Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 097 – Febbraio 2007 - Anno Nono

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell’altro millennio da
Rudy d’Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com
www.rudimathematici.com

RM 096 ha diffuso 1’267 copie e il 30/01/2007 per Google eravamo in 18’200 pagine.

Per i 40 anni della rivista “Playboy”, ***Jason Salavon*** ha sovrapposto e calcolato la media delle *playmates* del paginone centrale di ogni decennio; la nostra preferita è quella degli anni ‘80.

Col che si dimostra che la bellezza media è diversa dalla media delle bellezze.

1. Hamburger o Portaerei?

> *I farisei e i sadducei si avvicinarono per metterlo alla prova e gli chiesero che mostrasse loro un segno dal cielo. Ma egli rispose: "Quando si fa sera, voi dite: "Bel tempo, perché il cielo rosseggia"; e al mattino: "Oggi burrasca, perché il cielo è rosso cupo". Sapete dunque interpretare i segni del cielo e non sapete distinguere l'aspetto dei tempi? Una generazione perversa e adultera cerca un segno, ma nessun segno le sarà dato se non il segno di Giona". E lasciatili, se ne andò.*
>
> (Matteo 16, 1-4)

"*Rosso di sera, bel tempo si spera. Rosso di mattina, la pioggia s'avvicina*".

Il proverbio, da proverbio, si ritaglia una tana negli interstizi delle volute del cervello, ancorandosi a qualche disoccupato neurone deputato all'esercizio della memoria, e non si muove più. Dal quel momento in poi risulterà del tutto impossibile non richiamarlo alla sfera cosciente ogni qual volta il cielo occidentale deciderà di imitare un piatto di patatine fritte annegato nel ketchup. Sia che ci si stia quasi addormentando lungo una sterile autostrada, sia che lo squarcio arabescante di gialli e di rossi si stagli tra i grigi condomini di periferia, sarà sempre la forza violenta del tramonto, la bellezza sfacciata e arrogante della luce morente, lo scandaloso e banale rituale del grande spettacolo dell'Ovest, a ricordarcelo.

Rosso di sera, come no, ma anche arancio, giallo, porpora, fucsia, granata, grigio-azzurro, piombo fuso. E con tanto di raggio verde, perfino, se uno ha la pazienza di aspettarlo e la fortuna di vederlo. Rosso di sera, certo, e come si fa a non sperare bel tempo, dopo una tale catarsi? È il cielo stesso che si muove a pietà, forse; perché se i proverbi partenopei suggeriscono di vedere Napoli per poi poter morire in pace, cosa resta da fare ad un cielo dopo aver prodotto uno degli spettacoli migliori della natura? Può solo provare a rassicurarci, promettendoci che il giorno dopo sarà non meno bello, non meno affascinante, e forse addirittura ancora più mirabolante. Sennò – Napoli docet – dopo la cruda e rosseggiante violenza d'un tramonto di folgorante bellezza, tanto varrebbe lasciarsi morire.

Ma l'altra metà del proverbio, invece, anche se diligentemente ricordata dalle sacre scritture, non rimane altrettanto familiare nelle circonvoluzioni mnemoniche. *Rosso di mattina, pioggia che s'avvicina*? E chi lo guarda più, il cielo di mattina? Qualche raro fornaio, magari; un paio di tardivi metronotte, forse; e sparuti cultori del pendolarismo estremo, che però astutamente rifiutano sempre di alzare lo sguardo verso Est, cercando ancora una tenebra rassicurante, accogliente, dove rifugiarsi appena possibile: sul freddo sedile d'un treno interregionale, o sullo scomodo strapuntino di un autobus di linea extraurbana. Poi, per la miseria, che l'alba sia bella si sa; ma la sua è bellezza ancora mutevole, promiscua, tutta da verificare, perché è solo preventiva. Non ha la tenerezza morbida e definitiva del tramonto, non la consolante vibrazione del riposo alle porte, meritato o meno che sia. E allora sia pure! Che il rosso dell'aurora sia eletto ad araldo di tempesta, chi se ne importerà mai? Tanto, alla peggio, sarà tempesta grigia e immediata, pret-a-porter, già pronta come un pasto precotto alla mensa aziendale; non gradito ma nemmeno inaspettato, perché il futuro, se non contiene almeno una notte, non interessa a nessuno.

Ciò non ostante, l'evangelista mette in bocca proprio a Gesù Cristo il vaticinio dei rossi luciferini o vespertini, quindi il proverbio è di origini tutt'altro che umili, se può vantare una simile alta ratifica. C'è insomma – inutile negarlo – perfino il rischio che sia proverbio con qualche ragione d'essere, al contrario di altri suoi improvvidi confratelli ("*Donna baffuta, sempre piaciuta*". Ma quando mai? Ma dove? Al circo Togni?). Come verificare, allora? Come allineare tradizione e modernità, scienza e fede? Esiste una ragione, magari una poetica ragione, in grado di giustificare il vermigliare serotino, e la placida alta pressione attesa nel giorno seguente? Beh, sì, esiste. Sembra proprio di sì.

In ultima analisi, tutto sembra dipendere dagli altostrati. Che hanno certo un nome curioso, ma certo meno complesso dei cirrocumuli, e meno minaccioso dei torreggianti cumulonembi. Gli altostrati se ne stanno lì – alti, appunto – tra i duemila e gli ottomila metri di quota, e il sole dell'alba e del tramonto li illumina "da sotto". Di solito, quel giallo astro esibizionista preferisce illuminare le nuvole dal di sopra, giocando a rimpiattino con tutti i tipi a disposizione; ma quando è basso e dritto sull'orizzonte, i suoi raggi radenti non disdegnano d'accarezzare la parte inferiore delle nuvole alte. E gli altostrati – che a dire il vero sono nuvole noiose oltre ogni dire – rivelano per brevi istanti la loro melliflua rugosità, colorandosi ai raggi della nostra stella madre. Raggi che, dovendo attraversare una sezione insolitamente lunga d'atmosfera, perdono una ad una tutte le algide alte frequenze, viola, blu, verdi, proprio come una spogliarellista lascia cadere uno ad uno gli indumenti; alla fine, resistono solo le placidissime e tiepide lunghezze d'onda della famiglia del rosso. Per questo le albe e i tramonti sono purpurei. Per questo gli altostrati del crepuscolo sfolgorano alti e vermigli, a volte. Ma solo a volte, non sempre: perché per far brillare gli altostrati (lo abbiamo già detto, che sono alti?) occorre che il cielo sia sereno e pulito, tra loro e la superficie del pianeta. Così, se guardate un tramonto e lo vedete esplodere di rosso, non solo potete lasciarvi sopraffare dalla bellezza e ridere sotto i baffi della misera approssimazione dei quadri di Turner, ma potete anche concludere che il cielo è splendidamente sereno, ad Ovest. E siccome, nella metà boreale della Terra, il tempo meteorologico si muove da Ovest verso Est[1], potete ragionevolmente aspettarvi che quel sereno che si vede in lontananza arriverà anche sopra le vostre teste. All'alba, invece, il rosso indica certo la stessa serenità di cielo, ma con la differenza che il sereno è già passato e vi sta salutando, proseguendo il suo viaggio in direzione di Trebisonda e di Samarcanda; e se il sereno se ne va, c'è poco di che stare allegri[2].

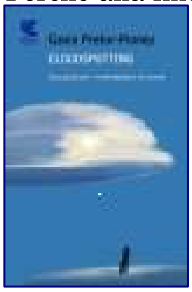
A mistero svelato, diventa poi facile cadere in tentazione. Gli interrogativi cominciano a sguinzagliarsi liberi e felici, dopo un letargo cominciato alle elementari, che finalmente intravede la possibilità d'un definitivo e razionale risveglio. Sono davvero spiegabili i

[1] Come ben sanno i piemontesi, che devono sempre mentalmente anticipare di mezza giornata le previsioni meteo date su scala nazionale. E forse i leccesi devono fare qualcosa di uguale e contrario, per dirla con Newton.

[2] Il sito ufficiale che ha ispirato queste righe è www.cloudappreciationsociety.org, ed è strapieno di bellissime fotografie di tramonti rossi. Solo che quelle foto sono tutte protette da copyright, e non vorremmo commettere reato riportandole qui. Per questa ragione, siete costretti ad accontentarvi di un tramonto molto casereccio e dilettantesco, ancorché rosso, preso da una comune finestra di camera da letto d'una casa canavesana.

proverbi meteorologici? Ma allora… "E la Candelora? È proprio vero che dell'inverno semo fora?" - "E le pecorelle? Non posso credere che davvero preannuncino acqua a catinelle!" - "Ho sentito cantare la rana, ma è proprio vero che la pioggia non è lontana?". E un rischio simile è deleterio, quasi tragico: perché risposte troppo tecniche (e i proverbi, alla fin fine, non sono altro che l'essenza stessa della tecnica popolare) rischiano d'impoverire la poesia ardita e contemporanea del misterioso formarsi d'un cumulonembo. E allora occorre staccarsi dalla curiosità più meschina (ma solo fino ad un certo punto, poi, perché, a ben vedere, la storia delle pecorelle e delle catinelle potrebbe certo avere anch'essa una placida, positiva e razionalissima risposta) per lasciarsi trasportare sui cirri di ghiaccio, sentirli fremere nel freddo dei quaranta gradi sotto zero, riconoscerne la somiglianza (per quanto nascosta) con i cumuli che da sempre popolano i disegni dei bambini, e, soprattutto, per rinunciare una volta per tutte all'illusione del perdurare delle forme.

