^2}\right)}.$$

A questo punto chiamo $f = \dfrac{r^2}{R^2}$, da cui ricaverò: $n = \left[-\dfrac{\log 2}{\log(1-f)} \right]$

dove la parentesi quadra sta ad indicare "parte intera".

E la meno seria:

> Nella speranza che la coca-cola segua la legge dei vasi comunicanti, propongo questa eventuale soluzione che permette di avere la stessa quantità di liquido nei due bicchieri con un solo passaggio tramite la cannuccia. Avrete sicuramente gia capito cosa ho in mente di fare, ma comunque mi soffermo un po' a spiegare il passaggio.
>
> Supponiamo che i bicchieri siano di plastica (il fatto di essere cilindrici non ha alcuna importanza) e che la cannuccia a disposizione sia abbastanza resistente e fine (come quella dei barattoli di Estathé, per dare l'idea). La cosa che deve fare Alberto è quella di coprire con un qualcosa di aderente (può bastare il palmo della mano) e fare un piccolo foro al bicchiere poco sotto la metà dell'altezza dello stesso nel quale far passare la cannuccia. La coca-cola non fuori esce e nel frattempo Fred (che questa volta per sua fortuna non deve spettare un quarto d'ora per sorseggiare un po' di coca-cola) fa lo stesso sul suo bicchiere vuoto. Come è ovvio, Alberto inserisce la cannuccia nell'altro foro, toglie la mano dal bicchiere (o ciò che ha messo) e la coca-cola farà ciò che tutti sappiamo da quando frequentavamo le scuole medie (almeno credo). In un solo passaggio si avrà lo stesso effetto (anzi meglio) dei 45 che in media ci vogliono (f = 0.015). Ovviamente dopo basterà togliere la cannuccia coprendo ambo i bicchieri e chiudendo i fori con il comunissimo e reperibilissimo scotch.

Ovvio, ci avevate pensato tutti, ma lui non solo l'ha scritto, ma l'ha pure inviato. E per finire, ci teniamo a riportare la soluzione di ***Franco***, al suo primo tentativo:

> ***R*** il raggio del bicchiere
>
> ***r*** il raggio della cannuccia
>
> ***h₀*** l'altezza iniziale della Coca nel bicchiere
>
> $$V_0 = \pi R^2 h_0$$
> $$v_0 = \pi r^2 h_0$$
>
> $$V_1 = V_0 - v_0 = \pi(R^2 - r^2)h_0 = \pi R^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)h_0$$

Proseguendo con lo stesso ritmo risulterà: $V_n = \pi R^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n h_0$. La divisione della Coca è precisa quando $\boldsymbol{V_n = \frac{1}{2} V_0}$ ossia:

$$\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^n = \frac{1}{2}$$

$$n \cdot \log\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) = -\log 2$$

$$n = -\frac{\log 2}{\log\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

Per fare un esempio pratico, 330 ml di Coca in un bicchiere cilindrico del diametro di 5 cm lo riempiono per un'altezza di poco inferiore ai 17 cm (16,80...).

Se per fare il travaso utilizzo una cannuccia del diametro di 5 mm otterrò il risultato dopo 69 operazioni (in realtà in questo modo Alberto regala qualcosa di più della metà a Fred visto che il numero esatto di operazioni sarebbe dovuto essere 68,967...).

Se però Alberto non ha a portata di mano le tavole logaritmiche potrebbe accontentarsi di qualche calcolo approssimato: la media fra l'altezza iniziale e finale della Coca nel bicchiere è: $\bar{h} = \frac{3}{4} h_0$. Quindi il volume medio di ogni singolo travaso è: $\bar{v} = \pi r^2 \bar{h} = \frac{3}{4} \pi r^2 h_0$. Per travasare metà della Coca originariamente nel bicchiere dev'essere:

$$n \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} V_0$$

$$n = \frac{\frac{1}{2} \pi R^2 h_0}{\frac{3}{4} \pi r^2 h_0} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2}{r^2}$$

Con i dati di cui sopra risulta un numero di operazioni pari a circa 67 (66,666... per l'esattezza); non precisissimo ma neppure troppo lontano dal risultato esatto!

Non c'è più spazio, ma un paio di considerazioni di ***Trekker*** (per darvi un'idea di quello che ha scritto...) ve le diamo ancora:

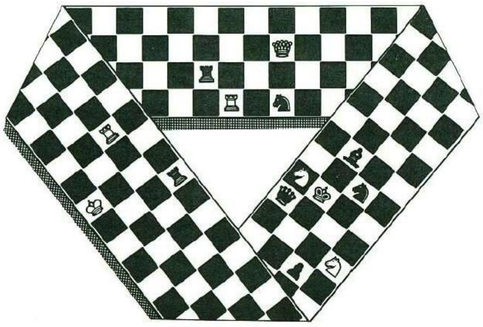
> Osservazione: se il bicchiere non fosse perfettamente rigido, a causa della differenza di pressione fra superficie e fondo, la sua forma "interna bagnata" "tenderebbe" ad essere simile ad un tronco di cono.
>
> Analogamente se la cannuccia non fosse perfettamente rigida, il suo spessore si "assottiglierebbe" verso il basso (dove la pressione e' maggiore). In questo caso il contenuto "pescato" andrebbe calcolato "combinando" le formule del volume dei due tronchi di cono. Decidiamo di trascurare questi effetti....
>
> [...] Osserviamo la condizione di equilibrio della cannuccia e del liquido contenuto. Il liquido al fondo della cannuccia, essendo in equilibrio con l'esterno, e' a pressione atmosferica [...]. E, come ben sanno i sommozzatori, la pressione "lungo la cannuccia" varia linearmente con la "quota/profondita'". [...]

E molto altro, che non vi immaginate neppure. ***BR1*** ci ha fatto morire dal ridere con le sue considerazioni iniziali:

> Stavolta, ci occupiamo dei travasi di Cocacola (oops; il correttore sintattico di Microsoft Word tenta di trascrivere Cocacola in *Coccola*, che tenero che è…). Ho fatto sforzi considerevoli per non mancare all'appuntamento col numero 100, spero apprezzerete l'impegno: altrimenti peggio per voi; mi avete proibito (nota 27 a pag. 13 del Vs. Ultimo Numero) di votare per Iva Matrix, e quindi beccatevi la lettura critica integrale di quel che segue…
>
> Bene; la prima considerazione generica che viene in mente, dopo appena un po' di riflessione, è che mancano alcuni dati… Questo vuol dire che bisogna fare *assunzioni ragionevoli*; vediamo quali:
>
> - Non sono noti i raggi delle sezioni dei bicchieri e della cannuccia; supponendo che il problema sia sensato, il diametro della cannuccia si presume *un po'* più piccolo di quello interno dei bicchieri;
> - Per precisare, se la sezione dell'interno della cannuccia fosse tale da consentire il travaso al primo colpo di più di metà del frizzante liquido, Alberto si troverebbe in una situazione insolubile: a parte la dimensione spropositata da assumersi per il dito tappante di Alberto (il pollice? l'alluce?), costui sposterebbe una quantità troppo elevata di Cocacola già al primo passaggio…
> - Le bollicine della Cocacola non sono da tenersi in conto, si presume allora che queste siano ininfluenti. Se così non fosse, sarebbe necessario disporre di un report dettagliato circa la composizione chimico-fisica del composto, notoriamente segreta e conosciuta solamente da un ristretto numero di top-managers dell'Azienda produttrice del liquido in questione, managers che non viaggiano mai tutti insieme sullo stesso aereo, per non correre il rischio di privare il mondo di tale delizia…
> - Si assume poi che qui si stia parlando di una cannuccia ideale; tale cioè da avere uno spessore infinitesimale della sua parete. Si farà in seguito questa assunzione, altrimenti le cose si complicano anzichenò… Cioè, in soldoni, quando si immerge la cannuccia nel bicchiere per il prelievo, il livello del liquido non sale affatto. Se così non fosse, ci sarebbero alcuni casi interessanti da esaminare; ad esempio:
>   - Una cannuccia *spessa* con diametro esterno esattamente uguale al diametro interno del bicchiere, e di diametro interno infinitesimale: quando Alberto immerge tale *cannuccia* nel bicchiere, la Cocacola schizza via dall'esiguo pertugio a velocità infinita, violando la teoria della relatività, ed annaffiando totalmente i perplessi astanti
>   - Esiste poi un'infinità di cannucce di svariato spessore coron-circolarico che, immerse nel bicchiere, producono un innalzamento del livello della Cocacola tale da provocare la fuoriuscita del suddetto liquido (o meglio *liquame*? … non mi piace affatto la Cocacola…) dal bicchiere cedente…
> - Si assume poi che la cannuccia sia più alta del bicchiere (o almeno eguale in altezza…); in caso contrario, oltre alle complicazioni di calcolo per i volenterosi solutori, Alberto si ritroverebbe con le dita e forse anche l'avambraccio impiastricciato di Cocacola, che da parte sua è notoriamente e sgradevolmente appiccicosa; supponendo che Alberto indossi camicia o maglietta a maniche lunghe (siamo appena in primavera, effetto-serra dimenticando) si presume che egli faccia di tutto per evitare di inquinare l'abbigliamento. [...]

E con questo smettiamo, che se no Pagina 46 arriva veramente a quella pagina.

4.2.3 Il problema di scacchi in copertina

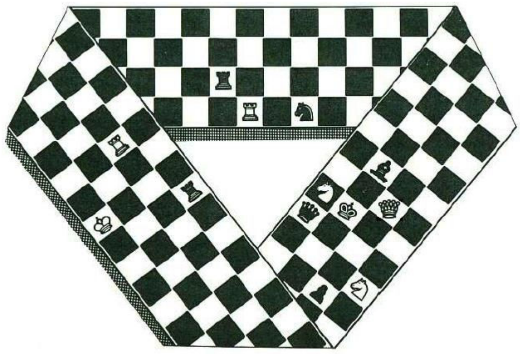


Non tutti hanno visto quante domande nascoste c'erano nel numero cento: in copertina c'era un problema di scacchi sul nastro di Moebius, e qualcuno ha pensato bene di risolverlo, ancora ***Giampietro*** e ***Cid***.

Giampietro in particolare ci tiene ad essere pubblicato nel numero "Dalmata" di RM (facendo riferimento alla "Carica dei 101"), ma siccome gli abbiamo dato spazio prima, pubblichiamo la soluzione di ***Cid***, che è più veloce.

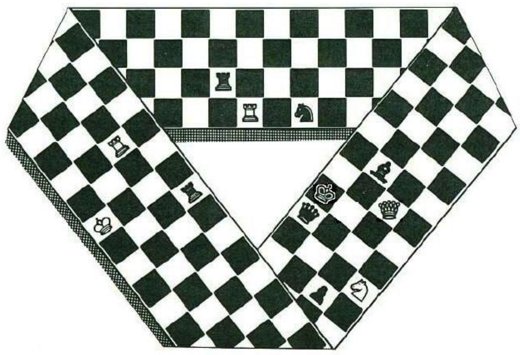
1° mossa del bianco

La regina bianca cattura il cavallo nero vicino al Re, e mette il Re nero sotto scacco.



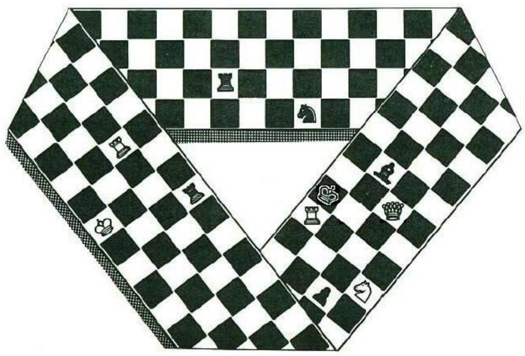
1° mossa del nero

Il Re nero ha una sola risposta possibile (catturare il cavallo bianco con il Re)



2° mossa del bianco

La torre bianca cattura la regina nera, e da scacco matto al Re nero.



Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Trovate tutti gli interi positivi ***x***, ***y***, ***z*** per cui:

$$x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}=\frac{10}{7}.$$

6. Pagina 46

È possibile una dimostrazione per induzione, piuttosto noiosa. Questa versione utilizza invece un ragionamento piuttosto interessante

Se a è divisibile per p, il risultato è ovvio. Supporremo quindi a non sia divisibile per p. In questo caso, anche gli interi a, $2a$, $3a$, $\ldots(p-1)a$ non saranno divisibili per p; non solo, ma forniranno tutti resti diversi tra loro quando vengano divisi per p.

Per provare questa affermazione, supponiamo per assurdo che ka e la, con $p-1\ge k>l$, diano lo stesso resto quando vengono divisi per p; in questo caso $ka-la=(k-l)a$ dovrebbe essere divisibile per p; il che è assurdo, in quanto p è primo, a non è divisibile per p e $k-l<p$.

Allora tutti i possibili resti $1,2,3,\ldots,(p-1)$ generabili attraverso la divisione per p risultano da queste divisioni; deve quindi essere:

$$\begin{aligned}&a=q_1p+a_1,\\&2a=q_2p+a_2,\\&\ldots,\\&(p-1)a=q_{p-1}p+a_{p-1},\end{aligned}$$

dove $a_1,a_2,\ldots,a_{p-1}$ sono gli interi positivi $1,2,\ldots,p-1$ presi in un qualche ordine.

Moltiplicando tra di loro queste uguaglianze, otteniamo:

$$\begin{aligned}&[1\cdot 2\cdots(p-1)]a^{p-1}=Np+a_1a_2\cdots a_{p-1},\\&[1\cdot 2\cdots(p-1)](a^{p-1}-1)=Np.\end{aligned}$$

E quindi segue che $a^{p-1}-1$ è divisibile per p e a^p-a è anch'esso divisibile per p.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Ef(phi)meri

Come dicevamo in altra parte della rivista, Rudy non si è sentito molto coinvolto dai festeggiamenti per il centesimo numero.

Il motivo è da ricercare nella seguente espressione:

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} k_i a^i, \quad a \in N, k_i \in \{0, \ldots, a-1\}.$$

Ora, il fatto che $\forall i \neq 2, k_i = 0, k_2 = 1$ suscita in lui un moto di interesse decisamente tiepido; infatti, trova la costanza di a estremamente noiosa: a questo punto, tanto vale imporre $a = 1$ e tornare a contare con i sassolini.

Potete quindi immaginarvi la sua gioia quando ha scoperto che qualche altro matto (oltre a lui: nella fattispecie, ***Zeckendorf***) aveva provato a giocare con degli aggeggi che, si presume, stiano simpatici ad entrambi.

Non dovreste avere problemi a riconoscere la serie[19]:

$$1,1,2,3,5,8,13,\ldots, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots$$

della quale abbiamo visto alcune interessanti proprietà quando eravamo piccoli; bene, l'idea è quella di usare questo aggeggio come ***base*** del sistema di numerazione; anzichè calcolare le potenze della base (attività piuttosto noiosa se, ad esempio, non si tratta della vostra base usuale... Provate a calcolare a mente 314159_{10} in base 16, ad esempio), ci si limita a vedere se "c'è" o "non c'è" nella rappresentazione come somma di termini della successione di Fibonacci.

Poco chiaro? Un esempio dovrebbe, si spera, chiarire tutto:

$$\begin{aligned} 10_{10} &= (1 \cdot 8) + (0 \cdot 5) + (0 \cdot 3) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) \\ &= 10010_{Fib} \end{aligned}$$

dove abbiamo messo i termini della serie di Fibonacci in ordine decrescente, abbiamo ignorato l'ultimo 1, abbiamo attribuito l'opportuno coefficiente a quelli che ci servivano, li abbiamo scritti di seguito e, per indicare che stiamo lavorando in una base un po' balorda, abbiamo inserito "Fib" a pedice.

I più veloci a far di conto tra di voi sono probabilmente pronti a sollevare una serie di obiezioni, del tipo:

$$\begin{aligned} 10_{10} &= (0 \cdot 8) + (1 \cdot 5) + (1 \cdot 3) + (1 \cdot 2) + (0 \cdot 1) = 1110_{Fib}; \\ 10_{10} &= (0 \cdot 8) + (0 \cdot 5) + (3 \cdot 3) + (0 \cdot 2) + (1 \cdot 1) = 301_{Fib}; \\ 10_{10} &= (0 \cdot 8) + (0 \cdot 5) + (0 \cdot 3) + (0 \cdot 2) + (10 \cdot 1) = A_{Fib}; \end{aligned}$$

dove con l'ultima ci siamo presi alcune libertà, ma è valida esattamente come le altre.

Già, almeno con le ipotesi che abbiamo fatto la scrittura ***non è unica***; ci possono essere svariati modi[20] per esprimere la somma; per fortuna, qui i nostri matti (non Rudy: l'altro)

[19] Sappiamo benissimo che si dovrebbe chiamarla "successione", ma tutti la chiamano serie e ci adattiamo.

[20] La domanda "Quanti?" sarebbe di rigore, in questo momento; non ve lo diciamo, ci limitiamo a comunicare che un'espressione (anzi, due: entrambe bruttissime) le ha trovate ***Vladeta Jovovich*** nel 2002.

ci arrivano in soccorso: infatti, si definisce ***Notazione di Zeckendorf*** la notazione in base di Fibonacci (Fibonaccimale? Fibonaccinaria? Fibonaccica? Boh) in cui:

1. Vengono usate solo le cifre 0 e 1;
2. Nella somma non vengono mai utilizzati due numeri successivi della serie

La seconda, detta in parole più semplici, significa che ***non ci saranno mai due cifre*** 1 ***vicine***; se nel conto vi vengono fuori due 1 vicini, eliminateli entrambi e scrivete 1 alla loro sinistra: il fatto che $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ fa sí che la somma non cambi ("...Ma lí c'è già un 1!" "Indovinate un po'...").

Due domande (serie, questa volta) nascono spontanee: "Sicuro di poterli scrivere ***tutti***?" e "Sicuro che l'espressione questa volta sia ***unica***?" Risposta sì ad entrambi: la prima è facile (per induzione), la seconda è più complessa (anche il nome di chi l'ha dimostrata è complicato: ***Lekkerkerker***, 1952). Se siete dei semplici come noi e vi accontentate di verificarlo per qualche numero, l'"Algoritmo del Goloso" permette di costruirlo piuttosto velocemente:

1. Prendete il più grande Numero di Fibonacci minore del numero dato
2. Scrivete 1 nella sua posizione lungo la successione
3. Sottraete il Numero di Fibonacci dal numero dato
4. Ricominciate da capo sin quando non vi resta 0

"Simpatico. E come ci fai di conto?" Non c'è problema. All'addizione dovreste arrivarci da soli, pensando che se io scrivo i due numeri uno sopra l'altro e li sommo, ottengo un numero di Fibonacci improprio che posso riaggiustare con il metodo visto sopra; nella peggiore delle ipotesi potreste ritrovarvi un 2, ma credo che un semplice esempio possa chiarirvi il concetto:

$$\begin{aligned} 5_{10} + 5_{10} &= 1000_{Fib} + 1000_{Fib} \\ &= 2000_{Fib} \\ &= 1110_{Fib} \\ &= 10010_{Fib} \end{aligned}$$

dove abbiamo sviluppato il 2 in tre 1 (la regola della serie di Fibonacci ce lo permette, anche se Zeckendorf non vuole) e poi lo abbiamo opportunamente riaggiustato partendo da sinistra.

Se qualcuno sta pensando che si stia ciurlando nel manico[21] e la si tiri lunga per non affrontare i casi complicati, una volta tanto ha torto: con questo aggeggio si riescono anche a fare le ***moltiplicazioni***. Ma prima un lontano ricordo (di quando Alberto mieteva allori alle elementari; adesso, rischia grosso in prima scientifico).

Vi ricordate come moltiplicavano gli egizi? L'avevamo spiegato, quindi limitiamoci ad un esempio; volendo moltiplicare $19 \cdot 65$, scriviamoli uno di fianco all'altro; poi iniziamo a ***dividere per*** 2 il primo (e scriviamo il quoto sotto il 19) e a ***moltiplicare per*** 2 il secondo (scrivendolo sotto il 65); se la divisione ci ha dato resto, aggiungiamo un segno $+$ di fianco; andiamo avanti sin quando possiamo dividere il numero nella prima colonna. Arrivati alla fine, sommiamo tra di loro tutti i numeri della seconda colonna di fianco

19	65	+
9	130	+
4	260	
2	540	
1	1040	+

Figura 1 – Moltiplicazione Egizia

[21] Sempre nell'ambito delle lezioni di torinese per Doc, chiariamo che questa espressione indica il tirare a fregare per omissione

ai quali troviamo dei segni $+$, e quello è il risultato. Trovate il tutto in ***Figura 1***: in pratica, $19 \cdot 65 = 65 + 130 + 1040 = 1235$. Come avemmo a dirvi, il fatto che $19_{10} = 10011_2$ dovrebbe essere illuminante nel capire la ragione.

E con la base di Fibonacci-Zeckendorf-Lerkenkerker è "quasi" la stessa cosa. Facciamo lo stesso calcolo.

Questa volta nella prima colonna scriviamo la serie di Fibonacci sin quando non abbiamo un valore che superi uno dei due fattori; nel nostro caso, ci fermiamo a 21 che è maggiore di 19.

Nella seconda colonna, sotto il 65, scriviamo il suo doppio (130) e continuiamo sommando sempre i due numeri scritti precedentemente, come se fosse una serie di Fibonacci che comincia da 65; andiamo avanti sin quando raggiungiamo la penultima riga. Questa volta, il segno $+$ lo inseriamo in quelle righe per cui la colonna sulla sinistra dà come somma 19; essendo $19_{10} = 100101_{Fib}$ [22], avete tutto in ***Figura 2***. Sommate i valori della colonna centrale con il segno in ultima colonna *et voila*.

1	65	+
2	130	
3	195	
5	325	+
8	520	
13	845	+
21		

Figura 2 – Moltiplicazione di "Z"

"Carino, ma... Utilizzi?" Beh, molto vicino allo zero, se si esclude che Rudy lo ha adottato come sistema di archiviazione a dodici cifre. Siccome crediamo non vi interessi, lo blocchiamo sin da subito.

Non crediate che la follia si fermi qui; si possono fare altri interessanti balzi nella complicazione, e il prossimo passo dovreste essere in grado di farlo da soli.

È facile dimostrare (per induzione) che:

$$\varphi^n = F_{n+1} + F_n \varphi, \qquad \text{[7.1]}$$

dove φ è la sezione aurea e F_n è l'$n-\text{esimo}$ termine della successione di Fibonacci; la cosa simpatica di questo oggetto è che funziona anche se estendiamo i numeri di Fibonacci a ***valori negativi***; infatti,

$$F_{-n} = \begin{cases} -F_n & \text{se } n = 2k \\ F_n & \text{se } n = 2k+1. \end{cases} \qquad \text{[7.2]}$$

Da cui la nostra serie diventa $\ldots,-8, 5,-3, 2,-1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8,\ldots$ Un po' saltellante, ma un attributo del genere si adatta ad un aggeggio nato per studiare la riproduzione dei conigli.

Ora, usando la **[7.1]** e la **[7.2]**, non è difficile ricavare una serie di espressioni del tipo:

$$\begin{aligned} \varphi^1 + \varphi^{-2} &= (F_2 + F_1\varphi) + (F_{-2} + F_{-1}\varphi) \\ &= (1 + 1\varphi) + (1 - 1\varphi) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi^4 + \varphi^{-4} &= (F_4 + F_3\varphi) + (F_{-4} + F_{-3}\varphi) \\ &= (5 + 3\varphi) + (2 - 3\varphi) = 7. \end{aligned}$$

[22] Usate pure un'altra rappresentazione diversa da quella di Zeckendorf, tanto lui non si arrabbia e il giochino funziona lo stesso.

...e, barando (ma poco; basta ricordarsi che $\varphi^0 = 1$), si riescono ad ottenere anche altri numeri. E (sempre per induzione), si vede che non solo sono generabili ***tutti gli interi***, ma che la rappresentazione ***non richiede ripetizioni della stessa potenza***.

Non solo, ma potete scegliere, esattamente come nella notazione di Fibonacci: nella ***Tabella 1*** trovate ***due*** rappresentazioni in base φ per ogni numero: una senza 1 l'altra senza 0 consecutivi. Scegliete voi quella che preferite.

N.	R_1	R_0
1	1	1.
2	10.01	1.11
3	100.01	11.01
4	101.01	11.1111
5	1000.1001	101.1111
6	1010.0001	111.0111
7	10000.0001	1010.1101
8	10001.0001	1011.1101
9	10010.0101	1101.1101
10	10100.0101	1111.0101
11	10101.0101	1111.111111
12	100000.101001	10101.111111
13	100010.001001	10111.011111
14	100100.001001	11010.110111

Tabella 1 - Phimeri

Ora, potete immaginarvi in che stato fosse Rudy a questo punto; non solo aveva trovato una base "saltellante" con la notazione di Fibonacci, ma addirittura una base che, a fianco di un comportamento un po' più "normale" non solo non era basata su un valore intero, ma addirittura irrazionale; figuratevi quindi quale sia stata la sua delusione nello scoprire che pochissima gente ci aveva scritto qualcosa sopra; l'unico lavoro ragionevolmente serio (posto che si possa utilizzare un termine del genere in un campo così bislacco) sembra essere quello di ***Alexey Stakhov***: infatti, sta progettando un computer basato su questa numerazione.

Si accettano scommesse per sapere quale sarà il prossimo numero di RM che Rudy riterrà degno di festeggiamento...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms