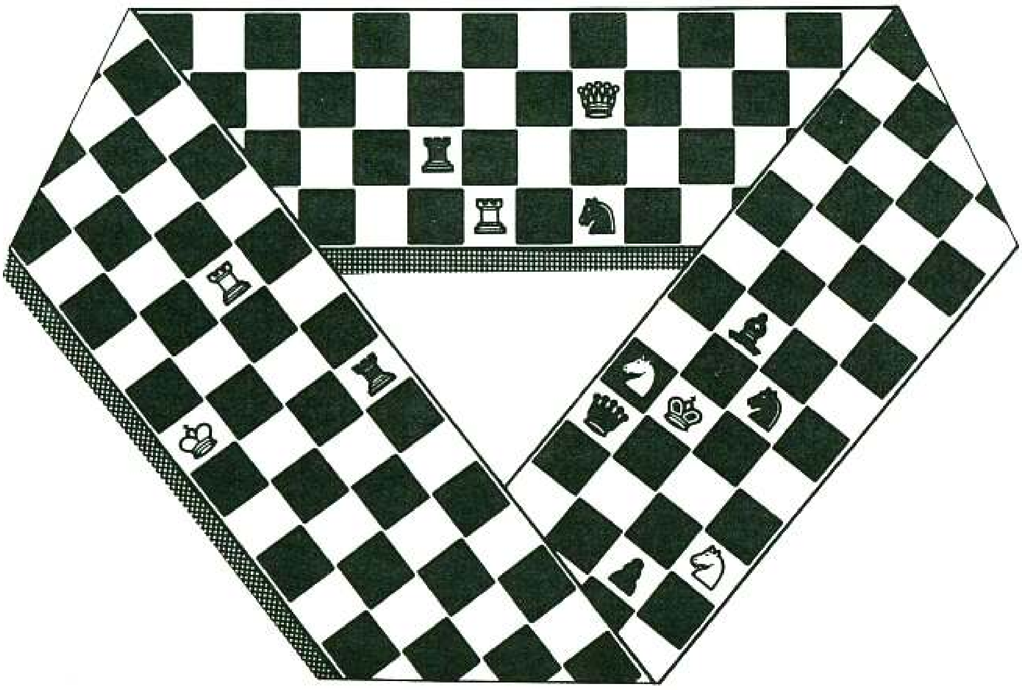
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 100 – Maggio 2007 - Anno Nono



Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 099 ha diffuso 1344 copie e il 01/05/2007 per Google eravamo in 19'800 pagine.

Siccome lo *Zugzwang!* di questo mese non ci sembra molto zugzvanghico, vi presentiamo un problemino inventato dal ***Team Ten*** della Lawrence U. *Il bianco muove e matta in due mosse.*

1. Diventare padrone dell'universo

Quod quaeris, deus est: conaris scandere coelum
fataque fatali genitus cognoscere lege
et transire suum pectus mundoque potiri.
pro pretio labor est nec sunt immunia tanta,
ne mirere viae flexus rerumque catenas.
admitti potuisse sat est: sint cetera nostra.[1]
(M. Manlii Astronomicon Liber Quartus)

"Tutti i limiti, specialmente quelli nazionali,
sono contrari alla natura della matematica"
(David Hilbert)

In un mondo in cui la stabilità è diventata un miraggio irrisorio, quasi tutti cercano di affidarsi a quel poco di stabile che hanno intorno, qualsiasi cosa che nell'arco degli anni sembri mantenersi ferma mentre il resto continua a turbinare irrefrenabile. Prendete l'esempio di Marco Manilio citato qui sopra, al quale possiamo attribuire (con una certa libertà dovuta al nostro "rude" approccio) l'invenzione dell'astrologia[2] nella sua visione moderna.

Marco Manilio era un poeta latino di cui si sa ancora ben poco, a parte che visse sotto gli imperatori Ottaviano Augusto e Tiberio[3] e che scrisse un poema didascalico in esametri diviso in cinque libri intitolato "Astronomica". L'opera parla principalmente di astronomia, descrive un cosmo che comprende le ipotesi sulla sua origine, le stelle, i pianeti, i circoli celesti, le comete, spiega le caratteristiche dei segni dello zodiaco e le possibilità offerte dalle loro congiunzioni: insomma il modo di determinare l'oroscopo e l'influsso dei segni zodiacali sui corpi umani.

Duemila anni sono passati da quando Manilio scriveva di quanto immutabile sia il destino umano e di quanto liberatorio possa essere semplicemente accettare un fato assegnatoci dalle stelle, e ancora oggi gli uomini si interrogano sulle leggi che regolano l'universo, oppure leggono i loro oroscopi mentre salgono sul tram verso l'ufficio, preparandosi a scoprire cosa significava quel "tensioni all'orizzonte sul fronte lavorativo". Per fortuna chi analizza e studia le leggi dell'universo non legge gli oroscopi[4].

Resta il fatto che l'essere umano è continuamente combattuto tra la necessità di certezze e il desiderio di avere a portata di mano i mezzi per essere padrone del proprio destino, di essere in grado di decidere per sé stesso. Per Manilio la libertà consisteva nell'essere in grado di conoscere le leggi che controllavano il suo destino, ma per la maggior parte di noi ciò non è sufficiente: vorremmo poter essere in grado di controllare ciò che ci circonda, controllare anche noi stessi e le nostre reazioni. Nei duemila anni che ci separano dallo stoico latino, l'umanità ha combattuto contro le leggi della fisica, ha cercato di rimodellare la natura e la stessa conformazione terrestre, ha studiato ed imparato a comprendere la

---

[1] "L'oggetto della ricerca è Dio; si cerca di scalare il firmamento e sebbene nati sotto la legge del fato, guadagnare conoscenza di quel fato; si cerca di passare oltre l'umana comprensione e diventare padrone dell'universo. La fatica necessaria è pari alla ricompensa per la vittoria, né conseguimenti così alti sono assicurati senza un prezzo.".

[2] L'astrologia, la matematica e la medicina sono state legate per lungo tempo: se vi prendete la briga di leggere dalla Settimana Enigmistica la "Spigolatura" numero 57701, scoprirete che ancora nel 1222 all'Università di Padova esistevano una cattedra di Astrologia e una di Matematica; materie utilizzate ampiamente dalla Medicina dell'epoca in quanto utilissime per prevedere i giorni critici delle malattie; non solo, ma la prima era grande motivo di vanto, in quanto nelle altre università non veniva insegnata: insomma, la punta di diamante della ricerca scientifica... [Rd'A]

[3] …quando il modo di contare gli anni passa da "prima" a "dopo" di...

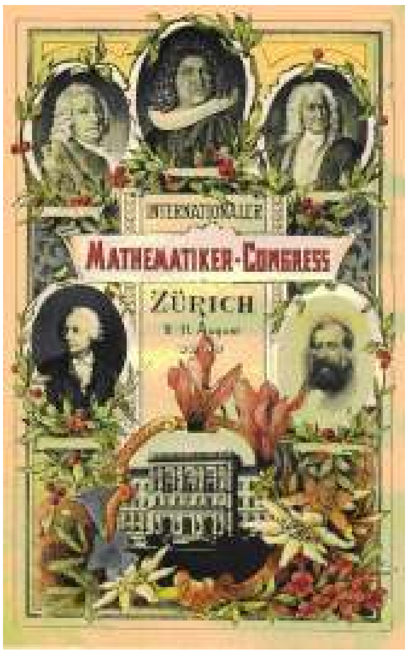
[4] Forse non li legge, ma non è detto che non ne scriva: Galileo Galilei (il padre del metodo scientifico, di cui si parla in RM085), in periodi di necessità finanziarie produceva oroscopi a pagamento, e così anche il nostro GC, per quanto narra la leggenda, perfettamente conscio di riscuotere una tassa sull'analfabetismo scientifico: investiva infatti il 100% del ricavato in libri di fisica, matematica e tasse scolastiche.

maggior parte dei fenomeni naturali, e purtroppo ha rimodellato parte degli equilibri che governavano il globo. Duemila anni è un arco di tempo spaventoso, se si pensa a quanto sia cambiata la faccia del mondo solo negli ultimi cinquanta.

E forse anche per questo l'uomo moderno si affida disperatamente a piccole e grandi cose che lo possano ancorare a qualcosa di immobile, basta guardarsi intorno nella vita di ogni giorno: ormai le aziende paiono non poter fare a meno di essere "da cent'anni al vostro servizio", come se il fatto stesso di aver mantenuto per così tanto tempo lo stesso lavoro le qualifichi come massimi esperti nell'area a disposizione… anche se in realtà chi lavora all'interno dell'azienda non ha più di un mese di dimestichezza con l'ambiente. Persino la birra ha la data di fondazione della birreria su ogni etichetta – e di sicuro non viene prodotta ormai da anni come alla data riportata sulla marca.

Il senso di sbigottimento dei nostri giorni non è di certo paragonabile a quello successivo a peggiori sconvolgimenti mondiali: immaginatevi il mondo qual era alla fine dell'Ottocento. L'industria aveva appena finito di assorbire il suo primo boom, il mondo cominciava a rimpicciolirsi mentre le distanze venivano coperte a maggior velocità, proprio come appare ora. E le istituzioni, che ora consideriamo come un fatto compiuto e una presenza costante nelle nostre vite venivano create.

Un anno che ci interessa in particolare è il milleottocentonovantasette, e il motivo apparirà chiaro tra poche righe: nel frattempo lasciamoci stupire dalla quantità di eventi eccezionali ottenuti con una breve ricerca[5]. Nel 1897 vengono brevettate invenzioni fondamentali nella nostra vita giornaliera, come il tubo catodico, la radio, i corn-flakes, il cinetoscopio (precursore del proiettore cinematografico), il motore diesel, il coltellino svizzero e la birra Pedavena.



La maggior parte delle organizzazioni per i diritti femminili nascono in questo periodo in tutta Europa, e a Vienna in quest'anno le donne vengono ammesse agli studi di filosofia, mentre per studi più scientifici bisognerà attendere il nuovo secolo. Sempre nello stesso anno vengono pubblicate opere assolutamente fondamentali: *"Dracula"*, di Bram Stoker, e il *"Cyrano de Bergerac"* di Edmond Rostand, viene fondata la Juventus a Torino, e per la prima volta la parola "computer" viene usata per intendere un marchingegno elettronico per calcolo. L'aspirina e l'eroina vengono prodotte per la prima volta, dallo stesso fantastico personaggio, Felix Hoffmann..

Tra i nati di quest'anno, a parte il Papa Paolo VI, troviamo il padre di alcune delle nostre pellicole preferite – Frank Capra; tra i morti Galileo Ferraris, Johannes Brahms e Karl Weierstrass[6], che non vedrà crearsi una delle istituzioni che per la matematica sarà fondamentale per gli anni a venire: il Congresso Internazionale dei Matematici.

[5] Ricerca effettuata su Wikipedia, che ha una bellissima sezione con tutti gli eventi, i nati, i morti e le curiosità per ogni anno. Quando uno ha finito di leggere tutto in una lingua, può cambiare idioma e godersi altre curiosità – più lingue sapete leggere e più divertente diventa la ricerca.

[6] Di lui si parla in RM057.

A lanciare l'iniziativa di questa prima edizione fu Cantor[7] ma il Congresso a Zurigo coinvolse più di duecento matematici da tutto il mondo[8] tra cui Cremona, Klein, Poincarè, Mittag-Leffler, Markov. L'esperienza di trovarsi tutti insieme a discutere gli argomenti a loro più cari deve essere stata estremamente positiva, se in quell'occasione fu deciso di ripeterla ogni quattro anni.

L'edizione che viene ricordata tra le più importanti fu la successiva, nel 1900, presieduta da Poincarè, quando Hilbert enunciò i suoi famosi 23 problemi[9], ed il fervore delle attività matematiche di inizio secolo fu interrotto solo dalla Prima Guerra Mondiale.

No.	Date	Place	No.	Date	Place
1	1897	Zurich	14	1962	Stockholm
2	1900	Paris, France	15	1966	Moscow
3	1904	Heidelberg	16	1970	Nice
4	1908	Roma	17	1974	Vancouver
5	1912	Cambridge, U.K.	18	1978	Helsinki
6	1920	Strasbourg, France	19	1983	Warsaw
7	1924	Toronto	20	1986	Berkeley
8	1928	Bologna	21	1990	Kyoto
9	1932	Zurich	22	1994	Zurich
10	1936	Oslo	23	1998	Berlin
11	1950	Cambridge, USA	24	2002	Beijing
12	1954	Amsterdam	25	2006	Madrid
13	1958	Edinburgh	26	2010, 19-27 Agosto	Hyderabad, India

Se il Congresso può vantarsi di aver resistito più di cento anni dalla prima riunione, lo deve sicuramente a uno dei più grandi attivisti nell'ambito della ricerca e dello scambio di informazioni.

John Charles Fields nasce a Hamilton, nell'Ontario canadese, il 14 Maggio 1863. Suo padre era un commerciante che viaggiava frequentemente in Europa, e morì quando il giovane John era nel pieno dei suoi studi. Malgrado la triste gioventù (anche la madre morì poco dopo), Fields continuò ad aggiudicarsi borse di studi e si laureò nel 1884 vincendo la medaglia d'oro per la matematica. Scelse quindi di proseguire i suoi studi negli Stati Uniti in un'università che all'epoca prediligeva la ricerca, la John Hopkins, ed ottenne il suo dottorato, dopo il quale insegnò per un breve periodo, ma fin da allora sentiva l'ambiente universitario inadeguato al suo desiderio di espandere i propri orizzonti. Nel '91 partì per l'Europa, dove passò i successivi dieci anni conducendo una vita modesta tra Parigi, Goettingen e soprattutto Berlino, incontrando personaggi come Klein, Froebius, Weierstrass[10], Planck, e Gösta Mittag-Leffler, con cui strinse una forte amicizia destinata a durare negli anni.

Al suo ritorno in Canada ottenne una cattedra speciale all'università di Toronto e pubblicò il suo lavoro principale sulle funzioni algebriche.

Il merito più grande di Fields non fu tanto la sua produzione matematica, quanto il suo impegno nel riunire e organizzare matematici a livello internazionale. Era in ottime

[7] Cantor è protagonista del compleanno in RM062

[8] 208 matematici da 16 Paesi, tra cui dodici russi e sette americani, ma solo quattro donne.

[9] Evento largamente trattato in RM060.

[10] Protagonista del compleanno di RM057

relazioni con regnanti e personaggi politici di spicco[11], che gli permisero di convincere il governo canadese a sostenere la ricerca con una borsa di 75'000 dollari canadesi all'anno, in un periodo nel quale un professore non ne riceveva più di mille all'anno.

Era un uomo di spicco nell'ambiente, membro della *Royal Society* del Canada e di Londra, Presidente del *Royal Canadian Institute* e vice-presidente dell'Associazione Americana per il Progresso delle Scienze, membro dell'Accademia delle Scienze Russa, e la lista potrebbe continuare a lungo fino al titolo di Comandante della Corona Italiana[12].

Il Congresso Internazionale dei Matematici (ICM), fu il suo più gran teatro di battaglia. Le riunioni del Congresso furono interrotte durante gli anni di guerra, e nel dopoguerra (1920) fu creata l'Unione Internazionale della Matematica, da cui erano escluse alcune Nazioni (Germania, Impero Austro-Ungarico, Bulgaria e Turchia), causando una grossa crisi in ambiente matematico: Hardy[13] e Mittag-Leffler erano tra i più forti oppositori della separazione, ma la crisi era profonda, e il Congresso del '24 rischiava già due anni prima di essere riunito di rimanere senza fondi e senza sede, un rischio che Fields non intendeva correre.

Facendo leva sulle sue conoscenze politiche riuscì ad ottenere che il Congresso si riunisse a Toronto e praticamente si occupò di tutta la parte organizzativa, assicurandosi gli aiuti necessari per poter avere il massimo numero di matematici europei possibile, e compiendo una capillare ricerca di fondi. Si adoperò con tutte le sue forze per assicurare, malgrado le restrizioni imposte e la mancanza di internazionalità dovuta alla spaccatura del dopoguerra, la maggior presenza possibile di matematici, ed il Congresso ebbe un enorme successo.

Le restrizioni dell'Unione non restisterono a lungo: l'edizione del 1928 fu organizzata a Bologna da Salvatore Pincherle, che semplicemente le ignorò, e la delegazione tedesca, guidata da Hilbert[14], fece il suo ingresso nella sala tra gli applausi generali. Purtroppo però lo sforzo sovrumano di Fields nell'organizzare e dirigere l'ICM del '24 ne minò seriamente la salute. Ciò nonostante continuò ad assumere numerose cariche di promotore della matematica, tra cui quella di vicepresidente nella successiva edizione del '28.

Compiendo il miracolo di assicurare la continuità del Congresso in tempi in cui il mondo era spaccato in due, aveva raccolto una quantità di fondi superiore al fabbisogno, cosa che al nostro eroe non poteva che far piacere: già durante la riunione conclusiva del Congresso proponeva l'istituzione di una medaglia che sarebbe stata assegnata ogni quattro anni durante le riunioni. L'idea di creare un premio per stimolare la ricerca matematica doveva essere balenata al nostro eroe molto prima del '24: anche se fu in questa occasione che per la prima volta ne fece menzione, il progetto pare immediatamente ben formulato e pronto all'applicazione.

Nella lettera in cui descrive il premio, si premura di definire con precisione l'ambito e la motivazione principale, e cioè non tanto la particolare abilità del singolo nello scoprire qualche proprietà matematica, quanto il contributo all'edificio matematico nel suo

---

[11] Per ogni notizia qui riportata abbiamo borseggiato il sito ufficiale del Fields Institute (www.fields.utoronto.ca) e non siamo pentiti nemmeno un po'. Qui e là si trovano anche pettegolezzi su quanto Fields fosse amico di Mussolini e del re Svezia e bevesse regolarmente tè con biscotti insieme alle teste coronate di mezza Europa.

[12] Titolo che comunque lui dovette rifiutare, dato che non era permesso che un cittadino canadese lo assumesse.

[13] Hardy è tra i protagonisti del compleanno di RM049, e non aveva mezzi termini nell'esprimere il suo disappunto: *"Tutte le relazioni scientifiche devono ritornare precisamente al punto in cui erano prima... Mi sembra importante dirlo soprattutto a causa di certe imbecillità stampate ultimamente [1918] da scienziati di spicco in Francia ed Inghiterra"*

[14] Ne parliamo in RM060. Non stupisce che proprio in questa occasione gli sia stata attribuita la seconda affermazione in testa a questo articolo.

insieme, a quanto la ricerca possa stimolare ulteriori passi avanti nella conoscenza: *"The above programme means a new departure in the matter of international scientific cooperation and is likely to be the precursor of moves along like lines in other sciences than mathematics.*[15]*"*. Collaborazione internazionale, insomma, e senza limiti o barriere politiche: *"One would hear again emphasized the fact that the medals should be of a character as purely international and impersonal as possible. There should not be attached to them in any way the name of any country, institution or person.*[16]*"*. Ironicamente, una medaglia che non doveva portare nessun nome né richiamare nazioni, prese poi il nome proprio di chi ne era stato l'ideatore. Un precursore modesto, che non riuscì a vedere la sua idea messa in pratica, perché morì nel 1932.

Modesta come la sua vita, la tomba del nostro eroe riporta solo il nome e date di nascita e di morte.

Anno	Matematico	Età	Nazionalità
2006	Andrei Okounkov	37	Russia
	Grigori Perelman[17]	40	Russia
	Terence Tao	31	Australia
	Wendelin Werner	38	Francia
2002	Laurent LAFFORGUE	36	Francia
	Vladimir VOEVODSKY	36	Russia
1998	Richard E. BORCHERDS	39	UK
	W. Timothy GOWERS	35	UK
	Maxim KONTSEVICH	34	Russia
	Curtis T. MCMULLEN	40	USA
1994	Jean BOURGAIN	40	Belgio
	Pierre-Louis LIONS	38	Francia
	Jean-Christophe YOCCOZ	37	Francia
	Efim ZELMANOV	39	Russia
1990	Vladimir DRINFELD	36	USSR
	Vaughan F.R. JONES	38	N. Zelanda
	Shigefumi MORI	39	Giappone
	Edward WITTEN	38	USA
1986	Simon K. DONALDSON	27	UK
	Gerd FALTINGS	32	Germania
	Michael H. FREEDMAN	35	USA
1982	Alain CONNES	35	Francia
	William P. THURSTON	35	USA
	Shing-Tung YAU	33	Cina

Nel 1936 a Oslo John Charles Fields non c'è più, ma al suo posto, a concentrare l'attenzione del mondo matematico, c'è il concetto fondamentale per cui lui aveva sempre combattuto. La lettera con cui descrive le regole per l'attribuzione del premio sono molto chiare: si deve trattare di un giovane matematico (l'età limite è stata successivamente fissata a quarant'anni), che risolva un complesso problema e contribuisca all'evoluzione della matematica stessa con teorie innovative. Lo scopo principale, insomma, è quello di fornire ulteriori mezzi a giovani matematici che abbiano intenzione di infrangere nuove barriere.

La medaglia non premia la carriera, ma l'iniziativa, e per questo il limite d'età si rende necessario: un limite che ha impedito recentemente a Wiles di ottenere l'ambito premio per la dimostrazione del famosissimo Teorema di Fermat[18], ma che pare necessario per mantenere intatte le intenzioni originali.

La Medaglia è stata assegnata per la

[15] (...) il programma significa un nuovo inizio in termini di collaborazione scientifica internazionale, ed è probabille che sia il precursore di analoghi riconoscimenti in altre scienze che la matematica.

[16] Si vuole qui enfatizzare il fatto che la medaglia deve avere un carattere il più internazionale ed impersonale possibile. Non dovrebbe collegarsi a nessuna nazione, istituzione o persona.

[17] Di lui abbiamo già parlato anche in RM075 per la soluzione della congettura di Poincaré, uomo schivo, non è andato a ritirare il premio. E di Poincaré, invece, abbiamo parlato in RM075.

[18] Andrew J. Wiles era tra i favoriti per ricevere il premio nel '94, ma all'ultimo minuto un'imprecisione fu scoperta nella sua dimostrazione, e quattro anni dopo il limite d'età era (anche se di poco) superato. Forse per questo non gli abbiamo ancora dedicato un compleanno (a Fermat invece sì: in RM091)

seconda metà del Novecento, ed ha caratterizzato le linee seguite dalla ricerca nello stesso periodo. Tra le teste di serie celebrate a margine in queste pagine ci sono i nomi che hanno tentato di risolvere i problemi proposti da Hilbert; le nozioni di topologia che ora sono al centro della ricerca sono una diretta conseguenza del lavoro di parecchi dei nomi a cui la medaglia è stata associata. E non solo.

I nomi scritti in queste pagine sono quelli che hanno trovato eco nel mondo internazionale della ricerca matematica, anche grazie all'illuminazione momentanea dovuta alla Medaglia, ma soprattutto come iniziatori di nuove tecniche di analisi o in genere nuovi approcci.

1978	Pierre René DELIGNE	33	Belgio
	Charles Louis FEFFERMAN	29	USA
	Gregori Alexandrovitch MARGULIS	32	USSR
	Daniel G. QUILLEN	38	USA
1974	Enrico BOMBIERI	33	Italia
	David Bryant MUMFORD	37	UK
1970	Alan BAKER	31	UK
	Heisuke HIRONAKA	39	USA
	Serge NOVIKOV	32	USSR
	John Griggs THOMPSON	37	USA
1966	Michael Francis ATIYAH	37	UK
	Paul Joseph COHEN	32	USA
	Alexander GROTHENDIECK[19]	38	Germania
	Stephen SMALE	36	USA
1962	Lars HÖRMANDER	31	Svezia
	John Willard MILNOR	31	USA
1958	Klaus Friedrich ROTH	32	Germania
	René THOM[20]	35	Francia
1954	Kunihiko KODAIRA	39	Giappone
	Jean-Pierre SERRE	27	Francia
1950	Laurent SCHWARTZ	35	Francia
	Atle SELBERG	33	Norvegia
1936	Lars Valerian AHLFORS	29	Finlandia
	Jesse DOUGLAS	39	USA

La maggior parte di questi uomini ha generato molto più progresso per la matematica dopo aver ricevuto il premio di quanto avesse fatto per ottenerlo.

La medaglia è spesso citata come "il premio Nobel della matematica", e ci sono molte illazioni sul motivo per cui Nobel non volle intitolare alcun premio alla scienza tanto amata da Fields, tra le ragioni pare ci fosse poca simpatia[21] tra Nobel e Mittag-Leffler, il più accanito sostenitore di Fields. Ma la differenza principale tra i due premi è molto evidente: la Medaglia viene assegnata alle potenzialità di un campo di studi e allo studioso che ci si applica con successo, il Premio a chi uno scopo l'ha già raggiunto.

A parte il nome, quasi tutte le indicazioni iniziali sulla Medaglia furono mantenute: contiene parole solo in greco e latino, considerati linguaggi internazionali.

Il nome dello scultore ed artista che creò la Medaglia è Robert Tait McKenzie, canadese, che ha quindi avuto l'onore di mantenere le proprie iniziali (RTM) sul verso della stessa, insieme con l'anno in cui l'ha creata (MCMXXXIII - 1933).

Un lato riporta la scritta:

[19] Citato in RM086

[20] Di lui abbiamo parlato in RM080.

[21] Le malelingue dicono che la moglie di Nobel fosse amante di Mittag-Leffler, che è improbabile, dato che Nobel non era sposato. Comunque erano rivali ed avevano parecchi motivi per non piacersi; ironia della sorte volle che lo stesso Mittag-Leffler ebbe modo di partecipare a numerosi comitati di assegnazione dei premi Nobel e Medaglie Fields dopo la morte dei due.

"CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE[22]", sullo sfondo della sfera inscritta nel cilindro, una delle dimostrazioni di cui Archimede[23] andava talmente fiero da volerla incisa sulla propria tomba[24].

Sull'altra faccia c'è l'effige di Archimede, il suo nome, ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ, in greco, oltre al monogramma dell'artista, e l'iscrizione "TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI[25]". Una frase emblematica, che ricorda proprio quello che è lo scopo fondamentale dell'ambito premio: "passare oltre l'umana comprensione", superare i propri limiti, per cercarne dei nuovi, che a loro volta saranno superati.

Un tributo al desiderio umano di conoscenza che si trova in tutti noi, compresi gli astrologi.

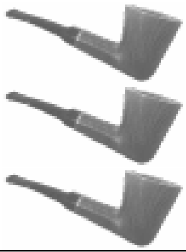
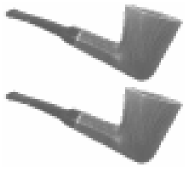
[22] "I matematici riuniti da tutto il mondo assegnano (questa medaglia) per scritti eccezionali".

[23] Archimede, unico tra gli antichi, si è meritato un compleanno in RM058

[24] *"Il restauro della tomba di Archimede da parte di Cicerone è l'unico contributo alla matematica dato dagli antichi romani"* (Boyer).

[25] Che a questo punto ricorderete di aver letto all'inizio di queste pagine.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Aprile, finalmente!			
Il contrario di "Supertask"			

2.1 Aprile, finalmente!

Nel senso del pesce: come avrebbe dovuto anticiparvi il Nostro Glorioso Postino il mese scorso (se non fosse stato in iper-ritardo[26]), abbiamo rinviato a questo mese la parte ittica di aprile. E infatti segue, preceduta da breve spiegazione.

Quando la gente ci chiede "ma come fate ad interessare la gente alla matematica?", la risposta standard (e quindi non necessariamente quella corretta: tendiamo a non sforzare troppo il cervello) è "ambientiamo i problemi nel mondo reale": e, in effetti, attraverso queste pagine sono passati abbastanza parenti, amici, animali domestici *et similia* tali da riempire un intero bestiario (il che la dice lunga sulla considerazione in cui teniamo le prime due categorie).

In realtà non è assolutamente vero: semplicemente, ci divertiamo a trasformare concetti decisamente astratti in forme estremamente terra-terra: se la cosa può sembrare semplice per alcuni concetti ("trovare il valore minimo..." diventa immediatamente "non avendo voglia di lavorare,..."), per altri non è così semplice: molti numeri fa, un'equazione differenziale è stata trasformata in uno spazzaneve.

Quindi, esattamente come per voi è diventata una sfida mensile risolvere i problemi che vi proponiamo, per noi tale sfida si sustanzia nel trasformare problemi astratti in un qualche cosa di presentabile con quanto abbiamo a disposizione nel mondo reale, e Rudy in particolare si considera ormai ragionevolmente agile in queste operazioni; da cui, potete capire come mai sia scoppiato fragorosamente a ridere quando gli è stato detto: "Bene, prova ad ambientare ***questo***".

Solo alcune piccole note:

1. È un classico, inventato da un matematico americano; quando avremo ricevuto un numero di soluzioni soddisfacente (a insindacabile giudizio dei Redattori), vi daremo ulteriori dati. Rudy l'ha trovato mettendo in ordine vecchie riviste, quindi forse qualcuno lo conosce.

[26] Intendesi con questo termine ritardo quadridimensionale, ossia ritardo sul ritardo del ritardo ritardato.

2. Rudy ha insistito per cambiare una cosa, che secondo lui rende ancora più "Argh!" il problema (se la trovate, capite cosa significa "Argh!" per Rudy).

3. Niente nota [3].

Bene, segue il problema. Roba facile, sono solo una ventina di domande.

1) La prima domanda la cui risposta è B è:
   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5
2) Le due sole domande consecutive con risposte identiche sono:
   a) 6 e 7
   b) 7 e 8
   c) 8 e 9
   d) 9 e 10
   e) 10 e 11
3) Il numero di domande che hanno come risposta E è:
   a) 0
   b) 1
   c) 2
   d) 3
   e) 4
4) Il numero di domande che hanno come risposta A è:
   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) 7
   e) 8
5) La risposta a questa domanda è la stessa della domanda:
   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5
6) La risposta alla domanda 17 è:
   a) C
   b) D
   c) E
   d) Nessuna delle precedenti
   e) Tutte le precedenti
7) La risposta a questa domanda e alla domanda seguente sono collocate alfabeticamente:
   a) A 4 posti di distanza
   b) A 3 posti di distanza
   c) A 2 posti di distanza
   d) A 1 posto di distanza
   e) Sono uguali
8) Il numero delle domande le cui risposte sono vocali è:
   a) 4
   b) 5
   c) 6
   d) 7
   e) 8
9) Tra le domande successive, la prima che ha come risposta la stessa di questa domanda è:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

10) La risposta alla domanda 16 è:
a) D
b) A
c) E
d) B
e) C

11) Il numero delle domande precedenti con risposta B è:
a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

12) Il numero delle domande le cui risposte sono consonanti è:
a) Un numero pari
b) Un numero dispari
c) Un quadrato perfetto
d) Un numero primo
e) Un numero divisibile per 5

13) La sola domanda di numero dispari che ha come risposta A è:
a) 9
b) 11
c) 13
d) 15
e) 17

14) Il numero di domande che hanno come risposta D è:
a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

15) La risposta alla domanda 12 è:
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

16) La risposta alla domanda 10 è:
a) D
b) C
c) B
d) A
e) E

17) La risposta alla domanda 6 è:
a) C
b) D
c) E
d) Nessuna delle precedenti
e) Tutte le precedenti

18) Il numero delle domande che hanno come risposta A è uguale a quello delle domande che hanno come risposta:
a) B

- b) C
- c) D
- d) E
- e) Nessuna delle precedenti

19) La risposta a questa domanda è
- a) A
- b) B
- c) C
- d) D
- e) E

20) La risposta a questa domanda è:
- a) E
- b) E
- c) E
- d) E
- e) E.

Bene, auguri...

2.2 Il contrario di "Supertask"

Vi ricordate cos'è in matematica un "supertask"? Siccome Rudy non sopporta le frasi che cominciano con "Ad esempio...", vi facciamo un esempio: tranquilli, il problema è un altro.

> Avete la solita urna, che alle undici è vuota. Alle undici e trenta mettete dentro dieci palline numerate e togliete quella col numero uno; alle undici e quarantacinque mette dentro altre dieci palline e togliete quella col numero due; alle undici e cinquantadue e trenta mettete dentro altre dieci palline e togliete quella con il numero tre... e avanti così dimezzando ogni volta i tempi. La domanda classica è quante palline avete dentro a mezzogiorno, e alla risposta "infinite" di solito segue ulteriore domanda "...e qual'è quella col numero più basso?".

Francamente come problema non ci sembra una meraviglia: se non vi chiamate Martin Gardner e non avete un amico che si chiama Apollinax[27], difficilmente potrete basare su cose del genere il vostro successo in società. Rudy, ha di recente trovato un problema che sembra utilizzare il concetto *contrario* a quello di "supertask", quindi si chiedeva se esistesse un termine per definire lavori del genere... Prima, però, essendo rimasto scottato dalla composizione discreta dell'acqua e del vino un paio di mesi fa, ritiene opportuno inserire una piccola premessa:

> **PREMESSA**: La Coca-Cola, liquido di provenienza notoriamente aliena, è un fluido continuo (non atomico), soggetto alla forza di capillarità solo quando gli fa comodo.

Fred e Alberto sono davanti ai loro bicchieroni di Coca-Cola; quello di Fred è vuoto, mentre quello di Alberto è pieno. Alla "gentile" (pena conseguenze catastrofiche) richiesta di dare metà della sua Coca-Cola a Fred, Alberto inizia una strana procedura:

1. Immerge la cannuccia nel proprio bicchiere sino al fondo;
2. Tappa la cima della cannuccia con il dito;
3. Sposta la cannuccia (sempre tappata dal dito) nel bicchiere di Fred;
4. Libera il dito, permettendo alla Coca-Cola di defluire.

I bicchieri (e la cannuccia) sono perfettamente cilindrici, e di dimensioni date; la domanda che ci poniamo è *dopo quanti passaggi nei due bicchieri il livello sarà esattamente uguale?*

[27] Domanda (retorica) per i conoscitori del Grande MG: ma a voi, era più simpatico il Professor Apollinax o il Dottor Matrix? La risposta "La figlia di Matrix" non è considerata valida.

"...e cosa c'entra il contrario di supertask?" Beh, credo Alberto lo abbia fatto apposta, a scegliere la via più lenta...

3. Bungee Jumpers

Trovare:

a) Tutti gli n con $1 \le n \le 100$ per cui $(n-1)!$ ***non*** è divisibile per n

b) Tutti gli n con $1 \le n \le 100$ per cui $(n-1)!$ ***non*** è divisibile per n^2

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Le società primitive (che non è affatto detto che siano anche le società meno civilizzate, anzi) si affidano alla "sapienza degli anziani" per cercare di comprendere le cose altrimenti inspiegabili. Spesso capita che gli anziani non siano affatto più affidabili dei giovanotti – almeno per quanto riguarda i processi di deduzione – ma capita di frequente che possano tirar fuori dalla loro vasta memoria quanto meno un precedente in grado di illuminare la misteriosa questione all'ordine del giorno. Un buon test per capire se, in questa multipla e molteplice tribù dell'Opulenza Tecnologica Occidentale, voi facciate parte della ristretta Cerchia degli Anziani o del folto insieme dei Giovani Guerrieri è rispondere alla domanda: *"Perché l'Hard-Disk dei personal computer è usualmente etichettato dalla lettera C?"*

Come tutti i criteri, anche questo è bel lungi dall'essere infallibile. Potreste serenamente conoscere la risposta e non avere ancora l'età giusta per avere la patente, e non di meno potreste bellamente ignorare il responso pur avendo già festeggiato le nozze d'argento con la pensione. Se però la domanda vi sembra tanto banale da rasentare la cretineria, allora è probabile che abbiate cominciato a pestare sui tasti d'un computer quando questi avevano ancora solo i floppy-disk (magari da cinque pollici e un quarto, capacità 360 miseri Kb), con il drive principale che si chiamava "A:" (dove si infilavano i dischi del sistema operativo, e i programmi), e quello secondario che si chiamava "B:". E se il floppy drive si continua ancora a chiamarsi "A:" in tutti i PC che testardamente lo ospitano, l'esistenza del drive "B:" è per molti già una rivelazione archeologica. E però è proprio questo residuo d'archeologia a spiegare perché agli hard-disk tocchi solo la terza lettera dell'alfabeto: perché quando i primi dischi fissi hanno fatto la loro comparsa sul mercato, le prime due lettere erano entrambe occupate.

Piccole amenità di questa natura divertono un po', ma rivelano impietosamente l'età del narratore, quindi non sappiamo se consigliarvi o meno di raccontarle troppo in giro. Ci sono un sacco di ragazzini che non sospettano neppure che, una volta, i personal computer non erano grafici, e che il massimo della musica che si riusciva a spremere da loro era una pernacchietta (pietosamente chiamata "bip" dagli addetti ai lavori) del cicalino. Molti di questi potrebbero chiedersi perché il processore dominante dei PC è stato per molto tempo il "Pentium", e magari si chiedono anche da dove viene fuori un nome tanto poco naturale. E si potrebbe allora raccontare che "Pentium", naturalmente, richiama il numero cinque, ma ha il grosso vantaggio di non essere il numero cinque. Perché, con buona pace dei tigrotti del marketing, i numeri non possono essere vincolati a licenze, non si può mettere il copyright su 313[28] o su 12345, insomma. E invece bisognava marcare anche i microprocessori: e se la serie andava avanti in maniera tutt'altro che originale: 286, 386, 486, era inevitabile che proprio al 586 toccò il destino del cambiamento. Ma anche questa è conoscenza spicciola; in fondo, è già più difficile ricordare che il nome esteso di quei processori era in realtà 80486, 80386, 80286 e del

[28] Anche perché, se fosse possibile mettercelo, il copyright, quello su 313 spetterebbe di diritto a Paperino.

quasi invisibile 80186; e, in qualche maniera, il terzi carattere del nome indicava la "generazione" dei microprocessori della Intel. Generazione che, per molti, nasce in realtà con il rivoluzionario 8086 che era il motore dei leggendari M24 della Olivetti, e basterebbe questo a ritagliargli uno spazio nella storia dell'informatica nazionale.

Alcuni tic di quei tempi si ritrovano ancora da qualche parte in rete, anche se magari sono ben nascosti e solo occhi attenti (e un po' vecchiotti) riescono a scoprirli. Sempre in quei tempi eroici, il sistema operativo dominante non era il gatesiano Windows e men che mai il rivoluzionario Linux, ma il semplice (e sì, ahimè, gatesiano anche lui) MS-DOS. MS sta per infatti per "Bill Gates" (beh, quasi…) e "DOS" per Disk Operating System. Come a dire che il sopra raccontato balletto tra dischetti era azione programmatica, per quei primi PC. Ebbene, quel sistema operativo imponeva che i file venissero chiamati con un nome lungo al massimo otto caratteri, e (opzionalmente) con un estensione – separata dal nome file da un punto - di tre caratteri al massimo. Insomma, qualcosa del tipo "nomefile.ext"; non per niente, ancora oggi, la quasi totalità delle estensioni significative è ancora di tre caratteri (con tanto di lieta confusione spesso generata dal conflittuale ".htm" e ".html", e solo perché quest'ultimo osa usare quattro caratteri dove storicamente ne erano ammessi solo tre).

I vecchi utenti DOS, insomma, non solo erano abituati ad usare le "estensioni", ma spesso le usavano anche solo per numerare le versioni o le serie dei file; non era certo impossibile trovare dei file tabelle che potevano chiamarsi MAGICART.2 o CALCETTO.5, a seconda degli interessi dell'esemplare di nerd nostrano in questione. E da qui nascono alcune abitudini difficilissime da estirpare: se si creano dei file che vengono chiamati FILE.1, FILE.2, FILE.3, …, FILE.999, si scopre presto che anche ad ordinarli diligentemente "per estensione" si ottiene un bel pasticcio del tipo FILE.1, FILE.10, FILE.11, che non è esattamente quello che l'utente si prefiggeva. Ed è per questa ragione che, ben presto, i più attenti imparano a mettere anche gli zeri là dove ci vogliono: chiamando i file correttamente FILE.001, FILE.002, etc., i problemi di ordinamento spariscono.

Così, può capitare che il fondatore di quella che sarebbe poi diventata una prestigiosa rivista di matematica ricreativa avesse ormai nelle dita la perversa malattia, e pertanto cominciasse a chiamare le sue prime creazioni RM.001, RM.002, e così via. Pura abitudine, insomma: abitudine che si mantiene anche quando, liberati dalle catene del DOS, si poteva serenamente scegliere una diversa "naming convention". E infatti, per tutta la storia di RM ci siamo portati dietro una mezza confusione data dal fatto che i file relativi ai numeri delle riviste erano più spesso chiamati – ad esempio – RM078.pdf anziché un più lineare RM78.pdf. Remore del passato, insomma.

Da questo numero, il problema della corretta "naming convention" di RM non si pone più. RM100 è assolutamente univoco (anche perché abbiamo stabilito in sede di CdR che al primo che scrive ""RM0100" vengono tagliate di brutto le birre), e la cosa ci stupisce un po'. Qualche affezionato lettore pensava che quegli "zeri" che comparivano tra "RM" e il numero d'ordine fossero una specie di licenza d'uccidere (la matematica, ovviamente). Non è così: la matematica la uccidiamo regolarmente, ma senza licenza. Altri pensavano che fosse proprio una dichiarazione di intenti, che fin dall'inizio RM avesse intenzione di arrivare almeno fino al numero 100; ma no, non è vero. Non ci avremmo scommesso sopra mezza lira (a quei tempi, non c'erano ancora gli euro); e il fatto che invece ci si sia arrivati davvero, non ci stupisce un po': ci stupisce moltissimo.

Stupore finito, comunque, ok? Noi facciamo un po' di festa, certi come siamo che non avremo occasione di preoccuparci del prossimo cambiamento di ordine di grandezza. Se qualcuno è interessato ad ereditare la rivista e a risolvere il nuovo problema di naming convention che si porrà a Maggio 2082, si faccia pure avanti…

Nell'attesa, cercheremo di fornirvi il materiale per ingannare l'attesa.

Tanto per dire, potreste cercare di capire dove si trova l'errore in una dimostrazione dell'Ultimo Teorema di Fermat, che potete facilmente trovare a quest'indirizzo:

http://xoomer.virgilio.it/gijano/index.html. In alternativa, se non trovate errori di sorta, potreste aiutare l'autore – che si chiama ***Giorgio Jano*** – a diventare famoso almeno quanto Wiles, che per arrivare alla stessa conclusione ci ha messo molti anni e molte pagine in più. Ma adesso è tempo di tornare a parlare delle cosucce di casa nostra, perché c'è chi risolve anche i nostri piccoli problemi; anzi, a volte ci tornano su, anche su quelli già passati da più di un numero.

4.1 [098]

4.1.1 Parliamo d'altro

Sì, certo, ce lo ricordiamo che siamo ormai in pieno RM100, ma ***Trekker*** ha deciso che i problemi di RM098 meritavano ancora qualche briciola d'analisi in più. E visto che queste briciole ci sono sembrate interessanti, ve ne proponiamo qualcuna. Inizialmente, il nostro si era limitato ad una osservazione generica:

> Strano che nessuno (io compreso) abbia scritto qualche battuta sul fatto che in realtà la lunghezza del guinzaglio andrebbe calcolata tenendo conto della sua forma a catenaria-coseno-iperbolico. E che questa lunghezza dipende anche alla costante elastica della molla nell'avvolgitore ...

…poi, forse proprio perché i guinzagli, una volta provati, è difficile dimenticarseli, è partito con una graziosa e estesa generalizzazione su geometria sferica. Questo ha costretto Rudy e Balto a farsi un giretto al Polo, ma per la matematica, questo e altro…

> Immaginiamo che Rudy stia camminando con Balto in prossimità del Polo Nord. Anzi Balto, percorrendo il meridiano 90° E, arrivi al Polo Nord e, per semplicità, svolti a sinistra sul meridiano 0°. La lunghezza del guinzaglio, prima della svolta, e misurata sulla circonferenza massima avente il centro nella Terra e passante per Balto e Rudy, sia L. Proviamo a vedere come varia la lunghezza del guinzaglio (immaginandolo sempre adagiato sul ghiaccio lungo l'ortodromia). Diciamo che R è il raggio della Terra (considerata perfettamente sferica) e proviamo a calcolare quanto al più si accorcia il guinzaglio. In seguito facciamo tendere R all'infinito per riportarci al caso ... "piano". Nella soluzione proposta mescoleremo geometria analitica, trigonometria, calcolo vettoriale, derivate e limiti ... tutto assieme.
>
> Sia α l'arco già percorso da Balto (e che lo separa dal Polo Nord) sul meridiano 0° e, contestualmente, sia β l'arco (sul meridiano 90° E) che separa Rudy dal Polo Nord. Data la velocità tangenziale costante dei due è sempre:
>
> $$R\alpha + R\beta = L$$
>
> (si noti che differenziando ambo i membri si ha $Rd\alpha+Rd\beta=0$, cioè $d\beta=-d\alpha$)
>
> Prendiamo un sistema di assi cartesiani con origine O nel centro della Terra, col piano ***xz*** passante per il meridiano 0°, il piano ***yz*** passante per il meridiano di 90° E ed il piano ***xy*** passante per l'equatore terrestre. In questo sistema di riferimento le coordinate di Balto sono rispettivamente $R\sin(\alpha)$, 0, $R\cos(\alpha)$ e quelle di Rudy sono rispettivamente 0, $R\sin(\beta)$, $R\cos(\beta)$. Al variare di α e β cambia la distanza lungo l'ortodromia fra Balto e Rudy ma, sicuramente, quando questa sarà minima lo sarà anche la distanza geometrica (= corda che "unisce" i due) e viceversa perché entrambe sono funzioni monotone crescenti una dell'altra, continue e derivabili. Idem per il quadrato della distanza geometrica. Per semplicità, invece di trovare il minimo della distanza lungo l'ortodromia cerchiamo, in modo equivalente, il minimo del quadrato della distanza geometrica D^2, cioè:
>
> $$D^2=R^2\sin^2(\alpha)+R^2\sin^2(\beta)+R^2[\cos(\alpha)-\cos(\beta)]^2$$
>
> o anche

$$D^2=2R^2-2R^2\cos(\alpha)\cos(\beta)=2R^2[1-\cos(\alpha)\cos(\beta)]$$

Studiamo rapidamente la funzione F=1-cos(α)cos(β). Differenziando la funzione F si ha:

$$dF=\sin(\alpha)\cos(\beta)d\alpha+\cos(\alpha)\sin(\beta)d\beta=\sin(\alpha)\cos(\beta)d\alpha-\cos(\alpha)\sin(\beta)d\alpha$$

cioe'

$$dF=\sin(\alpha-\beta)d\alpha$$

Si noti che la funzione F ha un minimo in α=β=L/2R, cioè quando Balto e Rudy sono equidistanti dal Polo. In questo punto di minimo le coordinate di Rudy sono 0, Rsin(α), Rcos(α) e quelle di Balto restano

Rsin(α), 0, Rcos(α) con α=L/2R

Per trovare la distanza lungo l'ortodromia minima dobbiamo trovare l'angolo dell'arco di circonferenza massima che unisce Balto a Rudy. Ricordiamoci brevemente che il prodotto vettoriali di due vettori è un vettore ortogonale al piano individuato dai primi due, orientato secondo la "regola della mano destra" e di modulo pari al prodotto dei moduli per il seno dell'angolo compreso. Siano $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i tre versori degli assi cartesiani presi come riferimento.

Definiamo i seguenti versori:

$$\vec{u}=\sin(\alpha)\vec{i}+0\vec{j}+\cos(\alpha)\vec{k}$$
$$\vec{v}=0\vec{i}+\sin(\alpha)\vec{j}+\cos(\alpha)\vec{k}$$

che indicano rispettivamente la direzione ed il verso paralleli dei raggi congiungenti O con Balto ed O con Rudy.

Il loro prodotto vettore $\vec{w}=\vec{u}\,x\,\vec{v}$ vale:

$$\vec{w}=-\sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{i}-\sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{j}+\sin^2(\alpha)\vec{k}$$

Si noti che il modulo del prodotto vettore di vettori unitari è proprio il seno dall'angolo γ compreso. Con facili passaggi si trova:

$$|\vec{w}|=\sin(\gamma)=\sin(\alpha)\sqrt{2-\sin^2(\alpha)}$$

La minima distanza d, lungo l'ortodromia, del guinzaglio si ottiene per α=L/2R, cioè:

$$d=R\gamma=R\arcsin(\sin(\frac{L}{2R})\sqrt{2-\sin^2(\frac{L}{2R})})$$

Per R che tende a +∞ (si ponga t=L/2R, si faccia tendere t a zero e si applichi la regola di De L'Hospital) si ottiene:

$$d\to\frac{L}{2}\sqrt{2}$$

valore che si può ottenere anche con la semplice geometria Euclidea.

Però è sempre bello osservare che tutto, in matematica, "torna".

A dire il vero, non solo "torna", perché, in fondo, "tornare" è verbo che molto si addice ai "conti". Piuttosto stupiscono le combinazioni, che invece dovrebbero essere sostantivi adatti più alle casseforti che ai problemi di matematica (calcolo delle probabilità e statistica esclusi, ovviamente…). Eppure, è una bella combinazione che a poco distanza l'una dall'altra abbiamo ricevuto due mail riferite al Polo: una, è quella che avete appena letto; l'altra ce la ha spedita invece ***Piellepi***, che ci voleva riproporre il vecchio classico che recita così:

> *"Un esploratore parte da un punto della terra (che supponiamo sferica), percorre N chilometri (per non perdere in generalità...) in direzione Sud, poi si volta verso Est e percorre altri N chilometri dopo i quali si volta verso Nord per percorrere altri N chilometri, per ritrovarsi ("matemagicamente" oppure "come per magilla") al punto di partenza. La domanda è: da dove è partito?"*

In realtà, ***Piellepi*** non si accontenta della risposta banale (il Polo Nord, appunto), perché sa bene che non è risposta completa. Noi lo abbiamo rassicurato, dicendogli che i nostri lettori conoscono bene anche la forma più ardita del problema, e "*tutte*" le sue soluzioni. Però, insomma, se poi qualcuno non si ricordasse bene la cosa, e volesse ripassare lo studio dell'esplorazione polare, noi saremo ben contenti di sentirne i commenti.

4.1.2 Perché la matematica [non] piace

Trekker, non contento di aver trasformato il vecchio Balto in un vero husky da slitta (del resto con un simile nome, non poteva finire altrimenti), è tornato anche sull'analisi del problema dell'acqua e del vino, applicando dei criteri decisamente "fisici" nell'ulteriore analisi: come dice lui stesso:

> *Un modello più appropriato potrebbe esserne uno basato sui risultati di Torricelli e Bernoulli (valido per liquidi perfetti, regime stazionario, velocità del "pelo" dell'acqua trascurabile, ... etc... bla, bla...)…*

E da qui procede a colpi di equazioni differenziali. Quello che ci piace sempre molto, in soluzioni di problemi fisici, è la constatazione che la fisica ha dei limiti deliziosi dati dal nostro amato Universo (oggetto del tutto pleonastico per l'esercizio della matematica, invece). Per questo ci ha molto rallegrato vedere che, dopo aver calcolato con perizia differenziali di tempo e di volume, delta di accelerazioni, aree del foro d'uscita e altezza della caduta, Trekker non perde di vista l'essenza del mondo fisico con la non banale osservazione che:

> *Si noti comunque che per particolari "geometrie" potrebbe succedere che il contenitore inferiore si svuotasse completamente prima che la prima goccia di vino raggiunga il "pelo della miscela sottostante...*

A titolo accessorio e ancillare, troviamo anche divertente l'ipotesi di ***Cid*** in merito al racconto di ***Gnugnu*** sull'ormai storico problema della kellerina; questo perché ***Cid*** immagina che ci sia una relazione acqua/vino anche nell'allonimo della kellerina narrata da ***Gnugnu*** e chiamata ***Anac***. Può essere una coincidenza o no che ***Anac*** sia il contrario di **Cana**, luogo dove si narra che le proporzioni tra acqua e vino siano sempre state assai poco matematicamente rispettate?

4.2 [099]

4.2.1 Quick and Dirty

Di solito, il Q&D è discusso al di fuori delle S&N di RM, al pari del PM (sì, lo stiamo facendo apposta: se avete riconosciuto tutti gli acronimi, allora è probabile che ci leggiate da più di cinque numeri…). Okay, ricominciamo: di solito, il Quick and Dirty non viene risolto all'interno delle "Soluzioni e Note", ma questo è un numero dall'anatomia un po' stravolta, quindi non prendetevela troppo. E poi, avevamo appena parlato di ***Cid***, che ci ha mandato una mirabile soluzione del quiz proposto. Chiedevamo, molto molto "quickly", se "*…il numero delle persone che hanno stretto un numero dispari di mani, è pari à dispari?*", e ***Cid*** risolve tutto a colpi di "semistrette":

> Chiamiamo semistretta, la stretta di mano che una persona da a un'altra persona; in ogni stretta di mano tra due persone ci sono due mani che si stringono, quindi il totale di semistrette è pari. Se togliamo da questo totale, il numero di persone che hanno stretto la mano a qualcun altro un numero pari di volte, togliamo un numero pari di semistrette. Rimane quindi un numero pari di semistrette; siccome il numero di semistrette risulta uguale alla somma di una serie di numeri dispari, il numero totale dei termini che formano tale somma deve essere pari.

4.2.2 Mica Sicuro...

Già, mica sicuri che questo problema termini qui la sua carriera... il punto è che di soluzioni ne abbiamo ricevute ben poche, quindi la casistica di restringe a poche ipotesi possibili: potrebbe essere un problema dallo scarso appeal, e allora difficilmente riceveremo altri contributi. Oppure potrebbe essere un problema difficile, e forse i contributi arriveranno lentamente, nel tempo. Del resto, lo avevamo detto che era da considerasi un problema "aperto", e come tale siamo sempre ben disposti a sentire cosa ne pensate, anche fuori dalla tempistica normale. Comunque, le soluzioni ricevute sono di tutto rispetto, provenienti da ***AGUP*** e dal solito ***Cid***.

Cominciamo con ***AGUP***:

> Delle monete coniate nell'anno "zero", ne restano mediamente 900.000 il primo anno, 810.000 il secondo anno, e così via secondo la formula
>
> $$M_n = 1.000.000\ (0{,}9)^n$$
>
> Il problema consiste nel determinare il numero **n** che esprime l' n-esimo anno successivo a quello del conio, in guisa tale che il numero $\mathbf{M_n}$ di monete rimanenti sia **1**. Ciò equivale a risolvere l'equazione
>
> $$1.000.000\ (0{,}9)^n = 1$$
>
> Passando ai logaritmi in base 10 si ottiene
>
> $$6 + n(\mathrm{Log}\ 9 - 1) = 0$$
>
> ovvero
>
> $$n = 6/(1-\mathrm{Log}\ 9) = 131{,}126$$
>
> Pertanto il valore atteso per l'età della moneta più vecchia in circolazione risulta essere pari a **131**.

Cid, da parte sua, dichiara di non essere sicuro del significato esatto del termine "valore atteso", ma questo non lo dissuade dal gettarsi nei calcoli, come un coniglio[29] di sua conoscenza:

> Se per la moneta più vecchia in circolazione si fa riferimento alla prima moneta coniata (per intenderci: alla "Numero 1" di Paperon dè Paperoni), allora il valore atteso è 10 anni in quanto la vita media di ogni moneta è 10 anni essendo la probabilità di essere distrutta pari a 0,1 per anno. Se invece si intende una qualsiasi moneta del primo gruppo di monete allora il problema si complica; se il gruppo iniziale fosse stato di 10 monete ed ogni anno avessimo coniato una sola moneta, avremmo che il primo anno sicuramente viene distrutta una delle dieci monete iniziali, il secondo anno con probabilità 9/10 viene distrutta un'altra delle monete iniziali, quindi la seconda moneta ha una durata media pari a 10/9, la terza

[29] Sì, è vero, non è carino mettere riferimenti non comprensibili a tutti i lettori, in una rivista. Però il coniglio che fa calcoli sul divano è di proprietà di un minorenne, e quindi non possiamo entrare in ulteriori dettagli. Oh, sì, diamine... che è di peluche possiamo dirlo, sì.

moneta viene distrutta con probabilità pari a 8/10 e quindi dura mediamente 10/8 anni, ecc.

Il totale delle 10 monete iniziali sarebbe durato mediamente:

$$\sum_{i=1}^{10}\frac{10}{i}=\frac{7381}{252}=29{,}29\ldots\text{ anni}$$

Un modo approssimativo per calcolarlo è questo: siccome dopo il primo anno resta il 90% delle monete iniziali, dopo il 2° anno (mediamente) il 90% del 90% delle monete iniziali, dopo k anni restano (mediamente) il $(0{,}9)^k$ delle monete iniziali; quindi le monete si esauriranno circa quando $(0{,}9)^k$ avrà un valore intermedio tra 0 e 1.

$$\text{Calcolo quindi: }\frac{Ln(0.05)}{Ln(0.9)}=28.433\ldots\text{ (circa 29 anni)}$$

Siccome le monete iniziali sono un milione;

(essendo complicato il calcolo esatto) uso la formula approssimata che ho appena trovato:

$$\text{Calcolo quindi: }\frac{Ln(0.0000005)}{Ln(0.9)}=137.7\ldots\text{ (circa 138 anni)}$$

Se invece si vuol sapere, qual è a regime, l'età della moneta più vecchia in circolazione, siccome, a regime, ho dieci milioni di monete in circolazione, trovo il seguente risultato:

$$\frac{Ln(0.00000005)}{Ln(0.9)}=159.6\ldots\text{ (circa 160 anni)}$$

Quindi, ritengo che (con buona approssimazione) il valore atteso dell'età della moneta più vecchia in circolazione sia di 160 anni.

… e questo significa che adesso davvero si possono scatenare gli analisti ex-post" e prendere posizione in merito alle soluzioni. Teniamo aperto il problema, va bene?

4.2.3 Problema di economia

Questo problema ha riscosso maggiori interessi del confratello: Soluzioni articolate in merito ne abbiamo ricevute da ***Trekker***, ***FraPao***, ***Cid*** e ***AGUP***. E, visto che in realtà non era un problema, ma quattro, troviamo rassicurante che siano stati quattro anche i solutori. Per pura economia (restiamo in tema, visto il titolo del problema) e per esercizio di tirannica prevaricazione, decidiamo di pubblicare soltanto le soluzioni di un paio di solutori.

Cominciamo da ***FraPao***, che impone premesse:

Necessaria **Premessa.**

Innanzitutto semplifichiamo l'iter delle aste supponendo che Alberto può offrire la stessa cifra di Fred, e costringere quest'ultimo a offrire almeno una unità in più per aggiudicarsi i giochi. In questo modo ci evitiamo la noiosa problematica di chi parla per primo o di chi arriva per primo ad una certa cifra, aspetto di cui non proviamo molta attrazione. (vero ?)

Problema 1.

Se i giochi fossero solo 2, ad Alberto sarebbero sufficienti 50 giorni per evitare che Fred se li aggiudichi tutti e 2: infatti per il primo Fred dovrebbe offrire 51, rimanendo poi con 49 per il secondo. Con 3 giochi, Alberto deve disporre di 50+50=100 giorni per ottenerne 2 (e questa è la risposta al problema 1, tenendo conto della premessa), con 4 giochi 150 giorni per ottenerne 3, con n giochi $50 \cdot (n-1)$ giorni per ottenerne n -1. Più generalmente, semplici ragionamenti induttivi portano alla seguente formula :

$$A = \frac{F}{d} \cdot \left[n - (d-1)\right]$$

dove

A = giorni di cui deve disporre Alberto per guastare la festa a Fred

F = giorni di cui può disporre Fred

d = numero minimo di giochi desiderati da Fred

n = numero totale di giochi

<u>Problema 2.</u>

Applicando la formula generale

$$A = \frac{100}{2} \cdot (6-1) = 250$$

Sì, Fred potrà avere i due giochi perché Alberto vuole spendere meno di 250.

<u>Problema 3</u>.

In questa situazione la formula ci dà :

$$A = \frac{100}{3} \cdot (10-2) = 266$$

No, Alberto non potrà realizzare il suo diabolico piano perché vuole spendere meno di 266

<u>Problema 4.</u>

Possibile strategia : per il primo gioco Alberto arriverà ad una cifra p_1 (partendo da 1, 2, ecc.) tale da costringere Fred ad abbandonare. Insomma il primo gioco lo vincerà Alberto, che verrà a sapere anche che Fred può spendere almeno p_1 (era arrivato ad offrire $p_1 - 1$, e doveva lasciarsi almeno una unità residua per aggiudicarsi il secondo gioco). Con la prima puntata sapremo quindi che Fred può spendere fra p_1 e 100. Se Fred può spendere almeno p_1 Alberto deve aggiudicarsi, dopo il primo, altri 4 giochi (concedendone con magnanimità uno a Fred) potendo disporre al massimo, per ciascuno di essi, di una cifra media p_m tale da rispettare il vincolo :

$$p_1 + 4 \cdot p_m = \frac{5}{2} \cdot p_1 + 100$$

Il termine a secondo membro è appunto la cifra che dovrebbe spendere Alberto sapendo che Fred non vuole spendere più di p_1 (dalla formula generale), con l'aggiunta del bonus di 100.

Ricaviamo p_m :

$$p_m = \frac{3}{8} \cdot p_1 + 25$$

Vediamo un po' di casistica.

<u>*Caso a*</u> : $p_m < p_1$ (quando $p_1 > 40$)

<u>*Sub a.1*</u>

Se Fred può spendere non più di p_1, si aggiudicherà il secondo gioco offrendo $p_m + 1$, costringendo poi Alberto a offrire $R = p_1 - p_m - 1$ per ciascuno dei 4 giochi restanti.

Ricordando la relazione fra p_m e p_1 e il fatto che p_1 non può essere superiore a 100, tale quantità R è inferiore a p_m, pertanto <u>Alberto spenderà il minimo quando Fred si aggiudicherà il secondo gioco anziché uno dei successivi</u> :

$$A = p_1 + 4 \cdot R = \frac{7}{2} \cdot p_1 - 104$$

che è chiaramente minore di $p_1 + 4 \cdot p_m = \frac{5}{2} \cdot p_1 + 100$

<u>*Sub a.2*</u>

Se Fred può spendere $F > p_1$ (fino a 100), Alberto spenderà il minimo

quando $p_m < F - p_m - 1$ (cioè $F > 2 \cdot p_m + 1 = \frac{3}{4} \cdot p_1 + 51$) e Fred si aggiudica l'ultimo gioco :

$$A = p_1 + 4 \cdot p_m$$

C'è da dire però che Fred non aspetterà l'ultimo giro, ma farà un'offerta vincente $p_m + 1$ almeno al quinto, per tentare poi (inutilmente) di portare a casa anche il sesto gioco.

Quindi in pratica il minimo più "ragionevole" di Alberto è

$$A = p_1 + 3 \cdot p_m + F - p_m - 1 = \frac{7}{4} \cdot p_1 + F + 49$$

Quando invece $p_m > F - p_m - 1$ (cioè $F < \frac{3}{4} \cdot p_1 + 51$), il minimo di Alberto si verificherà se Fred si aggiudica il secondo gioco :

$$A = p_1 + 4 \cdot (F - p_m - 1)$$

Tali quantità sono comunque inferiori a

$$\frac{5}{2} \cdot F + 100$$

che sarebbe la massima disponibilità di Alberto se conoscesse quella di Fred.

<u>*Caso b*</u> : $p_m > p_1$ (per $p_1 < 40$)

<u>*Sub b.1*</u>

Se Fred può spendere non più di p1, riuscirà ad aggiudicarsi solo l'ultimo gioco che Alberto gentilmente gli concederà. Spesa di Alberto :

$$A = p_1 + 4 \cdot p_m$$

<u>*Sub b.2*</u>

Se Fred può spendere $F > p_m$ (e chissà perché si è fermato a p_1 nella prima asta), valgono le considerazioni di cui al sub a.2

Sarà tutto?

L'unica cosa realmente incomprensibile, nella digressione di ***FraPao***, è proprio la domanda finale: non tanto per la domanda in sé, quanto per il fatto che la ponga a noi. Non spererà mica che noi si possa dirimere un simile dubbio.

Curiosamente, anche ***AGUP*** sfiora il tema della nostra latitanza con la perentoria affermazione:

> *" … si avverte la mancanza della soluzione che dareste voi, e comunque della vostra opinione motivata su quale debba essere considerata la soluzione più corretta. E non veniteci a raccontare la balla secondo cui sareste meno bravi dei vostri lettori ..."*

Beh, dalle colonne di un numero importante e significativo come questo RM100 non possiamo certo nicchiare o mentire. Ebbene, gente, che ci crediate o meno, è proprio così; *siamo meno bravi di voi*. E infatti anche stavolta non ci sbilanciamo, e per dispetto pubblichiamo proprio la soluzione di ***AGUP***:

Problema n°1

Nell'ipotesi in cui Alberto fa la prima offerta, è sufficiente per lui offrire 50 su ciascuna asta. In tal modo il costo di aggiudicazione per Fred diventa 51, cosicché egli potrà aggiudicarsi un unico oggetto, mentre Alberto potrà impossessarsi degli altri due al prezzo di 100 ore. Viceversa, se fosse Fred a parlare per primo, sarebbe lui a offrire 50, costringendo Alberto a spendere 102 per aggiudicarsi due dei tre oggetti.

Problema n°2

Fred riesce certamente ad ottenere due giochi. Nel caso in cui egli parli per primo, basterebbe una offerta di 40 per impedire che Alberto possa aggiudicarsi 5 oggetti (41*5=205). Nel caso contrario, l'unica differenza starebbe nel costo unitario di aggiudicazione, che sarebbe 41, dal momento che Alberto per ottenere 5 oggetti non potrebbe esordire con una offerta superiore a 40 per ogni oggetto.

Problema n°3

Neanche stavolta Alberto riuscirà nel suo intento. Dovendo acquistare 8 oggetti, egli non può spendere più di 25 cadauno, mentre Fred per acquistarne 3 può permettersi di arrivare a pagare un prezzo unitario di 33, ancorché sarebbe sufficiente offrire 26, sia giocando per primo che per secondo. Anzi, se fosse Fred ad effettuare la prima offerta, potrebbe addirittura accaparrarsene 4 (offrendo ogni volta 25).

Problema n°4

Per semplificare la trattazione e la comprensione, ci limiteremo al caso, più favorevole per Alberto, in cui questi ad ogni asta fa sempre la prima offerta. Chiamiamo **n** il limite massimo che Fred ha intenzione di giocarsi (non superiore a 100). Se tale limite fosse noto, Alberto dovrebbe disporre del numero di ore dato dalla formula

$$\left[\frac{n}{2}\right]*5 \quad \textit{(le parentesi quadre indicano la “parte intera”)}$$

Siccome non si può escludere che Fred abbia deciso di giocarsi proprio 100, non c'è strategia che tenga: Alberto per raggiungere il suo scopo deve poter spendere almeno 250, anzi **esattamente 250** (non avrebbe senso giocare di più, visto che l'avversario non può andare oltre 100). Inoltre, egli non deve permettere a Fred di aggiudicarsi un'asta per meno di 50, altrimenti i suoi 250 non sarebbero sufficienti a superare per cinque volte una possibile offerta di 51.

Poiché, come detto, non è escluso che n=100, Alberto deve offrire 49 alla prima asta, lasciando vincere Fred qualora questi offrisse 50. In tal caso, gli basterà poi offrire 50 nelle cinque aste rimanenti per aggiudicarsele tutte.

Stabilito quindi che Alberto deve comunque giocarsi 250, la risposta alla domanda del problema viene a dipendere dalla scelta di Fred: se **n** valesse da 60 in su e Alberto lo sapesse, la formula data indica che egli dovrebbe giocarsi da 150 in su, con una differenza che non supererebbe 100, mentre invece se fosse **n<60** tale differenza risulterebbe ovviamente maggiore di 100.

E noi prendiamo la frase finale di AGUP ("*…maggiore di 100*"), a mo' di augurio, visto che è proprio sui maggiori di cento che da oggi in poi dovremo misurarci.

5. Quick & Dirty

Ma il numero delle persone che hanno stretto la mano a qualcun altro un numero dispari di volte, è pari o dispari?

Quando due persone A e B si stringono la mano, il numero N di persone che hanno stretto la mano a qualcun altro un numero dispari di volte, varia secondo la tabella:

	$A \in Pari$	$A \in Dispari$
$B \in Pari$	$A \to Dispari$ $B \to Dispari$ $\Rightarrow N \to N+2$	$A \to Pari$ $B \to Dispari$ $\Rightarrow N \to N$
$B \in Dispari$	$A \to Dispari$ $B \to Pari$ $\Rightarrow N \to N$	$A \to Pari$ $B \to Pari$ $\Rightarrow N \to N-2$

Quindi o N non varia o mantiene la stessa parità. Essendo il valore iniziale di N pari a **zero***, alla prima stretta di mano della storia passerà al valore 2, e continuerà ad essere pari.*

6. (Non proprio uno) Zugzwang!

6.1 (K/W)Atomic!

Questo Zugzwang è un po' che gira, ma non eravamo convinti; approfittiamo del numero 100_{10} per proporvelo; vedete un po' voi cosa farne...

Dovreste sapere ormai da tempo che Fred, il Valido Assistente di Laboratorio meno vecchio è un appasionato di Linux, e continua a girellare felice con un'installazione ormai vetusta di Red Hat; durante un'esplorazione all'interno della suite KDE, ha trovato un gioco decisamente interessante, ***KAtomic***; prima che vi precipitiate a formattare gli hard disk familiari ed aziendali per installare il giochino, vi diciamo subito che la "K" davanti nasce dal nome della suite ed è disponibile la versione WAtomic per il Sistema Operativo dell'Impero del Male (Rudy l'ha trovata su ***sourceforge***, compresi i sorgenti): per motivi squisitamente tecnici, i vari snapshot che seguono sono tratti da questa versione.

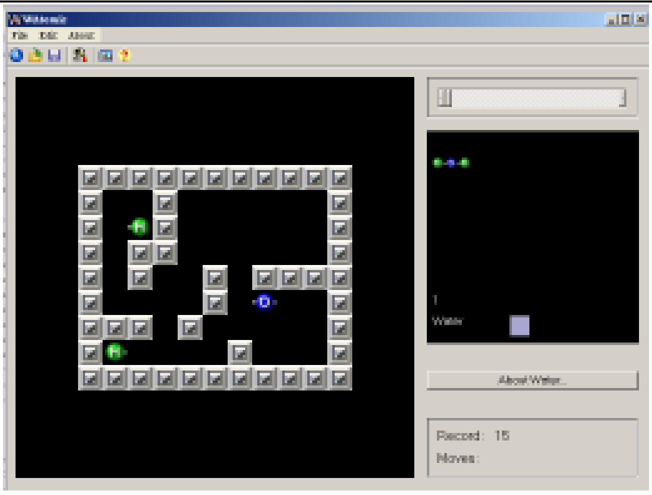


Figura 1 - Pronti? Via!

Il gioco (col "K") è stato inventato da Andreas Wüst, con la collaborazione di due non meglio definiti personaggi (Lorenzo B. e Fabio C.) responsabili della musica e della parte chimica del gioco.

Dunque, quando lo lanciate vi trovate davanti una videata come quella in ***Figura 1***: sul lato sinistro avete una specie di labirinto con dentro tre "atomi" (le palle), due di idrogeno (verdi) e una di ossigeno (blu); ognuno di questi atomi ha un legame (grigio) che gli permette di attaccarsi al legame di un altro atomo. Sul lato destro un cursore (che vi permette di passare al livello successivo), una molecola d'acqua "finita" e un pulsante di "About" che vi permette di accedere a interessanti informazioni (presumibilmente fornite da Fabio C.) sul composto chimico in gioco (nella mia installazione non funziona, ma questo non è fondamentale per il gioco). In basso a destra, il record del livello (e Rudy è particolarmente orgoglioso di quel "15")

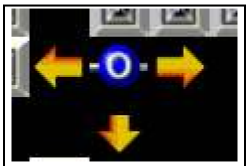


Figura 2 - Scelto!

Per prima cosa, selezionate un atomo con il mouse; se, ad esempio, selezionate l'ossigeno, vi compare una cosa del tipo di ***Figura 2***.

Se adesso premete uno dei tasti di movimento del cursore, il vostro atomo si sposta nella direzione prescelta ***sin quando non trova un ostacolo***, per fermarsi. Adesso potete scegliere un altro atomo e andare avanti così; scopo del gioco è quello di riuscire a costruire, da qualche parte del labirinto, la molecola dell'acqua con il ***minor numero di movimenti possibili***; notate che non potete "girare" gli atomi: l'idrogeno in basso a sinistra, avendo il legame sulla destra, dovrà essere l'atomo di sinistra della molecola.

Il giochino va avanti per 84 livelli, con richiesta di costruzione di molecole decisamente complesse (anche se con alcune cadute di stile... I vari "Crystal", per esempio, sono bruttissimi): la nitroglicerina (livello 30) va trattata con molta cautela, mentre l'acido acetilsalicilico (livello 34) è in grado di causarvi corposi mal di testa.

"Volete che ci giochiamo?" No, vogliamo che ci pensiate. la directory[30] "levels" contiene una serie di files "level_1", "level_2", eccetera che descrivono i vari livelli; la logica di costruzione non è paricolarmente complessa, dovrebbe esservi tutto chiaro confrontando la ***Figura 1*** con il contenuto del file che trovate in ***Figura 3***.

```
[Level]
Name=Water
atom_1=1-c
atom_2=3-cg
atom_3=1-g
feld_00=...............
feld_01=...............
feld_02=...............
feld_03=..###########..
feld_04=..#..#......#..
feld_05=..#.3#......#..
feld_06=..#.##......#..
feld_07=..#.#..#.####..
feld_08=..#....#.2..#..
feld_09=..###.#.....#..
feld_10=..#1....#...#..
feld_11=..###########..
feld_12=...............
feld_13=...............
feld_14=...............
mole_0=123
```

Figura 3 – Delusione!

Come indica la didascalia, Rudy è rimasto profondamente deluso dal fatto che "sotto" non ci fosse un qualche meraviglioso e ingegnosissimo algoritmo in grado di generare un labirinto, piazzare gli atomi nei posti opportuni e dirvi sin dall'inizio quale sia il numero minimo di mosse per ricostruire il molecolone.

Alcune veloci considerazioni dovrebbero portarvi a capire che non basta fare "semplicemente un backtracking" (garantito, l'ho sentita dire sul serio) rispetto ad una molecola costruita da qualche parte su un labirinto casuale; quello che ci chiedevamo (o meglio, se lo chiedeva Rudy: gli altri si limitavano a giocarlo) è se, per problemi del genere, esista un qualche approccio per generare un problema, possibilmente avendo anche indicazioni del numero minimo di mosse necessario.

"E perché non lo mettete tra i problemi?" Provate a indovinare...

7. Zugzwang!

7.1 Le "Elle" di DeBono

Ormai attempata rivista di Matematica Ricreativa con un centinaio di numeri alle spalle, ci pare finalmente giunto il momento di analizzare un vecchio classico; di questo gioco (sia attraverso leggende metropolitane che attraverso dichiarazioni dell'inventore) si sa praticamente tutto, tranne come vincere.

Leggenda vuole che Edward DeBono (l'inventore/scopritore del pensiero laterale) fosse stato sfidato ad inventare un gioco rispondente ad alcune caratteristiche:

- Tanto per cominciare, non doveva essere una schifezza come la maggior parte dei giochi inventati ex novo.
- Uso minimo di pezzi
- Scacchiera minimale
- Minimo numero di regole
- Possibilità di essere giocato ad alto livello
- Assenza di strategia vincente

Le ultime due sembrano dire più o meno la stessa cosa, ma non staremo a sottilizzare, anche perché le ha dette Edward, e di solito ha l'aria di uno che sa di cosa sta parlando: quello che intendeva è che si può pensare molto e due giocatori perfetti potrebbero non finire mai la partita. Leggenda (non confermata dall'interessato) inoltre vuole che avesse inserito un ulteriore punto:

- Il gioco deve essere "non-violento", ossia non prevedere prese di pezzi

Se volete provarci voi, non leggete il seguito.

[30] Tutti li chiamano "folder", tranne Rudy. Quindi, qui si chiamano "directory".

Tanto per cominciare, dovete costruirvi qualcosa: scacchiera e pezzi. Poca roba, come anticipato prima. Riferimento alla ***Figura 1***

Per prima cosa, vi serve una scacchiera 4×4; bastano le indicazioni dei quadretti, quindi non serve colorare; poi, vi servono due pezzi a forma di "elle" (i Geni dell'Analisi Strategica avranno a questo punto compreso il motivo del nome del gioco), di formato 3×2; nel disegno li abbiamo fatti grigio chiaro e grgio scuro, ma fateli del colore che vi pare. Infine, vi servono due pezzi "neutri" (qui sono verdi) della dimensione di una casella; non serve siano rotondi, l'importante sono le dimensioni.

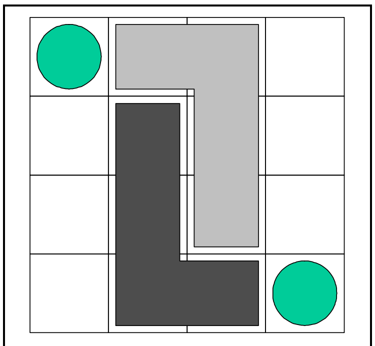


Figura 1 – Pezzi e posizione di partenza

I due giocatori si alternano nelle mosse: quando ha il tratto un giocatore ***deve*** (obbligatorio!) prendere la propria "elle" e, alzandola, ruotandola, capovolgendola, posarla in una posizione diversa sulla scacchiera; la "elle" deve essere completamente sulla scacchiera, non deve sovrapporsi ad altri pezzi, deve coprire un numero intero di quadrati (niente posizioni storte, quindi) e la nuova posizione deve essere diversa dalla posizione iniziale. Successivamente il giocatore, ***può*** (facoltativo) muovere un pezzo neutro dove gli pare: non è obbligatorio muovere un neutro, ma prima bisogna muovere la "elle".

Chi non riesce a muovere la "elle", ha perso.

Opinione personale: secondo noi ce l'ha fatta, a inventare un bel giochino...

8. Pagina 46

Parte [a]

Si vede facilmente che ogni numero primo p soddisfa la condizione data, in quanto p non compare come fattore nello sviluppo di $(p-1)!$.

Se n è un numero composto esprimibile come prodotto di due diversi fattori a e b, allora sia a che b devono essere minori di $(n-1)$, e quindi entrambi compariranno come fattori nello sviluppo di $(n-1)!$, ossia in questo caso $(n-1)!$ è divisibile per $ab = n$.

Se n è il quadrato di un primo $p > 2$, allora $n-1 = p^2 > 2p$, ossia p e $2p$ entrano nella costruzione di $(n-1)!$ e quindi $(n-1)!$ è divisibile per $p \cdot 2p = 2p^2 = 2n$. Questo significa che tutti i numeri composti tranne $2^2 = 4$ possono essere eliminati.

Quindi, il numero 4 e tutti i primi minori di 100 soddisfano le condizioni del problema.

Parte [b]

Se n non è un numero primo, non è il doppiio di un primo, non è il quadrato di un primo, non è nessuno dei numeri 8 16, allora può essere espresso come $n = a \cdot b$, dove a e b sono maggiori o uguali a 3.

Supponiamo $b > a \geq 3$; allora i numeri a, b, $2a$, $2b$, $3a$ sono minori di $n-1$; inoltre, i numeri a, b, $2b$ sono distinti l'uno dall'altro, e almeno uno dei numeri $2a$ o $2b$ differisce da a, b e $2b$.

Allora in $(n-1)!$ appariranno i fattori distinti a, b, $2b$ e $2a$ oppure i fattori a, b, $2b$ e $3a$ o ancora (composizione delle due precedenti) a, b, $2a$, $2b$, $3b$ come fattori separati. In ogni caso, $(n-1)!$ è divisibile per $a^2b^2 = n^2$.

Inoltre, se $n = p^2$ con $p > 4$ e primo, allora $n-1 > 4p$ e quindi $(n-1)!$ contiene come fattori tutti i numeri p, $2p$, $3p$, $4p$ e quindi risulta divisibile per $p^4 = n^2$.

Se $n = 2p$, allora $(n-1)!$ non è divisibile per p^2, e quindi non lo sarà per n^2; inoltre, quando $n = 8$ o $n = 9$, $(n-1)$ non è divisibile per n^2, e se $n = 16$, $(n-1)!$ è divisibile per n^2, in quanto $15!$ contiene come fattori 2, $4 = 2^2$, $6 = 3 \cdot 2$, $8 = 2^3$, $10 = 2 \cdot 5$, $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, e quindi risulta divisibile per $2^{1+2+1+3+1+2+1} = 2^{11} = 16^2 \cdot 2^3$.

Quindi la condizione del problema è soddisfatta da tutti i primi, dai doppi dei primi e dagli interi 8 e 9.

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Rien ne va plus [007]: La cosa si fa spinosa

In quanto trattasi sempre di cespugli.

Oceaniche folle di lettori ormai avvinti dal demone del gioco[31] ci hanno fatto notare che, al termine dell'analisi del *Domineering*, avevamo sorvolato su un caso; rivediamoli un attimo, cercando anche di espanderli:

1. Se il giocatore di sinistra ha una strategia vincente indipendentemente da chi giochi per primo, allora $G > 0$.
2. Se il giocatore di destra ha una strategia vincente indipendentemente da chi giochi per primo, allora $G < 0$.
3. Se il giocatore che gioca per secondo ha una strategia vincente, allora $G = 0$.
4. Se il giocatore che gioca per primo ha una strategia vincente, allora $G = \pm x$.

Quello sul quale avevamo sorvolato per vedere se eravate attenti era il terzo caso; vi avevamo detto anche che il quarto viene indicato come *fuzzy*; attenzione che alcuni autori preferiscono indicarlo come $G \| 0$ (non chiedete il motivo: sarebbe un uguale per dritto, pare). Insomma, riassumendo e complicando un po' la cosa, possiamo definire una tabella come quella qui sopra.

		Sinistra inizia	
		Sinistra vince	**Destra** vince
Destra inizia	**Sinistra** vince	$G > 0$	$G = 0$
	Destra vince	$G \| 0$	$G < 0$

Tabella 1 – Come va a finire

	$G = 0$	$G < 0$	$G > 0$	$G \| 0$
$H = 0$	$G + H = 0$	$G + H < 0$	$G + H > 0$	$G + H \| 0$
$H < 0$	$G + H < 0$	$G + H < 0$		
$H > 0$	$G + H > 0$		$G + H > 0$	
$H \| 0$	$G + H \| 0$			

Tabella 2 – Prime regole

	$G = H$	$G < H$	$G > H$	$G \| H$
$H = K$	$G = K$	$G < K$	$G > K$	$G \| K$
$H < K$	$G < K$	$G < K$		
$H > K$	$G > K$		$G > K$	
$H \| K$	$G \| K$			

Tabella 3 – Seconde regole

Nonostante la presenza di simboli piuttosto bislacchi e qualche remora che potrebbe nascere dal fatto di trattare con dei numeri piuttosto strani, è possibile stabilire delle regole di aritmetica con relativa semplicità: ad esmpio, dati tre giochi a valori G, H e K, non è difficile dimostrare quanto presentato nelle ***Tabelle 2*** e ***3***. Posto che siate interessati alle dimostrazioni, ve ne accenniamo una: sono tutte decisamente simili, e dalla prima

[31] Neanche uno che se ne sia accorto...

dovreste capire il trucco.

Posto che sia $G=0$, esaminimao il caso in cui $H<0$; questo significa che il secondo giocatore vince in G mentre il giocatore di sinistra vince in H, e si tratta di dimostrare che esiste una strategia vincente per il giocatore di sinistra in $G+H$. Questa strategia, semplicemente, consiste nel ***giocare*** H ***sino alla vittoria, tranne nel caso in cui il giocatore di destra giochi in*** G***;*** in questo caso, infatti, il giocatore di sinistra diventa il secondo giocatore in G (e quindi vince); inoltre non può perdere in H, e quindi vincerà in entrambi i giochi, ossia nella loro somma. In pratica, ***tra i numeri surreali valgono le stesse regole dell'aritmetica ordinaria***.

Bene, torniamo ai nostri cespugli. Dopo aver visto le regole di base dell'aritmetica, dovrebbe essere interessante iniziare ad introdurre le frazioni; se ricordate che invertendo i colori di un gioco il gioco risultante ha numero opposto a quello originale, l'analisi che segue non dovrebbe rappresentare un problema.

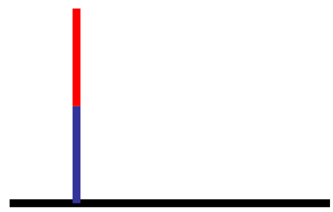


Figura 1 – Il gioco che non piace a FRed

Consideriamo il gioco G in ***Figura 1***; Se ***FRed*** (che "taglia" il **R**osso) gioca per primo, lascia ad ***AlBerto*** (che "taglia" il **B**lu) un ramo da tagliare, quindi perde; se invece gioca per secondo, AlBerto non lascia nulla e quindi FRed nuovamente perde; pare abbastanza immediato quindi dire che $G=\{0\mid 1\}$, valore indubitabilmente maggiore di zero. Già, ma quanto vale? Per calcolarlo in un modo più divertente del solito, aggiungiamo un paio di giochi: un altro identico e un gioco a valore -1, in cui vince sicuramente FRed; trovate la somma in ***Figura 2***.

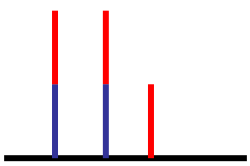


Figura 2 – A voi la mossa...

L'analisi (che è facilissima, quindi ve la fate da soli) vi porta alla facile conclusione che ***il secondo giocatore ha una strategia vincente***, e quindi il gioco deve aver valore zero; quindi, deve essere $G+G-1=0$, ossia $G=\{0\mid 1\}=1/2$. Sicuramente più divertente che con i maggiori e minori...

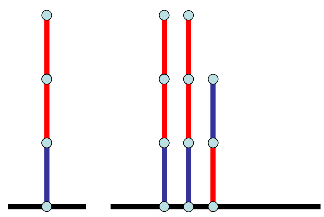


Figura 3 – Stesso risultato, solo che ci vuole più tempo

Se volete verificare la vostra perizia nel trattare con queste cose, provate a calcolare il valore del ***primo*** gioco della ***Figura 3***; passando attraverso il ***secondo***, non dovreste avere problemi ad arrivare alla conclusione che, se $H=\{0\mid 1/2,1\}=\{0\mid 1/2\}$, allora nel secondo gioco deve essere $H+H+1/2=0$ e quindi $H=1/4$.

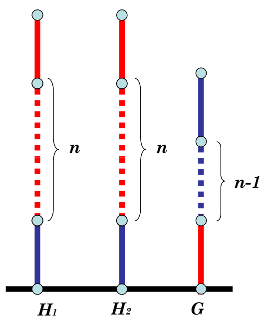


Figura 4 – Sempre più lento, ma ineluttabile

La cosa dovrebbe ingenerare un sospetto nei più attenti di voi; bene, avete ragione. Sorvoliamo sulla dimostrazione (che è comunque semplice, procede per induzione), e limitiamoci a dire che, nella situazione indicata in ***Figura 4***, si ha che $H_1=\{0\mid 2^0,2^{-1},\ldots,2^{-(n-1)}\}=\{0\mid 2^{-(n-1)}\}=2^{-n}$.

Qualcuno di voi si starà probabilmente chiedendo una cosa, dopo l'ultimo passaggio: *ma cosa significa, considerare solo un valore dell'insieme di un giocatore?* Domanda legittima, anche se la risposta (soprattutto per il giocatore) potrebbe non essere molto semplice.

Infatti, esattamente come per i numeri "normali", esistono delle ***regole di semplificazione***; dal punto di vista dei giochi, si può dare una giustificazione piuttosto semplice: se abbiamo un gioco $G = \{V, W, X \mid Y, Z\}$ per cui sia ad esempio $W \geq X$, allora il giocatore di sinistra preferirà lo scenario (o il gioco) W rispetto a X; al contrario, se $Y \leq Z$, il giocatore di destra preferirà Z rispetto a Y.

Anche qui, però, possiamo avere delle complicazioni: in questo caso specifico, queste sono rappresentate dai ***giochi reversibili***; vediamo un esempio nella prima parte di ***Figura 5***: qui, le maiuscole sul cespuglio sono dei giochi, ciascuno formato dall'albero che si

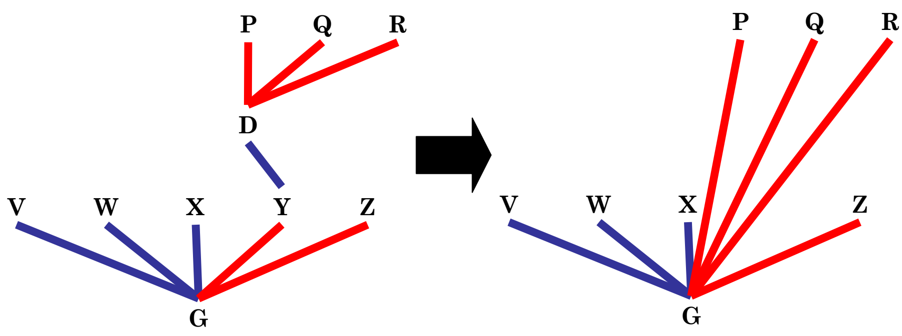


Figura 5 – Tanto va a finire uguale...

dirama da lui: in pratica, abbiamo il gioco $G = \{V, W, X \mid Y, Z\}$; se FRed decide di "spostarsi" sul gioco Y, in cui ALBerto può rispondere passando al gioco D, per cui è $D \geq G$, allora possiamo sostituire Y con tutte le opzioni **destRe** da D; lo stesso teorema vale per l'altro lato, evidentemente; nella seconda parte di ***Figura 5*** vedete la trasformazione effettuata.

Va detto che sarebbe bene avere un metodo un po' veloce per arrivare al "numero-numero" dalla struttura; se avete giocherellato abbastanza con quanto detto sopra, potreste esservi accorti, ad esempio, che:

$$\left\{ \frac{p}{2^m} \middle| \frac{p+1}{2^m} \right\} = \frac{2p+1}{2^{m+1}}.$$

In effetti, il concetto di attribuzione del valore ad un gioco contiene dei concetti piuttosto balordi; infatti, in generale, *il gioco* $G = \{a \mid b\}$*, dove* $x < y$*, è il* **numero più semplice** *strettamente compreso tra* a *e* b.

Si tratterebbe solo di capire cosa significa "numero più semplice"; la spiegazione "$G = z$ dove $a < z < b$ e nessuna delle opzioni di z si trova tra a e b" non è che sia molto chiara; forse, un esempio aiuta.

Supponiamo $G = \{3/4 \mid 5/2\}$; il numero 1 è strettamente compreso nell'intervallo; non solo, ma sappiamo anche che $1 = \{0 \mid \ \}$, e né l'insieme vuoto né 0 sono compresi nell'intervallo $[3/4, 5/2]$; quindi, $G = \{3/4 \mid 5/2\} = 1$.

Poco chiaro? Una volta tanto, d'accordo con voi. Non solo, ma ci sono delle ***regole di semplicità*** che dovrebbero permettere di decidere cosa succede: ve le forniamo, in ordine crescente di perdita di semplicità.

1. 0 è il numero più semplice di tutti
2. Tra due valori interi diversi da zero, è più semplice quello più vicino allo zero
3. Tra due numeri non interi r e s, il più semplice è quello con il denominatore più piccolo in valore assoluto.

Quello che si può fare è tentare un metodo costruttivo, simile a quello che abbiamo utilizzato per ***NimLand***.

Supponiamo z sia un numero tra a e b; se nessuna delle opzioni che compongono z si trova tra a e b, abbiamo finito; in caso contrario, prendiamo una qualsiasi opzione di z e sostituiamo z con la sua opzione e ricominciamo da capo; siccome il gioco è finito, prima o poi arriveremo ad un valore funzionante.

Ora, se $\{a \mid b\} = z$, si tratta di dimostrare che $\{a \mid b\} + (-z) = 0$, ossia che *il gioco composto è vincente per il secondo giocatore.*

Supponiamo inizi il giocatore di sinistra; se sceglie il gioco dal primo addendo, il risultato sarà $a - z < 0$, ossia una vincita per il giocatore di destra, che in questo caso è il secondo giocatore; quindi, in questo caso il teorema è verificato.

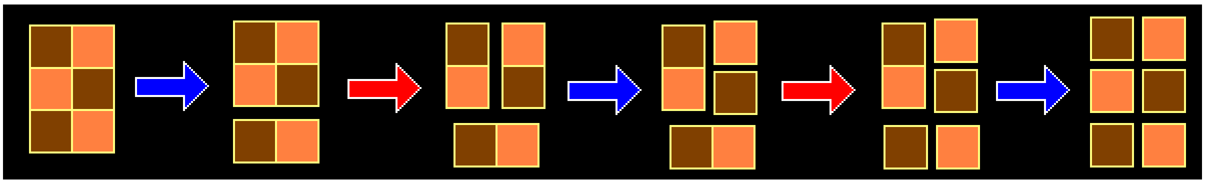
Se invece sempre il giocatore di sinistra sceglie il gioco dal secondo addendo (che ha valore $-z$), otterremo un nuovo valore $-z_1$; in questo caso, deve risultare $z_1 > b$, in quanto il valore non è compreso tra a e b; ora destra può rispondere con una mossa appartenente al primo gioco, lasciando un valore $y - z_1 < 0$, lasciando quindi la vittoria sicura alla destra, che è sempre il secondo giocatore; anche in questo caso, quindi, il teorema è verificato.

Volete giocare?

Taglio del cioccolato

> Data una barretta di cioccolato di dimensioni $m \times n$, Alberto (sinistra) e Fred (destra) si alternano nel tagliare il cioccolato, con la regola che ogni taglio deve dividere uno ed un solo pezzo in due e solo due parti: Alberto può fare solo tagli orizzontali, mentre Fred può fare solo tagli verticali.

Ad esempio, un tipico gioco su una tavoletta 2×3 potrebbe procedere in questo modo:



È evidente che un rettangolo $1 \times n$ ha il valore $(n-1)$, in quanto Alberto ha $n-1$ mosse, mentre Fred non ne ha nessuna; nello stesso modo, un rettangolo $n \times 1$ ha valore $-(n-1)$, visto che questa volta è Fred ad avere la scelta tra $n-1$ mosse, contro nessuna di Alberto; si verifica facilmente che nei casi 2×2, 2×3, 3×2 e 3×3 vince il secondo giocatore, e quindi il gioco in questo caso deve avere valore zero.

...E nel caso 2×4? Beh, in questo caso se parte Fred lascia due giochi 1×4, ossia un gioco di valore $(-3) + (-3) = -6$; se, invece, parte Alberto, può lasciare o due rettangoli 2×2 o, in alternativa, un rettangolo 2×1 e un rettangolo 2×3; nel primo caso si ha un gioco a valore 0, mentre nel secondo il valore è $(-1)+0=-1$; quindi, il gioco totale vale $\{-1,0 \mid 6\}=\{0 \mid 6\}=1$, dove nell'ultimo passaggio abbiamo scelto il numero "più semplice".

Tutto chiaro? Bene, allora gli altri casi di $m \times n$ ve li calcolate voi. Questa era l'ultima puntata[32].

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[32] Come abbiamo detto all'inizio di questa giocosa odissea, Li WeiXi *non ha scritto le ultime due puntate.* non solo, ma anche quelle vecchie sembrano sparite: tenete da conto queste, che il Capo è sicuro di perdere tutto nel trasloco.