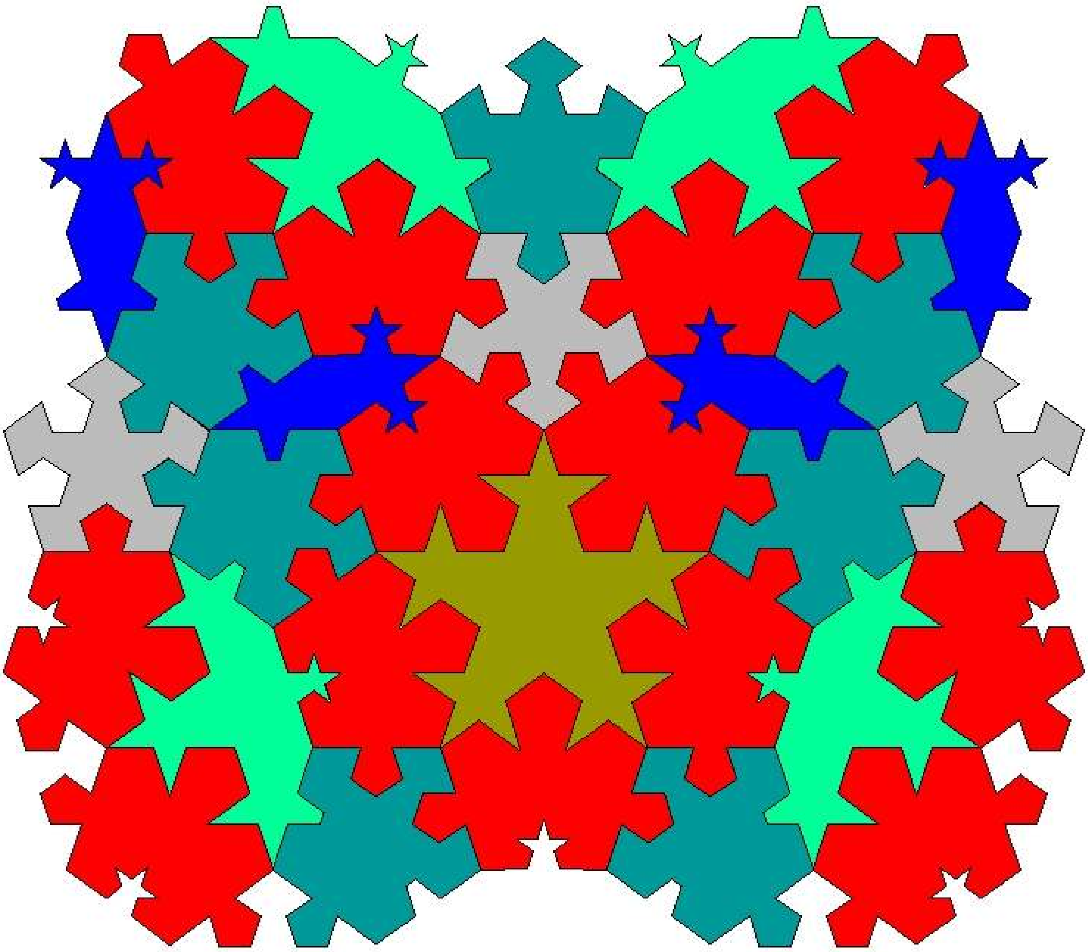
Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 095 - Dicembre 2006 - Anno Ottavo



1. Vite Parallele ... 3

2. Problemi ... 13

2.1 Tre coincidenze ... 13
2.2 L'importante è avere una scusa ... 14

3. Bungee Jumpers ... 14

4. Soluzioni e Note ... 15

4.1 [094] ... 15
4.1.1 Ai confini della matematica: casa di Rudy ... 15
4.1.2 Oggi cucina Rudy! ... 17

5. Quick & Dirty ... 23

6. Pagina 46 ... 24

7. Paraphernalia Mathematica ... 27

7.1 Un compito che non avete fatto ... 27

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 094 ha diffuso 1202 copie e il 29/11/2006 per Google eravamo in 29500 pagine.

Sarà per i colori, per la stellina centrale o per i fiocchi di neve grigi, ma tra le varie *tassellature aperiodiche* di ***Roger Penrose***, questa per noi ha sempre avuto un'aria piuttosto natalizia...

1. Vite Parallele

La cultura è uno strumento usato dai professori per creare professori i quali, quando verrà il loro turno, creeranno professori.

(Simone Weil)

Tutto quello che a scuola viene definito "ovvio" diventa sempre meno ovvio quando si comincia ad indagare l'universo. Ad esempio, non ci sono solidi nell'universo: non c'è neppure l'idea d'una figura geometrica solida. Non ci sono "continuum" assoluti. Non ci sono superfici. Non ci sono linee rette.

(R. Buckminster Fuller)

Una buona maniera per spiegare a qualcuno cosa si intenda e come si possa realizzare una metrica è seguire attentamente i Giochi Olimpici. A dire il vero, non è strettamente necessario che i giochi siano davvero "olimpici": è sufficiente che siano molti, diversi, e variegati nell'attribuzione dei punteggi. Da questo punto di vista, le Olimpiadi sono usualmente una splendida occasione, perché vi si celebrano quasi tutti gli sport possibili e immaginabili, con i relativi (e spesso astrusi) sistemi di punteggio e di valutazione. Pertanto, a patto che l'ipotetico spettatore delle Olimpiadi sia sufficientemente poco sportivo (in modo da essere equamente attratto da quasi tutti gli eventi e goderne l'esecuzione senza pregiudizi o eccessiva partecipazione emotiva), potrebbe trarre un discreto intrattenimento nel tentativo di comprendere perché un determinato sport abbia quel ben preciso sistema di punteggio piuttosto che un altro. Quasi subito il nostro spettatore noterà inevitabilmente che esistono delle vere e proprie "categorie" di criteri e valutazioni, ragionevolmente diverse tra loro anche se orientate sempre al medesimo obiettivo, che è l'attribuzione di una terna di medaglie. Non avendo l'intenzione di analizzare nel dettaglio i diversi sistemi di punteggio[1], ci limiteremo a mettere in evidenza cosa caratterizzi le categorie sopra menzionate.

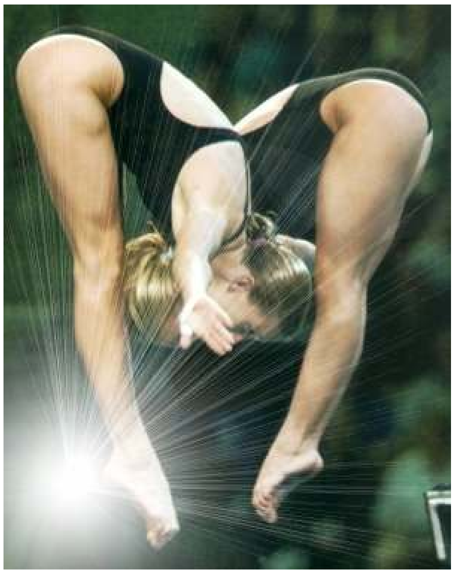
A voler semplificare per quanto possibile, ci si potrebbe ritrovare con tre sole diverse tipologie di base: nella prima potremmo far rientrare gli sport che chiameremo "a bassa interferenza arbitrale", nella seconda quelli che hanno invece un'interferenza "media", e sistemeremo infine nella terza categoria, che potremmo chiamare ad "alta interferenza arbitrale", quelli che sono fortemente influenzati dalla figura dell'arbitro/giudice.

È tassonomia del tutto ingenua (anzi, se ci passate la battuta, del tutto arbitraria), ma può risultare utile per una primissima scrematura classificatoria. Come esempi di sport "a bassa interferenza" intendiamo quelli per i quali è possibile comprendere chi sia il vincitore ad uno spettatore del tutto digiuno di eventi sportivi. È immaginabile infatti che anche uno spettatore occasionale e del tutto ignaro della storia dello sport, se vede una mezza dozzina di ragazzoni in mutande che corrono disperatamente verso un traguardo, sia verosimilmente in grado di comprendere che tutti vogliono arrivare prima degli altri, e che colui che ci riesce vince la gara. Lo stesso accade per i lanci di oggetti (pesi, martelli, dischi, giavellotti), per i quali è abbastanza intuitivo capire che più lontano si lancia l'oggetto meglio è; nonché per i salti (in alto, in lungo, tripli), perché alla fin fine non sono altro che "lanci di sé stessi". In genere, l'atletica leggera, forse proprio perché essenzialmente è una collezione di sport le cui origini si perdono nella notte dei tempi, è quasi interamente composta da sport "a bassa interferenza". Bassa non significa "nulla", comunque: la presenza degli arbitri è sempre necessaria, e si fa garante della corretta esecuzione della performance; ma il senso ultimo è che questi arbitri intervengono solo nei casi in cui è necessaria un'azione correttiva: in altri termini, svolgono una funzione "esterna" al gioco, essenziale in termini di controllo ma del tutto invisibile qualora la gara

[1] Anche per la buona ragione che abbiamo già fatto qualcosa del genere in occasione del compleanno di Harald Bohr ("Una vita da Mediano" – RM63, Aprile 2004), e non ci pare ancora giunto il momento di riciclare la cosa.

si svolga nei canoni della normalità. Questo non vale proprio per tutti gli sport dell'atletica (si pensi alla complicazione dei punteggi del decathlon, o anche solo alla corretta esecuzione dei passi dei marciatori, che richiede invece un controllo arbitrale continuo e attento), ma gran parte di essi possono serenamente essere catalogati sotto l'etichetta "bassa interferenza arbitrale".

Viceversa, la gran parte dei giochi di squadra rientra nella categoria di mezzo, a "media interferenza". Affermare una cosa del genere in Italia e in pieno 2006 - quando tutto il paese, volente o nolente, tifoso o meno che fosse, amante del calcio o desideroso di bruciare ogni stadio, è stato costretto dai mass media a sopportare tutta la lunga e penosissima storia della corruzione arbitrale, amministrativa, dirigenziale e chissà cos'altro ancora - può sembrare un mero eufemismo. Eppure il senso dell'affermazione è puramente operativo: esistono molti sport in cui il meccanismo della competizione deve essere costantemente salvaguardato e garantito da una figura investita da poteri più o meno assoluti, che non a caso è talvolta chiamato "direttore di gara". Ma, nonostante questo, in questa tipologia di gare il risultato dell'evento sportivo è comunque dato da accadimenti oggettivi: una sfera di plastica o cuoio che interseca una certa sezione di piano (delimitata da tre segmenti lignei alternativamente per perpendicolari) ortogonale al piano di gioco, ad esempio; oppure da una sfera (un po' più grande della precedente) che deve ricadere attraverso una piccola area circolare parallela al piano di gioco (di solito evidenziata da un cerchio di ferro e impreziosita da un piccolo tronco di cono rovesciato in corde di canapa); o dal numero di corse completate lungo un breve percorso di forma quadrata dopo aver colpito una piccola sfera dura con una mazza ancor più dura; o anche solo evitando che l'avversario riesca a ribattere per l'ennesima volta una pallina gialla oltre una rete alta quasi un metro che divide in due parti uguali un campo rettangolare d'erba, terra o cemento; e così via. Tutti eventi "osservabili" – e in genere provocati volontariamente – che però devono sempre essere "ratificati" da un direttore di gara. Il quale, peraltro, non ratifica solo il momento cruciale dell'attribuzione dei punti, ma proprio ogni singola azione di gioco; ogni azione è "regolare" a meno che lui non la blocchi all'istante, segnalandola ai giocatori in modo opportuno e – usualmente – interrompendo la gara.



Se in tali eventi non è proprio possibile "non notare" la presenza arbitrale, ciò non di meno esiste tutta una ulteriore classe di attività sportive nelle quali tali presenze sono ancora più invasive, quantomeno ai fini del risultato finale. Sono quelle discipline il cui esito è deciso non da accadimenti oggettivi, ma da un giudizio erogato da persone esperte. Uno spettatore che per la prima volta assiste ad una gara di tuffi, di ginnastica o di pattinaggio, riuscirà forse a notare delle differenze di abilità tra i primi classificati e gli ultimi, ma gli risulterà certo impossibile distinguere le differenze essenziali che alla fine determineranno l'attribuzione delle medaglie. In casi come questi, insomma, non è "naturalmente evidente" neppure la distinzione fondamentale tra vittoria o sconfitta, essendo anche queste delegate al buon senso e all'esperienza dei giudici. Ed è in fondo curioso che, per buona parte delle persone, queste "competizioni giudicate" siano proprio (e proprio per questa ragione) considerate le meno sportive, quasi che l'intervento di una autorità esterna pregiudichi la naturalezza della competizione. È del resto indubbio che uno spettatore si lascia coinvolgere in maniera più immediata e diretta da una gara di facile lettura: e, del resto, leggere con reale cognizione di causa l'esecuzione di un "carpiato con doppio avvitamento" del tuffatore o di un "triplo Axel" del pattinatore è cosa davvero riservata a pochi esperti.

Esperti che spesso sbagliano, comunque: o, peggio ancora, non concordano tra di loro. Senza cadere nella facile illusione che gli altri sport siano poi molto più oggettivi (specie in epoca di doping galoppante), è comunque indubbio che periodicamente gli estimatori delle gare fortemente soggette al giudizio soggettivo invochino l'applicazione di criteri più oggettivi. Questo, in molti casi, è già da tempo in corso di realizzazione: esistono parametri e criteri meccanici che, correttamente applicati, riducono la valutazione soggettiva del singolo giudice ad elemento quasi trascurabile. Per contro, i criteri introdotti a quest'uopo sono tanti e tanto specialistici che di solito risultano ancora più oscuri al neofita e allo spettatore occasionale di quanto potesse esserlo un banale mal di pancia arbitrale.

La cosa più curiosa è però che questo sistema di valutazione "soggettiva", per quanto spesso biasimato nelle attività sportive, rimane per forza (e forse per fortuna), il più applicato al di fuori del contesto sportivo. La necessità di valutare ed essere valutati accompagna moltissime attività umane; concorsi, esami, colloqui, quasi ogni attività di misura (e quindi, per definizione, attività metrica) si basa ancora essenzialmente su un lavoro, una presentazione o un'esibizione da parte del candidato che passa sotto il severo esame valutativo di un giudice. Anche nella vita di tutti i giorni, laddove questi tipi di valutazioni sono frequenti, si cerca talvolta ad "oggettivizzare" il criterio di giudizio, ma i tentativi sono ancora relativamente poco frequenti e di attuazione complessa. E in qualche modo può essere indicativo che nello sport la ricerca della "valutazione quanto più possibile oggettiva" sia genericamente auspicata da tutti, quasi ci fosse una sotterranea ma rigogliosa sfiducia nell'obiettività dei giudici, mentre invece nei casi di normali giudizi quotidiani ci si aspetta – almeno quando si è nel ruolo degli esaminati – che il giudice-arbitro tenga conto di tutta una serie di occorrenze accessorie e attenuanti o giustificative. Si chiede al vigile urbano di considerare l'eccezionalità dell'evento – mai avvenuto in precedenza – dell'auto sbadatamente lasciata in divieto di sosta; al professore di tenere nel giusto conto la terrificante emergenza scaturita da una ipotetica perdita del tubo di scarico della lavatrice (che ha irrimediabilmente bagnato la cartella contenente i compiti già splendidamente eseguiti), e così via.

Amenità a parte, i problemi connessi ai criteri di valutazione soggettiva sono reali. L'istituzione che accoglie i cittadini italiani dalla tenera età di sei anni fino alla maggiore età ed oltre è totalmente organizzata su criteri di valutazione soggettivi, esercitati dal corpo docente in merito al rendimento del corpo discente. È pur vero che la "valutazione" è solo una piccola parte (e ben lungi dall'essere la più importante) delle funzioni che svolge la scuola: ben più importante dei voti in registro o pagella dovrebbe essere (e quasi sempre è) lo scambio di informazioni, di giudizi e di conoscenze che solo alla fine, per un vizio un po' infantile della competitiva razza umana, finisce con il coagularsi in un voto o in un giudizio sintetico attribuito allo studente. Ciò non di meno i ragazzi sono solitamente del tutto concentrati proprio nel climax dell'estrazione violenta d'un voto dalla loro fatica di studio, e i loro genitori sono quasi sempre ancor più ferocemente ossessionati solo sul piccolo numero incasellato nel quadretto del registro. Per quanto possa risultare poco gratificante dal punto di vista meramente culturale, alla fine bisogna sempre tener presente che fa molta meno breccia nel cuore del discepolo la constatazione professorale "Molto bene, Scarafiotti, mi sembra che tu abbia raggiunto una buona visione di base delle ragioni che hanno portato alla crisi degli Imperi Centrali ad inizio secolo" di un banale e sintetico "Bene, ti do sette e mezzo".

E allora il ciclo si chiude, e si torna – dopo essere passati per tutto lo sviluppo dialettico sulla funzione accessoria e non fondamentale dei voti e dei giudizi – al brutale scannamento di medie aritmetiche, recuperi e rimedi di fine quadrimestre, di "perché a lui sei e mezzo e a me solo cinque più", e così via. E all'incontrovertibile fatto che, purtroppo, giudicare qualcuno è davvero dannatamente difficile.

Nel discutere delle difficoltà nascoste nelle traduzioni[2], ci si è trovati, qualche tempo fa, a ricordare che il famosissimo proverbio latino "Verba volant, scripta manent" ha subito una vera e propria migrazione di significato. In questo caso non è tanto la traduzione a celare il trabocchetto, quanto la stessa maniera di intendere i valori culturali. "*Le parole dette volano via, le parole scritte rimangono*"; è assai difficile per noi, figli del ventesimo secolo e adoratori della carta e dell'inchiostro, non leggere l'esortazione dell'antico precettore romano come un monito a tenere nel giusto e importante conto le cose scritte, rispetto alla caducità delle parole presto dette e subito dimenticate. Difficile separare quel proverbio dal superbo detto d'Orazio: "*Exegi monumentum aere perennius*"[3], che in qualche modo ribadisce di nuovo la supremazia delle opere scritte sulla caducità della vita quotidiana. Però, non di meno, è opportuno ricordare che il significato originario era esattamente complementare, anzi proprio opposto, a quello che gli si attribuisce oggi. Certo, occorre sciogliere un po' i lacciuoli che inevitabilmente ci tengono ancorati ai nostri comandamenti culturali, fare esercizio di immaginazione e traslazione, ma una volta che ci si riesce lo sforzo può essere ripagato. In fondo, non è difficile: basta ricordare che durante i fasti della Repubblica e del primo Impero di Roma non è che gli scritti fossero poi così diffusi e alla portata di tutti: ogni testo era raro, costoso, prezioso addirittura. I colti (e non tutti lo erano, neppure fra i patrizi), certo gioivano nel tenere piene le loro biblioteche, ma leggere le testimonianze scritte era pur sempre un lusso ben poco frequentato. Al contrario, Roma è stata la patria del diritto, dei grandi oratori, delle orazioni che muovono e commuovono il popolo ed il senato. Non c'è uomo di successo che possa permettersi di non saper parlare in pubblico e muovere gli animi degli ascoltatori alla commozione: i politici di fronte al Senato, gli avvocati nel foro, i generali mentre arringano le truppe; e poi i tribuni della plebe, i sobillatori aristocratici, tutti. Tutti devono saper parlare, e parlare bene.

Cosa aspettarsi allora, da un buon precettore romano? Cosa deve inculcare nelle giovani teste dei discepoli, di cosa li deve convincere? Ma è ovvio: "Scrivete, *pueri*, scrivete, certo: ma ricordatevi che il miglior destino possibile di quel che scrivete è comunque solamente l'immobile riposo del vostro lavoro in una polverosa teca di biblioteca. La pagina scritta è lenta, ferma quasi: se ne rimane protetta e sicura, non se ne va incontro al mondo. Ma una bella orazione scandita con stentorea voce… ah, che differenza! Una frase ben detta di fronte a cento orecchie scalderà i cuori e convincerà l'uditorio, e istantaneamente si riprodurrà: verrà sentita, catturata, riprodotta. In pochi istanti correrà, volerà di bocca in bocca, trascinando con sé l'emozione che sa accendere e anche il nome dell'oratore che l'ha generata. Le parole volano, volano veloci, figli miei, non rimangono ferme ad ammuffire sulle pergamene. Perché verba volant, scripta manent".

La professoressa di latino d'un liceo contemporaneo, invece, deve raccontare una storia diversa, da quando le parole scritte hanno perpetrato la loro rivincita sui volatili dibattiti orali: paradossalmente, uno studente romano che all'antico precettore desse la spiegazione attuale del proverbio dovrebbe essere punito con un brutto voto, così come il nostro studentello della professoressa di liceo dovrebbe portare a casa un'insufficienza se riproponesse, come significato *attuale*[4] del proverbio, quello da noi messo in bocca all'antico maestro latino.

[2] La discussione, nata durante l'ultimo CdR, è stata cominciata da Alice facendo notare che l'inglese "It makes sense" è giudizio positivo e razionale ("È cosa sensata…"), anche se ad un inesperto italico che cadesse nella tentazione della traduzione letterale potrebbe fare l'effetto opposto ("Fa senso", nel significato frequentemente usato di "Fa schifo"). Poi il GC ha tirato fuori questa rivelazione della mutazione del significato del noto proverbio. Insomma, se cercate la fonte della notizia, devo utilizzare il classico riferimento: "*[2] Rudy d'Alembert, comunicazione personale*", e tanto basti. E se invece non vi basta, increduli che non siete altro, fate un giro su un motore di ricerca, a cominciare da Wikipedia.

[3] "*Ho eretto un monumento più duraturo del bronzo*", riferendosi al fatto che le sue Odi vivranno certo assai più a lungo di qualsiasi bronzeo (e muto) testimone. (Orazio, Odi, III, 30,1)

[4] Inutile dire che farebbe invece un figurone se, dopo aver mostrato di aver capito l'interpretazione corrente data al proverbio, si esibisse nell'excursus storico mostrando che anche i proverbi cambiano col tempo.

La lunga digressione nell'aneddotica antica ha il solo scopo di mostrare come sia oggettivamente complesso per una istituzione – e la scuola è "istituzione" quasi per definizione – rendere il giusto merito ai geni rivoluzionari e visionari. La prudenza e la cautela sono in qualche misura connaturate all'istruzione primaria e ufficiale, non fosse altro per la buona ragione che qualsiasi "nuova idea" deve come minimo superare l'esame del tempo, prima di essere spacciata alle giovani menti discenti come verbo rivelato. Non si può certo pretendere da un professore di liceo del 1920 che illustri i principi della Teoria della Relatività ai suoi scolari; e questo non tanto perché a quel tempo è improbabile che il professore abbia gli strumenti e le conoscenze necessarie per padroneggiare egli stesso le teorie einsteniane, quanto perché è opportuno che una rivoluzione scientifica[5] superi lo stadio di rivoluzione prima di essere insegnata nelle scuole medie. Certo è ben diverso il discorso per quanto concerne gli istituti universitari, che non a caso sono le sedi privilegiate della ricerca scientifica; in queste sedi è invece auspicabile, se non semplicemente obbligatorio, che le nuove teorie vengano esaminate, messe alla prova, discusse: per quanto complesso e costoso ciò possa essere, la ricerca rimane l'unico serio "investimento di verità a lungo termine", ed è per questa ragione che è religiosamente sostenuta, protetta e salvaguardata da ogni governo, a prescindere dal colore politico della maggioranza parlamentare[6]. Ma per il licei il discorso è necessariamente diverso. Ed è forse per questa ragione che uno dei licei più prestigiosi e famosi del mondo si è trovato talvolta quasi inadeguato ad ospitare alcuni dei suoi alunni più geniali.

Il liceo in questione è il "Louis-le-Grand": e per quanto sia stato fondato nel 1563, potete ancora facilmente ritrovarlo (e iscrivervi, se siete nell'età giusta per farlo) al 123 di Rue Saint Jacques, nel cuore di Parigi. Si trova nel Quartiere Latino, lo stesso della Sorbona e del Collège de France, e prende il nome dal Re Sole (è insomma il XIV il Luigi "le-grand" che lo caratterizza). È scuola dalla storia assai lunga, complicata e prestigiosa: uno dei suoi muri interni è splendidamente istoriato con meridiane di ogni tipo, e gli gnomoni e gli analemmi riescono a raccontare a prima vista l'antico prestigio della scuola. Prima d'essere Liceo fu noto proprio come "Collége Louis-le-Grand", e anche se il suo nome deriva dal più celebre sovrano assoluto della storia, ciò non di meno è stato definito anche "la scuola della Rivoluzione Francese", visto che tra i suoi allievi si ricordano anche – e bastino un paio di nomi per tutti – Louis Saint Just e Maximilien Robespierre. Ciò non di meno, le sue origini sono regolate dai Gesuiti, che lo fondarono come loro collegio nel bel mezzo del sedicesimo secolo: e furono tanti e tali i francesi famosi a calpestare i pavimenti delle sue aule che non è certo possibile ridurlo ai minimi termini etichettandolo come emanazione di una o di un'altra parte politica. È così intrecciata la storia del Louis-le-Grand con la storia di Parigi e della Francia, che il suo motto è probabilmente ben poco modesto, ma certo molto evocativo: "*On n'entre pas à*

[5] E su come si sviluppino e si strutturino le rivoluzioni scientifiche ha già detto tutto Kuhn. (Thomas S. Kuhn, "*La struttura delle rivoluzioni scientifiche*", Einaudi Biblioteca, Euro 19,00). Ma Karl Popper la pensava diversamente, e lasciamo al lettore piena libertà di scelta dell'epistemologo preferito.

[6] Abbiamo notato che le iscrizioni e il gradimento a RM sembrano alzarsi quando i lettori hanno la possibilità di riprenderci mostrandoci che siamo caduti in errore in qualche parte dei testi che scriviamo. Dopo questa frase, ci attendiamo un vertiginoso incremento delle mail di protesta e delle iscrizioni, adesso.

Louis-le-Grand pour son nom, mais y passer peut contribuer à s'en faire un"[7]; e l'intenzione è forse quella di ricordare che al liceo si può accedere solo per merito e non per diritto di nascita o ricchezza. Non possiamo certo garantire che il criterio meritocratico sia sempre stato religiosamente rispettato, ma di certo non sono pochi gli allievi del liceo divenuti poi celebri. E non solo tra i francesi: per tradizione, almeno un decimo delle iscrizioni è riservata agli stranieri. Elencare alcuni dei celebri diplomati del liceo rischia di trasformare quest'articolo in una brochure pubblicitaria, ma ormai è quasi inevitabile indulgere alla lista. Tagliando di molto l'elenco proposto dal sito del liceo troviamo, tra i letterati: Charles Baudelaire, Cyrano de Bergerac, Léon Daudet, Diderot, Théophile Gautier, Victor Hugo, Molière, il marchese de Sade, Sartre, Voltaire. Tra gli artisti: Degas, Delacroix, Géricault, Mélies, René Clair. Per i politici e gli uomini di stato : re Milan di Serbia, Oscar di Svezia, Nicola del Montenegro, Raymond Poincaré[8], Georges Pompidou, Valéry Giscard d'Estaing, Jacques Chirac. E si potrebbe continuare quasi all'infinito, passando dal generale Lafayette e dal signor Citroen. Insomma, una scuola tutt'altro che anonima. E, abbastanza curiosamente, pur essendo un liceo sostanzialmente a vocazione letteraria (più o meno quello che – certo impropriamente – chiameremmo "liceo-ginnasio", se fosse italiano), ha una sua lusinghiera tradizione scientifica. In parte, questo può discendere dal fatto che è proprio il Louis-le-Grand a "generare", in qualche modo, la celeberrima *Ecole Normale Superiore* di Francia: la fondazione rientra nell'ambito di quella che venne chiamata "guerra contro l'università", che il Collége intraprese fin dalla sua fondazione (il Louis-le-Grand si proponeva come "alternativo", e non propedeutico, alla Reale Università di Francia).

Fatto sta che la Normale di Parigi per più di ottant'anni è stata di fatto "ospitata" dal Louis-le-Grand. Ma "Normale" non è necessariamente sinonimo di "scientifico", e questa figliolanza potrebbe non bastare a dare lustro matematico al Liceo. Quel che certo basta, però, è l'elenco dei matematici che sono entrati ed usciti da quelle porte: a cominciare dalla Marchesa di Chatelet, prima traduttrice di Newton, passando per il già citato Voltaire, dilettante dei numeri, si giunge a nomi ben più squisitamente matematici: Bouquet, Darboux, Le Verrier, Hadamard, Borel, Lebesgue, già bastano ad incutere rispetto; ma si potrebbe pensare che si tratti di glorie passate e non più rinnovellate. È allora d'obbligo ricordare tra i diplomati del liceo anche ragazzini come Pierre Louis Lion, Jean Christophe Yoccoz e Laurent Lafforgue[9] ; e se vi questi nomi vi suonano nuovi, sappiate che i primi due si sono accaparrati la Medaglia Fields nel 1994, e il terzo ha ripetuto l'impresa nel 2002.

Pierre-Louis Lion — Jean-Christophe Yoccoz — Laurent Lafforgue

Resta però il fatto che dal già lungo elenco dei matematici che hanno frequentato il Louis-le-Grand restano ancora fuori i due nomi più famosi. Del primo, gloria di Francia, della matematica e del giovanile romanticismo, abbiamo parlato a suo tempo: ci riferiamo a Evariste Galois[10], che proprio al Louis-le-Grand mostrò la sua grandezza e irrequietezza; del secondo, invece, abbiamo intenzione di parlare in questo numero. Ad accomunare i

7 Che significa, più o meno: *"Non si entra al Louis-le-Grand per il proprio nome, ma entrarci può contribuire a farsene uno"*.

8 Raymond, abbiamo detto, non Henri. Per questo motivo tale rinomato cognome si trova nell'elenco degli uomini politici e non in quello dei matematici.

9 Per quel che può contare, quasi tutti e tre sono più giovani di quasi tutti e tre i redattori di RM. E se quest'affermazione vi sembra un po' fumosa, è solo perché siamo permalosissimi, quando si parla di età.

10 Il suo compleanno si trova in RM69, Ottobre 2004: "*Group Fiction*".

due abbiamo già diversi elementi: la matematica, la nazione, la città, la scuola, e l'epoca[11], tanto per cominciare. Ma è probabile che, con buona pace del prestigiosissimo liceo parigino, ad accomunarli ancora di più fossero i cattivi rapporti avuti con quella scuola che entrambi frequentarono con molta fatica e scarso rendimento.

Quando Galois è ancora un ragazzino, il giorno della vigilia di Natale del 1822, nasce a Dieuze, in Lorena, Charles Hermite. Figlio d'un ingegnere minerario che in breve cambiò professione dandosi al commercio, Charles era il timido sesto di sette fratelli. A caratterizzarlo fin dalla nascita, e forse buona causa della sua timidezza e bontà d'animo, fu una zoppia al piede destro che lo faceva muovere con difficoltà. Era già evidente, specie all'alba del diciannovesimo secolo, che questo avrebbe complicato la carriera del piccolo Hermite, limitando di molto le scelte professionali e in special modo impedendo quella militare, che era una delle più frequenti in quel guerresco periodo. Dopo il primo periodo di istruzione fornito direttamente dai genitori e un breve soggiorno al Collége della città di Nancy, dove si era trasferita la famiglia, nel 1840 Charles si ritrova giovane diciottenne a varcare le porte del celebre Louis-le-Grand. Qui il parallelismo tra i due matematici comincia a farsi più evidente, anche perché in fondo sono passati solo quindici anni da quando Evariste Galois varcò per la prima volta lo stesso portone. Come Galois, anche Charles mal sopportava le lezioni di retorica che erano invece tenute in altissima considerazione al liceo, ma a differenza del suo predecessore, dopo un anno di indigesta sopportazione, riuscì a farsele piacere abbastanza da ottenere un voto decente in materia. Come Galois, mostrò fin dall'inizio una straordinaria predisposizione alla matematica, decisamente superiore a quella degli insegnanti che dovevano valutarlo; ma proprio come Galois, aveva dei grossissimi problemi a dimostrare la cosa ai suoi stessi esaminatori. Ma è forse prematuro giungere subito alla somiglianza cruciale tra i due; prima occorre stupirsi un po' del fatto che entrambi trovarono decisamente troppo elementare la matematica insegnata al liceo, e passavano per questo lunghe ore in biblioteca sulle opere dei grandi del passato, perché entrambi preferivano leggere direttamente le opere originali piuttosto che i manuali che si proponevano di divulgarle: se Laplace accompagnò Galois, Hermite si gettò soprattutto su quanto scritto da Lagrange. Ma queste, in fondo, sono parallelismi in qualche maniera prevedibili: cosa deve fare, in fondo, un giovane e geniale studente appassionato di matematica se non trova nessuno, tra compagni e insegnanti, con i quali discutere delle cose che gli interessano? Leggere i libri dei maestri del passato, ovviamente.

Ma ci sono coincidenze più eclatanti: e una di questa coincidenza ha un nome e un cognome. Si tratta di Louis-Paul-Emile Richard, professore di matematica; fu l'unico a riconoscere il genio di Galois, quando il giovane e ribelle Evariste non perdeva occasione di litigare con compagni e professori; e fu il solo a cercare di indirizzare il giovane esclusivamente allo studio della matematica, avendo rapidamente realizzato che la vita e le discipline di studio al Louis-le-Grand lo avrebbero presto portato alla crisi di rigetto. Non fu abbastanza, per salvare Galois: alla fine, lo stesso Richard cambiò giudizio e in qualche maniera si adeguò alla crudele condanna dei colleghi nei confronti del giovane

[11] Sulla contemporaneità si può rimanere spiazzati, visto che si tende a considerare Galois come appartenente ad un epoca anteriore rispetto a quella del protagonista, ma di fatto il nostro è di soli undici anni più giovane di Evariste. Il fatto è che Galois è morto ad un'età vergognosamente giovane, e si fa fatica a ricordare che, se avesse avuto vita lunga e serena, avrebbe potuto fare in tempo a veder nascere e il Novecento.

matematico. Ma forse proprio per questo, Richard cercò poi con ancora maggiore attenzione tra i suoi allievi la traccia del genio, e la riconobbe in Hermite così come la aveva riconosciuta a suo tempo in Evariste; e fece allora di tutto per proteggere quel nuovo piccolo genio, zoppo e tanto timido quanto era invece energico e ribelle il predecessore. Un'altra coincidenza non banale è l'attrazione che il giovane Charles provò nei confronti della risolvibilità delle equazioni di quinto grado. Ignaro del contenuto del lavoro di Galois, scrisse una memoria in cui cercò - invero senza riuscirvi – di dimostrare l'impossibilità di risoluzione delle quintiche per radicali, proprio come aveva fatto Evariste; ma poiché il destino concesse ad Hermite una vita decisamente più lunga, dovremo tornare più avanti sulle equazioni di quinto grado e sul loro rapporto con il placido Charles.

Per la gioia degli studenti che non riescono a collezionare altro che voti miserrimi o – al massimo – stentatissime sufficienze, è verosimile che la cosa che più evidentemente apparenta Galois ed Hermite è la loro scarsissima predisposizione ad affrontare gli esami. Tutta la loro carriera al Louis-le-Grand è caratterizzata dai cattivi giudizi dei professori, con qualche eccezione dovuta in parte alla palese capacità matematica di entrambi e in parte ai buoni uffici del professor Richard. Ma è al momento cruciale dell'accesso all'istruzione superiore che le somiglianze si palesano in tutto il loro tragico splendore. Entrambi, avendo preso coscienza nelle aule del Lycée che devono consacrare il loro futuro alla matematica, tentano l'esame di ammissione alla scuola tecnica per eccellenza del loro tempo: l'École Polytechnique. Stavolta non si tratta più di esami in "materie sbagliate", poco interessanti o semplicemente non gradite all'esaminando; si tratta invece di mostrare d'essere degni d'entrare in quella che è considerata la scuola scientifica per eccellenza, quella scuola, insomma, che dovrebbe essere il luogo perfetto per menti come quelle di Galois e di Hermite. Eppure, i due continuano a somigliarsi anche nei risultati stupefacentemente miseri di tali esami. Galois raggiunge vertici di puro romanticismo tragico: respinto una prima volta, tra lo scandalo mostrato perfino dai suoi compagni di corso che, pur tormentandolo e prendendolo continuamente in giro, quantomeno erano svegli abbastanza da trovare assolutamente ridicolo che il Politecnico potesse respingere un genio matematico di tal fatta, l'anno successivo provò per la seconda (ed ultima possibile) volta l'esame di ammissione. Finì davanti ad un esaminatore che semplicemente non era in grado di capirlo, e Evariste arrivò a tirargli in faccia il cancellino, con grande scandalo per la scuola e per l'epoca. Ma questi sono palesemente insuccessi dovuti alla febbre delle passioni, al calore d'un carattere focoso che si sente estraneo alla logica degli esaminatori e intollerante all'idea di essere giudicato da essi. Non può certo accadere la stessa cosa al placidissimo Charles Hermite.

E infatti non accade la stessa cosa, ma solo per poco. Hermite ha già pubblicato delle memorie importanti, quando si presenta all'esame per l'accesso all'École Polytechnique. È giovane, ma non è solo il migliore dei candidati, è anche migliore dei suoi esaminatori. Eppure, Charles non sa sostenere lo stress da esami. Forse; o forse non riesce a farsi capire, a mostrare le sue capacità; fatto sta che, chissà se nuovamente per i buoni uffici di Richard o per quelli del suo tutore Catalan, Hermite riesce a superare l'esame di ammissione, ma solo come sessantottesimo in graduatoria. È poco diverso da una disfatta completa, per uno come lui: ha passato un anno intero a prepararsi per l'esame, e l'essersi piazzato così male gli fa pensare di non essere proprio portato per la matematica, o quantomeno per l'École Polytechnique. Col senno di poi, si può anche concludere che il maggior elemento di disturbo in quell'esame sia stata semplicemente quella geometria descrittiva che Hermite non amava affatto, e che invece era tenuta in massimo grado dai professori dell'École, eredi diretti di Monge. Fatto sta che il primo anno passa infatti in maniera non troppo gloriosa per lui, per terminare poi in maniera del tutto ingloriosa per la Scuola, che al fine dell'anno respinge Hermite non per demeriti di profitto, ma a causa della sua zoppia, adducendo come ragione il fatto che non avrebbe potuto ben esercitare le professioni per le quali l'École preparava i suoi studenti (prevalentemente ingegneri militari).

Ma, a differenza di Galois, Hermite riesce a sopravvivere alla sua giovinezza, e un po' perfino a vendicarsi su di essa. E, se davvero si potesse prendere lui come metro di quel che poteva essere Galois se avesse vissuto più a lungo, certo non si può fare a meno di rinnovare il dolore per quella morte cretina in duello. In breve, Hermite divenne il matematico più brillante della sua epoca, cedendo lo scettro della genialità matematica francese solo dopo molti anni e consegnandolo proprio al migliore dei suoi numerosi allievi, Henri Poincarè. In una sorta di nemesi virtuosa, Hermite si ritrovò perfino a rivestire il ruolo di "esaminatore" proprio all"École, e ci piacerebbe molto sapere come si sentiva in quei panni, e quali criteri avesse infine deciso di usare per esaminare i candidati.

Certo è che il resto della sua vita, com'era ben prevedibile, fu totalmente consacrato alla matematica: e almeno due delle sue scoperte sono tali da lasciare una traccia indelebile in qualsiasi manuale di storia della matematica. La prima, a ben vedere, è proprio il completamento del lavoro di Galois: se Evariste aveva dimostrato l'impossibilità della risoluzione "per radicali" delle equazioni algebriche di quinto grado, è proprio Hermite a fare in modo che si debba sempre ben aggiungere la specificazione "per radicali" quando si narra dell'impresa di Evariste; Charles riuscì infatti a dimostrare che le quintiche sono risolubili tramite le funzioni ellittiche. Ed è insomma proprio Hermite ad innalzare una sorta di pietra miliare e di vallo matematico: per qualche ragione, le "funzioni ellittiche" sono una specie di confine tra i vari argomenti della matematica superiore, e segnano quel territorio che sembra, ai profani, essere il punto ove comincia il vero dominio degli specialisti. Se così è, è stato Hermite a tracciare quel primo confine.

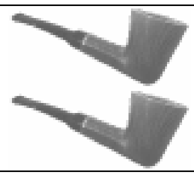
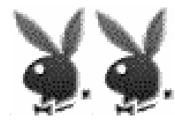
L'altro risultato, è ancora più romantico: si tratta della dimostrazione della trascendenza di e. Se è ancora oggi assai complesso dimostrare la trascendenza di un numero, ai tempi di Hermite era un compito quasi sovrumano: e quando il professore parigino riuscì infine a dimostrare che la base dei logaritmi naturali era trascendente, furono in molti a chiedergli di procedere oltre, fino a dimostrare la trascendenza di pi greco e così sciogliere, tra le altre cose, anche il famigerato problema della quadratura del cerchio. Ma lui rispose: "*Non mi arrischierò a tentare di dimostrare la trascendenza di π. Se qualcuno ci riuscirà, nessuno darà più felice di me, ma potete credermi se vi dico che non sarà semplice, e che richiederà qualche sforzo*". In parte a maggior gloria di Hermite, in parte a suo scorno, Lindemann dimostrerà la trascendenza di pi greco non molto tempo dopo, e usando sostanzialmente gli stessi metodi usati da Hermite per mostrare la trascendenza di e.

Era un mistico dei numeri, il vecchio Charles. Aveva una innocua convinzione che i numeri avessero regole e vita propria, e che in qualche modo regolassero da sè stessi la loro misteriosa esistenza. Era modesto fino all'esagerazione, come dimostra la risposta che diede a Mittag-Leffler quando questo gli si presentò a Parigi dicendogli di essere venuto a seguire il suo corso: "*Ma no, dev'esserci un errore! È a Berlino, da Weierstrass che dovete andare, lui è il maestro di noi tutti*".

Ogni aspetto della sua vita sembra mostrare quasi un eccesso di arrendevolezza: colto da un malanno, l'assistenza di Cauchy - noto per la sua fede politica filomonarchica e per la sua forte religiosità cattolica – lo convinsero ad abbracciare la stessa opinione politica e la stessa fede religiosa del collega che lo accudiva al capezzale. Durante la dominazione prussiana della Francia seguita alla sconfitta del 1871, continuò nella convinzione che la matematica francese e la matematica tedesca continuavano ad essere sempre una sola cosa, la matematica tout-court. Per quanto buon patriota e cittadino di Francia, trovava ridicoli i tentativi di giudicare la qualità scientifica di un testo a seconda della nazionalità dell'autore. Per molti versi, fu l'ultimo rappresentante d'una matematica compatta, lucida, splendente ne trionfo di fine Ottocento e del tutto ignara delle crisi che sarebbero poi esplose all'inizio del nuovo secolo. Fece in tempo a conoscere i lavori di Cantor, ed ad esserne spaventato perché sembravano troppo distanti dalla purezza della matematica che conosceva e che riteneva certo sacra. Il suo misticismo si esplicava nei numeri e nelle funzioni, e certo raggiungeva qualcosa di molto simile all'estasi quando aveva l'occasione di spiegarlo ai suoi studenti. Perché, a differenza di molti studiosi, Hermite fu anche un insegnante particolarmente ammirevole. Hadamard, che fu suo studente, così raccontava del suo modo di insegnare: "*Non credo che coloro che non l'hanno mai ascoltato possano davvero capire quanto fosse magnifico il modo d'insegnare di Hermite: in lui traboccava un entusiasmo per la scienza che sembrava prendere vita nella sua voce, e la cui bellezza non mancava mai di raggiungere anche noi studenti, perché lui davvero lo sentiva fin dentro la parte più profonda del suo essere*"

Un buon recupero, per uno studente che dava solo esami disastrosi.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Tre coincidenze			
L'importante è avere una scusa			

2.1 Tre coincidenze

Tranquilla Alice, non è di probabilità. Le tre coincidenze (nel senso di "tre cose temporalmente sovrapponentesi") sono quelle che mi hanno fatto ricordare il problema: sono un attimo focalizzato sulle problematiche abitative legate agli ascensori, mia moglie Paola è di origini biellesi[12] e ho passato alcune serate di questo mese al diciassettesimo piano di un albergo (trasferte di lavoro, unico piano fumatori: come fumatore di pipa non avevo problemi, ma alcuni nevrotici bruciatori di sigarette soffrivano di crisi di astinenza tra la partenza e l'arrivo dell'ascensore).

E se vi chiedete cosa c'entrino queste tre cose assieme, arrivate al problema: si tratta di costruire un albergo il più alto possibile, dotarlo di sei ascensori, risparmiando il risparmiabile. Non solo ma (per motivi di risparmio in fase di collaudo) ogni ascensore può avere solo ***cinque*** fermate (non necessariamente distanziate di un solo piano l'una dall'altra); e pazienza se, per arrivare in camera dalla hall, dovete prendere più di un ascensore.

Andiamo a cominciare: vi preannunciamo comunque che al massimo potrete ospitare congressi di matematica...

Sotto le condizioni suesposte, erano state sviluppate tre ipotesi di lavoro.

La *prima ipotesi* di lavoro prevedeva che l'ospite potesse arrivare a qualsiasi piano da qualsiasi piano con al più due ascensori.

Il guaio in questo modo era che gli ospiti trovavano noioso dover aspettare per raggiungere un qualche piano raggiunto da un unico ascensore; la *seconda ipotesi* prevedeva che ogni piano fosse servito da due ascensori e nessun percorso di due qualsiasi ascensori prevedesse fermate agli stessi due piani; anche in questo caso, bastavano due "corse" per raggiungere qualsiasi piano da qualsiasi piano.

Certo che se vogliamo diventare un albergo di lusso, dobbiamo un attimo migliorare il servizio, e questo è lo scopo della *terza ipotesi*; l'unica possibilità per fare questo è prevedere un sistema di ascensori per cui la corsa al piano da qualsiasi piano sia unica (in entrambi i sensi: sia "prendo un solo ascensore", sia "non ho altro modo").

Se non vi basta, possiamo provare a capovolgere il problema. Ma quanti ascensori mi servono, per avere un albergo alto come il primo caso, ma soddisfacendo i requisiti dell'ultimo?

[12] Vi ricordiamo che i biellesi, a tirchieria, danno dei punti a qualunque altro gruppo etnico.

È implicito che, in tutti questi casi, dovreste anche fornirci uno schemino della "strada da fare"; lo stamperemo e lo forniremo agli ospiti.

Il ragazzo dell'ascensore è il giovane Bernoulli....

2.2 L'importante è avere una scusa

Attenzione: a parte l'aneddotica connessa, ignorate il fatto che si abiti a Torino; per quando i vostri figli avranno l'età di Alberto, vi conviene aver risolto il problema in modo generalizzato sul piano euclideo.

Abbiamo un piccolo problema con Alberto, il nostro Valido Assistente di Laboratorio più grande.

Dato un rendimento scolastico non propriamente entusiasmante, ha ricevuto l'ordine tassativo "Ogni giorno, finita scuola, immediatamente a casa a darti da fare!". Ora, siccome Alberto ha un'insana tendenza ad eseguire gli ordini in modo letterale cercando ogni possibile scappatoia data da errori di formulazione, effettivamente ogni giorno torna a casa a velocità costante, ma cercando la strada più lunga possibile; un epsilon di onestà gli impone però di non poter ammettere con se stesso di andare ad esempio nella direzione opposta sostenendo di "tornare a casa", e quindi la ricerca del percorso più lungo è sottoposta ad alcune limitazioni. Questo ha portato a tre interessanti problemi.

1. La scuola e la casa sono ad un kilometro l'una dall'altra; Alberto ha intenzione di provare questa volta a suddividere il percorso in N tratti di linea retta tali che, in ogni momento, la sua distanza da casa decresca (e quindi sta "tornando a casa"); qual è la distanza massima (come funzione di N) che riuscirà a percorrere?
2. Il problema precedente ha suscitato in Rudy e in sua moglie Paola (successivamente all'incavolatura per il comportamento di Alberto) alcuni ricordi di gioventù: quando erano freschi di patente e piuttosto imbranati alla guida (Paola sostiene che Rudy ha mantenuto intatta questa caratteristica), entrambi avevano una discreta idiosincrasia alla svolta a sinistra, che richiede molta più attenzione; Alberto ha provato (seguendo sempre le condizioni del primo problema) a tornare a casa girando sempre e solo a destra, ogni volta per meno di 180°. La casa è a *Nord* rispetto alla scuola, e durante l'ultimo tratto in linea retta Alberto si trova a camminare in una direzione tra *Nord* e *Ovest* (più Ovest che Nord); qual è il minimo valore possibile di N?
3. Sempre sotto le condizioni del primo punto e senza spostare la scuola, Alberto è alla ricerca di una scusa per passare dall'edicola, che si trova immediatamente a *Est* della casa; la sua intenzione è di partire dalla scuola e recarsi a casa in una serie di 3 cammini in linea retta (quindi, per questo caso, $N=3$), ma per passare dall'edicola l'ultimo tratto deve evidentemente essere diretto verso *Ovest*. In questo caso, qual è il massimo cammino?

Sempre per insegnare il torinese a Doc, speriamo Alberto arrivi a casa *d'nans c'a fasa nœît...*

3. Bungee Jumpers

Definiamo come *inversione* il numero ottenuto scrivendo al contrario le cifre del numero dato; trovate tutti i numeri per cui l'inversione è pari a $2,3,4,5,6,7,8,9$ volte il numero dato.

Abbiamo sempre odiato i problemi di questo tipo... Vorremmo che questa fosse la parola "fine", in merito.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Dicembre. Questo è il mese in cui la matematica regna sovrana nelle famiglie italiane, e proprio quando le tredicesime vengono ricalcolate e suddivise per regali e cenoni, noi usciamo con questo numero scarno di soluzioni e note.

La verità è che non solo noi della Redazione siamo stati impegnatissimi, e non abbiamo nemmeno trovato il tempo di parlare di matematica tra noi, ma in in più abbiamo ricevuto ben poca posta durante novembre – per cui vi passiamo ora qualche mini-notizia.

Dato che il mese scorso ci siamo troppo autoincensati, cominciamo con la solita errata-corrige: nel compleanno del numero 094 compare un "Km" invece del corretto "km". Per fortuna il ***Panurgo*** ce lo fa notare. E chissà di quanti altri errori non ci siamo accorti; avendo citato la "Mathesis", per esempio, non sapevamo che con questo pseudonimo, tale Dino Segre (Torino 1893 - Parigi 1975) meglio conosciuto con l'altro pseudonimo di PITIGRILLI, scrisse nel 1930 il manuale "Il lotto come si gioca e come si vince", Torino, Ed. Ars. Il fatto che ci sia sfuggita l'opportunità di menzionare un torinese illustre pare quasi incredibile, ma lo citiamo qui per farci perdonare, e ringraziamo ***Artifex*** per avercelo fatto sapere.

Sempre nel compleanno, imperdonabilmente, abbiamo sbagliato l'indirizzo di uno dei nostri blog preferiti (vedi nota 4 – RN094), che qui correggiamo e vi ri-invitiamo alla visita: http://proooof.blogspot.com.

Terminiamo questa serie di incidenti con qualcosa di positivo e cioè un articolo sul phi[13] segnalatoci da Mariano Tomatis, http://www.renneslechateau.it/indagini/articoli/5x243-250.pdf , e la rivista che lo propone: http://www.renneslechateau.it/indagini.

Che le feste vi siano propizie e la matematica sia con voi.

4.1 [094]

Anche per quanto riguarda i problemi, poche soluzioni. Il Capo l'aveva detto, che erano difficili, ma noi pubblichiamo quello che è arrivato e speriamo in ulteriori contributi nei prossimi mesi...

4.1.1 Ai confini della matematica: casa di Rudy

L'unico che ha provato a risolvere il problema[14] è stato ***Cid***, anche se lui dice di avere "solo delle congetture", ve le facciamo condividere:

> La mia impressione[15] è che la soluzione migliore sia la seguente:
>
> Infatti:
>
> 1) Ogni blocco ha una felicità totale non negativa.
>
> 2) Abbiamo una valore totale di felicità uguale a 20 (che mi pare il massimo possibile).
>
> Il mio ragionamento è stato il seguente: in una scacchiera NxN per ogni riga vi sono (N - 1) colonne vicine per un totale di N•(N - 1) coppie di vicini, cioè: 2•N•(N - 1) vicini; allo stesso modo, per ogni colonna

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
13	14	15	16	17	18
24	23	22	21	20	19
25	26	27	28	29	30
36	35	34	33	32	31

[13] *I PM in cui si parla di sezione aurea sono comparsi su RM040 (La Sezione Aurea) e RM048 (Metallika!). Il secondo tratta le sezioni generalizzate. (RdA)*

[14] Non è vero: mentre chiudevamo il numero ***Blif*** ci ha inviato la sua versione. Alice ha promesso di pubblicarla a gennaio, perché è la solita scansafatiche.

[15] *Confermo che risuta essere la migliore secondo un mucchio di gente (è anche quella che avevo io); è per questo che avevo chiesto a Doc di non dire "bustrofedico". Sarebbe stato un aiutino... (RdA)*

vi sono (N - 1) righe vicine per un totale di $N \cdot (N - 1)$ coppie di vicini, cioè: $2 \cdot N \cdot (N - 1)$ vicini.

In totale, abbiamo: $4 \cdot N \cdot (N - 1)$ vicini = $4 \cdot N^2 - 4 \cdot N$.

Mettendo in fila tutti i numeri da 1 a N^2 abbiamo che tutti i numeri da 2 a $(N^2 - 1)$ hanno due vicini a distanza 1, mentre 1 e N^2 hanno un vicino a distanza 1, per un totale di $2 \cdot (N^2 - 2) + 2 = 2 \cdot N^2 - 2$

Siccome tutti i numeri sono in fila, risulta impossibile avere numeri vicini avente differenza uguale a 2, per cui i vicini con felicità negativa risultano pari a:

$$(4 \cdot N^2 - 4 \cdot N) - (2 \cdot N^2 - 2) = 2 \cdot N^2 - 4 \cdot N + 2$$

e la felicità totale risulta uguale a:

$$(2 \cdot N^2 - 2) - (2 \cdot N^2 - 4 \cdot N + 2) = 4 \cdot N - 4$$

Nel caso 6x6 risulta: $4 \cdot 6 - 4 = 20$.

Non ho dimostrato che questo sia il miglior risultato possibile, ma mi pare che debba essere così, in quanto:

- se tutti hanno un vicino con differenza maggiore di due si ha un totale uguale a: $4 \cdot N - 4 \cdot N^2$
- per ogni vicino con differenza uguale a 2 si guadagna un punto $1 = 0 - (-1)$
- per ogni vicino con differenza uguale a 1 si guadagnano due punti $2 = 1 - (-1)$
- da cui si deduce che per avere una condizione migliore di un vicino con differenza uguale a 2, occorre avere almeno 3 vicini con differenza uguale a 2
- ebbene nella soluzione da me indicata tutti quelli compresi tra il primo e l'ultimo hanno due vicini con differenza uguale a 1.

Se io interrompessi la catena per poter avere anche vicini con differenza uguale a 2 potrei al massimo ottenere due vicini con differenza uguale a 2 per ogni coppia di vicini con differenza uguale a 1 che elimino;

Esempio:

A-3	A-2	A-1	A	
		A+1	A+2	A+3

pertanto non riuscirei ad ottenere una soluzione migliore.

Non ho idea di come dimostrarlo, ma anche se mi rimane solo a livello di congettura mi pare che comunque debba essere una soluzione corretta; nonostante che da quanto è scritto nel testo del problema sembra che sia invece possibile trovare una soluzione migliore. (Confido nell'abilità degli altri lettori.)

Esempi di catene interrotte, nel caso 6x6

Con 1 interruzione della sequenza

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
14	13	18	19	22	23
15	16	17	20	21	24
30	29	28	27	26	25
31	32	33	34	35	36

Con 2 interruzioni della sequenza

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
14	13	21	22	23	24
16	15	20	27	26	25
17	18	19	28	29	30
36	35	34	33	32	31

Con 3 interruzioni della sequenza

1	2	3	4	5	6
12	11	10	9	8	7
14	13	24	25	26	27
16	15	23	30	29	28
17	18	22	31	34	35
19	20	21	32	33	36

....

Con 15 interruzioni della sequenza

1	2	23	24	25	26
3	4	21	22	27	28
5	6	19	20	29	30
7	8	17	18	31	32
9	10	15	16	33	34
11	12	13	14	35	36

Confidiamo anche noi di ricever altri contributi.

4.1.2 Oggi cucina Rudy!

I contributi per questo problema sono di ***Cid*** e ***Trentatrè***. Cominciamo con ***Cid***:

Se le frittelle sono meno di 3, allora bastano (N-1) colpi di spatola per garantire la pila ordinata.

Se le frittelle sono più di 2, occorre un numero di colpi compreso tra N e (2N-3), per restringere l'intervallo si può dire che:

- per $3 \le N \le 5$ occorrono N colpi di spatola
- per $6 \le N \le 10$ occorrono (N+1) colpi di spatola
- per N>10 occorre un numero di rigiri compreso tra N e (2N-9)

<u>DIMOSTRAZIONE</u>

Se le frittelle sono meno di 3:

- Con 1 sola frittella ho che la pila è già ordinata, quindi 0 colpi di spatola $0 = 1 - 1$.
- Con 2 frittelle, o la pila è già ordinata o è in ordine inverso, quindi 1 colpo di spatola $1 = 2 - 1$.

Se le frittelle sono più di 2, occorre un numero di colpi compreso tra N e (2N-3), infatti occorrono almeno N colpi di spatola nel caso in cui dopo averle numerate in base alle dimensioni, mettiamo prima tutte quelle con numero pari in ordine decrescente e poì tutte quelle con numero dispari in ordine decrescente; così facendo non ci sono numeri consecutivi vicini tra loro. Siccome ad ogni rigiro al massimo avvicino 2 numeri, mi occorrono almeno (N-1) colpi di spatola per avere ogni numero vicino al suo consecutivo ed almeno un colpo di spatola che mi rigiri tutte le frittelle per portare il numero più grande nella giusta posizione: totale $(N-1)+1=N$ colpi di spatola.

Inoltre, occorrono al massimo (2N-3) colpi di spatola in quanto è sempre possibile seguire questo metodo:

- metto la spatola sotto la frittella più grande e la porto in prima posizione,
- metto la spatola sotto l'ultima frittella e giro tutta la pila (portando così la frittella più grande nella sua giusta posizione),
- ripeto il procedimento in modo analogo sulla pila costituita dalle frittelle sopra la più grande.

Dopo aver ripetuto questo procedimento su tutte le frittelle tranne le due più piccole, avendolo ripetuto su $N-2$ frittelle ho eseguito $2N-4$ colpi di spatola; per ordinare le 2 frittelle rimaste mi occorre al massimo un colpo di spatola: totale $(2N-4)+1=(2N-3)$ colpi di spatola.

Per restringere l'intervallo ho verificato con il computer tutte le permutazioni possibili per un valore di N che varia da 3 a 10, cercando per ogni permutazione il numero minimo di colpi di spatola necessari:

- per $3 \leq N \leq 5$ occorrono al massimo N colpi di spatola

- per $6 \leq N \leq 10$ occorrono al massimo (N+1) colpi di spatola

Vi riporto anche la tabella del numero di permutazioni delle frittelle al variare del Numero di frittelle e del minimo numero di rigiri necessari per avere la pila ordinata.

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0 rigiri	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1 rigiro		1	2	3	4	5	6	7	8	9
2 rigiri			2	6	12	20	30	42	57	73
3 rigiri			1	11	35	79	149	251	391	575
4 rigiri				3	48	199	543	1191	2278	3963
5 rigiri					20	281	1357	4281	10666	22825
6 rigiri						133	1903	10561	38015	106461
7 rigiri						2	1016	15011	93585	377863
8 rigiri							35	8520	132697	919365
9 rigiri								455	79379	1309756
10 rigiri									5803	814678
11 rigiri										73231

Per chiarire meglio il significato di questa tabella, vi descrivo come esempio la colonna $N = 6$

Esiste 1 permutazione delle 6 frittelle che permette di avere la pila ordinata con 0 rigiri.

Esistono 5 permutazioni che richiedono almeno 1 rigiro per avere la pila ordinata.

Esistono 20 permutazioni che richiedono almeno 2 rigiri per avere la pila ordinata.

Esistono 79 permutazioni che richiedono almeno 3 rigiri per avere la pila ordinata.

Esistono 199 permutazioni che richiedono almeno 4 rigiri per avere la pila ordinata.

Esistono 281 permutazioni che richiedono almeno 5 rigiri per avere la pila ordinata.

Esistono 133 permutazioni che richiedono almeno 6 rigiri per avere la pila ordinata.

Esistono 2 permutazioni che richiedono almeno 7 rigiri per avere la pila ordinata.

Siccome (1+5+20+79+199+281+133+2)=720=6! non esistono altre permutazioni di 6 frittelle.

Da questa tabella si deduce che per N>10 occorre un numero di colpi compreso tra N e (2N-9). Infatti, occorrono almeno N colpi di spatola nel caso in cui dopo averle numerate in base alle dimensioni, mettiamo prima tutte quelle con numero pari in ordine decrescente e poì tutte quelle con numero dispari in ordine decrescente; così facendo non ci sono numeri consecutivi vicini tra loro. Siccome ad ogni rigiro al massimo avvicino 2 numeri, mi occorrono almeno (N-1) colpi di spatola per avere ogni numero vicino al suo consecutivo ed almeno un colpo di spatola che mi rigiri tutte le frittelle per portare il numero più grande nella giusta posizione: totale $(N-1)+1 = N$ colpi di spatola.

Occorrono al massimo (2N-9) colpi di spatola in quanto è sempre possibile seguire questo metodo:

- metto la spatola sotto la frittella più grande e la porto in prima posizione,
- metto la spatola sotto l'ultima frittella e giro tutta la pila (portando così la frittella più grande nella sua giusta posizione),
- ripeto il procedimento in modo analogo sulla pila costituita dalle frittelle sopra la più grande.

Dopo aver ripetuto questo procedimento su tutte le frittelle tranne le dieci più piccole, avendolo ripetuto su $N-10$ frittelle ho eseguito $2N-20$ colpi di spatola, per ordinare le 10 frittelle rimaste osservo dalla tabella precedente che mi occorrono nel caso peggiore solo 11 colpi di spatola: totale $(2N-20)+11 = (2N-9)$ colpi di spatola

<u>Note storiche:</u>

Inizialmente avevo cominciato ad analizzare le due permutazioni di 6 frittelle che richiedono almeno 7 rigiri:

(5,3,6,1,4,2) e (4,6,2,5,1,3) per vedere se potevo individuare una logica che si ripetesse in modo analogo in qualcuna delle 35 permutazioni di 7 frittelle che richiedono almeno 8 rigiri, ma non sono riuscito a ricavare dei risultati concreti.

Non solo, perfino cercando tra le 455 permutazioni di 8 frittelle che richiedono almeno 9 rigiri non ho trovato qualcosa che si ripetesse nelle 5803 permutazioni di 9 frittelle che richiedono almeno 10 rigiri; ed analogamente osservare queste 5803 permutazioni non mi ha aiutato a trovare una logica analoga tra le 73231 permutazioni di 10 frittelle che richiedono almeno 11 rigiri.

Perlomeno dall'analisi di tutti questi dati ho ricavato la seguente congettura:

CONGETTURA DI CID

Con N, K, H numeri interi positivi, se per N frittelle mi occorrono al massimo (N + H) colpi di spatola, con (N + K) frittelle mi occorreranno almeno (N + K + H) colpi di spatola.

Corollario della congettura

Se la congettura risultasse vera, per N>10 l'intervallo diventerebbe un numero di rigiri compreso tra (N+1) e (2N-9).

Inoltre ho notato che a partire da N=4 tutte le colonne della tabella raggiungono il loro valore massimo per un numero di rigiri uguale a (N-1).

(Ritengo comunque che dalla tabella sia possibile ricavare anche maggiori informazioni.)

E ora vediamo come affronta il problema il nostro ***Trentatrè***:

definizioni

- P : permutazione di ordine N (p.es. N = 4, P = 1324). La permutazione "ordinata" P = 1234 ... N è indicata con P_0
- R_n : inversione (o ribaltamento) dei primi n elementi (p.es. R_3 1324 = 2314)
- T_m : trasformazione : successione di m inversioni R_n scelte fra R_2, R_3, ... R_N

  m : lunghezza della T

  la trasformazione T = $R_3R_2R_4$ si indica semplicemente con [324]

  T è visto come un operatore a sinistra su P

  [1] è la trasformazione identica (nessuna inversione) (p.es. con T = $R_3R_2R_4$ ≡ [324])

  [324] 1324 = [32] 4231 = [3] 2431 = 3421
- F(N, P) minimo n. di inversioni necessario per ordinare P

  NB. la trasformazione T_K che ordina P con K minimo può non essere unica, p.es. le trasformazioni di ordine minimo che ordinano P = 2413 sono [2432] 2413 = P_0 e [3423] 2413 = P_0, quindi F(4, P) = 4 con due trasformazioni diverse
- G(N) minimo n. di inversioni necessarie per ordinare ogni P di ordine N, cioè G(N) = massimo F(N, P) al variare di P sulle N! permutazioni

relazioni fra P e T

Fissato l'ordine N valgono le

- ogni inversione R_n applicata a una permutazione P genera un'altra permutazione Q, cioè Rn P = Q
- ogni trasformazione T_K di lunghezza K qualsiasi, applicata a una permutazione P genera un'altra permutazione Q, cioè T P = Q
- ogni trasformazione T è associata a un'unica permutazione P, data da P = T P_0, p.es. N = 4, T = [3234] ; la P associata è

  P = T P_0 = [3234] 1234 = [323] 4321 = [32] 2341 = [3] 3241 = 4231

  NB. se P = T P_0, vale la T* P = P_0, con T* inversa di T (cioè T letta al contrario), quindi T* è una delle trasformazioni che "ordina" P

- due trasformazioni T, T' sono identiche se associate alla stessa permutazione P, p. es. [342] = [4324] sono associate a P = 1342, quindi [342] e [4324] effettuano la stessa trasformazione su qualsiasi P (di ordine ≥ 4)

limitazione superiore di G(N)

Una P di ordine N si può ordinare spostando successivamente gli elementi (N), (N - 1) ... nel posto corretto di P_0.

Ogni spostamento richiede al più 2 inversioni (salvo per l'elemento (1)). P.es. N = 5, P = 13524 → 53124 → 42135 → 31245 → 21345 → 12345 = P_0, le inversioni applicate sono R_3, R_5, R_4, R_3, R_2 ≡ [23453].

Il n. di inversioni necessarie è ≤ 2N - 1, e quindi G(N) ≤ 2N - 1.

La limitazione si può migliorare; se G(N -1) = K allora G(N) ≤ K + 2 - infatti dopo le prime due (al massimo) inversioni che spostano l'elemento (N) occorre solo ordinare una P di ordine N -1 e quindi al più K inversioni.

Poichè è certamente G(5) = 5 si ha una limitazione superiore per G(N) :

G(N) ≤ 2N - 5 , per ogni N ≥ 5.

casi N = 2, 3, 4, 5

Indicando per ogni permutazione di ordine N le trasformazioni associate T_m (con m ≤ N) e l'indice F(N, P) si ha

N = 2

P	T	F
12	[1]	1
21	[2]	1

quindi G(2) = 1

n. trasformazioni = 2

il n. di trasformazioni corrisponde al n. di permutazioni

N = 3

P	T	F
123	[1]	1
132	[232] [323]	3
213	[2]	1
231	[23]	2
312	[32]	2
321	[3]	1

quindi G(3) = max F(3, P) = 3

n. trasformazioni = 7

n. identità fra le T = 7 - 3! = 1 (le trasformazioni [232] e [323] sono identiche)

N = 4

P	**T**	**F**
1234	[1]	1
1243	[424] [2343] [3432]	3
1324	[232] [323]	3
1342	[342] [4324]	3
1423	[243] [4234]	3
1432	[434] [2423] [3242]	3
2134	[2]	1
2143	[343] [2424] [4242]	3
2314	[23] [3232]	2
2341	[34]	2
2413	[2432] [3243]	4
2431	[324] [4342]	3
3124	[32] [2323]	2
3142	[2342] [3423]	4
3214	[3]	1
3241	[234] [4243]	3
3412	[242] [3434] [4343]	3
3421	[24]	2
4123	[43]	2
4132	[423] [2434]	3
4213	[432] [3424]	3
4231	[2324] [3234] [4232] [4323]	4
4312	[42]	2
4321	[4]	1

quindi G(4) = max F(4, P) = 4

n. trasformazioni = 46

n. identità fra le T = 46 - 4! = 22

anche nella tabella per N = 5 (di 5! = 120 righe, che non si riporta), le trasformazioni T_m con $m \leq 5$ sono sufficienti a "ordinare" tutte le P, cioè G(5) = 5, perciò si ha G(2, 3, 4, 5) = 1, 2, 3, 4, 5

<u>ulteriori valori di G(N)</u>

Le tabelle precedenti possono essere estese con un programma che attua il processo:

- dato N, calcolo di <u>tutte</u> le T_m composte di m inversioni scelte fra R_2, R_3, ... R_N

  NB. le T_m possono essere generate in ordine lessicografico con la condizione che non si abbiano due inversioni Rn uguali adiacenti (che si annullano fra di loro)

- per ogni P associata alle T_1 (che sono [1], [2], [3], ... [N], in numero di N) è F(N, P) =1
- per ogni P associata alle T_2 ,non inclusa nelle precedenti, vale F(N, P) = 2

- ecc. fino al minimo T_m tale che tutte le P abbiano almeno una T associata, allora G(N) = m

Il calcolo fornisce, per N da 2 a 9, i seguenti valori dei numeri

$K_{N,m}$: n. di P di ordine N con F(N,P) = m

N \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2									
3	3	2	1							
4	4	6	11	3						
5	5	12	35	48	20					
6	6	20	79	199	281	133	2			
7	7	30	149	543	1357	1903	1016	35		
8	8	42	251	1191	4281	10561	15011	8520	455	
9	9	56	391	2287	10666	38015	93585	132697	79379	5804

(la somma dei valori della riga N è N!)

Poichè G(N) = max F(N, P) al variare di P, i valori precedenti di G(N) possono essere integrati con

G(6, 7, 8, 9) = 7, 8, 9, 10

Il risultato per N = 6 chiarisce che per ogni N <u>non bastano N inversioni</u>.

Più precisamente per N = 6 esistono $K_{6,7}$ = 2 sole permutazioni che richiedono almeno 7 inversioni, e sono

- P = 462513 (una trasformazione minima è [2342632])
- P = 536142 (“ [2362432]).

<u>NOTA</u>

I dati riportati sono stati calcolati con un programma su pc. Dato N, il numero $a_{N,m}$ di trasformazioni T_m di lunghezza m è dato (per N>3) dalla formula

$$a_{N,\,m} = 1 + (1+ p)(1+ p+ p^2 +\dots p^{m-1}) = 1 + (1+ p)(p^m - 1)/(p -1) \text{ dove } p = N-2$$

questo numero cresce circa come N^m e rende il calcolo proibitivo per N > 9.

Per completezza il Capo vuole farvi sapere che sul numero 27 di *“Discrete Math”* Gates (non quello, un altro) ha stabilito i limiti 17N/13 < f(N) < 5N/3. Sul numero 25 (1997) del *“Journal of Algorithms”*, è comparso un articolo di Heydari dall’illuminante e meraviglioso titolo *“Sul diametro di una rete di frittelle”*: ha abbassato il limite inferiore a 15N/14.. Questi, al momento, sono i migliori risultati in assoluto; il valore minimo esatto (e l’algoritmo ottimale) sono ancora sconosciuti.

E con questo è tutto. Buone Feste!

5. Quick & Dirty

Alberto e Fred hanno deciso di giocarsi l’ultima fetta di torta a testa e croce; reperite due monete sulla scrivania dell’Augusto Genitore sono pronti a prendere l’ardua decisione.

Come possono organizzare un veloce e onesto testa e croce, i due golosi, avendo a disposizione due monete di cui una soltanto sicuramente onesta (ma senza sapere quale delle due lo sia)?

6. Pagina 46

La condizione del problema può essere espressa nella forma:

$$\overline{xy\ldots zt}\cdot a=\overline{tz\ldots xy}$$

a=2

Se $a=2$, allora $x\le 4$. Dal fatto che $\overline{tz\ldots yx}$ debba essere pari si deduce che x può valere unicamente 2 o 4. Se $x=4$ allora t, prima cifra di $\overline{4y\ldots zt}\cdot 2$, potrà essere solo 8 o 9, e nè $\overline{4y\ldots z8}\cdot 2$ nè $\overline{4y\ldots z9}\cdot 2$ terminano con la cifra 4; di converso, se $x=2$ allora t, prima cifra di $\overline{2y\ldots zt}\cdot 2$, potrà essere solo 4 o 5; ma nè $\overline{2y\ldots z4}\cdot 2$ nè $\overline{2y\ldots z5}\cdot 2$ terminano con la cifra 2.

a=3

Se $a=3$, allora $x\le 3$. Se $x=1$, allora $t=7$, in quanto $t\cdot 3$ termina in 1; se $x=2$, allora allora $t=4$; se $x=3$, allora $t=1$. Ma nel primo caso $\overline{tz\ldots yx}$ è sicuramente maggiore di $\overline{xy\ldots zt}\cdot 3$, mentre negli altri due casi è sicuramente minore.

a=4

Dovendo $\overline{xy\ldots zt}\cdot 4$ contenere lo stesso numero di cifre di $\overline{xy\ldots zt}$, deve essere $x\in\{0,1,2\}$. Siccome $\overline{tz\ldots yx}$ deve essere divisibile per 4, allora x deve essere pari, e quindi resta escluso il caso $x=1$.

Supponiamo sia $x=0$; allora $t=0$ o $t=5$. Se scriviamo $\overline{0z\ldots yt}\cdot 4=\overline{ty\ldots z0}$ si vede che deve essere $t\ne 5$, e quindi deve essere $t=0$. Possiamo allora scrivere $\overline{y\ldots z}\cdot 4=\overline{z\ldots y}$; ossia, se il numero soddisfacente la condizione data inizia per 0, allora esso termina anche per 0, e il numero ottenuto eliminando questi due zeri soddisfa anch'esso la condizione data.

Inversamente, sia $x=2$, ossia scriviamo $\overline{y\ldots z}\cdot 4=\overline{tz\ldots y2}$. Essendo $2\cdot 4=8$, t può assumere unicamente i valori 8 o 9, ma $t=9$ può essere immediatamente eliminato. Allora, supponendo $t=8$, possiamo scrivere $\overline{2y\ldots z8}\cdot 4=\overline{8z\ldots y2}$; essendo $23\cdot 4>90$, $y\in\{0,1,2\}$. Inoltre, la cifra delle decine di un qualsiasi prodotto della forma $\overline{z8}\cdot 4$ deve essere dispari, e quindi $y=1$. Conoscendo ora le due cifre finali (12) del prodotto $\overline{21\ldots z8}\cdot 4$, possiamo facilmente trovare le uniche due possibilità per il valore della cifra successiva; $z\in\{2,7\}$. Ma $21\cdot 4>82$, e quindi $z=7$.

Il numero deve allora avere la forma $\overline{21\ldots 78}$; notiamo che l'intero 2178 soddisfa la condizione data, e quindi è l'unico numero di quattro cifre con questa proprietà. Consideriamo ora le soluzioni con più di quattro cifre; deve essere:

$$\overline{21uv\ldots rs78}\cdot 4=\overline{87sr\ldots vu12},$$

equivalente a:

$$84\cdot 10^{k+2}+312+\overline{uv\ldots rs00}\cdot 4=87\cdot 10^{k+2}+12+\overline{sr\ldots vu00},$$

ossia

$$\overline{uv\ldots rs}\cdot 4+3=\overline{3sr\ldots vu}\,.$$

Quando il numero $\overline{uv\ldots rs}$ viene moltiplicato per 4 e gli viene sommato 3 la cifra 3 diventa la cifra più significativa del risultato; quindi deve essere $u\geq 6$ ma, dovendo $\overline{3sr\ldots vu}$ essere dispari, deve essere $u\in\{7,9\}$; esaminiamo entrambe le possibilità.

Se $u=9$ abbiamo

$$\overline{9v\ldots rs}\cdot 4+3=\overline{3sr\ldots v9}\,, \qquad \textbf{[6.1]}$$

da cui segue $s=9$, in quanto $s\cdot 4$ deve terminare con 6 e se $s=4$ allora $\overline{34r\ldots v9}$ deve essere minore di $\overline{9v\ldots r4}\cdot 4+3$; dalla **[6.1]** allora si ha:

$$\overline{9v\ldots r9}\cdot 4+3=\overline{39r\ldots v9}\,.$$

Questo significa che, per $u=9$, affinchè $\overline{21uv\ldots rs78}$ soddisfi le condizioni del problema, la cifra finale di $\overline{uv\ldots rs}$ deve anch'essa essere 9; in particolare, $\overline{uv\ldots rs}$ deve assumere i valori 9, 99, 999 e così via. Otteniamo quindi come soluzione i numeri

$$21978;\ 219978;\ 2199978;\ldots$$

per i quali è facile verificare che soddisfano le condizioni date.

Nel caso $u=7$, abbiamo: che deve essere:

$$\overline{7v\ldots rs}\cdot 4+3=\overline{3sr\ldots v7}\,.$$

Ragionando lungo la stessa traccia seguita all'inizio del problema, troviamo le condizioni $s=1$, $v=8$, $r=2$; il che significa che la sequenza $\overline{uv\ldots rs}$ deve avere la forma $\overline{78\ldots 21}$. Si può facilmente verificare che se le coppie di cifre 78 e 21 sono inserite tra la prima e l'ultima coppia di cifre del numero in oggetto mantenendo 21 come prima coppia di cifre del numero e 78 come ultima coppia, il risultato soddisfa le condizioni del problema; ad esempio, $21\,78217821\,78\cdot 4=87\,12871287\,12$.

Ma secondo quanto ricavato per il caso $u=9$ possiamo ottenere soluzioni valide anche se inseriamo la cifra 9 nelle posizioni appropriate; per esempio, è soluzione ogni numero della forma:

$$21\underbrace{9\ldots 9}_{k\text{ volte}}78 \qquad \textbf{[6.2]}$$

L'inserzione della cifra 9 può essere effettuata dopo ogni sequenza $\overline{21}$, fermo restando che deve essere introdotta in una posizione equivalente a partire dall'altra estremità del numero; quindi, ogni sequenza della forma

$$P_1P_2\ldots P_{n-1}P_nP_{n-1}\ldots P_2P_1\,,$$

dove ogni P_i è un numero della forma **[6.2]**.

Analogamente, può essere dimostrato che tutti gli interi incrementati di un fattore 9 per rovesciamento possono essere ottenuti inserendo al loro interno gli interi della forma

$$0;\ 1089;\ 109989;\ \ldots;\ 109\underbrace{9\ldots 9}_{k\ volte}89;\ \ldots$$

nello stesso modo utilizzato per **[6.2]**.

a=5

Se $a = 5$, allora $x = 1$: in caso contrario, il numero sulla destra conterrebbe una cifra di troppo (il caso $x = 0$ può essere escluso, in quanto dopo aver moltiplicato entrambi i membri per 2 e cancellando lo 0 finale otterremmo $\overline{y\ldots zt} = 2 \cdot \overline{tz\ldots y}$, ricadendo nell'equivalente problema per $a = 2$). Ma l'intero $\overline{tz\ldots y1}$ non è divisibile per 5. Quindi nessun numero soddisfa la condizione data.

a=6

Ragionamento analogo al caso $a = 5$.

a=7

Se $a = 7$, allora $x = 1$. In questo caso, $t = 3$, altrimenti $\overline{1y\ldots zt} \cdot 7$ non potrebbe terminare con la cifra 1. Ma l'equazione $\overline{1y\ldots z3} \cdot 7 = \overline{3z\ldots y1}$ è chiaramente impossibile, in quanto il primo membro è maggiore del secondo.

a=8

Ragionamento analogo al caso $a = 5$.

a=9

Con ragionamento analogo al caso $a = 4$, si prova che i numeri hanno la forma (simile alla **[6.2]**):

$$109\underbrace{9\ldots9}_{k\text{ volte}}89\,. \qquad \textbf{[6.3]}$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Un compito che non avete fatto

Per punizione, vi beccate uno spiegone che poi non c'entra niente: questa volta cominciamo da talmente lontano che è l'inizio di un'altra cosa.

Si postula:

1. Che si possa tracciare una linea retta passante per due punti dati
2. Che si possa prolungare una linea retta all'infinito
3. Che si possa costruire un cerchio con qualsiasi raggio e qualsiasi centro
4. Che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro
5. Che, se una linea retta incidente su due linee rette forma angoli interni dallo stesso lato minori di due angoli retti, le due linee, prolungate indefinitamente, si incontrano dalla parte dove si trovano i due angoli minori di due angoli retti.

Adesso per favore lasciate perdere la battuta di spirito che non siete d'accordo con l'ultimo e ringraziate che vi abbiamo risparmiato le ventitrè definizioni precedenti. Ci servono ancora altri due pezzi: totale sette, se vogliamo sommare le mele e le pere.

Una riga è uno strumento che permette di tracciare linee rette.

Un compasso è uno strumento che permette di tracciare archi e trasferire distanze.

E qui, se ricordate, chi non è molto d'accordo è Doc, secondo il quale la definizione migliore di compasso è "quello strumento che quando hai tracciato l'arco, ti pizzica il dito", nel senso che si chiude; esiste comunque una costruzione geometrica che permette di trasferire le distanze *sul foglio*; con questa ulteriore specifica, le due definizioni diventano equivalenti. Rudy ritiene che la limitazione si possa riassumere con un terzo concetto statuente che "per usare la riga o il compasso vi servono due mani e non potete chiedere aiuto"; infatti punto cruciale è impedire che usando il compasso facciate un segno ad una distanza predefinita sulla riga.

Abbiamo già discusso[16] la cosa, quindi lasciamola lì. Se ci pensate un attimo (o se andate a rivedervi il pezzo) vi accorgete che tutti questi discorsi servono a *costruire dei numeri* ossia a *risolvere delle equazioni;* le limitazioni di cui sopra, sostanzialmente, vi impediscono alcune costruzioni.

Fine della punizione, adesso veniamo al punto *[sic]*, che come al solito dobbiamo introdurre un po' di notazioni: cominciamo da un problemino facile.

Se vi forniamo un quadrato di lato unitario, non dovreste avere problemi a costruire al suo interno un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$ e, nello stesso modo, potete risolvere il problema se vi forniamo un *foglio di carta* quadrato; piegate lungo la diagonale, riaprite e il gioco è fatto. In ***Figura 1*** trovate il tutto come abbiamo intenzione di schematizzarlo: la freccia magra significa "piega", quella grassa "riapri", e la curva con le frecce indica quali punti vadano portati a coincidere. Per essere chiari sino all'evidenza, qui abbiamo portato l'angolo in basso a

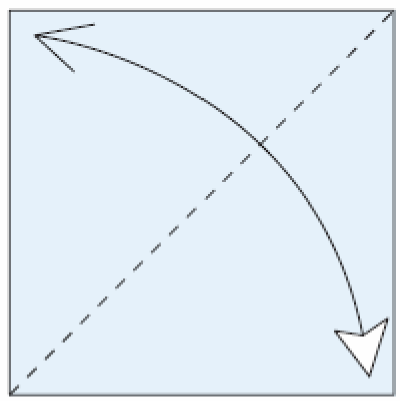


Figura 1 – Nascita di un irrazionale

[16] "La Trisezione dell'Angolo", Paraphernalia Mathematica, RM 32, agosto 2001.

destra a coincidere con quello in alto a sinistra, piegato e quindi riaperto il tutto.

Non dovreste avere problemi a dividere il lato del quadrato in due parti, e l'ottenimento di qualsiasi frazione della forma $\frac{1}{2^n}$. Una volta data un'occhiata al caso $n = 8$, dovrebbe essere elementare: lo trovate in ***Figura 2***. Notate che, gratis, abbiamo tutti i numeri della forma $\frac{m}{2^n}$.

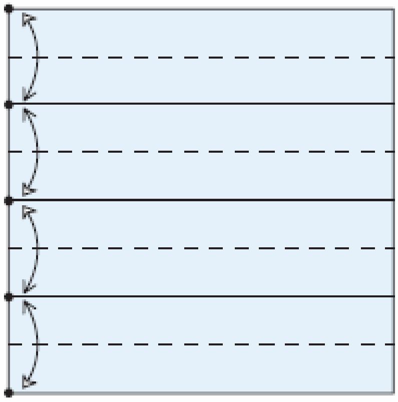


Figura 2 – Nascita di una potenza

Se adesso sostenete che questo giochino manca della levità ed eleganza delle costruzioni con riga e compasso, siamo completamente d'accordo; volendo ottenere una *ben precisa* frazione, vorremmo, possibilmente facendo un po' meno di $2^n - 1$ pieghe, ottenere solo quel valore. Qui, per risolvere il problema, ci vengono in aiuto due cose: tanto per cominciare il fatto che qualsiasi frazione il cui denominatore sia una potenza di 2 è esprimibile in *binario* con un numero *finito* di cifre (pensateci un attimo: è evidente), mentre il secondo è un mio vecchio amico. Esempio? Esempio[17].

$$\begin{aligned}\frac{25}{32} &= 0.11001_2 \\ &= 1\times 2^{-1} + 1\times 2^{-2} + 0\times 2^{-3} + 0\times 2^{-4} + 1\times 2^{-5} \\ &= \frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}\times\left(0+\frac{1}{2}\times\left(0+\frac{1}{2}\times(1)\right)\right)\right)\right).\end{aligned} \qquad \texttt{[7.1]}$$

Ossia, ad ogni passo, o aggiungete 0 e dividete per 2, o aggiungete 1 e dividete per 2.

Supponendo ad un certo punto vi ritroviate con un certo valore r, dovete aggiungere uno dei due valori e quindi ~~piegare in~~ dividere per 2; i due casi (e il risultato) sono illustrati nella ***Figura 3***.

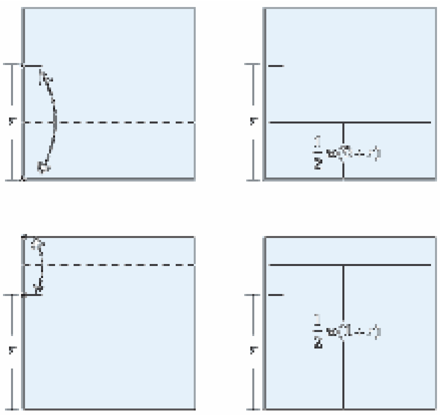


Figura 3 – O l'una, o l'altra

Insomma, per ottenere un valore frazionario:

1. Scrivete la frazione in binario
2. Partendo dal bit ***meno significativo***:
   2.1. Se la cifra è 1, piegate la parte *superiore* sulla piega precedente e riaprite;
   2.2. Se la cifra è 0, piegate la parte *inferiore* sulla piega precedente e riaprite.

Facile, semplice, preciso... e richiede solo n pieghe[18]!

[17] Per chi non l'avesse capito, il mio "amico" è l'algoritmo di Hörner per il calcolo dei polinomi: lo trovate in terza riga. Provate a calcolare i valori di una distribuzione di Poisson senza usarlo, e Excel esplode prima di subito.

[18] Esistono altri metodi preferiti dagli specialisti, ma questo secondo noi ha un'armonia e una potenza insuperabili.

Adesso qualcuno di voi probabilmente pensa che qui si stia tirando a fregare; lo sanno tutti che, a parte qualche caso particolare, le frazioni scritte in binario sono sequenze infinite; provate già solo con $\frac{1}{3}$, e auguri.

Se adesso vi sta nascendo un piccolo dubbio, siete scampati alla perfidia di Rudy; infatti, il metodo per dividere con l'origami un foglio in tre parti ve lo ha già spiegato[19]. Adesso affrontiamolo in un modo un po' più formale; partiamo dal fondo, che tanto sapete come va a finire. Riferimento, ***Figura 4***.

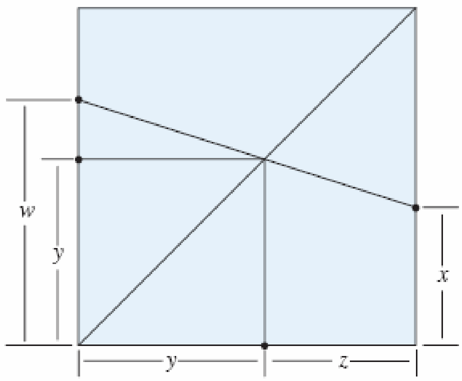


Figura 4 – Va a finire così

Partiamo con una piegatura lungo la diagonale e supponiamo di costruire due divisioni "facili" sui due lati verticali, di lunghezza rispettivamente w e x e tracciamo la piega che unisce queste due divisioni; è immediato che il punto individuato dall'incrocio tra questa piega e la diagonale sarà proiettabile sulla base e sull'altezza permettendo di individuare i punti che dividono quei segmenti ad una distanza y.

Adesso, cerchiamo di calcolare sia y che il suo complemento $z = 1 - y$.

$$\begin{aligned} y &= \frac{w}{1+w-x}, \\ z &= \frac{1-x}{1+w-x}. \end{aligned} \qquad \texttt{[7.2]}$$

L'idea è di prendere le due divisioni iniziali w e x tali che siano "facili" da costruire (o meglio, che si sappia costruirle: ad esempio, frazioni binarie) e quindi da queste costruire y (o z) *non binaria*, che indicheremo con $\frac{a}{b}$. Partiamo quindi da:

$$\begin{aligned} w &= \frac{m}{p}, \\ x &= \frac{n}{p}, \end{aligned}$$

dove m e n sono interi opportuni minori di p e quest'ultimo è una potenza di 2.

La `[7.2]` diventa allora:

$$\begin{aligned} y &= \frac{m}{p+m-n}, \\ z &= \frac{p-n}{p+m-n}. \end{aligned} \qquad \texttt{[7.3]}$$

Che, anche se non sembra, è quello che cercavamo; infatti, possiamo procedere in questo modo:

[19] Paraphernalia Mathematica di RM 45, Ottobre 2002. Seconda puntata di "Suppergiù Platonicamente Perfetto". Il numero precedente (prima puntata) è dove vi avevo dato il compito.

1. Definire $p = 2^n$ maggiore o uguale sia di a che di $b - a$.
2. Definire $m = a$ e $n = p - a + b$.
3. Costruire i punti $w = \frac{m}{p}$ e $x = \frac{n}{p}$ sulle due altezze utilizzando il metodo binario e unirli con una piega.
4. Costruire la diagonale.

In questo modo, l'intersezione tra le due pieghe definisce la frazione cercata sia come altezza dalla base che come distanza dall'altezza.

Se, ad esempio, cerchiamo $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, dobbiamo utilizzare $p = 4$, $m = 1$, $n = 2$ e la sequenza è indicata in ***Figura 5***. In questo modo, potete costruire divisioni teoricamente per qualunque rapporto[20].

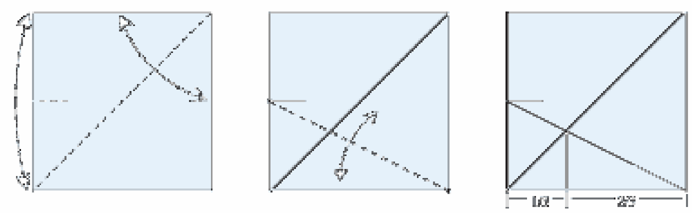


Figura 5 – Dovreste ricordarvelo

Insomma, radici, frazioni... Tutto quello che avevamo costruito con Euclide possiamo tranquillamente costruirlo anche con un foglio di carta.

Finito? No. Provate a seguire la piegatura qui sotto.

1. Marcate con una piega, nel quadrato $ABCD$, un angolo qualsiasi $\angle PBC$.
2. Piegate lungo una linea EF qualsiasi parallela a BC.
3. Piegate BC su EF ottenendo GH e riaprite.
4. Portate l'angolo B in modo tale che il punto E giaccia su BP e B su GH.
5. Piegate lungo la piega passante per il punto G (questa è una piega di due strati), generando sul lato AD il punto J.
6. Aprite
7. Estendete la piega da J a B, piegate BC su BJ e riaprite.
8. L'angolo $\angle PBC$ è ***trisecato***.

Trovate il disegno della ***Trisezione di Abe*** in ***Figura 6***, casomai la cosa qui sopra sia troppo astratta.

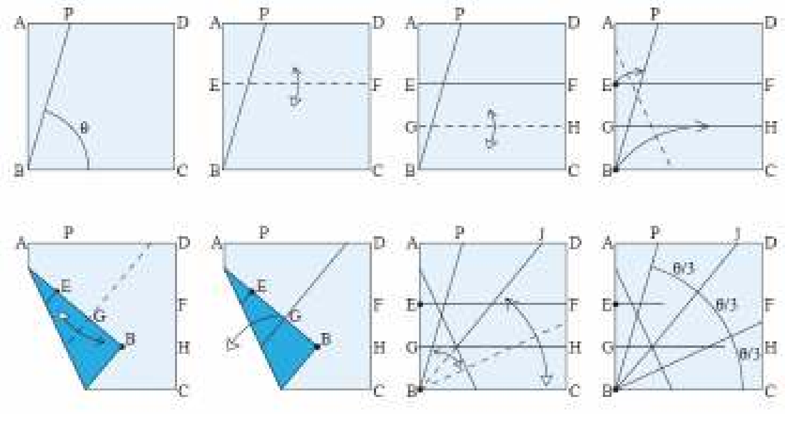


Figura 6 – Forse Hobbes aveva ragione

Adesso non venite a dire che la cosa funziona solo con gli

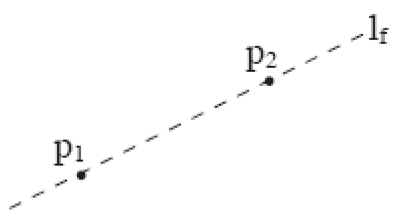
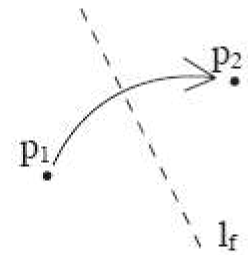
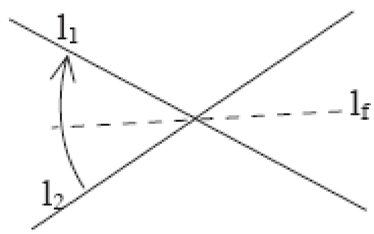
[20] Sempre il nostro Lang narra che per una delle sue creazioni (la *Tartaruga di palude*) fu costretto a dividere un lato in *quindicesimi* e l'altro in *settantottesimi*. No, non vi spieghiamo.

angoli minori dell'angolo retto: tanto per cominciare sarebbe una piccineria da parte vostra, e poi esiste la costruzione di ***Justin*** (francese, e si arrabbia se lo leggete alla giapponese) che vi divide in tre qualsiasi angolo al centro di un foglio. Però non è bella come quella qui sopra[21].

Mentre stiamo parlando di *gaijin*[22], ne approfittiamo per ricordare che l'austriaco ***Geretschläger*** ha dimostrato che è costruibile qualsiasi $N-\text{agono}$ per cui N sia un numero ***primo*** della forma[23] $2^n 3^m + 1$; combinando questo con il metodo di sezionamento di Justin (che ha il pregio del mettere l'angolo "in mezzo", il che è più comodo per costruire poligoni), si ottiene che è costruibile qualsiasi poligono per cui l'espressione tra parentesi di $N = 2^j 3^k \left(2^n 3^m + 1\right)$ sia primo; questo, per $N \leq 20$, lascia fuori solo $N = 11$.

Bene, dopo questo *rush* scarsamente organizzato, forse è meglio se prendiamo le cose un pochino più all'Euclide. Nel senso che proviamo a partire da qualche assioma.

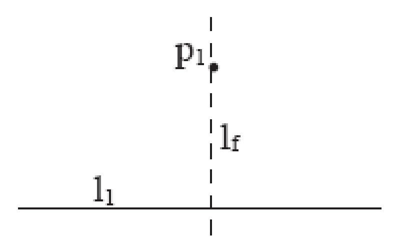
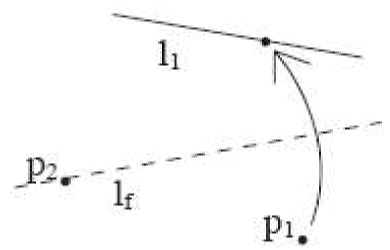
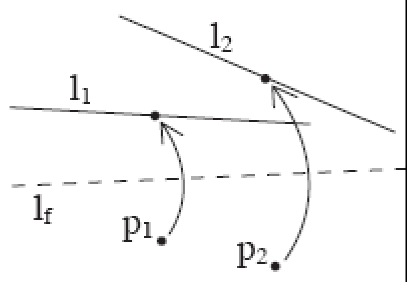
Siccome l'origami è decisamente operativo, più che mettersi a definire cinque concetti tende a focalizzarsi su quelli che sono gli strumenti, ossia *quali siano le pieghe necessarie*. Negli anni settanta, ***Humiyaki Huzita*** ha catalogato le pieghe principali da un punto di vista strettamente operativo; questi oggetti, secondo una terminologia molto diffusa che a noi (e a Lang) non è molto simpatica (preferiamo "operazioni"), sono definiti gli ***assiomi dell'origami***.

Dati due punti p_1 e p_2, si può tracciare una linea che li connetta.	
Dati due punti p_1 e p_2, si può piegare p_1 su p_2.	
Date due linee l_1 e l_2, si può piegare l_1 su l_2.	

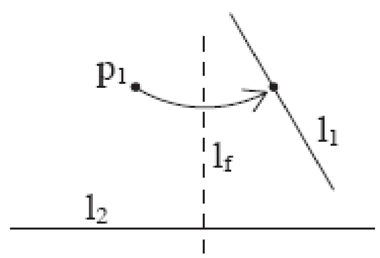
[21] Non solo, ma se volete un'esibizione di vero virtuosismo, andate a vedervi la costruzione dello *Scorpione* di Lang: c'è un angolo da dividere in *sette*!

[22] Sarebbero i non-giapponesi, in Giappone. Attenti che è un insulto.

[23] Noti come *Primi di Pierpont*.

Dati un punto p_1 e una linea l_1, si può effettuare una piega perpendicolare a l_1 passante per p_1	
Dati due punti p_1 e p_2 e una linea l_1, si può effettuare una piega che porta p_1 su l_1 passante per p_2.	
Dati due punti p_1 e p_2 e due linee l_1 e l_2 si può effettuare una piega che porta p_1 su l_1 e p_2 su l_2.	

Koshiro Hatori, successivamente, ha pensato bene di aggiungerne uno:

Dato un punto p_1 e due linee l_1 e l_2 si può effettuare una piega perpendicolare a l_2 che porta p_1 su l_1.	

Totale sette, come Euclide. Ma fanno più cose.

La cosa strana succede quando si guarda *chi fa cosa*. Con i primi cinque risolvete qualsiasi equazione quadratica a coefficienti razionali, e il settimo vi permette di risolverne qualche altra; quello che frega Euclide, comunque, è il *settimo*; cerchiamo di chiarire il concetto con un esempio.

Prima trisechiamo il foglio (già visto), quindi applichiamo il sesto assioma portando il punto a destra della prima trisezione sulla linea della seconda trisezione e il punto a destra della base sull'altezza. Due punti che vanno su due linee; complicato da capire? Vi facciamo il disegno in ***Figura 7***, e vi diciamo anche *a cosa viene uguale un certo segmento.*

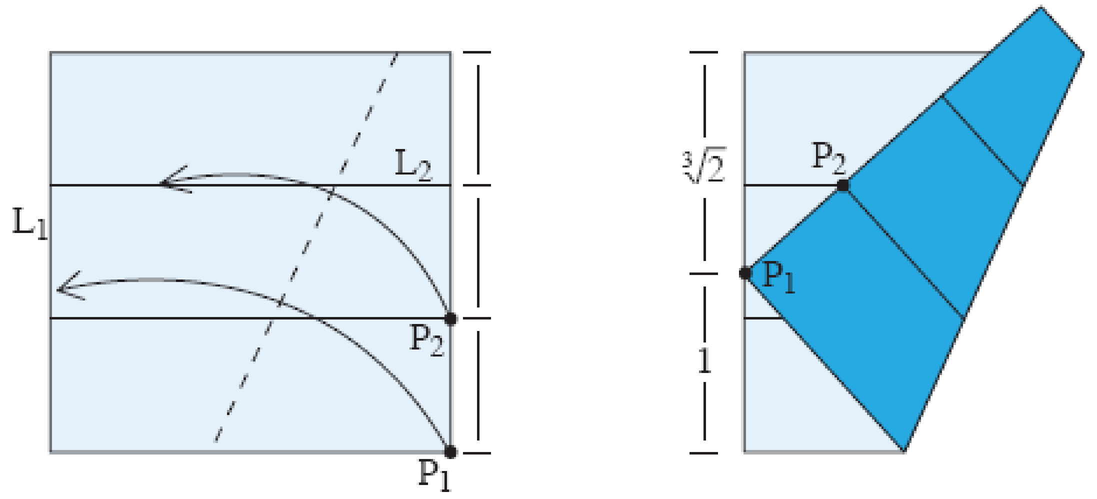


Figura 7 – La potenza del Sesto

et voila, abbiamo anche duplicato il cubo...

Ora, se qualcuno vuole emulare Karl Marx per quanto riguarda la tesi di laurea[24] e ha intenzione di discutere una cosa dal titolo "*Un confronto tra le geometrie di Euclide e di Huzita-Hatori*, siamo pronti a fornire una serie di link. E se ci passa il PDF, lo mettiamo nel sito.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[24] Carletto si è laureato con "Un confronto tra le filosofie naturali di Democrito ed Epicuro" (secondo lui vinceva Epicuro). Approfittiamo sadicamente dell'ultima nota nell'ultima pagina per comunicarvi che Spirali ha pubblicato i *Manoscritti Matematici* di Marx (a cura di Augusto Ponzio, 196 pagine, 25 euro). Ce lo facciamo regalare per Natale, poi vi diciamo.