Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 099 – Aprile 2007 - Anno Nono

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com
RM 098 ha diffuso 1302 copie e il 01/04/2007 per Google eravamo in 19'800 pagine.

Marshall ASTOR ha costruito un cubo di Rubik in bronzo massiccio perfettamente funzionante che ci pare risolva due problemi in un colpo solo. Per prima cosa, comunque lo ruotiate è sempre "risolto"; inoltre, se in un momento di frustrazione decidete di tirarlo in testa a qualcuno, la soddisfazione è sicuramente maggiore.

1. La Geografia Difficile

…
Oh Barbara
Il pleut sans cesse sur Brest
Comme il pleuvait avant
Mais ce n'est plus pareil et tout est abîmé
C'est une pluie de deuil terrible et désolée
Ce n'est même plus l'orage
De fer d'acier de sang
Tout simplement des nuages
Qui crèvent comme des chiens
Des chiens qui disparaissent
Au fil de l'eau sur Brest
Et vont pourrir au loin
Au loin très loin de Brest
Dont il ne reste rien.[1]
(Jacques Prevert – "Barbara")

I termini di confronto sono sempre gli stessi, nonostante le molteplici e rinnovellate riforme scolastiche. La scuola è strapiena di materie di studio come storia, geografia, inglese, francese, matematica, filosofia, e la vita ne sembra invece quasi del tutto priva. Serve davvero, studiare la storia? Ha senso impazzire sulle migliaia di nozioni che propina la geografia? È realmente utile restare chini sulle noiose regole grammaticali, sulle regole di bisezione, sulle antinomie kantiane?

Sì, serve. E serve anche molto, serve sempre di più, e quasi certamente continuerà ad essere sempre più necessario; ma sarebbe bello e piacevole conoscere le cose anche se tale conoscenza fosse inutile. Non intendiamo arrivare agli estremi di Hardy, che orgogliosamente rivendicava come indissolubili l'inutilità e la bellezza della matematica; il problema è piuttosto quello eterno della didattica, ovvero che non è possibile mostrare all'inizio tutte le delizie che una conoscenza organica consente, per il semplice e terribile fatto che occorre una conoscenza di base anche solo per apprezzare la bellezza della summenzionata "conoscenza organica". Insomma, gli insegnanti – specie quelli delle scuole primarie – devono necessariamente iniziare da qualche parte, immettere quasi a forza, almeno all'inizio, nozioni che sembrano per loro natura disaggregate, scomposte, disomogenee. Solo più tardi, dopo anni di ripetuta bulimia informativa, si cominciano a scoprire delle connessioni impreviste: connessioni che sono, inevitabilmente, inaspettate e divertenti.

È esattamente la stessa sensazione che si prova quando ci si trasferisce in una grande città sconosciuta. Quasi senza accorgersene, ci si ritrova del tutto indifesi in un groviglio di vie, piazze, luoghi notevoli, nomi e toponimi che non significano assolutamente nulla: armati di un unico indirizzo familiare, quello dell'appartamento o dell'albergo che ci ospita, si affronta il mostro metropolitano poco a poco, e con sacrosanto timore di perdersi. Si impara prima una sola strada che porta dall'appartamento all'ufficio, e non la si abbandona neanche quando diventerà poi palese che esistono delle alternative possibili e forse anche migliori. Se si impara un percorso che porta da A a B e uno che porta da B a C, si andrà sempre, le prime volte, da A a C passando per B, anche quando è ormai chiaro che il passaggio forzato per la tappa nota intermedia triplica il cammino. Poi, col tempo, e solo dopo che si sono stabilizzati quegli automatismi che diventano realmente tali solo quando uno non si accorge più di usarli, si cominciano a fare delle scoperte interessantissime: ad esempio, che la tal piazza, vista in precedenza solo arrivando da

[1] Oh Barbara - Piove senza tregua su Brest - Come pioveva allora - Ma non è più lo stesso e tutto è crollato - È una pioggia di tragedie, terribile e desolata - Non c'è nemmeno più la tempesta - Di ferro, d'acciaio e di sangue - Solo nuvole - Che crepano come cani - Come cani che scompaiono - Sul filo dell'acqua a Brest - E vanno ad imputridire lontano – Lontano, molto lontano da Brest - Dove non c'è più niente.

nord-ovest, è praticamente attaccata al quel corso ben noto, nella parte di sud-est. Pezzi di città conosciuti ancora a compartimenti stagni improvvisamente si giuntano, si uniscono, e i cento paesaggi separati diventano improvvisamente una conoscenza quasi omogenea della metropoli.

È di enorme soddisfazione, quando succede: è il momento magico in cui una città mostruosamente estranea comincia a diventare piacevolmente familiare. Il momento in cui quel che prima era sentito come nemico diventa amichevole, e non arreca più minaccia, ma offre rifugio. Però non è possibile arrivare a questa sensazione se non passando attraverso il sottile terrore del primo impatto, delle prime sconosciute e disaggregate immagini cittadine. È un pegno che è inevitabile pagare, proprio come le lezioni di geografia.

Esiste un'età nella quale non c'è niente di realmente interessante, a parte l'amore. Quello che i sapienti del medioevo chiamavano "il demone meridiano" comincia con l'adolescenza, esplode e richiama attenzione, e occuperà i pensieri dell'individuo per lunghissimo tempo. Erano generosi, nel medioevo, a definirlo "meridiano": certo se ne è esenti nei primi anni e negli ultimi anni di vita, ma è un mezzogiorno ben lungo quello che comincia ad attrarre i ragazzi l'uno verso l'altro. Nelle fase iniziali, divora ogni altro tipo di attenzione: come dice Proust, "non amiamo nulla quando amiamo"; e solo le cose che sono direttamente relazionate all'oggetto della passione superano la soglia della "dignità d'attenzione". Così, il Catullo pessimamente sopportato durante l'ora di latino viene ripreso, recuperato, perché improvvisamente sembra adatto alla bisogna. Un verso d'amore in latino fa la sua figura, e se uno corre in biblioteca a cercare l'opera omnia, si riescono a trovare dei carmi (sapientemente evitati dai curatori delle antologie scolastiche) niente affatto platonici.

E il latino è servito.

Ma è servita anche la letteratura italiana, nel frattempo; si riscoprono i fremiti del Dolce Stil Novo, che magari i vecchi barbogi del Duecento sono in grado di parlare d'amore bene quasi quanto Federico Moccia[2]; è servito l'inglese, perché alla fin fine Shakespeare è l'inventore di Giulietta e Romeo, mica storie. Altro che le notti prima degli esami; e se uno non ha la forza di leggersi un'intera commedia del bardo, basta ripiegare sui Sonetti, per far battere forte i cuori degli amati.

E il francese? Non serve il francese? Come può non servire la lingua che per molti è il veicolo per eccellenza delle parole d'amore, lingua che ha nome pari all'aggettivo che si coniuga alla parola "bacio"?[3] Le cose potrebbero ormai essere cambiate, ma c'era un tempo in cui non era possibile confessare di non conoscere Prevert; non esisteva quindicenne che non andasse in deliquio per "*questo amore così fragile, così violento*", e via di seguito con tutti gli aggettivi del caso. Al punto che lo stesso Prevert è rimasto a lungo ingabbiato – almeno per un paio di generazioni – dentro il ruolo un po' stretto di "poeta d'amore". Ad esempio, non era semplicemente possibile provare a fare la corte ad una qualsiasi Barbara senza citarle Brest e la pioggia. A dire il vero, per quanto riguarda la pioggia, lo stesso discorso valeva anche per Ermione, ma le anagrafi italiane conteggiavano molte più Barbara che Ermione, un tempo: non era ancora arrivata l'era di Harry Potter.

Ma il punto era chiaro: per fare il filo a Barbara occorre prepararsi con Prevert, ricordarle che a Brest piove un sacco, che Brest è città francese e anche i baci lo sono. E se a quel punto Barbara rifiuta ancora di capire, significa proprio che non c'è niente da fare, ed è meglio piuttosto rivolgersi le attenzioni a Laura (previa rilettura del Petrarca).

---

[2] Questa non è una nota esplicativa, ma invidiante. Se non conoscete ancora l'autore citato, ci guardiamo bene dal segnalarvelo e ci limitiamo ad informarvi che avete la nostra invidia.

[3] A dire il vero, il sospetto è che solo gli americani osino chiamare il bacio tra innamorati "French kiss", e che gli europei si guardino bene dal concedere ai cugini transalpini l'onore della primogenitura di invenzioni così affascinanti. Il sospetto più grave è che "French kiss" venga addirittura per estensione da "French girl", che è il termine con il quale i cow-boys chiamavano le ragazze dei saloon.

Per quanto decisamente frammentario, si può già trarre un piccolo bilancio: ad esempio, che Prevert continuerà sempre ad essere considerato un poeta d'amore anche da tutte le Barbara che avranno pur letto l'omonima poesia, accorgendosi che più che versi d'amore quelli sono versi contro la guerra[4]; o magari che al fidanzato di Barbara probabilmente non basterà aver avuto successo nella sua corte per ricordare che la Bretagna è regione piovosa (anche se forse, durante una provvidenziale lezione di geografia, qualche improvvisa lampadina connettiva si accenderà).

Il gioco delle connessioni è però davvero imponente, molto più esteso di qualsiasi metropoli: questo perché, a ben vedere, se stiamo parlando di adolescenti, di prime cotte, di Prevert, di Brest e della Bretagna, è solo perché è difficile raccontare la vita di un matematico russo, anzi no bielorusso, anzi no polacco, anzi no americano, anzi no italiano, anzi no ucraino. Tutta colpa della geografia, e della storia che si diverte a cambiarla.

Monumento in memoria delle vittime di Chernobyl

Il fatto è che se andate a cercare "Kobrin", con un qualsiasi motore di ricerca, vi trovate subito in mezzo ai tragici danni di Chernobyl, e questo dapprima stupisce, perché cercando Kobrin uno si aspetta di cercare una città bielorussa, o russa, quasi polacca; mentre invece Chernobyl è ucraina. Certo, non ci vuole poi troppo a capire che il vero problema è come sempre quello di fidarci troppo delle nostre stesse classificazioni. Kobrin è davvero quasi in Polonia, ma il confine con l'Ucraina è a pochi passi: un confine lungo e orizzontale, adagiato lungo la direttrice est-ovest, e sotto questa direttrice, non troppe centinaia di chilometri più ad est, sorge Chernobyl. O quel che ne resta. Ventuno anni fa, il 28 Aprile 1986, il reattore numero 4 della centrale nucleare esplose, creando il maggior disastro della storia del nucleare civile. La valutazione del numero delle vittime è ancora incerta – o quantomeno contrastata – a seconda delle fonti. Quel che è certo, è che una simile tragedia trascende i confini geografici sia in senso letterale – con i venti radioattivi che seminano morte incuranti delle misere linee di confine disegnate dagli uomini – sia in senso metaforico, perché il non riconoscere la dislocazione geografica del dolore e le nazionalità dei ragazzini ammazzati dalle radiazioni non ci fa sentire impreparati scolasticamente, ma solo impreparati alla vita.

Ma stavamo cercando Kobrin, muovendoci in quelle lande senza catene montuose, in quelle terre in cui sono gli uomini e non la natura a disegnare le linee di separazione. E Kobrin appare, improvvisamente, non lontano da Brest. Ma non è la Brest di Prevert; quella è città di confine nervoso tra terra e mare, con le ondate violente di Bretagna che mescolano aria e acqua salata, questa è invece un Brest di confine diverso. È dove – oggi – finisce la Polonia e comincia la Bielorussia, e questo salto di frontiera è rimarcato ed esasperato dal confine ferroviario, che proprio qui diventa anche confine di ferrovie. Le due più grandi capitali dell'Est europeo, Berlino e Mosca, sono unite da una ferrovia che proprio qui a Brest si interrompe, offre cesura, punto singolare. Lo scartamento delle

[4] Come? Dite che scrivere d'amore e scrivere contro la guerra non è poi cosa diversa? Ah, va bene, ma se stiamo giocando a far finta di non capirci allora ditelo subito, no?

ferrovie russe è diverso dallo scartamento occidentale, e in questa stazione di confine i binari vengono tradotti nelle proprie lingue di ferro. Ma Brest di Bielorussia è sempre stata confine, anche quando al suo est si stendeva l'interminabile Impero Russo degli Zar, e al suo occidente cominciava la Lituania, tant'è vero che nella denominazione zarista il nome della città suonava come Brest Litovsk, come a dire "Brest già in Lituania". E la seconda parte del nome finalmente tronca i rapporti con la Brest di Prevert, e ci riporta indietro, al 1917, quando la rivoluzione russa, dopo aver rovesciato lo zar, firma una pace separata con la Germania, ratificata poi il 6 marzo del 1918. Una pace che inguaiava il "fronte occidentale", consentendo ai tedeschi di alleggerire quello orientale: un momento importante, nella storia della carneficina della Grande Guerra.

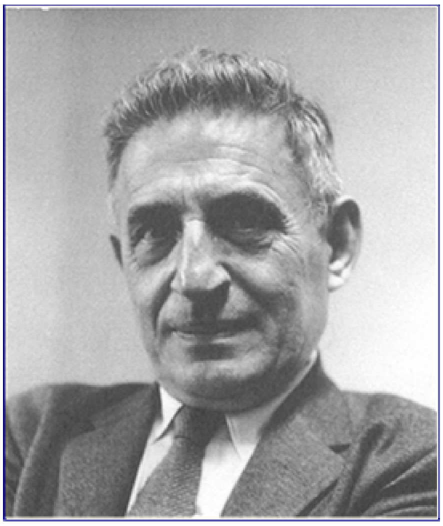
È difficile trovare notizie su Kobrin, stretta com'è tra tragedie più grandi di essa. Kobrin è città piccola, e da l'impressione di essere sempre trascinata dagli eventi. Eppure ha una storia notevole: indipendente per quattro secoli, capitale di un piccolo principato, comincia a decadere già all'inizio del Seicento, disastrata dalle guerre dell'epoca e dalle seguenti epidemie. Nel 1795 diventa parte integrante dell'Impero Russo, e se si fa attenzione alle date, non si può certo dire che la città abbia dato mostra di tempismo.

La fine del Settecento e l'inizio dell'Ottocento, in Europa, sono marchiate da un unico nome, quello di Napoleone Bonaparte. E Bonaparte ha tutte le intenzioni di rendere la vita difficile alla Russia, e Kobrin è proprio sulla strada del generale corso, con conseguenze facilmente immaginabili. Una sommossa locale nel 1867 interrompe un periodo di relativa tranquillità, perché questa città è piccola, ma decisamente nervosa. Al punto che la lontanissima prima rivoluzione russa, quella del 1905, non ha molti echi al di fuori delle città più grandi, ma a Kobrin lascia comunque il segno. Poi, il "secolo breve", e la sua fretta disperata: della Grande Guerra e della pace di Brest-Litovsk si è già detto, ma forse proprio per questo è inaspettato registrare che, già nel 1921[5], Kobrin e la sua regione cessino di essere russe per diventare polacche.

Dopo lo sconvolgimento e le distruzioni della guerra e della rivoluzione, arrivava il cambio di cultura, di nazione, di abitudini. E non fu facile, ma forse anche meno cruento di quanto ci si poteva aspettare: in fondo, polacchi e bielorussi avevano, hanno caratteristiche in comune, e si poteva convivere e costruire insieme; e Kobrin crebbe polacca, imparando la lingua, usi e costumi polacchi; questo per diciotto anni, quando, improvvisamente, fu invasa dai sovietici. Non deve essere facile immaginare la faccia dei vecchi abitanti di Kobrin, a quel punto: uomini che dovevano ricordare il dominio degli zar, poi il succedersi delle rivoluzioni del 1905 e del 1917, la tragedia della guerra, fino al trattato che li rendeva improvvisamente parte della Polonia: e ora, all'alba del 17 Settembre 1939, vedere l'esercito di Mosca che li invadeva in quanto polacchi; era il risultato del patto Molotov-Ribbentrop, che prevedeva la spartizione della Polonia.

Invasione per invasione, quando anche quel patto diventa carta straccia, è l'esercito nazista a dirigersi verso Mosca, e Kobrin è di nuovo sulla strada delle invasioni e devastazioni. L'invasione dell'Unione Sovietica comincia il 22 Giugno 1941, e due giorni dopo i tedeschi sono a Kobrin, dove stabilirono un presidio e organizzarono un ghetto per rinchiudere gli ebrei, che erano una parte significativa della popolazione: l'occupazione tedesca cessa il 20 Luglio del 1944. Il fatto che anche una centrale nucleare abbia deciso di seminare morte e distruzione in queste zone, conferma solo che la sfortuna, se esiste, è decisamente ripetitiva e priva di fantasia.

[5] Trattato di Riga, 18 Marzo 1921. Il territorio era controllato dalle truppe polacche fin dalla fine della Prima Guerra Mondiale.



Nascere a Kobrin allora, non garantisce certo una nazionalità chiara; ma di certo dovrebbe essere garanzia di abitudine alla lotta e ad ogni tipo di sacrificio. E a Kobrin nasce, il 24 Aprile 1899 – e pertanto in pieno Impero Russo degli Zar - Ascher Zariski, che presto cambierà il prenome nel più internazionale "Oscar".

Ascher nasce da famiglia ebrea: il padre si chiama Bezalel e la madre Hannah (e, beh, la famiglia si chiama Zaritsky, non Zariski; ma si sa che le traslitterazioni dal cirillico sono sempre varie e fantasiose…), ed è proprio la madre a garantire la prima educazione del piccolo Ascher. Non è impresa da poco, anche se le madri sono da sempre abituate a simili performance: il fatto è che Hannah ha altri sei figli, oltre ad Ascher, e deve provvedere a tutti da sola: Bezalel infatti, muore quando Ascher ha soltanto due anni.

Il giovane Zariski mostra in fretta le sue abilità e la sua predisposizione alla matematica già al ginnasio: ma l'epoca dei suoi studi ginnasiali è già tempo di guerra, e insieme ad uno dei fratelli viene mandato dalla madre a studiare a Chernigov, in Ucraina, che è posto più tranquillo e sicuro. Non è scelta poco oculata: la Bielorussia, come sempre, è invasa prestissimo dalle truppe tedesche, e Oscar non riuscirà a rivedere la madre prima della fine della guerra. Da Chernigov, finito il liceo, si trasferisce a Kiev, per frequentare l'università nelle aule della facoltà di matematica, ma questo si rivelerà impossibile[6]. Dovrà ripiegare sul corso di laurea in filosofia, che seguirà dal 1918 al 1920; visto che non era uno studente "normale", riesce senza troppa difficoltà a portare avanti i suoi studi senza dimenticare quelli amati di matematica: algebra e teoria dei numeri, per quanto niente affatto richiesti dalla facoltà di filosofia di Kiev.

Nel frattempo, la storia e la geografia continuano a rendere complicata la sua biografia: Oscar era certo scappato da Kobrin per avere un po' di tranquillità, ma la Kiev della fine degli Anni Dieci non era esattamente un noioso paradiso. L'Ucraina era diventata indipendente nel Gennaio 1918, e Kiev eletta subito capitale. Poco tempo dopo, alcune rivolte di proletari furono soppresse dal governo ucraino, ma l'Armata Rossa[7] intervenne a fianco dei rivoltosi. In seguito, Kiev fu invasa dai tedeschi - siamo sempre in periodo di Grande Guerra – ma proprio in occasione della fine di questa, nel Novembre 1918, si proclama nuovamente l'Ucraina libera e indipendente. Solo un anno dopo, Kiev fu presa dall'Armata Bianca[8], quasi subito nuovamente rimpiazzata dall'Armata Rossa. Però quasi subito dopo c'è la guerra russo-polacca (quella che termina col trattato di Riga), e i polacchi riescono per un breve periodo nel 1920 a conquistare Kiev. Ma vengono subito ricacciati via, e… e vi stupite, se uno studente di filosofia con interessi in matematica decide che questa città è un po' troppo movimentata, per studiare con profitto?

Ascher Zariski lascia l'oriente, e sceglie di andare a studiare in una delle migliori università del mondo: Roma. Per la scuola matematica della capitale italiana è il momento del massimo splendore: vi si trovano Federigo Enriques, Guido Castelnuovo, Francesco Severi. Sono la triade della Scuola Italiana di Geometria Algebrica, una

[6] Iscrizioni a numero chiuso, e posti già al completo quando Zariski prova ad iscriversi.

[7] Può forse essere utile ricordare che per "Armata Rossa" si intende la forza armata bolscevica. In qualche misura, dal punto di vista di un'Ucraina indipendente, era esercito di uno stato straniero.

[8] Immaginiamo che sia del tutto superfluo ricordare che "Armata Bianca" è il nome dell'esercito controrivoluzionario filozarista che combatteva contro l'Armata Rossa. Ma forse alcuni daltonici della cromostoriografia non ricordano che esistevano anche l'Armata Verde dei nazionalisti ucraini e l'Armata Nera anarchica.

matematica del tutto nuova che ha proprio a Roma il suo centro generatore e di eccellenza. A Roma, Ascher Zaritsky trova molte cose che gli rimarranno legate per tutta la vita: un dottorato in matematica, preso nel 1924 con Castelnuovo come relatore, con tesi sulle teorie di Galois; una moglie, Yole Cagli, studentessa di letteratura, che sposerà proprio a Kobrin e che gli rimarrà accanto tutta la vita; un figlio, che gli nasce proprio a Roma nel 1925; e un nuovo nome, visto che fu proprio Federigo Enriques a consigliargli di cambiare Ascher in Oscar e Zaritsky in Zariski, per essere più facilmente italianizzato; e non fu cambio da poco, visto che è proprio con il nome "Oscar Zariski" che compaiono le sue prime pubblicazioni nelle riviste italiane.

La Geometria Algebrica italiana ha quasi concluso la sua parabola discendente: lo stesso Castelnuovo esorta Zariski a cercare nuovi sviluppi altrove ("*Sei con noi ma non sei uno di noi*", gli disse un giorno per spingerlo a non fossilizzarsi su una disciplina ormai morente), e poi la fuga dalla Bielorussia e dall'Ucraina sono solo le prime tappe del suo peregrinare. Roma è il cuore dell'Italia fascista, e Zariski, russo ed ebreo, decide che è bene continuare la sua fuga verso ovest.

Nel 1927 lascia l'Italia e arriva negli Stati Uniti d'America. Nonostante una vita avventurosa e sempre in movimento, Oscar non ha ancora trent'anni, quando arriva alla Johns Hopkins University. L'ultimo consiglio[9] dei suoi maestri italiani fu quello di cercare di incontrare Lefschetz, i metodi topologici del quale sembravano promettenti per i temi della geometria algebrica. Senza soldi, e senza i visti necessari, Zariski arriva negli USA con il permesso di soggiorno per un solo anno, e senza moglie e figlio al seguito. Ma un anno dopo gli fu già offerta la prima cattedra, e il lungo peregrinare di Oscar potè finalmente dirsi concluso.

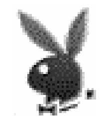
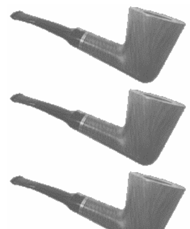
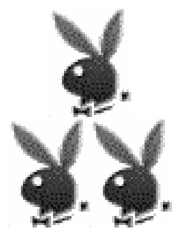
Zariski prese quel che c'era da prendere della Geometria Algebrica italiana e la coniugò con la topologia di Lefschetz. Scrisse il memorabile "Superfici Algebriche" nel 1937, e fu proprio scrivendolo che decise di cambiare approccio, passando ad uno puramente algebrico. L'intenzione, era semplicemente quella di rifondare la disciplina: e ci riuscì.

Il suo non è il primo nome a venire in mente, quando si parla dei grandi matematici del Novecento: eppure la sua carriera è come un filo rosso che percorre gran parte degli sviluppi matematici del secolo appena trascorso. Dall'Italia rampante dei primi anni del secolo fino ad Harvard e alla scuola americana, ma passando attraverso i lavori e le collaborazioni di Poincarè, Lefschetz, Emmy Noether, Andrè Weil, e su fino a Grotendieck e Serre.

Gli piaceva varcare i confini, e non solo quelli geografici.

[9] Non fu solo un "consiglio", a dire il vero; Castelnuovo si premurò di contattare Lefschetz e di preparargli il terreno.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Mica sicuro...			
Problema di economia			

2.1 Mica sicuro...

Una cosa che piace da matti a Rudy sono i cosiddetti "problemi aperti", quelli nei quali la risposta *giusta* è piuttosto indeterminata; quando poi ne trova uno in matematica, va in un vero brodo di giuggiole, come si diceva una volta[10].

Normalmente, quando presentiamo un problema, abbiamo la soluzione; certe volte ne abbiamo più di una (e sovente voi ne trovate di diverse dalle nostre), ma queste portano comunque tutte allo stesso numero al fondo; questa volta però il Nostro Grande e Glorioso Capo, complice un periodo di rilassatezza *[Stavo aspettando il Compleanno di Marzo: contrariamente al solito, Doc era in ritardo sul ritardo del ritardo...(RdA)]*, si è messo a fare qualche conto e ha trovato *tre* risultati diversi, tutti sostanzialmente giustificabili. Lui è convinto che i diversi risultati nascano dalla sottilmente diversa interpretazione di un termine, ma siccome c'è (almeno) una soluzione, si ritiene autorizzato a presentarvelo.

Vi hanno rifilato il lavoro di Newton: Direttore della Reale Zecca *[non l'Aracnide Acaro Parassitiforme Ixode, quella che fa la grana. Lo ha fatto (Newton, non l'acaro) sul serio, e per scoprire i falsari girava la notte nei locali malfamati e arrestava chi accettava le sue monete false. Da cui si "deriva" che ci è più simpatico Ostrogradski (La Redazione Tutta)]*. Ogni anno, voi dovete coniare un milione di nuove monete, e distruggere il 10% di quelle vecchie.

Qual è il valore atteso per l'età della moneta più vecchia in circolazione?

Come dicevamo, abbiamo *diverse* soluzioni. Ma ci farebbe piacere vederle giustificate... Almeno una, dai!

2.2 Problema di economia

Siccome Rudy si sta facendo crescere i capelli e il mese scorso era il suo compleanno, vi presentiamo un problema di economia.

[10] Ringraziamenti anticipati a chi ci spiegherà perché si debba andare in cotal brodo quando uno è contento. Rudy si è incontrato con le *zizo'e* (it. "giuggiole") quando viveva a Venezia: sono delle bacche molto buone (quando sono mature) che crescono oltre il cartello di "passaggio vietato" della ferrovia, sospettosamente simili a quelle raffigurate al tratto (bianconeronogrigio) in un suo vecchio libro e indicate come *rosa canina*. La cosa ancora oggi gli riporta alla memoria Michele Strogoff, gli Zar (quelli veri, non il nostro amico), la vitamina C e "Pattuglia Cosacca".... Se avrete il coraggio di chiedere, è pronto a raccontarvi tutto.

Tranquilli, non ci è irrimediabilmente slittata la frizione: le cose sono correlate e, anche se la storia non c'entra assolutamente nulla con il problema, ve la raccontiamo.

Il primo punto è abbastanza evidente, guardando Rudy; quando qualcuno gli chiede "Ti fai crescere i capelli?" la sua risposta preferita è: "No, tengo lezioni di economia di mercato in sistemi oligopolistici". Insomma, uno dei pochi barbieri decenti della zona ha aumentato i prezzi e il Nostro ha deciso di aspettare il trasloco per tagliarli.

Il secondo punto nasce dal fatto che Doc in cinque minuti ha trovato e regalato (via internet) il libro che Rudy (e la sua mamma) stava(no) cercando da Natale: i *Manoscritti Matematici* di Karl Marx, curati da Augusto Ponzio e edito da Spirali. Capite quindi che il parlare di economia è doppiamente d'obbligo.

Dunque, sia Alberto che Fred non stanno mostrando un rendimento scolastico propriamente entusiasmante, quindi la famiglia sta ponendo dei limiti molto robusti alla distribuzione di beni non essenziali (leggasi carte da Magic, videogiochi, giochini omaggio associati al junk food MacDonaldiano,... insomma, ci avete capito): il metodo utilizzato è quello del sequestro immediato quando arrivano a casa portati da amici o parenti e, una volta al mese, viene organizzata un'asta (di quelle classiche, in cui si "spara" l'offerta e si aspetta la controfferta) tra i due, con pagamento in *ore di studio*: di solito (con i dovuti casi particolari, come vedremo) vengono messi all'asta 6 oggetti al mese, considerati equivalenti da entrambe le pesti: va notato, inoltre, che Fred mostra grandi segni di sconforto se non riesce ad accaparrarsene almeno 2 al mese.

Ora, sino a qualche tempo fa ci fidavamo di Alberto, quindi questo metodo era applicato a Fred (che, tra l'altro, non ha moltissimo da studiare); sostanzialmente, l'accordo era che per 5 ore di studio poteva portarsi a casa un "pezzo"; quando è entrato nel gioco anche Alberto (con *grossissime* necessità di studiare), la cosa per Fred si è decisamente complicata, anche perché Alberto intende comportarsi in modo decisamente dispettoso, lasciando Fred con meno di 2 oggetti. E da qui nascono facilmente una ***serie di problemi***.

Infatti (***Problema 1***, facile), supponiamo che Fred proprio non ci riesca a studiare più di 100 ore al mese e che tutti lo sappiano; questo mese però, per una serie di motivi, sono arrivati solo 3 oggetti. Quante ore di studio deve essere disposto a giocarsi Alberto per evitare che Fred abbia i 2 giochini?

Ora (***Problema 2***), sempre nell'ipotesi di 100 ore come massimo tollerabile per Fred e 6 oggetti, questo riuscirà ad avere due giochi se Alberto non intende giocarsi più di 200 ore?

Il terzo caso che ci piacerebbe esaminaste (***Problema 3***) tiene conto del fatto che qualche mese fa ci sono state svariate festività, quindi eccezionalmente quel mese sono arrivati 10 oggetti; per una forma di "svalutazione psicologica", Fred ha deciso che quel mese le sue necessità salivano a 3 oggetti. Sempre con 100 ore di Fred e 200 di Alberto, riuscirà quest'ultimo a realizzare il suo diabolico piano?

Infine, una domanda decisamente più dura (***Problema 4***). Supponiamo Alberto sappia che Fred non potrà mai permettersi di spendere più di 100 ore per avere 2 dei 6 oggetti, ma non sappia esattamente quale sia il suo limite; riuscite a trovare un metodo per far sì che Alberto non giochi mai più di 100 ore oltre a quelle che dovrebbe giocarsi se sapesse esattamente quanto ha intenzione di giocarne come massimo Fred? Nel caso la risposta sia "no", di quanto avrebbe bisogno? E nel caso la risposta sia "sì", qual è il minimo che dovrebbe giocarsi Alberto?

Se è poco chiaro, non prendetevela con noi: rispetto a quei due, una coppia di squali con il mal di pancia sembrano due farfalline in un prato fiorito[11]...

3. Bungee Jumpers

[1] Provate che il prodotto di n interi consecutivi è divisibile per $n!$

[2] Provate che se $a+b+\ldots+k \leq n$, allora la frazione $\dfrac{n!}{a!b!\ldots k!}$ è un intero.

[3] Provate che $(n!)!$ è divisibile per $n!^{(n-1)!}$

[4] Provate che il prodotto di n interi di una progressione aritmetica di n termini per i quali la differenza comune è prima rispetto a $n!$ è divisibile per $n!$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Avete cominciato bene la primavera, cari lettori? Alice, che è ancora responsabile per queste righe, è tornata da "Down Under" per trovare la Svizzera sotto la neve, e la Redazione in piena rivoluzione. Per fortuna i fenomeni meteorologici di quest'era da buco nell'ozono si stanno attenuando, ma l'Augusta Redazione di RM pare sempre essere un po' a disagio, forse si soffre il cambio di fuso orario, o qualcosa di imperscrutabile, o una semplice crisi dei sette anni ritardata (lo sapete bene che siamo distratti, c'è n'è voluto di tempo per accorgercene).

L'unica cosa che ci consola è che i nostri lettori ci leggono e scrivono ancora, alcuni (i più masochisti) dai tempi in cui RM vantava meno di dieci numeri, altri da quando siamo entrati a far parte del grande mondo del web, e il numero continua a crescere. Insomma, ci sono ormai milleetrecento persone che ricevono una mail ad inizio mese da noi, ed almeno una decina che comincia a mandarci richiami se non riceve la mail entro il primo giorno del mese. Non vi stupirà quindi sapere che in tanti sono stati contenti della extra-mail che vi abbiamo spedito a marzo, per far pubblicità al Festival di Matematica a Roma, ed in parecchi ci sono proprio stati, come per esempio ***L.A.Bachevskij***, che ci scrive:

> (...) WOW! Che emozione, che bello esserci e sentirsi proprio dentro questo mondo un po' matto ma verace e affascinante.
>
> Che tristezza! Tutti quelli (e non erano pochi) che erano lì per farsi vedere e che, dopo cinque minuti dall'inizio della conferenza, se ne uscivano, lasciando mezzo vuota la sala e avendo impedito ad altre persone, magari più interessate di entrare.
>
> Che bello! Capire un po' di inglese e poter seguire le dissertazioni in lingua, senza dover subire gli svarioni (anche se immagino che non sia un mestiere semplice) dei traduttori (oltre al succitato[12] premio [che mi ha fatto pensare alla medaglia Campi, che si assegna ogni quattro anni a un algebrista] anche i manipoli geometrici [topologi all'assalto delle fortezze nemiche] eccetera).
>
> Che magia! Medagliati e volti noti pronti a spendere il loro tempo a scambiare due chiacchiere con te, niubbetto matematico appena arrivato, ad esempio Doug, l'amico di Piotr!

---

[11] Giusto un esempio con numeri inventati: se Fred al massimo si può giocare 60 ore e per lasciarlo con meno di 2 oggetti Alberto conoscendo questa cifra avrebbe bisogno di 150 ore, vi si chiede una strategia per Alberto che gli permetta di lasciarlo a becco asciutto senza conoscere il valore 60 spendendo al più 250 ore; posto che non esista, di quanto avrebbe bisogno Alberto, sempre senza conoscere il valore 60? Se invece esiste, quando spende Alberto?

[12] Il Nobel, citato nella parte che abbiamo tagliato...

> Che meraviglia! Quante facce può avere la matematica, quanti spunti e incoraggiamenti si possono dare, quanta voglia si può trasmettere!
>
> Potrei proseguire su questa linea a lungo, ma vi citerò solo un'ultima perla: nella lectio inaugurale, tenuta da Andrew Wiles, tra le altre cose sì è parlato della poesiola di Nicolò Tartaglia [cfr. RM064]!

Avremmo voluto esserci anche noi, veramente. Se altri che ci sono stati hanno voglia di mandarci più contributi pubblicheremo, compatibilmente con i tempi e gli spazi di RM.

Per quanto riguarda il resto di marzo, ci sono parecchi altri eventi che ci sono sfuggiti, come per esempio il Convegno Matematica e Cultura 2007 a Venezia (http://www.mat.uniroma1.it/venezia2007/home.html) a cui però alcuni dei nostri lettori hanno partecipato, tra cui ***Lucia*** e ***Alberto***.

Valeria ci segnala ancora il sito di kataweb: http://fantavillage.kataweb.it/matematicup/, per tutti coloro che vogliono cimentarsi via internet, per questo forse siamo ancora in tempo.

Come dicevamo, ci sono lettori che leggono tutte le note e non si lasciano distrarre, rispondono, controllano. ***Mash***, per esempio, verifica la citazione del Capo:

> in merito alla questione di pag 13 di RM98 a me risulta che a dire: *"Chi crede che una crescita esponenziale possa continuare all'infinito in un mondo finito o è un pazzo o è un economista."* sia stato Kennet Boldin nel 1966.

Alberto, invece, controlla gli orologi:

> Sebbene la mia risposta alla domanda nella nota 7 del problema a pag. 11 di RM098 sia negativa, leggendola mi è tornato alla mente il brano seguente tratto da Elio Fabri, Appunti di Fisica Generale I - prima parte, Cap. 2 (Metrologia del tempo), Corso di Laurea in Fisica dell'Università di Pisa, A.A. 1991-92.
>
> *Che cos'è un orologio "giusto"?*
>
> *Per affrontare questo problema ci conviene partire da una storiella: gli orologi di Zanzibar.*
>
> *Molti anni fa, quando non esisteva ancora la radio, il capitano di una nave si accorse che il cronometro di bordo si era fermato. Il fatto era grave, perché a quei tempi un orologio era necessario per "fare il punto", ossia per determinare la posizione della nave. Fece perciò rotta sull'isola di Zanzibar, che non era lontana, pensando di trovare a terra degli orologi su cui rimettere quello della nave.*
>
> *Una volta sbarcato, chiede informazioni, e gli dicono che in città c'è un vecchio orologiaio che possiede un orologio molto preciso. Va da lui, col suo cronometro, e lo regola su quello dell'orologiaio. Poi, per scrupolo, gli chiede come faccia a essere sicuro del suo orologio. Il vecchio risponde: "Stia Tranquillo: tutti i giorni lo controllo col cannone della guardia costiera, che spara a mezzogiorno esatto."*
>
> *Il capitano saluta l'orologiaio e se ne torna al porto. Arrivato lì, gli capita d'incontrare il comandante della guardia costiera, e per eccesso di zelo gli chiede come faccia a segnalare il mezzogiorno esatto. Il comandante risponde che loro hanno un nuon orologio, adibito allo scopo. Il capitano insiste: "Ma come fate a sapere che sia proprio esatto?" Risposta: "È semplice, giù in città c'è un vecchio orologiaio che..."*
>
> *Dunque: se abbiamo due orologi che non vanno d'accordo, come facciamo a sapere quale va bene? e se vanno d'accordo, come possiamo essere sicuri che siano giusti? Il problema sembra insolubile sul piano logico.*
>
> Se, su quindici orologi, quattordici vanno d'accordo ed uno no la spiegazione non è di natura democratica (vince la maggioranza), né matematica (in questo caso

> statistica) ma fisica: non siamo in grado di trovare nessuna causa razionale al fatto che quattordici orologi sbaglino tutti insieme. Questo non significa che tale causa non esista ma se la cosa si ripete con cento, mille, un milione di orologi... ecco che è naturale tirar fuori il rasoio di Occam!

Questo ci rassicura: l'avere sempre qualcuno che ci legge e corregge. Continuate così, che ci date la forza di continuare.

4.1 [097]

4.1.1 Nessuna birra rossa

Una delle mail più divertenti ricevute in questo turbinante mese di marzo, è quella di ***Gnugnu*** a proposito del problema di due numeri fa. Siccome abbiamo tutto lo spazio del mondo (si tratta solo di bit, in fondo) pubblichiamo la sua richiesta nelle due parti in cui ci è arrivata.

> Una simpatica ex allieva mi ha ricoperto di graziosi epiteti, dandomi del voi, in merito alla formulazione del problema e delle relative risposte.
>
> Si mantiene agli studi mescendo, nelle ore serali, beveraggi, alcolici e non, agli avventori di un piano bar e, da quando le ho fatto conoscere RM, trova anche il tempo di giocare con i problemi proposti.
>
> Riporto, omettendo asterischi, spirali e teschietti, quanto sostiene:
>
> a) è stanca di difendersi dalle avances, quasi sempre poco simpatiche, dei clienti e non le pare il caso di sentirsi insultata anche da presunti spacciatori di matematica;
>
> b) la sua collega, che evidentemente vi stima, vi propone un agreement per permettervi di ridurre le spese in alcolici e voi in cambio la pensate tesa a fregarvi;
>
> c) complottate a mo' di cospiratori quando si allontana dal tavolo, come se lei fosse, non già una complice da ringraziare, ma piuttosto un'avversaria da stendere;
>
> d) non vi accorgete neppure che, se qualcosa si celava nella proposta, era unicamente la possibilità di diminuire la probabilità di perdita, portando nuovi adepti al vostro tavolo (in generale con 2^n-1 giocatori tale probabilità scende a $1/2^n$), promozione concordata con il proprietario;
>
> e) fornite soluzioni che non rispettano le regole - non potete conoscere le dichiarazioni degli altri scommettitori [cfr.***mau.***];
>
> f) formulate la seconda parte in maniera tanto incomprensibile da indurre un solutore [cfr.***Frapao***] ad utilizzare la possibilità di ripuntare sulla stessa distribuzione in una sorta di martingala perfetta;
>
> g) non solo ipotizzate chellerine *[lei frequenta lingue e sostiene che in italiano è meglio scrivere così NdG]* fraudolenti, ma anche digiune di matematica – volendo è possibile ridurre la probabilità di vittoria al 50% contro qualsivoglia onesta strategia [cfr. ***Cid***];
>
> h) se assimilate la cameriere a sciocche nipotine di Heidi, vi sbagliate di grosso, da molto tempo ha smesso *'d beive 'ntal but*;
>
> i) si augura, con la condizionale per Alice (salvata dalle attenuanti per distrazione da ferie imminenti), la giusta punizione per dei bauscioni maschilisti – che il vostro vino si trasformi in acqua e la birra in brodo di dado.

> Riprendo fiato con un bel sospirone, spero di non aver dimenticato alcunché e, devo onestamente dirvi che, a parte gli insulti, l'uso del ch o della k, la citazione della fanciulla elveto-tedesca (non capisco perché le sue nipoti dovrebbero essere sciocche e insipienti in matematica) e la maledizione di ***Anac***, condivido appieno la sostanza se non la forma del temporale telefonico.
>
> In effetti anch'io, come vi ho già scritto, continuo a non capire le regole della seconda modalità di gioco e, in merito al punto 'g'(oops!), l'utilizzo di un dado di ***Cid*** a 12 facce, con l'aggiunta di due distribuzioni a birra costante, oltre ad essere esteticamente migliore (il dodecaedro regolare è il solido che preferisco in assoluto) porterebbe un qualsiasi giocatore che veda due birre uguali ad avere, come quello che osservi birre diverse, la massima entropia in merito al colore della propria..

E ancora...:

> ***Anac*** è tornata a chiamarmi, questa volta con toni più calmi, per dirmi che per quanti sforzi abbia fatto non riesce a confutare i risultati di ***Cid***. Sotto al 60% non riesce a scendere.
>
> Le ho fatto presente che vi avevo girato le sue osservazioni, dicendovi che le condividevo, almeno nel merito, e mi ero spinto oltre, sostenendola anche dal punto di vista matematico. Le ho fatto osservare che allora cadevano anche i punti successivi.
>
> Grave errore! Son ricominciati gli strali. Chi mi aveva autorizzato a scrivervi? Lei, se avesse voluto, era perfettamente in grado di farlo da sola! La responsabilità era solo mia e, se avevo aggiunto baggianate, era il caso di specificarvi che non provenivano da lei. Quanto ai punti successivi, neanche a pensarlo! Insistendo potevo solo indurla a rinnovare gli anatemi [a questo punto il tono è, però, tornato più normale e, se non la conosco troppo male, ci ripenserà]. Alle mie colpe pregresse: averle insegnato matematica, averle fatto conoscere RM, aver cercato, durante la prima telefonata, di spiegarle che, da autentici habitué di birrerie, non potevate non essere solidali con le cameriere; si aggiungeva ora anche quella di aver diffuso le sue sacrosante rimostranze con l'ardire di chiosarle.
>
> Che dirvi? Confermo che la parte successiva all'elenco è totalmente da imputare alla mia mente malata e, con qualche rimpianto per il dado dodecaedrico, riconosco l'infondatezza del suo contenuto.
>
> Per qualche tempo cercherò di evitare gli alcolici con le loro possibili trasformazioni e medito sull'opportunità di modificare il mio pseudonimo, forse Benjamin Malaussène andrebbe meglio.
>
> Continua a tormentarmi un dubbio. Qualcuno mi vuole spiegare quali erano le regole della seconda parte? Bisognava puntare contemporaneamente? In un ordine prestabilito? Le dichiarazioni, che continuo a ritenere segrete, erano contestuali alla puntata o successive?

Il Capo ha quindi inviato le seguenti criptiche spiegazioni:

> Il trucco è nel fatto che devono azzeccarci "tutti quelli che non dicono 'passo'".
>
> Per massimizzare le probabilità, ciascuno di noi segue questa regola: se vedo due birre chiare dico che la mia è scura, e se vedo due birre scure dico che la mia è chiara. Nel caso restante, passo. Quello che ci sia aspetta, da distribuzione uniforme, è che ci siano almeno due birre chiare o due birre scure.
>
> Supponiamo due siano chiare (altrimenti si inverte): ci sono quattro possibilità:
>
> 1) solo A e P sono chiare, A e P (vedono una chiara e una scura) passano. Quindi R dice "scura". Corretto.

2) solo P e R sono chiare, P e R (vedono una chiara e una scura) passano. Quindi A dice “scura”. Corretto.

3) solo A e R sono chiare, A e C (vedono una chiara e una scura) passano. Quindi P dice “scura”. Corretto.

4) A, P, R sono chiare, tutti dicono “scura”. Malemalemale.

Quindi, 75% di azzeccarci.

Se si gioca “a punti”, l’importante è che vinca quello che ne scommette di più: bisogna mettersi d’accordo su chi parla per primo, secondo e terzo: il primo dovrà sempre scommettere un punto che la propria birra è chiara; se il secondo giocatore vede che la birra del primo giocatore è scura, scommetterà due punti che la propria birra è chiara, altrimenti passerà; se il terzo vede che gli altri due hanno birre scure, scommetterà quattro punti che la propria birra sia chiara, altrimenti passerà; con una probabilità 7/8 (il caso restante è “tutti abbiamo birre scure”), dovremmo vincere.

E con questo, non crediamo di sicuro di aver risolto alcunchè... scriveteci cosa ne pensate, se credete.

4.2 [098]

4.2.1 Parliamo d’altro

Si trattava, è vero, di un problema non estremamente difficile, ma ci ha fatto piacere ricevere molte soluzioni veramente divertenti: ***Davide*** *(bevenuto!)*, ***FraPao***, ***Zar***, ***jvanbie***, ***Cid***, ***Gnugnu***, ***AGUP*** e ***Trekker*** ci hanno tutti stupito con approcci originali.

Quello che ci ha divertito di più è senz’altro ***Zar***:

> È evidente che il titolo del primo quesito di questo mese, “Parliamo d’altro”, si riferisce a un quesito nascosto nel quesito. E infatti ciò che si deve veramente scoprire è ciò che avviene in un comitato di redazione. Ecco la mia soluzione:
>
> *Alice*: vediamo un po’, evidenti ragioni di simmetria mi portano a dire che il punto stazionario della lunghezza del guinzaglio si ha quando sia Rudy che Balto hanno fatto metà strada. Il guinzaglio è, in questo momento, inclinato di 45 gradi, e forma quindi la diagonale di un quadrato di lato 3/2. Dunque, il guinzaglio è lungo 3*sqrt(2)/2, si è accorciato, abbiamo un minimo. Fine. Una birra.
>
> *Piotr*: Ah, no, non mi venite a parlare di *evidenti* ragioni di simmetria. L’evidenza ha tratto in inganno molti, sapete? Vediamo un po’, in una posizione generica si forma un triangolo rettangolo di cateti x e (3-x) (naturalmente indicando con x lo spostamento di Rudy e di Balto), applico il teorema di Pitagora, mumble mumble, non è necessaria la radice, mumble, ottengo una parabola (y=2x^2-6x+9), mumble, non c’è bisogno di usare le derivate, mumble, il vertice si ha per x=3/2, effettivamente è un minimo, Alice ha ragione, ci sono evidenti ragioni di simmetria. Due coniglietti (che sono sempre meglio di una).
>
> *Rudy*: Mmmh, il vostro approccio è convenzionale. Possiamo invece supporre che con probabilità 1 Balto avanzi a velocità costante, possiamo costruire un processo Markoviano che ci permette, supponendo valida l’ipotesi di Riemann, di calcolare il Nimero relativo alla posizione mia e di Balto, si propone una scommessa tra me e lui (ehm), effettivamente il punto di equilibrio di Nash si trova in x=3/2. Bah, problema medio. 2 pipe.

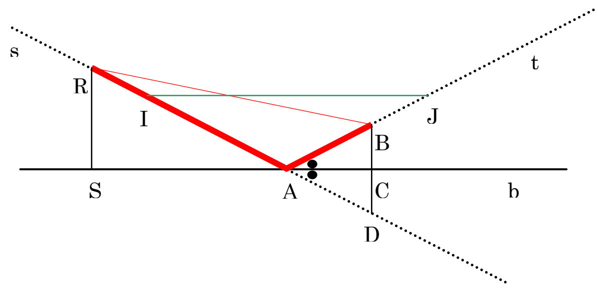
AGUP è molto sbrigativo:

> Il problema consiste nel trovare, fra i triangoli rettangoli di cui sia assegnata la somma dei cateti, quello di ipotenusa minima: Dopo che il cane ha percorso il tratto di lunghezza x dopo la curva, Rudy dista dalla curva di un tratto lungo (3-x).

Pertanto la lunghezza y del guinzaglio in quel momento è pari a $\sqrt{x^2+(x-3)^2}$ = $\sqrt{2x^2-6x+9}$.

La derivata vale $y' = \dfrac{2x-3}{\sqrt{2x^2-6x+9}}$, e si annulla per $x = \dfrac{3}{2}$, quando le distanze di Rudy e del cane dal centro dell'incrocio sono uguali. In quel momento la lunghezza del guinzaglio assume il valore minimo, e precisamente $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

E ***Gnugnu***:



Nel disegno s e t sono i sentieri da percorrere rispettivamente prima e dopo l'incrocio A; B ed R le posizioni occupate, in un istante arbitrario, da Balto (ha già svoltato) e Rudy (in vista dell'incrocio); D la posizione in cui si troverebbe Balto, nello stesso istante, se all'incrocio avesse proseguito diritto; b la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$; SC la proiezione ortogonale su b del guinzaglio RB.

La palese simmetria del triangolo BAD [la provocazione nei confronti di Rudy è cercata] assicura l'indipendenza di SC dal verificarsi, o meno, della svolta in A.

La consuetudine che vuole le proiezioni ortogonali di lunghezza non superiore al segmento proiettato, porta a concludere che il guinzaglio risulta di lunghezza minima - uguale a quella della sua proiezione e, quindi, a SC - quando è parallelo a b, cioè quando, in I e J rispettivamente, Rudy e Balto sono equidistanti dall'incrocio.

La minima lunghezza del guinzaglio sarà, pertanto, uguale a $\dfrac{3\overline{AC}}{\overline{AB}}m$, pari a $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}m$ nel caso di sentieri perpendicolari.

4.2.2 Perché la matematica [non] piace

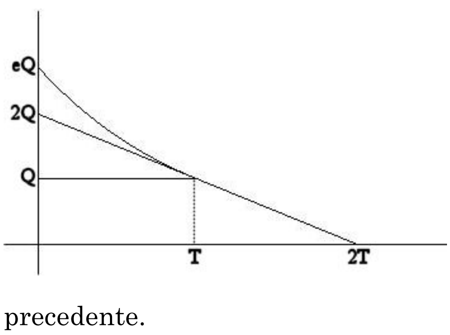
Anche in questo caso molte soluzioni: ***Davide***, ***FraPao***,***.mau.***, ***Zar***. ***jvanbie***, ***AGUP***, ***Massimo***, ***Trekker***, ***Mr. Fahrenheit***. Se vi chiedete perché ***Cid*** non è in elenco, ecco le sue motivazioni:

> questo mese ho l'impressione che il secondo quesito sia un pesce d'aprile. Lo dico in quanto mi pare che il problema presenti dati insufficienti per essere risolto (...)
>
> Naturalmente, il vostro quesito potrebbe richiedere di dare una risposta al variare della forma del recipiente, ma in tal caso il problema sarebbe assai difficile e quindi non si spiegherebbe il fatto che Rudy l'ha valutato con solo una pipa.
>
> Ritengo quindi di poter affermare che ci abbiate voluto fare un pesce d'aprile, e pertanto questo mese non invio la soluzione del 2° problema.

Interpretazione che potrebbe tranquillamente aver senso – conoscendo il Capo. Per cominciare diamo veramente il benvenuto a Davide, che ci ha inviato i primi giorni di marzo una soluzione a tutti i quesiti, e si presenta subito come accanito solutore:

> Bott1(vino) -> Bott2(acqua) -> bacinella
>
> Divido l'intervallo di tempo in cui si svuota il vino in k parti. Suppongo inoltre che ogni bottiglia si svuoti in ogni intervallo di $1/k$ litri
>
> Definisco la successione Ai=(k-1)/k*Ai-1 A0=1,essa mi descrive la quantità d'acqua presente nella bottiglia 2 al passo i-esimo; al passo k-esimo
>
> Ak=(k-1)/k*Ak-1=(k-1)/k*(k-1)/k*Ak-2=…….=((k-1)/k)^k
>
> Il passo k-esimo è anche l'ultimo in quanto dopo k passi la bottiglia del vino è finita. Se mando k ad infinito ottengo e^(-1) che è la quantità d'acqua nella bottiglia 2. nella bacinella ci sarà la stessa quantità di vino. Avrò indovinato?

Indovinato? Non esiste una sola risposta giusta ai quesiti di RM, ormai gli altri lettori lo sanno. Prendete ***Gnugnu***:

> Se esaminiamo il bilancio del contenitore inizialmente pieno d'acqua, possiamo osservare che vi entra vino purissimo e ne esce una miscela dei due liquidi: prima orrendamente omeopatica e, successivamente in grado di soddisfare, un numero crescente di perversi avari igienisti.
>
> Tre ipotesi, elencate in ordine crescente di arbitrarietà, permettono di semplificare il modello matematico del problema:
>
> 1) il deflusso della miscela sia indipendente dalla concentrazione;
>
> 2) la velocità di diffusione del vino nell'acqua sia infinita;
>
> 3) il livello del vino non influisca sulla rapidità di migrazione fra i recipienti.
>
> In questo caso, la quantità di liquido contenuto nel recipiente inferiore non varia nel tempo e, qualunque sia la dimensione dei forellini, il flusso della (sola) acqua risulta sempre proporzionale alla quantità della medesima rimasta nel contenitore da cui proviene. Modello analogo a quello della scarica di un condensatore e a quello che dovrei tentare di applicare nell'affrontare un piatto appetitoso.
>
> La soluzione della relativa equazione differenziale porta a concludere che la quantità d'acqua inizialmente contenuta nel recipiente inferiore è e volte quella che ne rimane alla fine (per non appesantire troppo le farneticazioni successive, indichiamo con Q quest'ultima,).
>
> La richiesta percentuale di vino nel medesimo contenitore risulterà uguale a $100(1-e^{-1})$.
>
> Volendo fare i furbi si potrebbe anche cercare di non risolvere (almeno esplicitamente) l'equazione differenziale.
>
> Proseguiamo nell'esperimento lasciando defluire l'intruglio. In un tempo T identico a quello impiegato dal recipiente superiore per svuotarsi anche l'inferiore subirà, questa volta meritatamente, la stessa sorte e la portata dell'acqua risulterà, nella seconda parte, costante.
>
> 
>
>
> Servendoci di quel po' di magia che la matematica ci consente, separiamo il vino dall'acqua, destinandolo ad usi più consoni, e con mezzi opportuni costringiamo quest'ultima a tornarsene nel recipiente con la medesima portata trovata nel paragrafo precedente.
>
> Trascorso il tempo T nel recipiente vi sarà Q acqua e dopo altrettanto tempo ne troveremo $2Q$.

Il recipiente non si è riempito; se volevamo percorrere a ritroso la curva dello svuotamento dovevamo ricordarci di aumentare – solo nel secondo intervallo – progressivamente la portata dell'acqua in modo da mantenerla proporzionale alla quantità gia riportata nel recipiente.

Imitando gli istituti bancari, pur mantenendo costante il tasso di interesse passivo per il cliente, al posto della capitalizzazione semplice dovevamo usare la capitalizzazione composta istantanea, ottenendo al posto di 2*Q* un montante pari a

$$Q \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = Q \cdot e\,.$$

Ed ecco cosa ne dice ***AGUP***:

Detta *x* la quantità di vino contenuta, istante per istante, nel contenitore inferiore, quando dal forellino superiore entra la quantità di vino *dx*, dal forellino inferiore esce la quantità di vino *x.dx*.

Ne segue

$$\int_0^1 (1-x)dx = \left[x-\frac{x^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\,.$$

Pertanto, nel momento in cui tutto il vino è uscito dal contenitore superiore, la percentuale di vino presente in quello inferiore è pari esattamente al 50%.

Confusi? Allora ***Mr.Fahrenheit*** è chi fa per voi:

Ho modellato il sistema nel modo seguente.

Indico con v_1 il volume del liquido contenuto nella prima bottiglia; la dinamica è la seguente:

$$v_1(t+dt) = v_1(t) - \dot{v}_1 \cdot dt$$

$\dot{v}_1$ rappresenta, per definizione, la velocità di variazione di volume, nel nostro caso costante.

La dinamica del volume *totale* del liquido contenuto nella seconda bottiglia è invece:

$$v_2(t+dt) = v_2(t) - \dot{v}_2 \cdot dt + \dot{v}_1 \cdot dt$$

dove $\dot{v}_2$ indica il flusso in uscita; nel nostro caso si pone $\dot{v}_2$ costante, e inoltre pari a $\dot{v}_1$. (Ok, i due termini dovrebbero elidersi ed il volume totale dovrebbe restare costante… così è, ma mantenendo questa notazione mi riservo di poter variare le due velocità a piacimento, più avanti).

In un generico istante, il volume contenuto nella seconda bottiglia sarà la somma dei volumi di acqua e di vino:

$$v_2(t) = v_a(t) + v_v(t)$$

Rimane da stabilire come si ripartiscono le frazioni di acqua e vino all'interno del volume perso in ogni istante.

Supponendo che il volume infinitesimo di vino che entra in ogni istante nella seconda bottiglia si misceli istantaneamente e in modo perfettamente omogeneo con tutto il liquido presente, si ha che le quote parte perse dalle frazioni dei due liquidi sono ripartite in funzione dei volumi relativi dei due liquidi stessi.

La dinamica delle due frazioni è pertanto la seguente:

$$v_a(t+dt) = v_a(t) - \dot{v}_2 \cdot dt \cdot \frac{v_a(t)}{v_a(t)+v_v(t)}$$

$$v_v(t+dt) = v_v(t) - \dot{v}_2 \cdot dt \cdot \frac{v_v(t)}{v_a(t)+v_v(t)} + \dot{v}_1 \cdot dt$$

(Volendo fare una verifica, dalla somma membro a membro delle due equazioni si ottiene proprio quanto già scritto: $v_2(t+dt) = v_2(t) - \dot{v}_2 \cdot dt + \dot{v}_1 \cdot dt$)

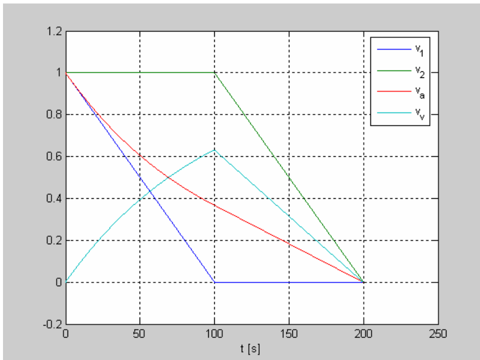
A questo punto è facile ottenere l'espressione dell'andamento temporale della frazione di vino nella bottiglia numero 2:

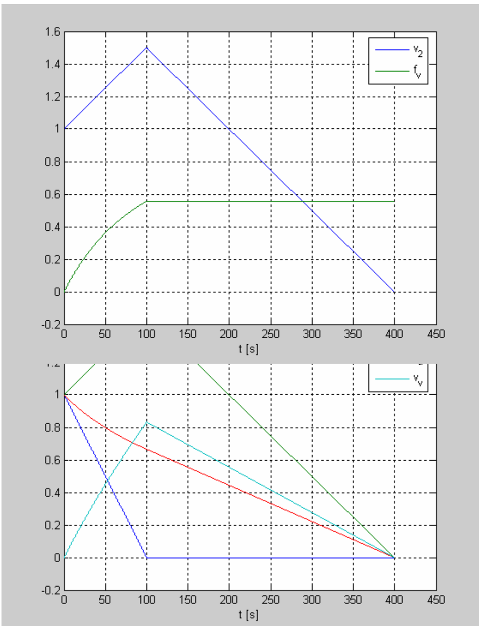
$$f_v(t) = \frac{v_v(t)}{v_a(t)+v_v(t)}$$

Ho integrato le due equazioni numericamente a partire dalle seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} v_1(0) = 1 \quad l \\ v_2(0) = 1 \quad l \\ v_a(0) = 1 \quad l \\ v_v(0) = 0 \quad l \end{cases}$$

con passo temporale $dt = 0.01\ s$, e avendo posto $\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = 0.01\ l/s$:



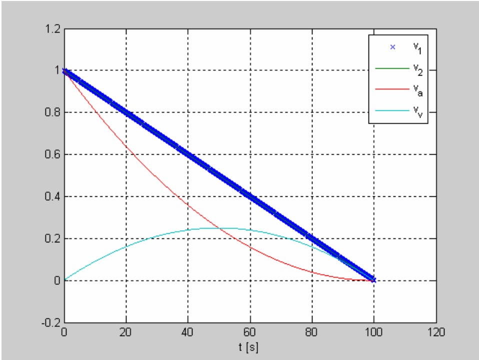


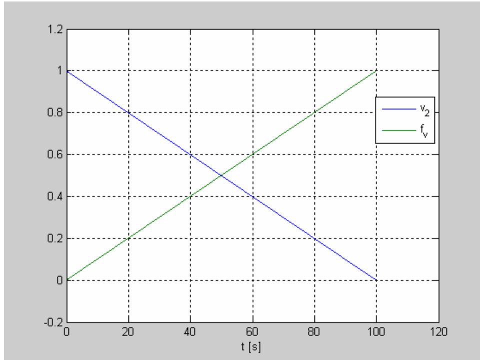
La frazione di vino si stabilizza ad un valore pari a 0.6321, "misteriosamente" identico al valore $1-\frac{1}{e}$... (se fossi stato capace di trovare le soluzioni analitiche delle equazioni differenziali che ho scritto si sarebbe potuto dimostrare...).

Ci si può divertire a variare le velocità di efflusso dalle due bottiglie (o per lo meno il rapporto tra le due, dato che la dilatazione dell'asse dei tempi di per sé non è molto interessante). Pongo $\dot{v}_2 = \frac{1}{2} \cdot \dot{v}_1$, mantenendo $\dot{v}_1 = 0.01\ l/s$ e $dt = 0.01\ s$:

Come si vede, il volume nella seconda bottiglia inizia a crescere, raggiunge un massimo nel momento in cui si esaurisce il volume nella bottiglia 1, dopodiché comincia a decrescere.

Ultima prova: $\dot{v}_2 = 2 \cdot \dot{v}_1$, $\dot{v}_1 = 0.01\, l/s$, $dt = 0.01\, s$:





Chiaramente, in questo caso, la velocità di variazione di volume netta delle due bottiglie è identica; la frazione di vino raggiunge il valore massimo del 100% nel momento in cui il volume nella seconda bottiglia è nullo, in quanto tutta l'acqua preesistente è ormai fuoriuscita.

Ovvio, no? ***FraPao*** ha una spiegazione alternativa, se volete:

Problema molto interessante ma risolvibile (forse, ma non ne sono troppo sicuro) solo conoscendo una serie di grandezze fisiche che incidono sulla velocità di diffusione delle particelle di vino nell'acqua (altezza di caduta del liquido soprastante nel liquido sottostante, temperatura di lavoro, pressione, ecc.) rispetto alla velocità "di fuga" del liquido sottostante. Insomma è abbastanza intuitivo che fra 2 soluzioni limite (e impossibili fisicamente):

1 - <u>il vino diffonde nell'acqua a velocità 0</u> (cioè rimane sempre nello strato superiore e perdiamo sempre acqua pura dal fondo): concentrazione finale 100% di vino

2 <u>- il vino diffonde istantaneamente</u>, quindi siamo sempre nelle condizioni di perdere una soluzione in equilibrio a concentrazione perfettamente omogenea (e crescente) dal recipiente sottostante

fra queste condizioni, dicevo, possono esistere infinite soluzioni intermedie dipendenti da infinite possibili condizioni di lavoro. Mi vedo costretto pertanto a ignorare Boltzmann e moti browniani (sollievo) e a studiare il caso impossibile della <u>diffusione istantanea</u> (caso 2).

Consideriamo 2 liquidi, liquido A e liquido B. Se mescoliamo un volume V_1 di liquido A con un volume V_2 di liquido B, la concentrazione c di A nella soluzione A+B è definita come $c = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$

Ora consideriamo un volume V_1 di soluzione A+B in cui la concentrazione di A è c_1, ed un volume V_2 di soluzione con concentrazione di A pari a c_2. Se mescoliamo le 2 soluzioni avremo una concentrazione risultante che è la media ponderata (sui volumi) delle concentrazioni: $c_3 = \frac{c_1 \cdot V_1 + c_2 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$.

Fatto tesoro di tali concetti, vediamo di applicarli al nostro problema.

Immettiamo un volume di vino v in un volume d'acqua di un litro. La concentrazione del vino nella soluzione acqua-vino sarà $c_1 = \frac{v}{1+v}$.

Ora togliamo un volume *v* di soluzione acqua-vino (in modo da avere sempre un litro di soluzione), e immettiamo un secondo volume *v* di vino: la nuova concentrazione sarà

$$c_2 = \frac{100\% \cdot v + c_1 \cdot 1}{1+v} = \frac{v}{1+v} + \frac{v}{(1+v)^2}.$$

Se ripetiamo il processo n volte la concentrazione n-esima sarà

$$c_n = \frac{v}{1+v} \cdot \left[1 + \frac{1}{1+v} + \frac{1}{(1+v)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+v)^{n-1}} \right].$$

Cioè, applicando la formula della somma di una progressione geometrica:

$$c_n = \frac{v}{1+v} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+v)^n}}{1 - \frac{1}{1+v}} = 1 - \frac{1}{(1+v)^n}.$$

Ora quantizziamo *v*, supponendo che questo sia il volume di una "goccia" pari ad una frazione 1/n del litro originario di vino. Possiamo quindi porre *v* =1/n e quindi

$$c_n = 1 - \frac{1}{(1+1/n)^n}.$$

Armiamoci di foglio elettronico e vediamo qualche valore

n = 1 (una goccia di vino da un litro!) c_1=50% (ce l'aspettavamo, no ?)

n = 2 ; c_2 = 55,5%

n = 3 ; c_3 = 57,8%

n = 4 ; c_4 = 59%

n = 5 ; c_5 = 59,8%

…

Osserviamo che $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, da cui $c_\infty = 1 - \frac{1}{e} = 63,2\%$

Dunque, in una situazione in cui

- il recipiente di vino da un litro eroga una serie infinita di microgocce
- ogni goccia diffonde immediatamente nella soluzione acqua-vino sottostante
- dal recipiente sottostante fuoriesce immediatamente dopo una goccia di soluzione, in modo tale che il recipiente contenga sempre un litro di soluzione

si ha quella concentrazione "finale"… e sapere che dipende dal numero di Nepero mi turba un po'. Ma senz'altro manderà in brodo di giuggiole voi matematici.

Brodo di giuggiole? Certo, soprattutto Rudy. Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Ma il numero delle persone che hanno stretto la mano a qualcun altro un numero dispari di volte, è pari o dispari?

6. Pagina 46

[1]

Siano $t+1, t+2, \ldots, t+n$ gli n interi consecutivi ad un intero t arbitrario. Per prima cosa determiniamo, per un numero primo p, con quale grado p sia fattore all'interno di $n!$ e con quale grado questo primo sia fattore all'interno del prodotto $(t+1)\ldots(t+n)$.

Se indichiamo con m_1 il numero di interi per cui p compare come fattore di primo grado, con m_2 il numero di interi per cui p compare come fattore di secondo grado e avanti in questo modo, allora il grado con cui p compare come fattore di $n!$ risulta essere $m = m_1 + m_2 + \ldots$.

Se s_1 è il numero degli interi nella sequenza $t+1, t+2, \ldots, t+n$ divisibili per p, s_2 il numero degli interi nella sequenza divisibili per p^2 eccetera, allora il grado s con cui p compare come fattore in $(t+1)\ldots(t+n)$ sarà $s = s_1 + s_2 + \ldots$.

Ora, il numero di interi nella sequenza $t+1, t+2, \ldots, t+n$ che sono divisibili per p non può essere minore di m_1, in quanto tra questi interi sono presenti i numeri $t+p, t+2p, \ldots, t+m_1 p$ e in ogni intervallo tra $t+kp$ e $t+(k+1)p$, con $k = 0,1,2,\ldots,m_1 - 1$ c'è almeno un intero divisibile per p. Quindi, deve essere $s_1 \geq m_1$ e, analogamente, $s_2 \geq m_2 \ldots$; quindi, sarà $s \geq m$.

Questo significa che ogni fattore primo di $n!$ è fattore di $(t+1)\ldots(t+n)$ con un grado non minore di quello con cui entra come fattore di $n!$, ossia che $(t+1)\ldots(t+n)$ è divisibile per $n!$.

[2]

Il prodotto dei primi a fattori di $n!$ è, evidentemente, $a!$. Il prodotto dei successivi b interi consecutivi di $n!$ è allora, in funzione di quanto ricavato nella parte precedente, divisibile per $b!$, il prodotto dei successivi c interi consecutivi di $n!$ risulta divisibile per $c!$ e avanti così.

Siccome $a+b+c+\ldots k \leq n$, segue che $n!$ è divisibile per $a!b!c!\ldots k!$.

[3]

$(n!)!$ è il prodotto dei primi $n!$ interi; questi $n!$ interi possono essere scritti come il prodotto di $(n-1)!$ insiemi di prodotti ciascuno dei quali contiene $n!$ interi successivi; ognuno di questi insiemi è, in accordo col risultato ottenuto nella prima parte, divisibile per $n!$.

[4]

Indichiamo gli interi con $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$. Mostreremo prima che esiste un intero k tale che il prodotto kd dà resto 1 quando è diviso per $n!$.

Consideriamo gli $(n!-1)$ numeri $d, 2d, \ldots, (n!-1)d$. Nessuno di questi numeri è divisibile per $n!$, in quanto questo e d sono, per ipotesi, primi tra loro. Inoltre, non esistono due prodotti pd e qd, dove p e q sono interi distinti minori di $n!$ che diano lo stesso resto successivamente alla divisione per $n!$: in caso contrario, si avrebbe che

$pd - qd = (p-q)d$ sarebbe divisibile per $n!$. Quindi, gli $n!-1$ interi danno tutti resti diversi se divisi per $n!$ e quindi per un qualche k il valore 1 deve essere il resto risultante dalla divisione per $n!$, ossia deve essere $kd = r \cdot n! + 1$.

Se ora indichiamo ka con A, abbiamo:

$$\begin{aligned} ka &= A, \\ k(a+d) &= A + kd = (A+1) + r \cdot n!, \\ k(a+2d) &= A + 2kd = (A+2) + 2r \cdot n!, \\ &\dots \\ k[a+(n-1)d] &= A + (n-1)kd = [A+(n-1)] + (n-1)r \cdot n!. \end{aligned}$$

Segue quindi che $k^n(a+d)(a+2d)\dots[a+(n-1)d]$ deve dare successivamente alla divisione per $n!$ lo stesso resto di $A(A+1)(A+2)\dots[A+(n-1)]$.

Quest'ultimo è divisibile per $n!$, per quanto visto nella prima parte; inoltre, k^n è primo rispetto a $n!$, in quanto se k non fosse primo rispetto a $n!$, allora non lo sarebbe neppure kd. Ma allora, $n!$ divide $a(a+d)(a+2d)\dots[a+(n-1)d]$.

7. Paraphernalia Mathematica

In due parti, questa volta: la prima rappresenta un buon allenamento per l'entrata in politica, visto che si basa su soluzioni di compromesso; per la seconda, attenti che è tosta.

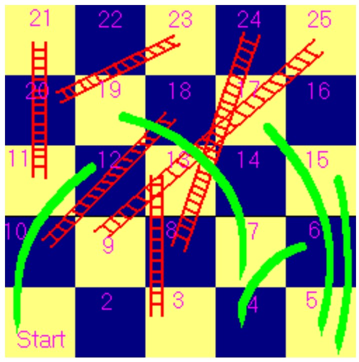
Se la prima non vi piace, molto probabilmente è per come l'abbiamo scritta: sono due giochini decisamente brutti, secondo noi...

7.1 Rien ne va plus: [005] – Un par di pari

...E vi abbiamo risparmiato i giochi di parole con "*pari*", che in francese significa "scommessa". Questa volta, analizziamo in dettaglio due giochi che ammettono ripetizione perpetua di mosse. Per il primo, abbiamo anche il pensato di cambiargli nome, ma secondo noi l'originale inglese vale la pena.

Adders & Ladders

Per prima cosa vengono posizionate alcune pedine in posizioni determinate sulla scacchiera; quindi, uno dei giocatori prende una pedina e la muove di al più 4 caselle in avanti; però, se la pedina finisce alla base di una scala, *deve* essere mossa alla cima della scala, mentre se arriva alla testa di una vipera deve scivolare giù sino al fondo della coda. Il primo che arriva alla *Home* (casella 25) con una pedina, vince. Di fianco, una tipica scacchiera da A&L.



Il titolo significa "vipere e scale": trattasi di variazione sul gioco "Snakes and Ladders", molto diffuso nelle scuole equivalenti alle elementari negli Stati Uniti.

Per prima cosa, consideriamo la riga in alto; siccome non ci sono scale o vipere che partano da questa riga, è facile calcolare i Nimeri dei quadrati $25,24,23,22$ e 21: sono, rispettivamente, $0,*1,*2,*3,*4$.

$*4$	$*3$	$*2$	$*1$	0
$*2$				
$*4$				
	0	$*1$		

Figura 2 - Primi Calcoli

Siccome le scale che iniziano in $8,9,11,20$ terminano rispettivamente in $24,25,21,23$, i Nimeri di queste posizioni sono rispettivamente $*1,0,*4,*2$. Insomma, la situazione è quella indicata qui a fianco.

Si tratta ora di numerare la casella 18. Da qui ci sono movimenti verso le caselle $20,21,22$ che sono etichettate rispettivamente $*2,*4,*3$. Potremmo mettere 0? Certo, visto che se il nostro avversario muovesse da qui in 19 finirebbe in 7 e noi, spostandoci in 9, vinceremmo la partita.

$*4$	$*3$	$*2$	$*1$	0
$*2$	$*2$	0		$*1$
$*4$	$*2$	0	$*2$	
0	0	$*1$	$*2$	
$*2$	$*1$	0		

Figura 3 - Situazione (quasi) Finale

Evidentemente, visto che la casella 10 porta immediatamente alla 18, anche questa deve essere etichettata con 0 e, siccome ora le caselle da 8 a 11 sono etichettate, la casella 7 deve avere Nimero pari a $*2$. Non solo, ma essendo quest'ultima la coda del serpente che inizia in casella 19, anche questa avrà Nimero $*2$.

Le caselle $16(=*1)$, $14(=*2)$ e $13(=0)$ si numerano con lo stesso metodo; non solo, ma da quest'ultima si deduce anche che la casella 3 ha Nimero pari a 0.

Nello stesso modo si inseriscono le restanti caselle indicate nella ***Figura 3***. "E le altre caselle?" Niente da fare, infinito. E quindi il gioco ammette i *loop*.

Tafani

In realtà "Horsefly", ma questo nome ci piace di più.

La scacchiera è estesa infinitamente verso il basso; i "Tafani", rappresentati da cavalli, possono muovere solo nel modo indicato (si noti che mancano due mosse rispetto a quello che è il movimento classico del cavallo: è meglio se il tafano non si avvicina alla coda del cavallo); inoltre, è vietato ripetere al contrario la mossa precedente. Il primo giocatore che riesce a portare in una delle case un qualsiasi tafano vince la partita.

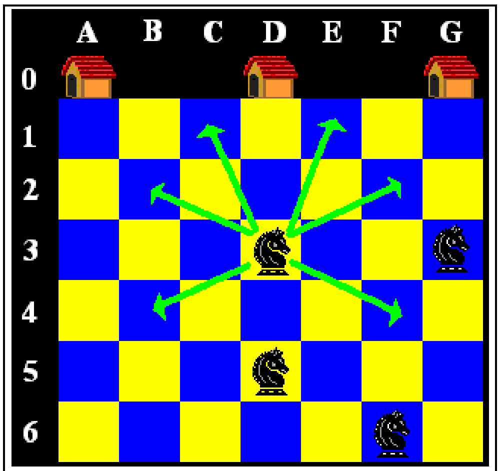


Figura 4 – I Tafani

Si vede che le case sono posizionate in $A0$, $D0$ e $G0$; quindi, se un giocatore posa un tafano in una delle case $B1$, $B2$, $C1$, $C2$, $E1$, $E2$, $F1$, $F2$ dà immediatamente la vittoria all'altro giocatore; quindi, per rendere il gioco più equo, proibiamo queste case.

È facile vedere inoltre che non ci sono mosse legali dalle case $A1$, $D1$ e $G1$; quindi, volendo assegnare un Nimero a queste, non può essere che 0, in quanto impedisce al giocatore successivo di effettuare la mossa con quel tafano.

L'unica mossa legale da $A2$ è $C3$, cui si può immediatamente rispondere con $D1$, avente Nimero 0; quindi, anche $A2$ deve avere Nimero 0. Ragionamento simile ci porta ad attribuire Nimero 0 anche alle caselle $D2$ e $G2$.

Ricorsivamente, si può dimostrare che ad una mossa da An a $C(n+1)$, $C(n-1)$ o $B(n-2)$ si può rispondere con una mossa rispettivamente in $D(n-1)$, $D(n-3)$ o $D(n-3)$; quindi, ***tutte le caselle delle colonne*** A, D, G ***hanno Nimero*** 0.

La situazione risulta quindi al momento quella schematizzata in ***Figura 5***.

	A	B	C	D	E	F	G
0	0			0			0
1	0			0			0
2	0			0			0
3	0			0			0
4	0			0			0
5	0			0			0
6	0			0			0

Figura 5 – Colonne a zero

Per quanto riguarda la casella $C3$, se viene raggiunta da $E4$ per la non reversibilità delle mosse potrà andare solo in una casella avente Nimero 0, quindi il Nimero dovrebbe essere $*1$, così come per $E3$. Con ragionamento simile, si deduce che $C4$ e $E4$ devono avere nimero $*2$, così come $B5$, $F5$ e $B6$; avanti in questo modo, ***tutte le caselle delle colonne*** B ***e*** F ***hanno Nimero*** $*1$.

...e qui cominciano i guai. Infatti, a questo punto $C3$ ***e*** $E3$ ***devono avere Nimero*** $*2$, contrariamente a quanto indicato prima; l'unica soluzione, allora, risulta quella di assegnare alle colonne C e E il valore ∞, il che non è bello...

7.2 Rien ne va plus: [006] – Dominare i cespugli

Nell'agenda di Rudy c'è una cartina del mondo; infatti, sostiene che il punto [1] della ToDoList di ogni Scienziato Pazzo ("24/7 Exploding Labs") è "Conquistare il mondo". E dal nome, questo gioco marca bene.

Domineering

> Vi serve una scacchiera anche irregolare e un gioco di Domino; le caselle sono di dimensione esattamente pari alla metà di un domino. I giocatori possono posizionare un Domino ovunque sulla scacchiera, purché entrambe le caselle siano libere. Alberto può posare i Domino solo *verticalmente*, mentre Fred li può posare solo *orizzontalmente*. Il giocatore che non può effettuare una mossa legale perde.

Cominciamo con delle scacchiere semplici.

È chiaro che, se la scacchiera è composta di una sola casella, qualsiasi giocatore giochi per primo perde, quindi *non ci sono mosse per nessun giocatore*.

Una scacchiera formata da due caselle verticali permette *una mossa ad Alberto e nessuna mossa a Fred*, portando i giocatori nella situazione (di giocabilità, non posizionale) del caso precedente.

Dovreste riuscire ad analizzare facilmente anche il caso di quattro caselle verticali; Alberto può lasciare a Fred o un gioco del secondo tipo (in due modi diversi) o due giochi del primo tipo (in un modo solo); il risultato, comunque, è sempre lo stesso.

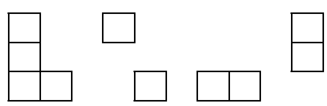
Un'interessante rappresentazione (che dovreste riconoscere) di questi giochi prevede di indicare i "giochi" che può lasciare ogni giocatore come $\{Alberto \mid Fred\}$; ad esempio, nel primo caso (che, ammetterete, è il più semplice di tutti) nessuno dei due può effettuare mosse, quindi non può lasciare nulla (se non la vittoria) all'avversario; dovendo dare un valore a questo gioco ed essendo questo il più semplice, lo chiamiamo ***zero***; nella nostra notazione, $\{\,\mid\,\} = 0$.

Nel secondo gioco (due caselle verticali), Alberto aveva una possibilità di giocare lasciando un "Gioco Zero" a Fred; quindi, sempre nella nostra notazione, $\{0 \mid \,\} = 1$.

Terzo gioco (quattro caselle), ormai procedete in souplesse: ignoriamo il fatto che i "giochi Zero" che lasciate siano due, tanto il risultato è il medesimo; lasciate o degli 0 o un 1, quindi $\{0,1 \mid \,\} = 2$.

Se ruotate i giochi in modo da avere delle caselle orizzontali (e in modo da far felice Fred) e se vi ricordate come si fanno i conti con i numeri surreali, avete $\{\,\mid 0\} = -1$, $\{\,\mid 0,-1\} = -2$ eccetera.

Va detto che sinora sembra si diverta uno solo... Proviamo con qualcosa di più complesso, ad esempio il gioco **[a]** di ***Figura 6***.



a b c d

Figura 6 – Quando il gioco si fa duro

Qui, se gioca prima Alberto, può lasciare Fred nelle posizioni **[b]** o **[c]**, che valgono rispettivamente $\{\,\mid\,\} = 0$ e $\{\,\mid 0\} = -1$; se invece gioca per primo Fred l'unica giocata possibile è **[d]**, che lascia il gioco $\{0 \mid \,\} = 1$.

Ma allora, quanto vale il gioco totale? Beh, vale $\{0,-1 \mid 1\} = \{0 \mid 1\} = \frac{1}{2}$, come dovreste ricordare.

Se il gioco vi diverte, provate a guardare la ***Figura 7***: il primo caso, quello senza lettera sotto. La soluzione ve la diamo dopo, altrimenti non farete mai i conti.

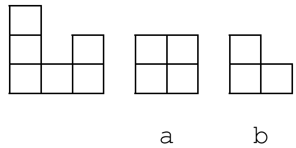


Figura 7 - Un esercizio e due Tipi Tosti

Parliamo adesso invece dei casi **[a]** e **[b]** della ***Figura 7***, che sono piuttosto strani; nel primo, se gioca prima Alberto lascia un valore $\{0\mid\}=1$ a Fred; viceversa, se gioca prima Fred lascia un valore $\{\mid 0\}=-1$ ad Alberto; in definitiva, abbiamo $\{1\mid -1\}$, che vale...

Uh-Oh. Questo ***non è un numero*** in quanto, se vi ricordate, il lato sinistro deve essere ***sempre minore*** di quello destro; in questi casi, il valore viene indicato di solito come $\{x\mid -x\}=\pm x$, tranne in un caso (che corrisponde al caso **[b]**) per cui si indica $\{0\mid 0\}=*$ (leggasi "star").

"...e a cosa serve, calcolare il valore di un gioco?" Semplice:

1. Se il risultato è ***positivo***, vince Alberto (giocatore alla sinistra nella notazione).
2. Se il risultato è ***negativo***, vince Fred (giocatore alla destra nella notazione)
3. Se il risultato è $\pm x$[13], vince il primo giocatore.

Chiaro, no? Esattamente come dovrebbe essere chiaro che la soluzione dell'esercizio di Figura 7 era $\{1/2\mid 1\}=3/4$.

Bene, visto il Dominio, vediamo il Cespuglio.

Hackenbush

Disegnate un "cespuglio", ossia una serie di rami (Blu o Rossi) che sono collegati ad altri rami o che toccano per terra direttamente. Al**B**erto può potare solo i rami **B**lu, mentre **FR**ed può potare solo quelli **R**ossi; tutta la "parte di cespuglio" potata cade per terra, visto che non è più collegata a nulla. Perde il giocatore che, per primo, non può più potare nulla.

Vedete qualche cespuglio in ***Figura 8***, di tipi decisamente semplici; non dovrebbe essere difficile calcolare i valori e capire come va a finire.

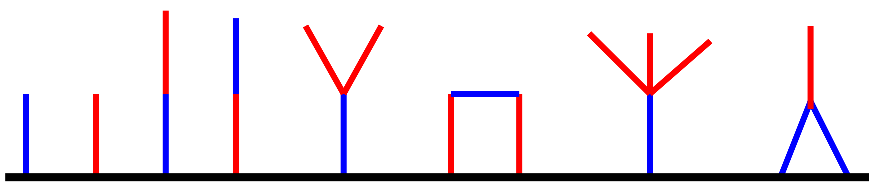


Figura 8 – Potate gli alberelli

Allenatevi, che dobbiamo parlarne ancora.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[13] Noto come ***fuzzy***. Bellissimo.