Perché alla fine è tutta lì, la magia che resiste indomita; tutta nella definitiva rinuncia al catalogo stabile, alla tassonomia perdurante, alle foto segnaletiche. Lo splendido libro[3] di Gavin Pretor-Pinney gioisce delle nuvole e regala emozioni fatte di acqueo vapore, ma sembra a prima vista proprio solo un diligente catalogo, una rassegna neutrale e anonima, alla maniera di Linneo: un capitolo ai cumuli, uno agli strati, un altro ai cirri e un altro ancora a cumulonembi… Ma poi è l'autore stesso il primo a mettere in guardia il lettore; "le nuvole cambiano, mutano, precipitano una nell'altra, e sono leggibili sono dinamicamente", ripete in più punti Gavin Pretor-Pinney, il coraggioso londinese fondatore della Società per l'Apprezzamento delle Nuvole di cui questo *Cloudspotting* altro non è che un cartaceo manifesto. E allora bisogna davvero rinunciare alle forme: bisogna accontentarsi d'un quasi-nulla mutevole, variabile ed effimero (tale e quale alla vita, insomma), e accettare la magia dell'instabile e dell'informe.



Non è rinuncia da poco. Sono le forme i nostri punti di ancoraggio alla terra, da sempre. Riconosciamo luoghi e facce per la loro stabilità, per il loro perdurare. Al punto che sono proprio le mutazioni impreviste, non richieste, a spaventarci di più: quella vecchia casa abbattuta e sostituita da un brutto parcheggio, la quercia rigogliosa dell'infanzia trasformata in legna da ardere, i capelli visti allo specchio ogni giorno più grigi, le rughe ogni volta più nette. Cambiano le forme e le conoscenze franano, cedendo il passo alle paure. Forse è per questo che ci vuole, ogni tanto, uno sguardo coraggioso verso le forme mutevoli ed effimere, come il cumulo bianco e soffice, nuvola di bel tempo, che vive solo per dieci minuti prima di lasciar posto all'azzurro. O verso i cirri sottili, altissime piogge di ghiaccio delle correnti a getto, che sembrano immobili e che invece precipitano velocissime nei furibondi venti d'alta quota. O verso i cirrostrati che disegnano i rari aloni lunari e solari, che sembravano miracoli lontani e misteriosi; e lo sono davvero, nel racchiudere tanta bellezza in pochi istanti di vita. Niente forme permanenti, nessun lento perdurare, nessuna rassicurazione sulla stabile immortalità. Solo le virgole bianche sull'azzurro, per una eternità velocissima.

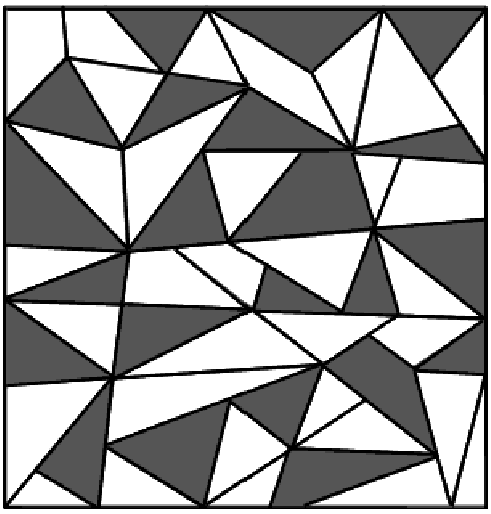
Questa strana altalena delle forme come primo alfabeto degli uomini, e degli uomini che poi invece alle forme rinunciano, ricorda più di un aspetto della matematica e della sua storia. La tradizione occidentale fa risalire la nascita della geometria alle piene del Nilo, che allagando con il benefico limo le colture ai suoi bordi, rendeva fertili i campi ma ne cancellava regolarmente i confini. E la forma del campo coltivato, persistente e ferma per tutta la stagione asciutta, scompariva ogni volta sotto la forza cancellatrice del dio fiume. La scoperta importante fu, allora, lo scoprire che la forma del campo coltivato non era legata indissolubilmente al campo stesso, quanto all'idea del campo che risedeva nella mente del coltivatore. Il campo rettangolare spariva sotto il fango del Nilo, ma il rettangolo, l'idea del rettangolo non era sommergibile dalle acque. Poteva essere rivista

[3] "**Cloudspotting** - *Una guida per i contemplatori di nuvole"*, di Gavin Pretor-Pinney. Guanda, 2006, Biblioteca della Fenice: 345 pagine, Euro 16,50.

con gli occhi della mente e ricostruita con l'ausilio delle misure, resuscitata come araba fenice ad ogni asciugarsi delle rive. La nostra matematica nasce su quelle forme, su quelle linee tracciate dagli aratri sulla terra, linee sfrangiate e reali guidate dalle linee pure e ideali, sempre presenti e ricostruibili nella mente dei tracciatori.

E sono le forme a popolare la geometria dei greci: cerchi e triangoli, quadrati popolati da irrazionali diagonali, poligoni regolari che inseguono i cerchi circoscritti; e poi le coniche, le curve annidate, e ancora su, fino all'estensione delle tre dimensioni, ai solidi, platonici o meno che fossero. Pochi teoremi puramente numerici si oppongono alla tiranna assoluta delle forme geometriche, in quei primi matematici tempi. Verrà poi Cartesio, e inscatolerà cerchi e quadrati nel mirino dei suoi assi ortogonali, parificando le magiche forme dei sacerdoti euclidei ad equazioni compatte e certo non meno esoteriche. E l'algebra inglobera gran parte della geometria, fino quasi a cancellare ogni figura – come nel *Trattato di Meccanica Analitica* di Lagrange; forme soppiantate dalle quasi omonime sorelle formule[4].

Ma ogni tanto è bene tornare indietro, alle forme vere e proprie, ai diagrammi, ai disegni. Sono certo un mezzo più diretto – e forse per questo più ingenuo – ma come altre cose destinate agli ingenui, spesso contengono messaggi importanti: e se non importanti, almeno divertenti. Un vecchio gioco che sulle pure forme si basa fu creato da Sam Loyd, forse il maggior creatore di giochi matematici di sempre, e si intitola "La stella nascosta". È gioco semplicissimo, e contiene una morale, come le favole che si raccontano ai bambini con lo smaccato intento di trasmettere un qualche significato etico attraverso le azioni di fate, gnomi e streghe cattive. Prima del disvelamento della morale, però, è necessario giocare il gioco, altrimenti l'artificio didattico non funziona. Ecco allora il gioco in tutto il suo reale splendore[5]:



Il meccanismo del gioco è d'una semplicità assoluta: nel disegno bicolore qua a destra si cela una bella stella a cinque punte, e occorre individuarla. Tutto qui: se trovate la stella, avete risolto il gioco; se non la trovate, potete serenamente perseverare perché la stella c'è, non c'è nessun trucco né trabocchetto, e ad un certo bel punto salterà agli occhi di chi ha la pazienza di cercarla. La "morale", invece, è probabilmente un po' meno diretta e limpida del gioco stesso. Il fatto è che questa "stella nascosta" è spesso usata come metafora della matematica stessa, e almeno per due ragioni. La prima è relativa al fatto che questo gioco è risolto da alcuni in maniera rapidissima, mentre altri faticano molto prima di individuare il nascondiglio della stella; quindi, il primo parallelo è perfino banale: per certe menti la matematica è evidente, lampante, e come la stella per alcuni, non è neanche autenticamente nascosta: è subito lì, in bella evidenza ed è impossibile non vederla. Per altri, invece, occorre lavoro e perseveranza, perché infine la magica figura emerga dall'informe ondeggiare di bianco e grigio che compone il disordinato disegno. Così, alcuni ottimisti rassicurano i tardivi identificatori dell'astro, assicurando loro che la stella alla fine salta sempre fuori, se la si cerca con il dovuto impegno. E questo, fuor di metafora, vuol significare che continuando a studiare matematica si arriverà alla fine a ben possederla, anche se inizialmente questo appare del tutto impossibile. Allo stesso modo,

[4] Sorelle minori, se prendiamo alla lettera il diminutivo (latino) implicito nella parola "formula".

[5] L'immagine è assai diffusa in rete, essendo il gioco di Loyd abbastanza famoso; In ogni caso, noi l'abbiamo prelevata dalle pagine elettroniche di Base Cinque, perché è un sito che ci è sempre stato molto simpatico e perché riteniamo opportuno ricordare la sua URL, almeno una volta ogni tanto (http://utenti.quipo.it/base5/).

però, si potrebbe leggere il messaggio come la crudele ratifica del fatto che esistono persone naturalmente portate alla scienza dei numeri e delle forme, mentre altri sono naturalmente predisposti alla cecità matematica, anche se un duro e lungimirante impegno potrà in qualche modo compensarli. In realtà, questa prima lettura del gioco è davvero troppo ingenua e generica, perché sia realmente significativa. Il secondo grado della metafora è invece decisamente più intrigante, ance se si può leggere solo dopo che si è risolto il gioco, trovando e vedendo la stella. Dopo che il gioco è risolto, infatti, dopo che la mente dell'osservatore ha finalmente individuato e inequivocabilmente "letto" la stella, è perduto per sempre; non sarà infatti più possibile tornare indietro. La stella, una volta trovata, non può più tornare a nascondersi, e il solutore non può recuperare la perduta cecità, al punto che il gioco è assolutamente irripetibile; non solo, ma per quanto uno possa faticare e lottare alla ricerca della stella, una volta identificata il gioco appare improvvisamente troppo semplice, facile ed evidente.

È qui che la metafora con la matematica diventa più calzante; nell'affrontare un problema, nel pianificare un'azione, nel progettare una serie di attività, si possono usare metodi diversi e variegati quanto le umane personalità. Ma se in qualche modo si scopre "la via matematica" alla risoluzione dei problemi, diventa poi impossibile farne poi a meno[6]. Non siamo abbastanza obiettivi da capire se in quest'aneddoto si nasconda anche una punta di snobismo e matematica arroganza, o se si tratti invece di pura e semplice verità. Certo è che a noi fa piacere ritrovare in un classico gioco di forme l'esaltazione della nostra amata disciplina: perché, pur restando incantati di fronte alle meraviglie dell'analisi, ai misteri della teoria dei numeri, alle recondite simmetrie della teoria dei gruppi, ritrovare la familiare e innocente forma d'un triangolo scaleno ci apre il cuore, e ci fa ritornare bambini. Ed è certo inutile ricordare che si può essere bambini anche quando si raggiungono quasi i cento anni di vita.

Proprio cento anni fa, infatti, nasceva il "professor Coxeter", e questi cento anni è riuscito a viverli quasi tutti. Nato a Londra il 9 Febbraio 1907, Coxeter è infatti riuscito a vivere una vita matematica piena e oggettivamente lunga, spegnendosi infine a Toronto neanche quattro anni fa, il 31 Marzo 2003. Che fosse una persona eccezionale, lo si capì fin dall'inizio della sua lunga vita: per quanto fosse universalmente chiamato semplicemente "professor Coxeter" (al punto che la stessa Università di Toronto era nota – almeno tra i matematici – come "l'università di Coxeter"), gli intimi avevano il privilegio di chiamarlo Donald. Anche se questo nome ci risulta particolarmente simpatico – alla fin fine, se proprio doveva esserci un matematico omonimo di Paperino, difficilmente avremmo potuto trovare candidati migliori – resta il fatto che è un nome già abbreviato, elaborato, insomma non pienamente anagrafico. Il suo nome reale è infatti MacDonald, e questo ci getta nel panico più totale, visto che eravamo del tutto convinto che il prefisso "Mac" – o "Mc", anche – fosse rigorosamente usato solo nei cognomi, e non nei nomi propri, di origine scozzese. Così come ci stupiremmo nello scoprire un connazionale avere come nome di battesimo "De Giovanni", ci meravigliamo dell'uso del fast-foodesco MacDonald come primo nome d'una persona (per quanto strana possa essere, destinata com'è a diventare uno dei maggiori matematici del suo periodo). Ma ogni meraviglia è prematura: in realtà, MacDonald non è il primo nome del nostro eroe, ma soltanto il terzo; anche se, a dirla tutta, avrebbe dovuto essere il secondo, non appena un vecchio zio si accorse che non

[6] Meno poetica e consolante è la constatazione che lo stesso meccanismo di dipendenza si instaura facilmente anche per altri oggetti meno nobili della matematica. Ad esempio, i telefoni cellulari.

poteva proprio fungere da primo. Confusi? Beh, è comprensibile. Cerchiamo allora di fare un po' d'ordine onomastico: i genitori del frugoletto avevano inizialmente deciso di chiamarlo MacDonald Scott, perpetrando quindi fin dal primo istante il triste avvicinamento agli hamburger più famosi del mondo[7]. Il prozio che si ribellò alla scelta non ce l'aveva in realtà con il patronimico scozzese, ma più semplicemente con il fatto che ogni rampollo di buona famiglia dovesse recare nel nome, prima d'ogni altra appellazione, il marchio stesso del padre. Ed essendo il padre di Coxeter nomato Harold, convinse presto la famiglia a chiamare il neonato con l'altisonante tripletta Harold MacDonald Scott. Con cotanta esuberanza di nomi la storia sembrerebbe conclusa, se non fosse che si troviamo a Londra e ad inizio Novecento, quando la Gran Bretagna dominava le onde. Un popolo marinaro e fiero come quello inglese non ha troppi dubbi, e non appena sente pronunciare l'acronimo HMS è colto da un soprassalto d'orgoglio nazionalistico e non dubita un istante che si stia parlando di una "Her/His Majesty's Ship". L'inevitabile conseguenza, in una nazione abituata da sempre a celebrare le imprese della HMS Victory o della HMS Indomitable, è che presentarsi come HMS Coxeter è rischioso quanto spacciarsi per un cacciatorpediniere o una portaerei. La decisone finale portò allora i Coxeter a permutare l'ordine dei nomi, e da questa azione dal sapore così matematico nasce finalmente il nome definitivo e completo: Harold Scott MacDonald Coxeter. Come stupirsi allora, se alla fine il nostro professore inglese è passato alla storia con il solo titolo accademico e il cognome, o al massimo con un confidenziale "Donald"?

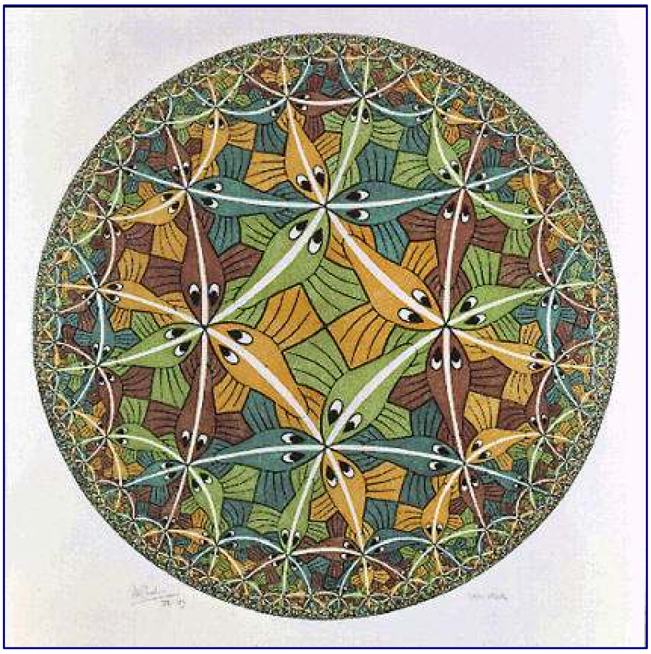
Come spesso capita quando si narrano vite di matematici, anche in questo caso occorre usare il pericoloso termine "bambino prodigio". Donald era fortemente attratto dalla musica, al punto da potersi definire ottimo pianista ancora in età infantile; a dodici anni compose un'opera completa, ma aveva già scritto diversi pezzi per pianoforte. Se ne parliamo in RM però, visto che l'acronimo sta sempre per "Rudi Mathematici" e non per "Rivelazioni Musicali", è perché Coxeter venne in giovanissima età sedotto dal fascino della matematica, che superò il suo innato amore per la musica. Sembra che l'incanto fosse generato dalla pura estetica, se è vero che fu l'amore per le simmetrie a catturare definitivamente l'attenzione del giovanissimo londinese; ma non tanto le sottili e complesse simmetrie formali della matematica superiore: più semplicemente, Donald è catturato dalle magiche e colorate simmetrie generate dai caleidoscopi. Sia come sia, Coxeter studia con profitto a Cambridge[8], dove si laurea nel 1929, e ottiene il dottorato nel 1931; dopo un paio d'anni come "visiting professor" a Princeton, arriva finalmente a Toronto nel 1936, dove deve trovarsi davvero bene, se continuerà a lavorare in quell'Università per la bellezza di sessanta anni filati, fino al 1996.

La caratteristica più rimarchevole di Coxeter è proprio il suo approccio quasi istintivo, se non infantile, alla matematica: abbiamo parlato a lungo di "forme", nell'introduzione, proprio perché sembrano essere ciò che più colpiva l'immaginazione e accendeva la fantasia del protagonista di questo mese. Non si può certo dire che esistano matematiche di serie A e di serie B, ma il Novecento ha portato alcuni profondi sviluppi nella matematica più "formale" da far apparire la geometria – proprio quella geometria delle forme - un po' come un giocattolo per grandi. In quest'ottica, il grande pregio di Coxeter sta proprio nell'aver restituito piena dignità alla geometria più immediata: il suo testo "*Introduction to Geometry*", scritto nel 1961, è considerato il migliore manuale moderno di geometria euclidea. Ma le forme che lo appassionavano non erano necessariamente limitate a quelle sancite dal vecchio matematico di Alessandria: uno dei suoi più fertili campi di interesse furono proprio le geometrie non euclidee, o il superamento delle tre

[7] A parziale giustificazione dei genitori, possiamo annoverare il fatto che nel 1907 i ristoranti MacDonald non erano verosimilmente molto diffusi né a Londra né altrove, ma un padre deve pur prevedere il futuro, se vuole tutelare la sanità mentale del proprio figlioletto.

[8] Studiava filosofia della matematica, al solito Trinity College, con professori del calibro di Ludwig Wittgenstein.

classiche dimensioni. Una delle sue idee di maggior successo e più fertili furono proprio i "Politopi", ipersolidi regolari n-dimensionali[9].



In ogni cosa che intraprendeva, l'importante era che si risvegliasse il suo senso della bellezza. Viene spesso citato un passo della lettera con la quale Robert Moody propone l'assegnazione di una laurea honoris causa a Coxeter da parte dell'Università di York: "*La scienza moderna è spesso guidata dalle mode correnti, e la matematica non fa eccezione. Lo stile di Coxeter, però, è singolarmente poco soggetto alle mode. Credo che sia completamente guidato da un profondo senso del bello*". La sensazione di Moody trova probabilmente conferma in un altro aneddoto della vita del matematico: durante la Seconda Guerra Mondiale, gli Stati Uniti chiesero a Coxeter di partecipare ad un programma volto alla decrittazione dei codici nemici, e lui accettò di buon grado. Eppure, l'attività che dette fama a Nash e soprattutto a Turing gli risultò del tutto ostica: "*Non riesco a farla bene, perché non la trovo affascinante… è come se fosse un'altra sorta di matematica*", si narra che abbia detto, al momento dell'abbandono del progetto.

In compenso, c'erano moltissime altre cose che lo attraevano, e quali fossero lo si può arguire anche solo citando alcune tra le sue più care amicizie: Richard Buckminster Fuller e Maurits Escher. Per il primo, basti dire[10] che Coxeter, per stessa ammissione di Buckminster Fuller, contribuì sensibilmente ad ispirargli la sua più famosa invenzione, la cupola geodetica. Su Escher, invece, "*Hanc marginis exiguitas non caperet*", verrebbe da dire…

Non solo per l'amicizia, ma anche per alcuni memorabili lavori dedicati alle sue opere d'arte, si può ben serenamente affermare che Coxeter fu uno dei maggiori sponsor dell'artista olandese. Si narra che diventarono amici nel 1954, quando si incontrarono ad una conferenza di matematica, naturalmente tenuta da Donald. Escher gli si avvicino al termine della conferenza per chiedergli spiegazioni tecniche sul comportamento di figure che riempivano un cerchio diventando via via più piccole man mano che si avvicinavano alla circonferenza. Da lì nacque un'amicizia lunga tutta la vita (almeno, per tutta la vita del pittore, scomparso ne 1972 a 74 anni); il vecchio matematico non dovette davvero aver mai dimenticato quell'incontro fatale se poi, ormai quasi novantenne, nel 1996, si decise a scrivere un articolo proprio sui "Circe Limits" che spesso si incontrano nelle opere di Escher. L'articolo cerca di calcolare quanto accuratamente Escher, che era affascinato dalla matematica ma lontanissimo dall'essere un matematico professionista, riuscisse a ripetere nelle sue opere il medesimo arco di intersezione, avvicinandosi sempre più al limite della circonferenza e riducendo le dimensioni delle forme disegnate. Dopo aver

[9] Senza alcuna pretesa di spiegarli, ma tanto per far finta di conoscerli: cominciate dalla dimensione zero, e disegnate un punto; passate alla dimensione 1, e tirate un segmento. Poi fate un quadrato per N=2, un cubo per N=3 e ovviamente un ipercubo (o tesseratto) per N=4. Poi proseguite con gli N, e quel che disegnate sono comunque sempre politopi regolari. Altrimenti andatevi a leggere il PM di RM085.

[10] Qualcosa di più su Buckminster Fuller (ma non su Coxeter) si può sapere andando a recuperare il compleanno a lui dedicato su RM66, "Cuori, Curve e Cupole", Luglio 2004.

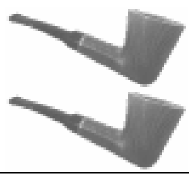
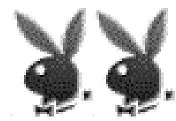
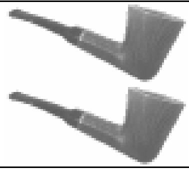
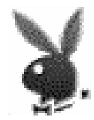
sviluppato una serie di calcoli di trigonometria, Coxeter concluse che se mai Escher avesse voluto lasciarsi guidare dalle formule matematiche anziché dal suo istinto di artista, avrebbe dovuto utilizzare una complessa formula comprendente coseni e seni iperbolici di funzioni logaritmiche. La precisione dell'amico ("*È preciso al millimetro, davvero al millimetro*", commentava) non cessava di stupirlo, e si rammaricava di aver studiato la cosa troppo tardi perché Escher ne potesse trarre qualche vanto.

Prima ancora che uno splendido matematico, Donald Coxeter era davvero una bella persona, che ben sapeva come vivere e come farlo divertendosi. Memore dei suoi piaceri infantili, classificò nel 1933 tutti i caleidoscopi multidimensionali, usando poi questo suo divertimento per approcciare la geometria n-dimensionale; inoltre – cosa estremamente meritevole per noi poveri cultori di matematica ricreativa – curò la riedizione del classico libro di giochi matematici "*Mathematical Recreations and Essays"* di Rouse Ball.

Sapeva giocare e divertirsi, insomma: per questo non riusciamo a non figurarcelo se non come un ragazzino quasi centenario. Nello spiegare la sua longevità, raccontava a chi glielo chiedeva che seguiva una dieta morigerata e vegetariana, che non trascurava di fare una cinquantina di piegamenti ogni mattina, e soprattutto che riusciva a non arrabbiarsi mai. Si riconosceva fortunato: "*Sono pagato per fare quello che farei comunque*", diceva, e sapeva che questa è fortuna destinata davvero a pochi.

E infine, quando doveva rivelare l'ultimo e più importante segreto, rivelava con candore "*Non mi annoio mai*", e a noi piacerebbe molto riuscire ad imitarlo.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Sperando che non "porti male"...			
"Nessuna birra rossa"			

2.1 Sperando che non "porti male"...

Ormai lo sapete tutti, che Rudy si sta preparando ad un trasloco (*spiritualmente: in pratica, non fa un tubo come al solito [Paola, Alberto & Fred] Nego: ho trovato alcuni problemi, in merito [RdA]*). Quello che non sapete è che a Natale gli è arrivato un "sixpack" (sei DVD, delle birre ne parliamo dopo) dei Fratelli Marx, e questo mese è in ritardo sul solito anticipo in quanto impegnato a visionare il materiale; un amico, avendo probabilmente dedotto che gli piacciono i comici *d'antan*, ha pensato bene di regalargli un altro DVD contenente una serie di brevi comiche di Buster Keaton.

Rudy ringrazia per il pensiero, ma B.K. per lui va preso a piccole dosi; sostiene che la faccia impassibile, dopo mezz'ora, stufa (*...volete mettere, con la pirotecnia di Groucho? [RdA]*). Uno sketch, comunque, lo ha fatto pensare.

Estate, esterno. Keaton appoggia la scala al muro e, da imbranato qual si mostra, mette l'intera scala perfettamente perpendicolare a contatto con il muro e comincia a salire. Arrivato a metà la scala, punto fermo alla base, la scala comincia a cadere. Keaton si volta verso la cinepresa, fa la sua solita faccia, e ricompare tutto ingessato in ospedale. Non dovreste avere problemi a scoprire quale sia la traiettoria di B.K. in questo caso.

Inverno, medesimo esterno. Rimessosi, il Nostro torna sul luogo del misfatto e, fermamente intenzionato a terminare il lavoro, con grande soddisfazione del suo traumatologo appoggia la scala esattamente nello punto e nello stesso modo.

Essendo però inverno, il terreno è gelato e quindi, anzichè fare perno sull'appoggio, la base comincia a scivolare all'indietro e la cima, mantenendo il contatto con il muro, scivola in giù. Solita faccia impassibile e, presumibilmente, prossima scena nello stesso ospedale.

Ora, nella speranza che Rudy non si trovi a dover esaminare praticamente nessuno dei casi: la seconda volta, qual era la traiettoria di Keaton?

2.2 "Nessuna birra rossa"

Il motivo per cui da qualche tempo non si svolgono Comitati di Redazione dei Rudi Mathematici è dovuto ad un semplice fatto: la nostra barista preferita ci ha proposto un giochino con punizione finale. Infatti, ha notato che durante i CdR nessuno beve birra rossa; non che non piaccia, ma evidentemente tutti e tre i Redattori preferiscono la chiara o la scura. Segue la dichiarazione della perfida cervisiofora.

"Dunque, io adesso ignorerò la vostra ordinazione, e metterò dietro ciascuno di voi una birra chiara o scura a caso, tirando una moneta-non-di-Rudy (e quindi onesta); ognuno di voi potrà vedere le birre degli altri due, ma non la propria, e non potrà fare segnali agli altri. La domanda è: di che colore è la vostra birra?"

"Dopo dieci secondi, ciascuno di voi può dirmi, non sentito dagli altri, 'chiara', 'scura' o 'passo'; raccolte tutte le dichiarazioni, io dirò se ognuno di voi ha indovinato o no; se ha detto 'passo', annuncerò il fatto."

"Se dite tutti 'passo', bevete e pagate tre birre rosse; se tutti quelli che non dicono 'passo' azzeccano il colore della propria birra, bevete quel che vi pare gratis; se tra quelli che non dicono 'passo' qualcuno sbaglia, birra rossa e pagate; se vi becco a farvi dei segni, acqua minerale e la pagate come Barolo."

Ora, non dovreste avere problemi a scoprire quale sia la probabilità di bere gratis se nessuno, uno o due di noi dicono 'passo', e il gioco si ridurrebbe ad una cosa ragionevolmente semplice. Però, la Torturatrice Analcoolica adesso dovrà andare a fare un giro dei tavoli, e Rudy sostiene di avere un metodo che, se lo applichiamo tutti, dovrebbe permetterci di aumentare in misura notevole le nostre probabilità di bere a sbafo... Qualcuno ha un'idea?

L'Alcolopompa deve essersi accorta che stiamo architettando qualcosa, e si prepara a complicarci la vita...

"Facciamo così: avete a disposizione un certo numero di 'punti', e ogni volta che uno di voi fa una dichiarazione vincete o perdete il numero di punti che è stato scommesso; se il bilancio finale è positivo, birra gratis per tutti; altrimenti..."

Strategie? Idee? Svelti, che tra un attimo la *Kellerina* torna...

3. Bungee Jumpers

Trovate le prime 1000 cifre del numero

$$N = 1 + 50 + 50^2 + 50^3 + \ldots + 50^{999}.$$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Questo mese abbiamo pochissimo da raccontarvi. Non si sa bene cosa possa essere successo ai nostri lettori più affezionati o al senso critico di quelli meno interessati, ma a quanto pare siete stati tutti in altre faccende affaccendati. Bene lo stesso, ma in Redazione stiamo ancora ridendo visto che dopo la tirata del mese scorso nel compleanno di Doc a proposito delle sviste di traduzione, quasi nessuno ha notato che il Doc stesso ha piazzato in Newsletter una bufala clamorosa per vedere se eravate attenti.

Chi ha notato la bufala ha al solito vinto il solito abbonamento gratis ad RM, che è l'approssimazione più vicina all'aver vinto nulla che esista, ma per noi è stato proprio un segno che non siete molto attenti...

Per il resto, sempre a proposito del Compleanno del mese scorso, ringraziamo ***Gavrilo*** che ci ha fornito le versioni originali delle frasi discusse, che vi alleghiamo per vostro diletto:

> *"EG (emeritus guru)".*
>
> *"Theorem: A cat has nine tails. Proof: No cat has eight tails. A cat has one more tail than no cat. QED."*
>
> *"Two and a half thousand years ago, Plato declared that God is a geometer."*
>
> *"I always tell anyone who sends me an attempted trisection that I'm not concerned about their being wrong, and neither should they be. The problem is that if they are right, then a direct consequence of their proof is the fact that 3 is an even number."*

Infine, abbiamo ricevuto una segnalazione dal nostro ***L.A.Bachevskij***, si sta organizzando un festival della matematica a Roma, con gran spiegamento di matematici (e tipi legati alla matematica) noti, tra cui Wiles, Hofstadter, Connes (fields), Atiyah (fields+abel), Mandelbrot, Spassky e Nash. La notizia non è ancora più di tanto confermata, per cui aspettiamo le prossime segnalazioni e vi faremo sapere.

Buon Febbraio!

4.1 [095]

4.1.1 L'importante è avere una scusa

Contrariamente a quello che aveva previsto ***Mr. Fahrenheit***, nessuno si è accorto che nella sua soluzione il terzo grafico in ogni caso non era corretto. Per punizione non pubblichiamo quelli che lui ci ha manato, così avete ancora un po' di tempo per pensarci.

4.2 [096]

4.2.1 Non è successo niente!

Solo ***Cid*** ha risolto questo problema, e in diversi modi, per cui passiamo a lui la parola.

> Ritengo che vi siano almeno 3 metodi distinti per risolvere questo problema, ed in tutti e tre i metodi vengono rispettate le condizioni del problema ottenendo degli insiemi che danno gli stessi valori di probabilità dei 2 dadi standard numerati da 1 a 6.
>
> 1° metodo
>
> Questo metodo si basa sul fatto che nel testo del problema viene ritenuta accettabile la cifra 0, per cui è sufficiente prendere insieme ai 2 dadi standard anche altri dadi riportanti la cifra 0 su tutte le facce; in tal modo ad ogni lancio dei dadi, la somma totale dipenderà solo dai 2 dadi standard. Ne consegue che questo metodo è valido (anche se è una soluzione banale).
>
> 2° metodo
>
> Un metodo più interessante è quello di sostituire almeno uno dei 2 dadi standard, con altri 2 dadi anomali che insieme diano una distribuzione di probabilità uniforme da 1 a 6.
>
> Ad esempio, un dado avente due facce uguali a 1, due facce uguali a 2 e due facce uguali a 3, insieme a un dado avente tre facce uguali a 0 e tre facce uguali a 3.

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
1° dado anomalo	1	1	2	2	3	3
2° dado anomalo	0	0	0	3	3	3

> oppure un dado avente due facce uguali a 0, due facce uguali a 2 e due facce uguali a 4, insieme a un dado avente tre facce uguali a 1 e tre facce uguali a 2.

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
1° dado anomalo	0	0	2	2	4	4
2° dado anomalo	1	1	1	2	2	2

> oppure un dado avente due facce uguali a 1, due facce uguali a 3 e due facce uguali a 5, insieme a un dado avente tre facce uguali a 0 e tre facce uguali a 1.

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
1° dado anomalo	1	1	3	3	5	5
2° dado anomalo	0	0	0	1	1	1

> eccetera...

Se si sostituisce solo uno dei due dadi con questi 2 nuovi dadi, si ottiene una soluzione con 3 dadi.

Se si sostituiscono tutti e due i dadi standard con 2 coppie di nuovi dadi, la soluzione è con 4 dadi.

3° metodo

Un altro metodo è quello di sottrarre 1 ad ogni faccia di un dado e sommare 1 ad ogni faccia dell'altro dado, ottenendo un dado numerato da 0 a 5 insieme a un dado numerato da 2 a 7. Ma posso anche calcolare una soluzione senza fare alcun riferimento ai dadi standard.

La strategia più semplice è quella di sfruttare la simmetria e partire con il caso di 2 dadi a 6 facce. In tal caso so che la somma dei due valori più piccoli dei due dadi deve essere uguale a 2, e la somma dei due valori più grandi dei due dadi deve essere uguale a 12. Inoltre, tali valori devono essere unici perché 2 e 12 hanno frequenza uguale a $\frac{1}{36}$.

Consideriamo, ad esempio due dadi con valore minimo uguale a 1, avremo che il valore 2 dovrà essere presente su due facce per avere somma 3 con frequenza uguale a $\frac{2}{36}$; per non ottenere dei dadi standard mettiamo queste 2 facce sullo stesso dado. Per poter avere somma uguale a 4 con una frequenza uguale a $\frac{3}{36}$ il valore 3 dovrà essere presente su 3 facce, per mantenere la simmetria non possono essere tutte e tre le facce sullo stesso dado. Quindi avremo: due facce con valore uguale a 3 sul dado dove abbiamo messo su 2 facce il valore 2 per simmetria e la restante faccia con valore 3 sull'altro dado.

A questo punto, vediamo che la simmetria del primo dado è rispetto al valore 2,5 quindi siccome la faccia con valore più basso vale (1 = 2,5 - 1,5) allora la faccia con valore più alto deve avere un valore uguale a (2,5 + 1,5 = 4).

La somma dei due valori più grandi deve essere uguale a 12, quindi il valore più grande dell'altro dado deve essere uguale a 8. Quindi la simmetria dell'altro dado è rispetto a $\left(4{,}5 = \frac{8+1}{2}\right)$, per cui siccome abbiamo una faccia con valore uguale a 3, dovremo avere anche una faccia con valore uguale a 6.

Infine, siccome le due facce rimanenti devono essere comprese tra 4 e 5 ed avere somma uguale a 9, risulta evidente che una deve avere un valore uguale a 4 e l'altra un valore uguale a 5.

Riassumo il tutto nella tabella sottostante:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Primo dado	1	2	2	3	3	4
Secondo dado	1	3	4	5	6	8

Sfruttando il 2° metodo, posso scomporre uno di questi due dadi in due nuovi dadi ed ottenere una soluzione a tre dadi; o scomporli entrambi ed ottenere una soluzione a quattro dadi.

Esempio di scomposizione del primo dado:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Dado 1.1	1	1	2	2	3	3
Dado 1.2	0	0	0	1	1	1

Esempio di scomposizione del secondo dado:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Dado 2.1	1	1	3	3	5	5
Dado 2.2	0	0	0	3	3	3

Di conseguenza potremo avere soluzioni a tre dadi:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Dado 1.1	1	1	2	2	3	3
Dado 1.2	0	0	0	1	1	1
Secondo dado	1	3	4	5	6	8

oppure in alternativa:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Primo dado	1	2	2	3	3	4
Dado 2.1	1	1	3	3	5	5
Dado 2.2	0	0	0	3	3	3

e soluzioni a quattro dadi:

	Faccia 1	Faccia 2	Faccia 3	Faccia 4	Faccia 5	Faccia 6
Dado 1.1	1	1	2	2	3	3
Dado 1.2	0	0	0	1	1	1
Dado 2.1	1	1	3	3	5	5
Dado 2.2	0	0	0	3	3	3

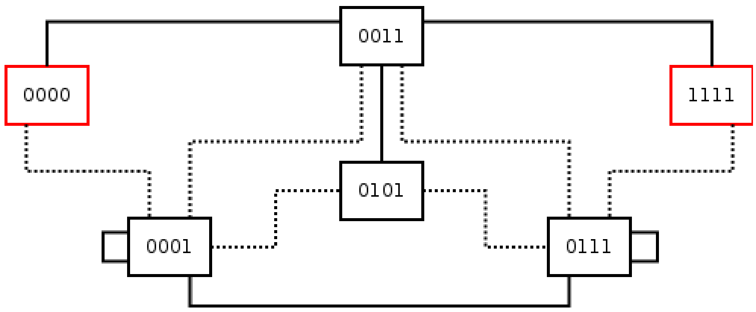
eccetera...

Che ne dite?

4.2.2 Un Capodanno da movimentare

Solo ***Zar*** e ***Cid*** hanno dato una soluzione, e le proponiamo emtrambe, in ordine di arrivo in Redazione, cominciando con ***Zar***:

Comunque, per quanto riguarda quello dei bicchieri, mi sono fatto una rappresentazione grafica della situazione, che allego a questo messaggio.



Legenda: nei sei rettangolini sono rappresentate le sei possibili configurazioni che possono capitare: 0 corrisponde a un bicchiere all'insù, 1 a un bicchiere all'ingiù. In teoria i quattro numeri andrebbero disposti in cerchio, ma è tecnicamente più semplice rappresentarli in linea e immaginare che dopo l'ultimo a destra segue il primo a sinistra...

Le righe nere corrispondono a quello che può succedere quando vengono invertiti due bicchieri adiacenti, le righe tratteggiate corrispondono invece all'inversione di un solo bicchiere. Si noti che, mediante l'inversione di 2 bicchieri, è possibile che le configurazioni 0001 e 0111 si trasformino in sé stesse. Si noti anche la bella simmetria dello schema, che ci fa capire come, in sostanza, non importa se i bicchieri sono a faccia in su oppure in giù (0000 e 1111 sono duali, 0001 e 0111 sono duali, mentre 0011 è duale di sé stessa, così come 0101).

Bene, questa rappresentazione ci fa capire che, prima o poi, scegliendo qualunque strategia, si arriva alla configurazione richiesta (che, come da problema, potrebbe essere sia 0000 che 1111).

Si potrebbe usare la strategia "cambio sempre un solo bicchiere" oppure "cambio sempre due bicchieri" oppure qualunque altra.

È chiaro che ora ci starebbe bene una valutazione probabilistica della cosa ma, come diceva la volpe, nondum matura est..

E ora la parola passa a ***Cid***:

Risultati

1) Per il problema dei 4 calici ho trovato una strategia che permette di avere tutti e quattro i calici girati dalla stessa parte in 5 mosse al massimo.

2) Per il problema dei 6 calici ho trovato una strategia che permette di avere tutti e sei i calici rivolti verso l'alto in 5 mosse al massimo.

3) Per il problema dei 4 tumbler ho trovato una strategia che permette di avere tutti e quattro i tumbler girati dalla stessa parte in 7 mosse al massimo.

Descrizione delle strategie

1) Per il problema dei 4 calici ho trovato varie strategie che permettono di risolvere il problema in un massimo di 5 mosse; tra le varie strategie che ho trovato quella che mi piace di più è la seguente:

Prima Mossa: Giro verso l'alto due calici diametralmente opposti tra loro. A questo punto ci sono due possibilità:

- Gli altri due calici sono rivolti verso l'alto (il gioco è risolto)
- Almeno uno degli altri due calici è rivolto verso il basso (il gioco continua)

Seconda Mossa: Scelgo due calici diametralmente opposti tra loro.

- Se almeno uno dei due è rivolto verso il basso significa che sono i due calici che non ho girato con la prima mossa, li giro quindi verso l'alto (ed il gioco è risolto)
- Se sono entrambi rivolti verso l'alto, li giro tutti e due verso il basso; siccome so dalla mossa precedente che gli altri due calici non sono rivolti entrambi verso l'alto ci sono due possibilità:
- Gli altri due calici sono rivolti verso il basso (il gioco è risolto)
- Solo uno degli altri due calici è rivolto verso il basso (il gioco continua)

(Se il gioco continua significa che ho tre calici verso il basso ed uno verso l'alto)

Terza Mossa: Scelgo due calici diametralmente opposti tra loro. A questo punto ci sono due possibilità:

- Uno dei due calici scelti è rivolto verso l'alto, allora lo giro verso il basso (il gioco è risolto)
- Tutti e due i calici sono rivolti verso il basso, allora ne giro uno verso l'alto (il gioco continua)

(*Se il gioco continua significa che ho due calici vicini verso il basso e gli altri due verso l'alto*)

Quarta Mossa: Scelgo due calici vicini tra loro e li giro entrambi. A questo punto ci sono due possibilità:

- I due calici erano rivolti dallo stesso lato (allora avendoli girati tutti e due il gioco è risolto)
- Uno dei due calici era rivolto verso l'alto e l'altro verso il basso, (allora il gioco continua)

(Se il gioco continua significa che ho due calici diametralmente opposti rivolti verso il basso e gli altri due calici diametralmente opposti rivolti verso l'alto)

<u>Quinta Mossa</u>: Scelgo due calici diametralmente opposti tra loro e li giro entrambi. A questo punto ho tutti i bicchieri girati dallo stesso lato e quindi il problema è risolto.

2) Per il problema dei 6 calici ho trovato una strategia che permette di avere tutti i calici rivolti verso l'alto in cinque mosse (al massimo)

<u>Prima Mossa</u>: Giro verso l'alto quattro calici (ne escludo due diametralmente opposti tra loro). *(Se il gioco continua significa che almeno un calice è rivolto verso il basso)*

<u>Seconda Mossa</u>: Giro verso l'alto quattro calici (ne escludo due che siano uno accanto all'altro). *(Se il gioco continua significa che ho un solo calice rivolto verso il basso)*

<u>Terza Mossa</u>: Scelgo tre calici vicini tra loro ed un calice che non sia vicino a questi tre. A questo punto ci sono due possibilità:

- Uno dei calici scelti è rivolto verso il basso, allora lo giro verso l'alto (il gioco è risolto)
- Tutti e quattro i calici sono rivolti verso l'alto, allora giro verso il basso quello che si trova al centro tra i tre calici vicini tra loro (il gioco continua)

(Se il gioco continua significa che ho quattro calici rivolti verso l'alto e che i due calici rivolti verso il basso sono separati da un solo calice)

<u>Quarta Mossa</u>: Scelgo quattro calici (ne escludo due diametralmente opposti tra loro). Risulta impossibile che tra i calici scelti non ve ne siano di rivolti verso il basso in quanto i calici esclusi sono diametralmente opposti e i calici verso il basso non sono diametralmente opposti. Restano quindi solo due possibilità:

- Ci sono due calici rivolti verso il basso, li giro verso l'alto (il gioco è risolto)
- Ci sono tre calici rivolti verso l'alto e uno verso il basso, in tal caso giro verso il basso un calice che non sia vicino al calice verso il basso e neppure diametralmente opposto. (il gioco continua)

(Se il gioco continua significa che ho tre calici rivolti verso l'alto separati tra loro da tre calici rivolti verso il basso)

<u>Quinta Mossa</u>: Scelgo un calice, se è rivolto verso l'alto giro il calice successivo, il calice precedente e il calice diametralmente opposto in modo di avere tutti i calici rivolti verso l'alto;

se invece fosse rivolto verso il basso lo giro verso l'alto insieme agli altri due calici che non gli sono vicini e neppure diametralmente opposti (il gioco è risolto)

3) Per quanto riguarda il problema dei 4 tumbler vorrei far notare che sono necessarie almeno sette mosse in quanto le combinazioni di tre numeri binari *(bicchiere dritto/bicchiere rovesciato)* sono 8, in una di queste 8 combinazioni i tre bicchieri sono girati dallo stesso lato del quarto, per cui occorrono almeno sette mosse per realizzare le restanti sette combinazioni possibili.

Ecco la mia strategia in sette mosse:

Prima mossa: Giro 2 tumbler diametralmente opposti

Seconda mossa: Giro 2 tumbler vicini tra loro

Terza mossa: Giro 2 tumbler diametralmente opposti

Quarta mossa: Giro un solo tumbler

Quinta mossa: Giro 2 tumbler diametralmente opposti

Sesta mossa: Giro 2 tumbler vicini tra loro

Settima mossa: Giro 2 tumbler diametralmente opposti

Di seguito dimostro che questa strategia permette sempre di risolvere il problema.

Ci sono tre stati iniziali possibili:

Stato iniziale A) Ho due tumbler diametralmente opposti dritti e gli altri due rovesciati.

Stato iniziale B) Ho due tumbler vicini tra loro dritti e gli altri due rovesciati.

Stato iniziale C) Il numero dei tumbler rovesciati è dispari.

A) Se sono nello stato iniziale A il problema si risolve subito dopo la prima mossa.

B) Se sono nello stato iniziale B dopo la prima mossa rimango nello stato B. Con la 2° mossa ci sono 2 casi possibili:

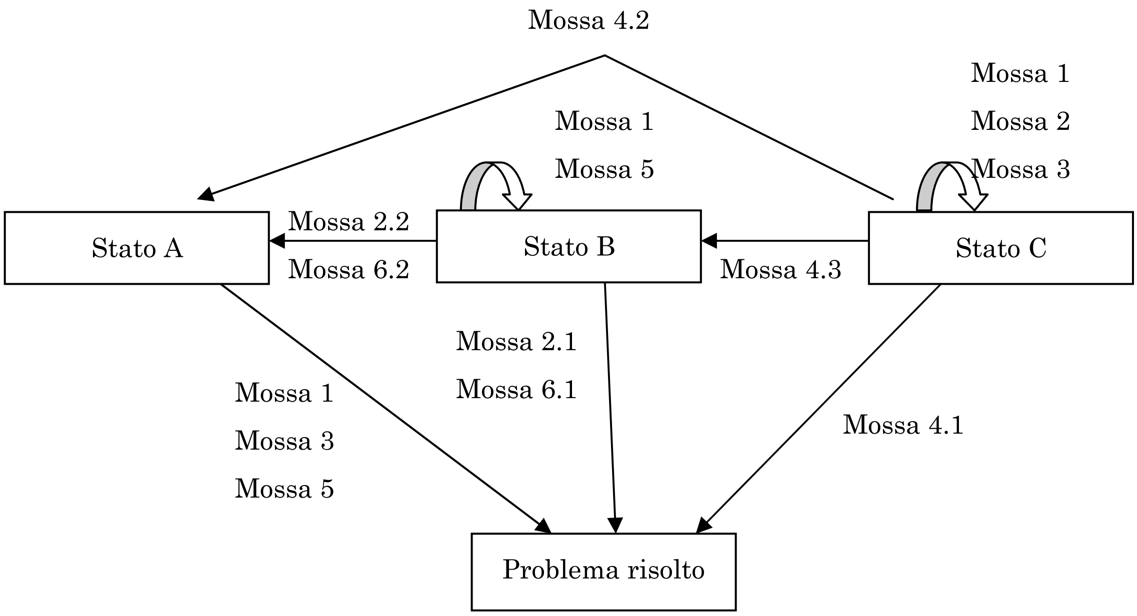
- Mossa 2.1) Giro 2 tumbler girati dalla stessa parte ed il problema è risolto con la seconda mossa.
- Mossa 2.2) Finisco nello stato A e con la terza mossa il problema è risolto.

C) Se sono nello stato iniziale C dopo le prime tre mosse sono ancora nello stato C, in quanto queste mosse girano sempre un numero pari di tumbler. Con la 4° mossa ci sono 3 casi possibili:

- Mossa 4.1) Il problema è risolto con la quarta mossa.
- Mossa 4.2) Finisco nello stato A
- Mossa 4.3) Finisco nello stato B

Se finisco nello stato A o nello stato B, (essendo le ultime tre mosse uguali alle prime tre mosse) sono certo che entro sette mosse il problema è risolto.

Il problema può essere descritto con il seguente grafo:.



Alla prossima!

5. Quick & Dirty

Qualche anno fa, ***Andrew Robertson*** ha detto di aver trovato un errore nella dimostrazione di Wiles dell'Ultimo Teorema di Fermat; sfortunatamente non era colpa di Wiles, ma del tipografo... Come sapete, Wiles ci ha messo 350 pagine (e un mucchio di tempo); secondo voi, perché non ha preso la strada qui sotto?

Teorema: l'equazione

$$x^n + y^n = z^n$$

non ha soluzioni intere positive per $n > 2$.

Dimostrazione: Supponiamo esista una soluzione: essendo $x \neq y$, possiamo supporre $x = y + a$ e $z = y + b$, con b intero positivo.

Consideriamo l'intero N tale che:

$$z^{n-1} = x^{n-1} + y^{n-1} + N.$$

Allora,

$$x^n + y^n = z^n = z\left(x^{n-1} + y^{n-1} + N\right).$$

Risolvendo in N otteniamo:

$$N = \frac{(y+a)^{n-1}(a-b) - by^{n-1}}{y+b} = \frac{F(y)}{y+b}.$$

Quindi, $y + b$ divide $F(y)$ e si ha

$$0 = F(-b) = (a-b)^n + (-b)^n$$
$$0 = (b-a)^n + b^n > 0$$

che è una contraddizione, e quindi il teorema è dimostrato.

6. Pagina 46

Utilizzando la formula per la somma di una progressione geometrica, si ha:

$$N = \frac{50^{1000} - 1}{50 - 1} = \frac{50^{1000} - 1}{49}.$$

Come ogni razionale, $\frac{1}{49}$ è un decimale periodico; attraverso una semplice ma noiosa divisione si ottiene:

$$\frac{1}{49} = 0.\overline{020408163265306122448979591836734693877551},$$

che esprimiamo in forma abbreviata come:

$$\frac{1}{49} = 0.\overline{P},$$

dove P esprime le 42 cifre scritte sopra.

Il multiplo di 42 più vicino a 1000 è $1008 = 24 \cdot 42$; quindi,

$$\frac{10^{1008}}{49} = 10^{1008} \cdot \frac{1}{49} = \underbrace{PP\ldots P}_{24 volte}$$

E, nello stesso modo,

$$M = \frac{10^{1008} - 1}{49} = 10^{1008} \cdot \frac{1}{49} - \frac{1}{49} = \underbrace{PP\ldots P}_{24 volte}$$

è un intero di 1008 cifre, formato da 24 gruppi ripetuti di 42 cifre ciascuno (si noti che M **non** è formato da 1008 cifre, ma solo da 1007, in quanto P inizia con zero).

Costruiamo ora la differenza tra N (il numero che cerchiamo) e M (quello ottenuto qui sopra):

$$N - M = \frac{5^{1000} \cdot 10^{1000} - 1}{49} - \frac{10^{1008} - 1}{49} = \frac{5^{1000} - 10^{8}}{49} \cdot 10^{1000}.$$

Siccome $N - M$ è un intero e siccome 10^{1000} e 49 sono primi tra loro, si ha che $5^{1000} - 10^{8}$ deve essere divisibile per 49. Quindi, il numero $x = \frac{5^{1000} - 10^{8}}{49}$ è un intero, e la differenza $N - M = 10^{1000} \cdot x$ termina con 1000 zeri. Ma allora le 1000 cifre finali di N coincidono con quelle di M, ossia sono:

$$q\underbrace{PP\ldots P}_{23 volte},$$

dove q è un gruppo di 34 cifre formato dalle ultime 34 cifre del numero P.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Rien ne va plus: Senza numero, che ce ne sono già troppi.

In realtà dell'argomento di questa volta ne abbiamo già parlato; quelli di voi interessati all'antiquariato possono andarsi a riprendere il PM pubblicato sul numero 36 (Gennaio 2002) di una Prestigiosa Rivista di Matematica Ricreativa; gli altri dovranno accontentarsi di un veloce e (a nostro insindacabile giudizio) noiosissimo riassunto.

Cominciamo con la definizione:

> Un ***Numero Surreale*** è una coppia di insiemi di Numeri Surreali precedentemente costruiti, definiti "Insieme Sinistro" e "Insieme Destro", sotto la condizione che nessun membro dell'Insieme Destro sia minore o uguale a un qualsiasi membro dell'Insieme Sinistro.

E, come dicemmo all'epoca, se venite a dirci che questo è chiaro vi tiriamo il Pietrone in testa.

Non avendo a disposizione assolutamente nulla, per costruire il primo Numero Surreale come due insiemi mettiamo quello che abbiamo: un paio di insiemi vuoti, per i quali è abbastanza evidente che nessun elemento di uno è minore o uguale di un qualsiasi elemento dell'altro; dovendo trovare un nome a questo aggeggio, vi risparmiamo l'incredibile sforzo di fantasia (e la dimostrazione) e lo attribuiamo noi:

$$\{\ |\ \} \equiv 0$$

...dove lo spazio vuoto, coerentemente, rappresenta l'insieme vuoto.

La tentazione a questo punto è di creare altri ***tre*** Numeri surreali: $\{0\,|\ \}$, $\{\ |\,0\}$ e $\{0\,|\,0\}$, ma se guardate bene vi accorgete che l'ultimo non rispetta la definizione: infatti, è uno ***Pseudonumero*** e, come vedremo prima o poi, sono proprio quelli che si comportano male i più interessanti.

Torniamo a quelli seri: si verifica, e ve lo risparmiamo, che

$$\begin{aligned}&\{0\,|\ \} \equiv 1;\\&\{\ |\,0\} \equiv -1.\end{aligned}$$

Continuando a lavorare con questi graziosi oggetti, si arriva alle conclusioni:

$$\begin{aligned}&\{0\,|\,1\} \equiv \frac{1}{2};\\&\{-1\,|\,0\} \equiv -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

e qui dobbiamo ammettere che, nell'anticaglia citata sopra, abbiamo fatto un'ammissione non dimostrata; infatti, tutto quello che sapevamo era che, con una grossa libertà di notazione, potevamo scrivere:

$$\begin{aligned}&0 < \{0\,|\,1\} < 1;\\&-1 < \{-1\,|\,0\} < 0,\end{aligned}$$

che non è esattamente quanto detto, visto che qualsiasi frazione propria potrebbe soddisfare la relazione; cercheremo di risolvere il problema in seguito.

Se cominciate a giocherellare con questi aggeggi, vi accorgete piuttosto alla svelta che, ad esempio,

$$\{\ |\ \} = \{-1\,|\,1\} \equiv 0;$$

Il motivo per cui una volta usiamo l'uguale e l'altra no è dovuto al fatto che i due Numeri Surreali evidentemente non sono uguali (dentro hanno cose diverse), anche se, tecnicamente, possiamo dire che sono due differenti ***rappresentazioni*** dello stesso numero. Insomma, potete scrivere i numeri "normali" in un mucchio di modi diversi: ad esempio[11],

$$\{-1,0,1\,|\ \} = \{0,1\,|\ \} = \{-1,1\,|\ \} = \{1\,|\ \} \equiv 2.$$

Un concetto piuttosto interessante, a questo punto, è chiedersi quale sia il ***Compleanno*** di un numero; la prima cosa che abbiamo fatto è stata creare 0, del quale quindi si dice che è ***nato il giorno zero***; con 0 abbiamo creato -1 e 1, che quindi sono ***nati il giorno uno***; possiamo quindi dire che i ***nati il giorno due*** sono -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 2 e avanti così.

Sempre per mantenere coerente questa terminologia, possiamo dire che -1 è ***più giovane*** di 0, mentre è ***più vecchio*** di 2.

Certo che scrivere tutti gli insiemi è scomodo... fortunatamente, esiste una ***Regola di Semplificazione per i Numeri Surreali***:

> In un Numero Surreale $\{X_S \mid X_D\} = x$, rimuovere tutti gli elementi di X_S tranne il maggiore e/o rimuovere tutti gli elementi di X_D tranne il minore non cambia il valore di x.

Toglietevi dalla faccia quell'aria contenta: se uno dei due insiemi è infinito, dovete portarvelo dietro tutto, visto che non è detto che abbiano un maggiore o un minore.

Posto che siate più interessati ai Compleanni, se fate il conto (e mettete in ordine, il che formalmente non è facile) i vari numeri, vi accorgete che:

> ogni giorno nascono due numeri alle estremità della successione del giorno precedente e ne nasce uno tra due elementi contigui della serie

Avevamo fatto un grazioso disegnino, all'epoca, per chiarire il concetto; ad ogni riga corrisponde un giorno (la prima è il giorno zero), e teniamo anche la battuta schifosa che avevamo fatto all'epoca:

							0							
			-1								1			
	-2				$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$				2	
-3		$-1\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		$1\frac{1}{2}$		3

Nascita di una N(umer)azione

E fin qui dovreste aver già letto tutto l'altra volta.

Certo che sarebbe comodo avere una funzione in grado di trasformaci un Reale in Surreale... Siccome quelli che hanno inventato questa roba non sono propriamente sani di testa, la funzione che genera i Surreali è stata intitolata a ***Dalì***: segue definizione.

[11] Per i raffinati, basti enunciare il concetto di *Classe di Equivalenza*.

$$\delta(x)=\begin{cases}\{\,|\,\} & \text{se } x=0,\\ \{\delta(x-1)\,|\,\} & \text{se } x \text{ e` intero e } x>0,\\ \{\,|\,\delta(x+1)\} & \text{se } x \text{ e` intero e } x<0,\\ \left\{\delta\left(\frac{j-1}{2^k}\right)\,|\,\delta\left(\frac{j+1}{2^k}\right)\right\} & \text{se } x=\frac{j}{2^k} \text{ irriducibile e } j,k \text{ interi con k} > 0\end{cases}$$

Profonde scuse alla Linotype per far stare ‘sta roba ben scritta. No, non ve la dimostriamo, ma se interessa chiedete.

“E cosa ci faccio, con ‘sta roba?” Tanto per cominciare, potreste farci delle addizioni:

> Si definisce ***somma*** di due insiemi l’insieme ottenuto sommando ogni elemento del primo insieme ad ogni elemento del secondo insieme.

Ossia, per fare un esempio (no, non manca la barra: sono insiemi, non Numeri Surreali),

$$\{10,20\}+\{3,5,8\}=\{13,15,18,23,25,28\}.$$

Adesso, anche se la cosa ha l’aria di un detto da Buddhismo Zen, ricordatevi che qualunque cosa facciate al Nulla resta Nulla; quindi, ***qualsiasi cosa sommata all’insieme vuoto dà l’insieme vuoto***. O, se preferite, $\{\ \}+n=\{\ \}$.

Da cui, non dovrebbe essere un problema capire la definizione (ricorsiva) di ***somma di Numeri Surreali***: se a e b sono due Numeri Surreali, si ha:

$$a+b=\{A_S+b, a+B_S \mid A_D+b, a+B_D\}.$$

e quello che ci salva (ossia quello che impedisce la ricorsione infinita) è proprio il fatto che sommare qualcosa all’insieme vuoto lascia l’insieme vuoto.

Se credete di non aver capito, provate a fare $0+0=0$, $1+1=2$ e $2+2=4$. O, se non vi fidate di noi, verificate che $\{0\,|\,1\}+\{0\,|\,1\}=1$, e quindi la roba citata poco sopra valeva effettivamente un mezzo.

Insomma (ma questi ve li dimostrate voi):

- $(S,+)$ è un Gruppo Abeliano
- La δ di Dalì è un omomorfismo tra $(R,+_r)$ e $(S,+_s)$

Se a qualcuno di voi viene in mente di estendere il concetto, auguri; qui ci limitiamo a fornirvi la definizione di ***moltiplicazione*** tra Numeri Surreali:

$$ab=\{A_Sb+aB_S-A_SB_S, A_Db+aB_D-A_DB_D \mid A_Sb+aB_D-A_SB_D, A_Db+aB_S-A_DB_S\}.$$

Meglio lasciarlo in pace, un mostro di questo genere. Non siamo neanche sicuri di averla scritta giusta.

Comunque, sono possibili ulteriori passi: grazie alla δ di Dalì, siamo riusciti a mappare qualunque intero ***Z*** sui Surreali; ma prima o poi, il tarlo che anche ***Z*** è un insieme comincia a rodervi il cervello. Allora, che numero rappresenta il Surreale $\{Z\,|\,\}$?

Buona domanda.

Tanto per cominciare, il numero “esiste” (almeno come Surreale): l’insieme di sinistra ha evidentemente un elemento maggiorante l’insieme di dsestra. Per quanto riguarda il valore, però, nasce qualche problema.

Infatti, dovremmo chiamarlo ∞, ma la cosa non è molto corretta; infatti, se togliete un finito dall'infinito ottenete sempre l'infinito, mentre qui *ottenete qualcosa di diverso;* indichiamo il valore con ω, per il momento:

$$\begin{aligned}\omega - 1 &= \{Z - 1 \mid \omega - 0\} \\ &= \{Z \mid \omega\} \\ \omega + 1 &= \{Z + 1, \omega + 0 \mid\} \\ &= \{\omega \mid \}\end{aligned}$$

ossia, siccome possiamo far "cadere" ***Z***, questo significa che potete calcolare il valore di "infinito più uno" e di "infinito meno uno"... Insomma, qui (e a questo punto il titolo dovrebbe diventare chiaro) ci sono un *mucchio di numeri in più*... E se prendete l'inverso (sorvoliamo sul concetto di divisione, ma i masochisti non dovrebbero avere problemi a ricavarlo), vi accorgete che esistono anche molti infinitesimi.

Non solo, ma se andate a riprendervi la Funzione di Dalí, vi accorgete che un mucchio di numeri in realtà non sono definiti (insomma, ne abbiamo di nuovi, ma ne abbiamo lasciati per strada un mucchio di vecchi); infatti, quando cercavamo di definire dei numeri espressi come frazioni, esprimevamo solo le frazioni *diadiche*, ossia quelle che avevano un numeratore intero e un denominatore pari a una potenza di 2 con esponente intero; già, ma tutti gli altri? Si può vedere che, ad esempio:

$$\begin{cases} T_S = \dfrac{j}{2^k} : 3j > 2^k; \\ T_D = \dfrac{j}{2^k} : 3j < 2^k; \end{cases} \Rightarrow \delta\left(\frac{1}{3}\right) = \{T_S \mid T_D\}.$$

La cosa è dimostrabile, ma ve la risparmiamo. Comunque, giocherellando con gli insiemi mostrati, potete ottenere *qualunque* numero, e anche qualcuno in più; per gli amanti del brivido, ci limitiamo ad indicare che:

$$\pi = \left\{\frac{3}{1}, \frac{25}{8}, \frac{201}{64}, \ldots \mid \frac{13}{4}, \frac{101}{32}, \frac{3217}{1024}, \ldots\right\};$$

scusate, abbiamo un attimo di commozione[12]... Passato.

Attenzione comunque che anche qui possono succedere dei guai; anche una cosa innocua come la regola che un nuovo Numero Surreale debba essere formato da numeri *precedentemente creati* può, se ignorata, causare dei guai notevoli; se, ad esempio, S è l'insieme di tutti i Numeri Surreali (creati e non creati), il numero $m = \{S \mid \}$ è evidentemente ben costruito, ma il fatto che m medesimo sia un numero surreale e quindi *appartenga all'insieme* S fa sì che non sia più applicabile la legge di induzione, che è quello che tiene in piedi praticamente tutte le dimostrazioni; diventa anche impossibile dimostrare che $m \le m$... Non per nulla i numeri di questo tipo sono indicati come *Numeri Mostruosi*.

Succedono cose strane (anche se molto più tollerabili) se invece facciamo cadere la condizione di essere *ben formato*; prendiamo ad esempio il numero $\{5 \mid 3\}$, palesemente non ben formato, e confrontiamolo con un dato x:

[12] Su come ricavare queste frazioni, *abbiamo scritto il primo PM!*

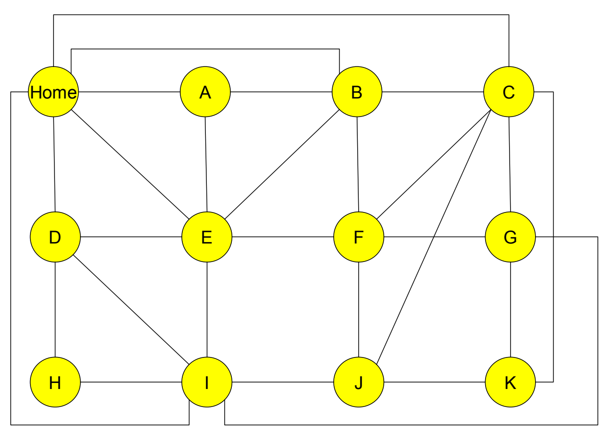
$$x < 3 \Rightarrow x < \{5 \mid 3\};$$
$$x > 5 \Rightarrow \{5 \mid 3\} < x;$$
$$3 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \sim\leq \{5 \mid 3\} \wedge \{5 \mid 3\} \sim\leq x$$

Insomma, se non è chiaro, quando x è compreso tra 3 e 5, $\{3 \mid 5\}$ non è nè minore, nè maggiore, nè uguale a x...

"Interessante, ma questo mese non ce lo dai un giochino?" Pronti!

NimLand

Le città A-K sono connesse tra di loro dalle strade indicate (quello che sembra un incrocio è, in realtà, un cavalcavia); ci sono tre macchine parcheggiate in ***F***, ***J*** e ***K***. Ogni giocatore, al suo turno, sceglie una macchina parcheggiata in una città e la sposta in una città vicina collegata da una strada e con un valore letterale minore ("Home" ha il valore minore di tutti). In una città possono esserci tante macchine quante voltete; vince il giocatore che porta l'ultima macchina in "Home". Ci si chiede se il primo giocatore ha un qualche tipo di vantaggio.



Problemi di parcheggio...

Non chiedete a Rudy: lui, con i parcheggi è un inetto.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms