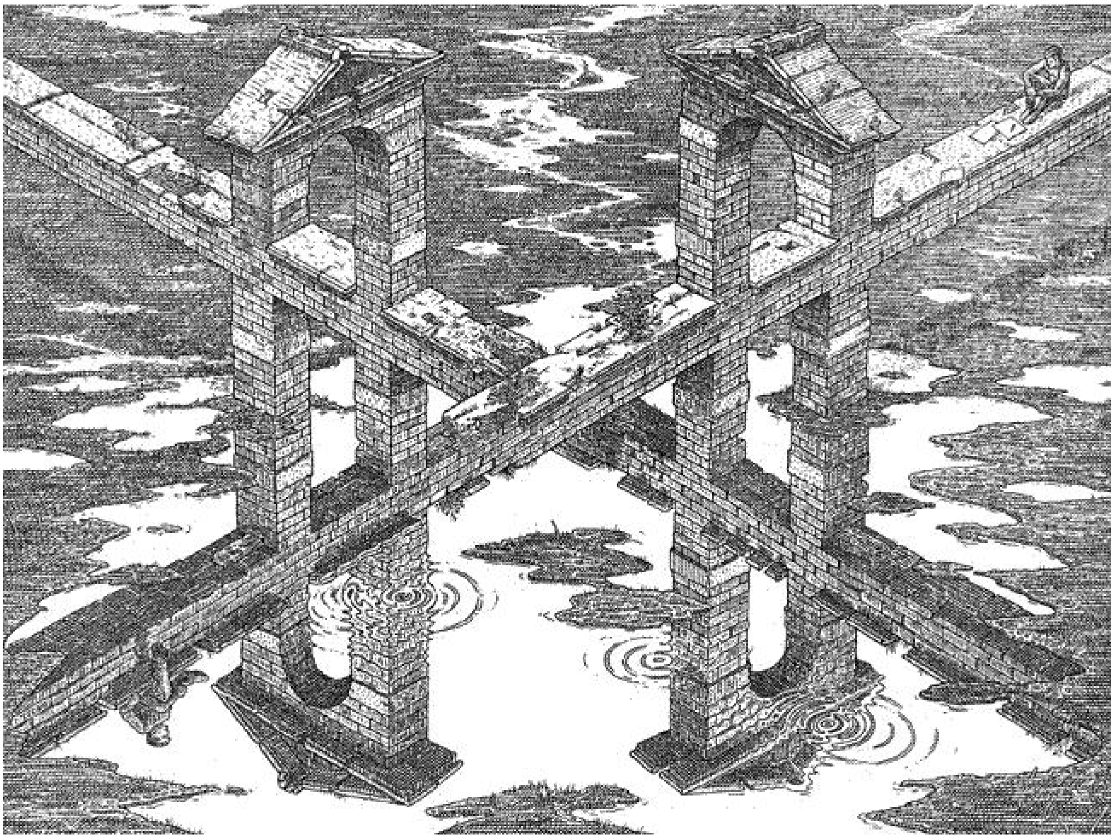
Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 090 - Luglio 2006 - Anno Ottavo



Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 089 ha diffuso **1059** copie e il **28/06/06** alle **22:37** per Google eravamo in **16400** pagine.

Istvan OROSZ alla fine dell'altro millennio si è ispirato, per molte delle sue opere, a *Belvedere* e a *Casa sulla Cascata* di Escher. In copertina, ***Crossroads***, acquaforte, 21x32cm, T: 85+P.A.(N.S.).

1. Intendere e Volere

Ogni verità passa attraverso tre stadi distinti:
inizialmente viene messa in ridicolo;
poi viene fieramente combattuta,
e alla fine viene considerata del tutto ovvia.
*(*Arthur Schopenhauer*)*

Forse per il loro essere veicolo essenziale di ogni informazione, comunicazione, emozione; o forse invece perché sono le nostre compagne così assiduamente frequentate ogni giorno; comunque sia, è innegabile che le parole esercitino un fascino profondo su chiunque si degni di soffermarsi un istante sulla loro natura. Sono oggetti mutevoli, quasi vivi, cambiano di significato adattandosi ai tempi e ai luoghi, e nel farlo mantengono la storia dei cambiamenti che le caratterizza.

Questo, ad esempio, è tempo di vacanze, per gli studenti: ed è indubbio che per la totalità di essi la parola "vacanze" sia il perfetto ed assoluto contrario della parola "scuola". Eppure, anche se il termine "vacanza" palesa bene, ancora oggi, il suo senso compiuto di "essere vuoto, sgombro, libero da occupazioni", certo il suo contrario "scuola" rischia di sorprendere qualcuno. Viene infatti dal greco ***skolé***, e il suo significato originario è inquietante: "ozio, riposo"; qualcosa, insomma, con un significato esplicitamente più nullafacente delle vacanze stesse. E siccome ogni sorpresa fa da anticamera ad una nuova conoscenza, ecco che siamo costretti a ritornare con la mente al tempo e al luogo dove quella parola è nata: un migliaio di anni prima di Cristo, forse, e dalle parti dell'Attica, probabilmente. Dove pastori e contadini si aggregavano nelle prime città-stato greche, passando tutto il tempo disponibile al lavoro nei campi, o sotto le armi, o nel tentativo di rubare un po' di pesce al mare. Ma era anche uno dei primi momenti, nella storia di tutta l'umanità, in cui una parte della popolazione poteva – talvolta – dedicarsi al pensiero speculativo. Certo, non la si poteva considerare ancora una vera occupazione: i bisogni primari, le esigenze prettamente naturali scatenate dalla necessità di sopravvivere occupavano ancora la quasi totalità del tempo. Procacciarsi il cibo, costruirsi un riparo, difendersi dai predatori (per quanto ormai a predare e ad essere predati siano sempre e solo uomini) sono tutte attività non procrastinabili. Ma nei rari istanti in cui le esigenze primarie sono quietate, in quei brevi periodi in cui non c'è una guerra da combattere, né freddo da vincere (complice anche il clima della primavera ellenica), né cibo da procacciare, allora ci si può dedicare davvero ad un po' di "ozio" e di "riposo". È solo sotto queste rare condizioni che ci si può interrogare sulla natura del mondo e delle cose, su fenomeni e noumeni. Ed è solo così, grazie a piccoli tempi rubati, che nasce la filosofia occidentale, quando il lusso delle chiacchiere oziose è lecito e consentito. Durante il riposo e l'ozio: in altre parole, durante la ***skolé***.

Il nome, la parola, crescerà: e si riempirà dei significati di pedagogia, di educazione, di istruzione, fino a diventare la "scuola" di oggi con le sue mille varianti. Ciò non di meno, un minimo di archeologia etimologica ci ha costretto a tornare indietro, a ricucire le distanze e i tempi, e ad immaginarci per un istante la vita degli antichi ateniesi. E tutto a causa di una sola parola: perchè è quasi infinito il numero di viaggi che si possono fare scavando dentro le parole, o anche limitandosi a spolverarle appena appena, soffiando via quella patina che ne nasconde la vera natura, quella sottile pellicola che le rende banali. Quel velo posato dall'abitudine ad usarle senza prenderle realmente in considerazione. Siamo invasi da parole greche, latine, arabe, francesi, spagnole[1]. Abbiamo parole nuove, con meno d'un secolo di vita, che consideriamo del tutto antiche; abbiamo parole

[1] *Interessante l'assenza dell'inglese, nell'elenco. L'unica "vecchia" parola che mi viene in mente è "boicottaggio" (da Lord Boycott, ma non so neanche in che secolo l'abbia detto) [RdA]*

moribonde, che sopravvivono solo grazie a qualche luogo comune[2]; e parole già morte, scomparse, la cui esistenza è testimoniata solo da indizi dispersi in altre parole.

Le catene dei comparativi e superlativi speciali che si imparano alle elementari rimangono impresse per tutta la vita, e non stupisce più lo strano ondeggiare di serie di parole come "buono – migliore - ottimo" o "cattivo – peggiore - pessimo"[3], anche se basta soffermarcisi un attimo per capire che ci devono essere dei bei segreti etimologici da scoprire. Ma quel che è peggio è che terne come "interno - interiore – intimo", "esterno - esteriore – estremo", devono ormai essere totalmente dimenticate nella loro successione di grado positivo, comparativo e superlativo, visto che abbondano articoli di riviste che promettono di svelare i segreti "più intimi" di attori e cantanti (o, su altri fronti, di mostrare tutte le immagini degli sport "più estremi"). Del resto, sembra che il nome di una delle più note marche di biancheria sia proprio un superlativo di superlativo (e perfino declinato al plurale); col che si dimostra, caso mai ce ne fosse bisogno, che le lingue sono davvero mobili e dinamiche quanto gli insetti d'estate. Ma, almeno in questi casi appena raccontati, tutte le parole delle "terne" godono di buona salute: evento, questo, che non sempre è garantito. Anche solo per assonanza e per significato, non è difficile sospettare che parole come "ultimo" e "primo" potrebbero dover far parte della allegra famiglia dei superlativi anomali. Con un po' di pazienza, si arriva anche a dedurre i comparativi corrispondenti ("ulteriore" e – guarda un po' – "priore"), ma i "gradi positivi" resistono strenuamente alla ricerca. Almeno finché si limita l'indagine alla lingua italiana: sbirciando un po' tra i fogli del solito progenitore latino, è quasi immediato trovare in "ulter" ("che è la di là") il termine iniziale di ulteriore-ultimo e nella preposizione "prae"[4] ("che viene prima") il termine positivo di priore-primo.

Parole scomparse, ma con prole sana e robusta: pensate all'aggettivo "carente", che sembra urlare al mondo la sua natura originale di voce verbale, puro participio presente. Ma di quale verbo, forse di "carere"? La lingua italiana si rifiuta di riconoscerlo come proprio, un sì bel verbo, tanto è vero che abbondano perifrasi che usano proprio la perifrasi "essere carente di qualcosa"; eppure ci sono un almeno un paio di stupende etimologie che lo richiamano a gran voce. Una di queste è il verbo "mancare": se al verbo fantasma "carere" concediamo il significato esteso di "errare, sbagliare", il "mancare" è esplicitamente uno "sbagliare di mano", specialmente quando la mano[5] è impegnata nel lanciare qualcosa. Ma l'uomo ha due coppie di arti, non solo una: così come può sbagliare di mano, può sbagliare anche di piede. L'errore di piede è però inevitabilmente un errore

---

[2] Il nostro GC suggerisce di provare a capire cosa sia il "palmento", regolarmente citato nel modo di dire "mangiare a quattro palmenti". E siccome il GC è soprattutto matematico, esorta anche a scoprire perché di palmenti ce ne vogliano proprio quattro, per un'abbuffata degna di tale nome.

[3] Senza contare la bella storia di una parola come "cattivo", che è precipitata etimologicamente da un significato triste ad uno moralmente riprovevole. "Captivus" è parola nota agli studenti di latino di ogni ordine e grado, ed è palese il suo significato derivato dalla stessa radice di "capt-are" ("catturare", poi anche "ricevere", nel senso di "catturare un'onda"…). Il "captivus" è insomma il "prigioniero" (qui ci vorrebbe una nota a piè di pagina, se non fosse che siamo già dentro una nota a piè di pagina: come canta l'Omero tradotto dal Monti, Iliade, Libro I: "Dunque terrai tu la tua preda, ed io – della mia privo rimarrommi? Il sia. Ma giusti – concedeanmi gli Achivi altra **captiva** – che questa adegui e al mio desir risponda". A parlare è Agamennone, la captiva sarà poi Briseide, originariamente proprietà di Achille; a causa di ciò il Pelìde si arrabbierà come solo lui sa fare, e nasce così la storia più famosa del mondo, tanto che perfino Brad Pitt è stato costretto ad interpretarla), e il significato è così ben marcato che non è immediato capire (sì, lo sappiamo: anche "capire" viene dalla stessa radice… si rischia davvero di non finirla più) come si possa giungere al significato di "malvagio". È che bisogna lasciare i Greci e i Romani per arrivare al Medioevo, dove i malvagi venivano considerati come posseduti dal Demonio: posseduti, presi, prigionieri del Diavolo, insomma. E da "captivus Diaboli", "prigioniero del Diavolo", a "cattivo-malvagio", il passo è finalmente breve.

[4] Non sappiamo cosa ne pensino i grammatici in merito, ma per dei matematici affascinati dal paradosso di Russell e dal vortice dell'autoreferenza, il dover definire "prae" tramite la parola "preposizione" è veramente divertente.

[5] E da qui potremmo forse avventurarci in ricerche politicamente poco corrette che potrebbero rivelare inaspettati rapporti tra sbagliare-mancare-mancino; ma siccome il GC è un mancino orgoglioso e permaloso, ce ne guardiamo bene.

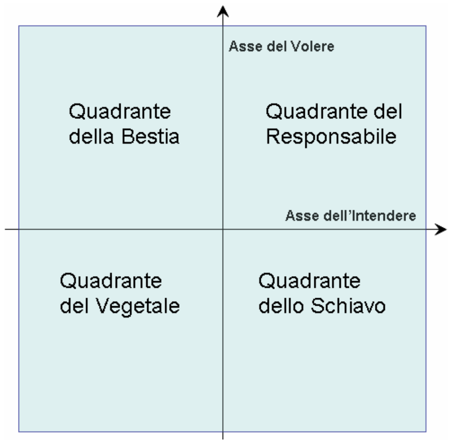
di percorso: il piede sbaglia deviando dalla retta via, non imboccando la strada giusta ma perdendosi in quella sbagliata, che porta fuori direzione. E resta allora del tutto evidente il significato, soprattutto metaforico, dell'errore del piede (pes) che altro non è che il "peccare".

E la storia delle parole è continuamente disseminata di queste parole fantasma che nascono con un significato, crescono con un altro, generano altre parole con significati ancora distinti e infine spariscono del tutto, lasciando una progenie quasi del tutto irriconoscibile. In questo senso, è naturale che alcune regole vengano violate: se parole originariamente di grado superlativo finiscono con l'assumere in definitiva un valore di ritorno al grado positivo, allora è naturale che possano essere successivamente rielaborate in nuove regole e nuova vita. Anche se "primavera" viene dall'espressione latina "all'inizio della primavera" ("primo vere"), ormai la parola ha un suo dignitoso e proprio significato, e non si può considerare "sbagliata" l'espressione italiana "all'inizio della primavera", accusandola di ridondanza. Come non si può ragionevolmente impedire a qualcuno di chiamare "cane bulldog" il bulldog, solo perché all'interno del nome esiste già, incluso nel prezzo, il termine inglese equivalente "dog". Anzi; uno dei problemi più divertenti che si presentano a chi, per lavoro, deve usare spesso la lingua franca del XX secolo[6], è proprio la "perdita" di significante e significato in cui si finisce talvolta per eccesso di uso dei barbarismi. In italiano la parola "hardware" ha un ben preciso significato determinato dall'ambito di utilizzo della parola, e non corre nessun rischio di serio conflitto con il termine "ferramenta", cosa che invece non vale per un madrelingua inglese. È evidente che in questo modo i non-anglofoni si perdono una pletora di divertenti giochi di parole, ma in compenso riescono a pronunciare frasi del tipo "Vado in ferramenta per cercare un po' di hardware. Se non trovo quel che mi serve a far passare il numero giusto di bit e di byte, giuro che prendo a morsi il commesso" senza rischio di trasformarle in autentici scioglilingua.

Per quanto divertenti possano sembrare, è comunque bene non dimenticare che le parole sono anche e soprattutto veicoli di idee, e come tali sono talvolta serie e pesanti come macigni. In un processo, ad esempio, il destino dell'imputato è legato a doppio filo ai concetti espressi dai verbi "intendere e volere". Per una sorta di coincidenza filosofica (o forse per qualcosa di diverso da una mera coincidenza) i due verbi che sanciscono giuridicamente la "imputabilità" d'un soggetto si ritrovano quasi perfettamente nell'opera principale di Arthur Schopenhauer, il celebre "Mondo come Volontà e Rappresentazione". In realtà, il concetto giuridico di "intendere" e quello schopenhaueriano di "rappresentazione" non sono coincidenti, anzi: è comunque indiscutibile che per poter raggiungere la filosofica rappresentazione del mondo così come la intende Schopenhauer è necessario prima ottenerne l'intendimento anche nel più piano senso giuridico. Sembra comunque evidente che i padri fondatori del diritto avessero in mente altre linee guida, quando hanno concordato sui due termini che stabiliscono le regole per una azione così delicata: decidere se un individuo possa essere processabile per un reato oppure no. Nello scegliere due verbi distinti e non ridondanti, effettuano quella che in matematica potrebbe essere chiamata "scelta degli assi": le due "variabili giuridiche" devono essere indipendenti, ortogonali fra loro, e allora non è del tutto fuori luogo immaginare un piano cartesiano con la "capacità di intendere" in ascissa e la "capacità di volere" in ordinata. Solo coloro che rientrano nel primo quadrante del piano sono individui responsabili, e pertanto imputabili di un reato.

Per gioco, si può immaginare di dare un nome agli altri tre quadranti: il secondo, popolato da esseri in grado di volere senza essere capaci di intendere, ha un aspetto quanto mai spaventoso. È il quadrante dell'istinto, e come tale rifugge ogni giudizio morale: potremmo chiamarlo – in versione ottimistica – il "Quadrante del Bambino" o, in versione

[6] Ci riferiamo all'Inglese, anche se ci rendiamo conto che, almeno nei primissimi anni del XX secolo, tale titolo non era ancora di sicurissima attribuzione. Per quello del secolo XXI, sospendiamo il giudizio; è probabile che le "nomination" siano ristrette all'Inglese e al Cinese mandarino, comunque…



più pessimistica, il "Quadrante della Bestia". Se alla fine optiamo per questa seconda terminologia non è per pessimismo cosmico leopardiano, quanto piuttosto perché lo status di bambino è per propria natura transitorio, e forse male rappresenterebbe una condizione che – purtroppo – è invece spesso tutt'altro che volatile. Il volere senza intendere è comunque inquietante, anche se non mancano rappresentanti. Il Terzo quadrante, al contrario, è difficile da marchiare: trovare un simbolo per chi, al tempo stesso, non è in grado né di intendere né di volere è estremamente difficile. Tentiamo un'approssimazione definendolo "Quadrante del Vegetale", ma in realtà nutriamo seri dubbi sul fatto che le piante, dal loro punto di vista, siano realmente prive sia della capacità di intendere che di quella di volere. Più che altro, è il vegetale non propriamente detto, quello che suggerisce la duplice carenza: ossia un essere umano "ridotto" allo stato di vegetale, del tutto incapace di interpretare il modo e di agire in qualche modo su di esso. Il Quarto Quadrante, infine, è quello che richiama la condizione probabilmente più densa di sofferenza intellettuale. Essere in grado di intendere ma non avere la possibilità di volere è condizione che si riesce ad immaginare solo sotto costrizione esterna: quella di uno Schiavo, ad esempio, pienamente umano in ogni suo aspetto ma privato dal negriero della possibilità di "volere" qualsivoglia desiderio. O, in forma appena più blanda, nella figura del soldato costretto ad obbedire ad ordini che non condivide. È probabilmente per questa congiuntura che i soldati sono considerati "non imputabili" quando dimostrano di non aver fatto altro che obbedire ad ordini superiori. Anche se una situazione che forza un individuo alla rinuncia dell'esercizio della propria volontà è così palesemente violenta che dovrebbe essere sottoposta a processo essa stessa.

La piena responsabilità che è garantita dall'essere riconosciuti come collocabili nel Primo Quadrante del nostro piano cartesiano equivale, in gran parte, al riconoscimento di essere dotati di capacità di scegliere, di distinguere il bene dal male, di esercitare consapevolmente il libero arbitrio. È senza dubbio un indice importante di maturità culturale, per una società, il riconoscere l'imputabilità solo a chi può compiere una scelta volontaria. È un esercizio intellettuale non troppo difficile quello di immaginare, per contro, culture che puniscono individui che si collocano nel II, III o IV quadrante del nostro piano. Inevitabilmente la sensazione sarà quella di aver a che fare con culture primitive, o fondamentaliste, o violente.

E, tanto per tornare ai segreti nascosti nelle parole, è quantomeno sorprendente che l'etimologia di "eresia" sia pienamente contenuta nel concetto di "scelta"[7]: e la sorpresa è di duplice natura, perché in parte stupisce che una parola apparentemente neutrale come "scelta" sia poi precipitata nel significato bloccato eticamente di "cattiva scelta, esecrabile scelta" (almeno dal punto di vista dell'uso della parola fatto dai seguaci dell'ortodossia); in parte, questo sembra in qualche modo chiudere il cerchio dei significati, perché da "Scelta" si arriva da una parte al "Libero Arbitrio" e dall'altra all'Eresia. In un certo senso è ragionevole che l'esercizio della scelta produca, in ultima analisi, una vera e propria presa di posizione, una sorta di schieramento irrevocabile e definitivo.

In matematica, la scelta sembrerebbe non dover aver quasi diritto di cittadinanza. Nell'immaginario consueto, la matematica regolamenta con rigore ogni aspetto di sé stessa, lasciando ben poco al libero arbitrio. Si può incontrare il termine "scegliere" –

[7] Eresia viene dal Greco "airesis", che significa "scelta", "elezione", e da qui anche "partito", "setta". Tra l'altro, è la stessa radice che si trova nel suffisso "-eresi" delle parole come "Aferesi", "Dieresi", "Sineresi", etc. E siamo pronti a scommettere che sempre da qui tragga origine anche "Prostraferesi"; dubitiamo valga lo stesso per "Bisezione", però. Peccato.

quasi sempre nel senso limitato di "scegliere a caso" – un elemento piuttosto che un altro solo quando dietro l'angolo vi è un teorema o un vincolo tale per cui la "scelta" dell'uno o dell'altro risulta essere del tutto indistinguibile. E in questo senso la matematica ha proceduto per molti anni, fino a quando – come al solito – non è arrivato a sconvolgere il placido esercizio della scelta il solito rompiscatole: l'Infinito. È infatti proprio l'Infinito a complicare le cose in una attività apparentemente banale: immaginate di avere un cesto di mele, un sacchetto di biglie e un cassetto pieno di calzini. Non ci vuole certo un grande sforzo intellettuale per comprendere che è possibile prendere una mela dal cesto, una biglia dal sacchetto e un calzino dal cassetto per ottenere una specie di "gruppo misto" formato da un rappresentante per ognuno dei tre gruppi originali. E infatti la Teoria degli Insiemi ha teoremi a sufficienza per mostrare che questa azione è sempre possibile[8], purché il numero iniziale degli insiemi sia *finito*. Quando questa certezza non c'è più, quando il numero degli insiemi iniziali è infinito, è assai probabile che non cambi niente. È insomma probabile che la formazione di un nuovo insieme costituito da un elemento di ogni insieme originale sia sempre possibile, ma – e qui sta il guaio – questa cosa non è dimostrabile[9], e occorre imporla come assioma. Assioma che, con l'originalità propria dei matematici, viene chiamato "Assioma della Scelta".

Il papà dell'Assioma della Scelta si chiama Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo, nasce il 27 Luglio 1871 a Berlino, e a giudicare dalla foto doveva essere un amante dei golden retriever. Come la foto stessa suggerisce, il procedere della vita e della carriera di Zermelo non assomiglia certo ai salti e alle rapide d'un torrente impetuoso, ma piuttosto ad un fiume lento e ordinato, dagli argini alti e sicuri.

Nasce da famiglia borghese, figlio di professore di liceo, e quindi in qualche modo già "naturalmente" predisposto verso la carriera accademica. Dopo gli studi liceali, passa a frequentare corsi universitari negli atenei di Berlino, Halle e Friburgo; questo non per una sorta di vagabondaggio intellettuale, quanto per il più semplice fatto che, a cavallo tra XIX e XX secolo, era così che si era soliti frequentare l'università in terra tedesca. E faceva parte dell'uso anche il non specializzarsi in maniera troppo decisa, almeno all'inizio. Zermelo studia matematica, fisica, e perfino filosofia: lo fa con dei docenti dai nomi assolutamente prestigiosi, come Planck, Schwarz, Husserl. All'inizio della sua carriera accademica vera e propria, sembra anzi essere destinato a portare i suoi contributi alla matematica applicata, se non esplicitamente alla Fisica Teorica; lavorerà infatti come assistente di Max Planck, inventore del primo Quanto della Teoria dei Quanti, che lo indirizzerà verso studi di fluidodinamica.

È ormai il 1897 e Ernst si trasferisce a Gottingen per completare il suo percorso di abilitazione professorale. Sarà proprio in quest'Università che lo farà, in pieno 1899.

---

[8] Beh, certo: la Teoria degli Insiemi è molto più rigorosa di questa prosa approssimata. Ad esempio parla proprio di "Insiemi" e non di cesti di mele o cassetti di calzini. Poi specifica bene "insiemi non vuoti", mentre noi non siamo stati lì a immaginare che il sacchetto di biglie potesse essere vuoto di biglie. E così via… ma il senso generale, almeno quello, dovremmo averlo mantenuto.

[9] La citazione più famosa del protagonista di questo compleanno è "*Autoevidenza non significa dimostrabilità*".

Giunge così l'alba del 1900, che per i matematici dell'epoca rimarrà marchiata a fuoco dalla celeberrima conferenza di Hilbert, dove vengono esposti i famosi 23 Problemi per il Nuovo Secolo al Congresso di Parigi[10]. Questa celebre conferenza indirizzò gli interessi di Zermelo, che cominciò seriamente ad interessarsi alla Teoria degli Insiemi e all'Ipotesi del Continuo. Lo stesso Hilbert aveva suggerito che il primo passo in questa direzione doveva necessariamente richiedere che ogni insieme potesse essere "ben ordinato"[11], dimostrazione che Zermelo ottenne nel 1904. Era risultato di alta rilevanza che gli fece ottenere subito la fama (e una cattedra a Gottingen). Già in questo risultato Zermelo fa uso dell'Assioma della Scelta. Anzi, a ben vedere, sussiste una quasi completa equivalenza tra l'Assioma della Scelta e la proprietà degli insiemi di essere "ben ordinati", il che causò a Zermelo critiche da parte dei colleghi: anche e soprattutto perché, all'inizio del Novecento, la Teoria degli Insiemi era ancora assai lontana dall'essere riconosciuta come universalmente valida. Forse proprio a causa di questo scetticismo Ernst si dedicò alla costruzione della Teoria Assiomatica degli Insiemi, gettandone da solo le basi fondamentali. Nel 1908, dopo aver risposto ai suoi critici con la pubblicazione di "Neuer Beweis", cominciò ad formalizzare la Teoria degli Insiemi con i primi sette assiomi: oltre al celeberrimo Assioma della Scelta vi si ritrovavano anche assiomi quali quello di Separazione, degli Insiemi Elementari, l'Assioma dell'Infinito e altri ancora. Non erano ancora sufficienti, però: il lavoro di assiomatizzazione fu ripreso e concluso da Fraenkel (e indipendentemente da Skolem), e infatti spesso si incontra la denominazione "assiomi di Zermelo-Fraenkel". Zermelo non andava matto per la notazione formale, ma se questo non dovesse valere per chi legge, ecco i dieci assiomi ZF, come li riporta Wikipedia:

- ***Estensionalità:***
$$\forall A, \forall B : A = B \iff (\forall C : C \in A \iff C \in B)$$
- ***Insieme Vuoto:***
$$\exists \varnothing, \forall A : \neg(A \in \varnothing)$$
- ***Coppia:***
$$\forall A, \forall B, \exists C, \forall D : D \in C \iff (D = A \vee D = B)$$
- ***Unione:***
$$\forall A, \exists B, \forall C : C \in B \iff (\exists D : C \in D \wedge D \in A)$$
- ***Infinito:***
$$\exists \mathbf{N} : \varnothing \in \mathbf{N} \wedge (\forall A : A \in \mathbf{N} \implies A \cup \{A\} \in \mathbf{N})$$
- ***Insieme Potenza:***
$$\forall A, \exists \mathcal{P}A, \forall B : B \in \mathcal{P}A \iff (\forall C : C \in B \implies C \in A)$$
- **Regolarità:**
$$\forall A : A \neq \varnothing \implies \exists B : B \in A \wedge \neg \exists C : C \in A \wedge C \in B$$

[10] Ne abbiamo già parlato nel compleanno di Hilbert, RM060.

[11] Per "ben ordinato" si intende un insieme i cui elementi rispettino le seguenti proprietà: 1) dati a e b elementi dell'insieme, deve necessariamente valere a<b, oppure a=b, oppure a>b. 2) Dati a, b e c elementi dell'insieme, se a<b e b<c, allora deve valere a<c. 3) Ogni sottoinsieme non vuoto dell'insieme ben ordinato deve avere un elemento minimo.

- **Separazione:**.

$$\forall A, \exists B, \forall C : C \in B \iff C \in A \wedge P(C)$$

- ***Rimpiazzamento:***

$$(\forall X, \exists! Y : P(X,Y)) \to \forall A, \exists B, \forall C : C \in B \iff \exists D : D \in A \wedge P(D,C)$$

- ***Scelta:***

  Dato qualsiasi insieme di insiemi non vuoti mutuamente esclusivi, esiste almeno un insieme che contiene esattamente un elemento in comune con ognuno degli insiemi non vuoti.

È solo il 1910 quando Zermelo lascia Gottingen per spostarsi all'Università di Zurigo: ha soltanto trentanove anni, ne vivrà ancora altri quarantatre, eppure la sua salute è già malandata al punto da fargli meditare il ritiro per questioni sanitarie. Quel galantuomo di Hilbert riuscì, grazie al suo ascendente, a fargli attribuire un premio di 5000 marchi[12] che avrebbero dovuto consentirgli di curarsi senza troppe ambasce. Nel 1916, impossibilitato a mantenere la cattedra zurighese sempre a causa della sua cattiva salute, si ritira nella Foresta Nera. Morirà nel 1953, il 21 Maggio, a Breisgau.

Oltre che per l'Ipotesi del Continuum e per aver gettato le basi della Teoria degli Insiemi, Zermelo è noto anche per aver pubblicato il primo teorema di Teoria dei Giochi: nel 1913, molto prima che Nash, von Neumann e Morgenstern cominciassero a rendere famosa questa semisconosciuta branca della matematica, Ernst Zermelo scriveva *"Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*"; in questo titolo si ritrova il teorema – assai semplice da esporre, anche se assai meno semplice da dimostrare – che in una partita a scacchi il Bianco può forzare la vittoria, oppure il Nero può forzare la vittoria, oppure entrambi i colori possono forzare almeno la patta. Può non sembrare un risultato memorabile, a prima vista, ma in realtà coinvolge aspetti già profondi della Teoria dei Giochi, ed è spesso riportato in letteratura come il "Teorema di Zermelo".

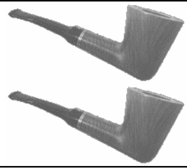
L'importanza dell'articolo di Zermelo sugli scacchi sta non tanto nel risultato, quanto nel modo in cui il matematico tedesco riuscì a dimostrarlo. Egli applicò un algoritmo di analisi a ritroso: per quanto puramente teorico in tempi nei quali l'idea di calcolatori elettronici era ancora lontana dall'essere realistica, il formalizzare le possibilità di una partita a scacchi un albero composto da un numero "finito" di nodi e rami apre un nuovo fronte teorico e computazionale.

È a partire da questo articolo che Turing e Shannon applicheranno l'analisi a ritroso e il teorema del minimax, in un estensivo lavoro di "riduzione" dei rami da esplorare. A questa potatura dei rami si aggiungerà poi la falce di Botvinnik, che rappresenta il perfetto punto di mezzo tra uomo e macchina scacchistica, essendo stato per tre volte campione del mondo di scacchi e ingegnere elettronico dedito allo sviluppo di algoritmi scacchistici. E il resto dell'avventura è principalmente una crescita della potenzialità di calcolo dei giocatori non-umani, fino alla vittoria di Deep Blue su Kasparov. Ma questa corsa, durata poco meno di un secolo, è pur sempre cominciata con Zermelo.

Chissà se ci pensavano, gli armeni, mentre vincevano le Olimpiadi di quest'anno.

[12] Con la motivazione "Per l'alto contributo alla Teoria degli Insiemi"

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Un problema diverso			
Quanto dura la memoria			

2.1 Un problema diverso

Mentre stiamo scrivendo, Alberto è appena uscito di casa per andare a svolgere lo scritto di Matematica dell'esame di terza media[13], con una calma e una tranquillità ampiamente invidiata dai due genitori, che hanno passato la mattinata ricordando le chiusure nel bagno di casa per emergenze dell'ultimo minuto. Va detto che la faccia era quella di chi si sta trattenendo a stento da un "machissenefrega...", anche se Rudy qualche segno di ottimismo lo sta mostrando: infatti, ha appena scoperto che *per rilassarsi* la sera prima Alberto si era messo a leggere un libro di problemi di logica (per gli storici e i biografi del futuro: lo Smullyan). Va detto che per questo mese era intenzione di Rudy proporre un problema che portasse finalmente un solo coniglietto, adattando e complicando opportunamente un problema di logica: l'assenza del libro principe nel ramo, purtroppo, gli ha tolto questa possibilità, costringendolo a ripiegare su un problema presentatosi a fine gennaio (sempre per gli storici e i biografi: trattasi del compleanno di Fred).

La quantità di Pesti per casa era di M teppisti, e dal rumore che facevano questa lettera ci stava benissimo sotto un segno di limite con un infinito dopo la freccia, anche se, oggettivamente parlando, M era ragionevolmente basso; ormai erano avanzati più pochi pasticcini (Doc era già passato dalla cucina) e si trattava di dividerli (possibilmente con un gioco) tra le pesti restanti.

Abbandonato dai giocatori (ma disponibile per il PuzzleMaster & ProblemMaker di Casa d'Alembert) giaceva in mezzo al tappeto un cubo grande formato da N^3 cubetti. Le facce del cubo grande erano state sporcate di marmellata, aranciata, cioccolata, cocacolata e altre schifezze, in modo tale da essere uniformemente coperte di un colore disgustoso ormai rappreso in una pellicola che solo un robusto passaggio in una robusta lavapiatti avrebbe staccato.

L'idea che ci è venuta è stata quella di utilizzare questi aggeggi per dividere i pochi pasticcini rimasti: disfatto il cubo grande e messi tutti i cubetti in un sacchetto, chi voleva il pasticcino pescava un cubetto (senza guardare) e lo lanciava. Se la faccia verso l'alto era sporca, aveva diritto al pasticcino; in ogni caso, vinceva l'indubbio onore di lavare il cubetto e uscire dal gioco.

"Sei sicuro che ci siano abbastanza pasticcini?"

"Probabilisticamente parlando, c'è il numero *esatto* di pasticcini che ci si aspetta peschino".

Quanti pasticcini erano rimasti?

[13] Se ci ricordiamo, in altra parte della rivista inseriremo il risultato dell'esame: non vi diciamo dove, così siete costretti a leggerla tutta.

2.2 Quanto dura la Memoria

Il motivo della "M" maiuscola è che in realtà si parla di "Memory", il gioco. Se non lo conoscete, vi forniamo un rapido ripasso delle regole.

Le carte sono messe a faccia in giù sul tavolo, e non vengono spostate (quindi meglio tenerle ordinate). Un giocatore gira una carta e la rende visibile anche all'altro giocatore; quindi ne gira un'altra.

Se le due carte "vanno d'accordo" vengono rimosse e rappresentano un punto per il giocatore che le ha girate; in caso contrario vengono rimesse a faccia in giù nella posizione originale. Si va avanti sino ad esaurimento delle carte in tavola.

Giusto per non comprare il mazzo apposta (esistono), diciamo che due carte "vanno d'accordo" quando corrispondono in valore e colore.

"Perché non hai usato Alberto e Fred, per spiegarlo?" Semplice: si sono rifiutati di giocare, sostenendo che "era troppo lungo".

Ma secondo voi, con un mazzo di $2N$ carte e supponendo una memoria perfetta da parte dei due giocatori, quanto ci si aspetta che duri, una partita?

Siccome sappiamo che il vostro complesso di superiorità non è soddisfatto se non c'è qualche estensione che non abbiamo risolto, eccoci.

Cambia qualcosa, se le due carte le giro contemporaneamente?

E se considero come "accordabili" tra di loro le coppie dello stesso valore (ignorando il colore), cosa succede?

Mi raccomando, non metteteci troppo tempo: non vorremmo vi si accorciasse la memoria.

3. Bungee Jumpers

Provare che se il polinomio a coefficienti interi

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

ha valori *dispari* per $x = 0$ e $x = 1$, allora l'equazione $P(x) = 0$ non ammette soluzioni intere.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Possiamo dirlo ufficialmente: è estate. Non solo perché la stagione è proprio quella, ma anche perché non arrivano molte soluzioni, e poche sono le mail, e per una volta anche ai poveri redattori della rivista che state leggendo va abbastanza bene, perché a causa dell'assenza di vacanze sono anche un po' in ritardo con tutti i piani editoriali.

A proposito di redattori, quando Doc decide che è il momento di una birretta, pensa in grande: infatti, l'ultima settimana di giugno lo ha visto in quel di Praga. Il pover'uomo è stato quindi costretto a scrivere le sue parti con il dovuto anticipo, e non ci siamo scapicollati a impaginare il tutto negli ultimi minuti del mese. In compenso Rudy ha ricominciato con il solito tormentone relativo al fatto che, se l'estate comincia il 21 giugno, per quale motivo Shakespeare ha intitolato il "Sogno di una notte di mezza estate" in quel modo, visto che tutto si svolge giustappunto il 21/6? Per favore, trovategli un motivo per cui non ci sono più le stagioni di una volta (intese come tempo, non come tempo.. Cioè, non quel tempo, ma l'altro tempo... Oh, basta! il time, non il weather!) altrimenti ci tocca di nuovo l'anno prossimo.

Numero scarno, quindi, poche notizie sparse, per non farvi credere che non sia proprio successo niente, anche perché qualcosa succede sempre, e riceviamo sempre molti complimenti, proteste e correzioni su quello che scriviamo. In giugno il compleanno di Turing ha destato un po' di tutto, compresa una soluzione che trovate più avanti.

Per il resto, uno dei nostri personaggi preferiti, ***Mariano Tomatis***, ci invia alcuni link al suo sito che fanno riferimento al "dilemma del prigioniero" e al "Codice da Vinci". Vi invitiamo ancora una volta a visitare proprio il sito, non si finisce mai di scoprire cose interessanti.

Il nostro inviato a Cesenatico, ***Gnugnu***, si è invece messo in sciopero e pare non volerci più inviare alcun resoconto di quanto accaduto. Noi speriamo proprio che cambi idea con la calura estiva, e aspettiamo fiduciosi. Abbronzatevi anche per noi, ragazzi.

4.1 [084]

4.1.1 Un poker non d'azzardo

Paolo ci manda una precisazione che gli era rimasta da qualche parte:

> Vorrei sottoporvi alcune considerazioni riguardo al problema Un poker non d'azzardo [RM 084], anzi, *I'd like to have your attention on n° 84's mathematical problem* ***Un poker non d'azzardo***, giacché, visto che giochiamo con 52 carte, stiamo usando regole americane e pertanto o siamo in Nevada o stiamo infrangendo clamorosamente la legge.
>
> [Non per fare le pulci a Torkitorio, ma secondo le regole europee del gioco del poker si usa un mazzo da 32 carte (dal 7 all'A) se si gioca in 4, da 36 carte (dal 6 all'A) se si gioca in 5 e da 40 carte (dal 5 all'A) se si gioca in 6. Per altri numeri di partecipanti decide il tavolo.]
>
> Ma ora torniamo a noi ed alla nostra partita. Se poniamo di essere ad un tavolo di Las Vegas avremo a disposizione tutte le 52 carte.
>
> A questo punto non regge più il ragionamento di Torkitorio, perché se il *Giocatore 1* prende tutti i 10 ed una carta qualsiasi (puntando a tenersi per dopo la scala reale più alta), il *Giocatore 2* potrebbe prendere i quattro 9. In questo modo se il *Giocatore 1* facesse scala reale all'asso (10,J,Q,K,A) allora il *Giocatore 2* farebbe scala reale minima (A,2,3,4,5) e vincerebbe [giacché scala reale minima batte scala reale massima].
>
> Se invece il *Giocatore 1* facesse scala reale all'8 (4,5,6,7,8), cioè la più alta possibile per lui ad esclusione della massima, allora il *Giocatore 2* farebbe scala reale al 9 (5,6,7,8,9) e vincerebbe di nuovo.
>
> Se il *Giocatore 1* prendesse tutti gli A per scongiurare problemi di scale reali massime e minime, allora il *Giocatore 2* prenderebbe tutti i K, di modo che la massima scala reale del Giocatore 1 potrà essere alla Q (8,9,10,J,Q), mentre quella del *Giocatore 2* sarebbe al K (9,10,J,Q,K).
>
> **Conclusioni: Siccome al poker non esiste un punto imbattibile, se fate questo gioco ad un tavolo americano (con 52 carte) cercate di essere il giocatore n° 2 (anzi il *Player 2*) perché è lui che vince sempre.**

No comment.

4.2 [088]

4.2.1 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?

Lo sappiamo che abbiamo promesso la soluzione di questo problema, ma per cause di forza maggiore abbiamo deciso di rimandare ancora. C'è tempo quindi, per inviarci altre soluzioni!

4.3 [089]

4.3.1 Problemi postali

Decisamente questo problema è quello che è piaciuto di più questo mese, risolto da ***jvanbie***, ***Damir Wilras***, ***Zar***, ***Paolo*** e ***.mau.***. Per motivi pratici di formattazione non possiamo pubblicare la soluzione di ***Paolo***, a cui possiamo però fare gli auguri per la nascita della sua seconda bambina. Ecco la sua risposta finale:

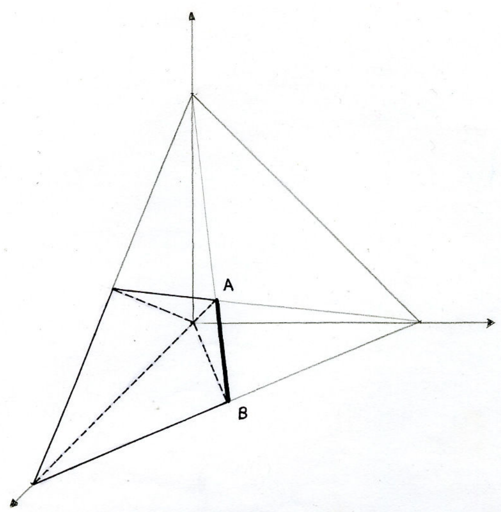
> Centotrentafrattoapertaparentesidueradiceduepiùunochiusaparentesi

Vediamo cosa dice ***jvanbie***:

> (...) per sapere il passaggio quadrato minimo, dobbiamo sapere quanto grande possano diventare il secondo e il terzo lato (in ordine di lunghezza). Il più grande passerà perpendicolarmente alla fessura, quindi non è rilevante e così il problema riguarda la discussione di come far entrare un rettangolo in un quadrato.
>
> Ci sono due disposizioni convenienti per farci stare un rettangolo: con i lati del rettangolo paralleli o perpendicolari a quelli del quadrato, oppure inclinati di 45 gradi. Per vedere in quali casi si debba usare una disposizione rispetto ad un altra, assegnamo le variabili x,y ai lati del rettangolo e osservando che $y>x$, nel primo caso il lato del quadrato circoscritto minimo è y e per l'altro $(x+y)/\sqrt{2}$. Uguagliando i due valori troviamo il "rettangolo critico" che ha lo stesso quadrato circoscritto in entambi i casi: $x=y(-1+\sqrt{2})$. con il buon senso vediamo che è meglio usare il primo tipo di disposizione per i rettangoli con $x>y(-1+\sqrt{2})$ e l'altro tipo negl'altri casi.
>
> Affinchè i due lati più piccoli del pacco siano il più lungo possibile dobbiamo accorciare la "lunghezza", e il massimo che possiamo fare è uguagliarlo a y. Quindi otteniamo $2x+3y=130$ (equazione *"a"*)
>
> Adesso analizziamo i due casi: nel primo caso la lunghezza del lato del quadrato (L) è pari a y e dobbiamo quindi agevolare (aumentare) il più possibile y, e quindi diminuire il più possibile x, ma abbiamo la condizione $x>y(-1+\sqrt{2})$, quindi per rendere in questo caso L il più grande possibile x dev'essere uguale a $y(-1\sqrt{2})$.
>
> Sostituendo x nell'equazione *"a"* otteniamo che L è pari a $130/(1+2\sqrt{2})$; nell'altro caso osservando l'equazione *"a"* ci rendiamo conto che dobbiamo agevolare di più la x, e osservando la condizione di questo caso $[x<y(-1+\sqrt{2})]$ ritorniamo al caso di prima $[x=y(-1+\sqrt{2})]$.

Bella anche la soluzione di ***Zar***:

> (...) Il parallelepipedo/pacco postale ha tre dimensioni, che indichiamo con x, y, z. Sia x la dimensione maggiore (se non lo è, rinominare tutto in modo che lo sia). Per rispettare le condizioni del problema devono valere le tre condizioni seguenti:
>
> $x+2(y+z)<=130$,
>
> $x>=y$,
>
> $x>=z$
>
> $x>=0$,
>
> $y>=0$,
>
> $z>=0$.
>
> Se ora piazziamo tutto su un riferimento cartesiano tridimensionale, otteniamo un solido a cinque facce (che sarebbe



una piramide, con il vertice nell'origine). I punti di questo solido rappresentano ognuno un possibile pacco postale. Vediamo alcuni casi interessanti (ovvero i vertici della piramide):

- il punto (0,0,0) rappresenta il pacco infinitesimo, che passa praticamente da qualunque apertura.
- il punto (130,0,0) rappresenta il pacco unidimensionale, un parallelepipedo lungo 130 e alto e profondo 0. Basta metterlo dritto che passa anche lui per qualunque apertura. Il concetto di "apertura di dimensione 0" aprirebbe interessanti considerazioni filosofiche che, però, non approfondiamo qui.
- il punto (130/3,130/3,0) rappresenta il pacco bidimensionale più fastidioso, che potremmo chiamare "la lettera quadrata".
- il punto (130/3,0,130/3) rappresenta ancora la lettera quadrata, con le variabili y e z scambiate. Qualcuno, a questo punto, potrebbe tirare fuori delle evidenti ragioni di simmetria: lo faremo tra un momento. Prima è bene considerare l'ultimo vertice:
- il punto (26,26,26) rappresenta il pacco cubico: puoi girarlo come ti pare ma devi trovare un buco adatto per farcelo passare.

Se utilizziamo l'evidente[14] principio che gli oggetti piccoli passano dove sono passati quelli grossi, dobbiamo analizzare i punti della piramide per i quali le tre dimensioni x, y, z sono "grandi". Per essere più precisi, visto che dobbiamo infilare il pacco attraverso un buco, la dimensione maggiore di tutte (la x, secondo la nostra convenzione) non ci interessa, ma ci interessano le altre due; in altre parole, possiamo sempre orientare il pacco in modo tale che la x sia perpendicolare al buco. I pacchi problematici saranno quindi quelli che hanno la dimensione x abbastanza piccola, e la "girth" abbastanza grande. Allora, della piramide in questione ci interessa lo spigolo che va dal punto (26,26,26), chiamiamolo A, al punto (130/3,130/3,0), chiamiamolo B. Evidenti ragioni di simmetria (eccole!) ci permettono di non considerare lo spigolo simmetrico che va dal punto A al punto (130/3,0,130/3) al quale non daremo nemmeno un nome (tanto basta scambiare di posto la y e la z che questo punto diventa B).

Così abbiamo circoscritto il problema, che ora diventa un po' più trattabile. Consideriamo quindi lo spigolo AB. Le sue equazioni sono le seguenti:

$$x+2(y+z)=130,$$

$$y=x,$$

$$x>=0,$$

$$y>=0,$$

$$z>=0$$

(d'ora in poi le ultime tre disequazioni saranno tralasciate).

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene

$$x+2x+2z=130,$$

dalla quale si ricava

$$z=(130-3x)/2.$$

La girth diventa quindi

[14] *Cerco di non usare mai la parola "evidente". Per una palese violazione dell'assunto, vedasi il secondo problema del mese scorso... (RdA)*

girth=2(y+z)=130-x.

Ora sorge un altro problema: il pacco, è meglio infilarlo "dritto" o "in diagonale"? Il che significa: la sezione yz del pacco (un rettangolo) deve avere i lati paralleli rispetto a quelli del buco nel quale viene infilato, oppure deve avere i lati inclinati di 45 gradi rispetto a quelli del buco? La risposta è: dipende da come è fatto il pacco. Se ha sezione quadrata (o giù di lì), è bene infilarlo "dritto", se invece è largo e sottile (tipo una busta) è bene infilarlo in diagonale.

Per decidere quando è meglio infilare il pacco dritto e quando, invece, è meglio metterlo in diagonale, calcoliamo quanto deve essere grande il passaggio quadrato nei due casi e vediamo cosa è meglio fare.

Quando il pacco viene infilato dritto, il passaggio quadrato nel quale deve passare un pacco di dimensioni x, y, z con x=y>=z è y (che è uguale a x).

Quando invece il pacco viene infilato in diagonale, la dimensione del buco quadrato deve essere (y+z)/√2 = girth/(2√2). Quindi, sostituendo il valore di girth trovato prima, otteniamo (130-x)/(2√2).

Abbiamo quindi trovato, in funzione di x (o di y, è lo stesso, siamo sul lato AB della piramide), due formule che ci dicono la dimensione del buco in funzione della dimensione del pacco. La prima, f(x)=x, è una retta crescente. La seconda, g(x)=(130-x)/(2√2) è una retta decrescente. Il punto in cui esse si intersecano ci fornisce la dimensione massima del buco, che corrisponde ad un pacco per il quale è indifferente il modo in cui viene infilato, se dritto o in diagonale. Per valori di x minori del valore critico, il pacco andrà infilato dritto; per valori maggiori, invece, in diagonale. Il valore critico si calcola intersecando le due rette, cioè risolvendo l'equazione di primo grado (130-x)/(2√2)=x. Tralasciando i passaggi, arriviamo subito al risultato, che è

130(2 √2 - 1)/7, poco meno di 34.

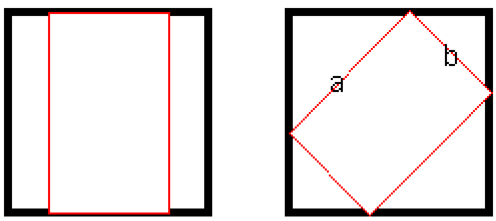
La z corrispondente a questo valore è invece

130(5 - 3 √2)/7, poco più di 14.

Un parallelepipedo di queste dimensioni può essere infilato indifferentemente dritto o in diagonale attraverso un buco quadrato di lato 130(2 √2 - 1)/7, e questo è molto bello, nonostante i numeri orribili.

Al solito più veloce la soluzione di ***.mau.***:

Supponendo che i lati del nostro pacco siano c >= a >= b, abbiamo subito che c=a; altrimenti basterebbe rimpicciolire c e ingrandire a in corrispondenza per avere un pacco più grande. A questo punto, abbiamo due possibilità per mettere il nostro pacco, mostrate nelle due figure allegate. Il bello è che si vede subito che se provo a ruotare di poco il pacco (tranne nel caso a destra quando la sezione del pacco è quadrata) occorre un quadrato di lato maggiore, quindi basta controllare questi due casi.



I casi estremi sono a=b (che casca nella figura di sinistra, e dà come risultato che il buco ha dimensione 130/5 = 26cm) e b=0 (che casca nella figura di destra, e dà come risultato una diagonale di 130/3 cm e quindi un lato di 30.641+cm) Però se ingrandisco leggermente b mi accorgo che a si rimpicciolisce sì, ma non troppo, quindi devo necessariamente ingrandire il buco.

> Come trovo la soluzione? quando non importa se metto dritto o in diagonale il pacco. Quindi mi vengono le due equazioni
>
> $3a+2b=130$
>
> $a = (a+b)/\sqrt{2}$
>
> (ci sarebbe anche il vincolo a>=b, ma la seconda equazione ci dice che è soddisfatto). Risolvendo il sistema, si ha per a il valore $(130\sqrt{2})/(4+\sqrt{2}) = 33.956+$cm.
>
> Un bel buco, no?

4.3.2 Problemi di parcheggio

Poche soluzioni ma speciali, a questo problema. Ecco il nostro ***.mau.***.

> Una domanda sul gioco #2 (...) L'idea è che ad esempio per la sera abbiamo uno spazio lungo 3, e vogliamo sapere quanti segmenti non sovrapposti di lunghezza 1 possiamo mettere in media? In questo caso la risposta è facile, visto che è 2 (a meno che uno non metta il primo segmento a uno dei due estremi oppure esattamente nel centro, ma questi sono casi di probabilità 0).
>
> Nello spazio lungo 4, abbiamo una probabilità su 2 di infilare 3 macchine (la prima si mette a partire dal punto di ascissa compresa tra 1 e 3, lasciando spazio per esattamente due macchine ai suoi due lati con probabilità 1. Negli altri casi, il conto è un po' più complicato: avremo infatti uno spazio inutilizzabile da un lato e uno di lunghezza 2+X dall'altro, dove X è una variabile aleatoria uniforme in [0,1]; la seconda macchina con probabilità $X/(2+X)$ permetterà di metterne ancora una terza (da un lato o dall'altro) mentre con probabilità $2/(2+X)$ avrà terminato di occupare il parcheggio, facendo smadonnare il terzo che arriva.
>
> L' integrale di $X/(2+X)$ è $X - 2 \ln (X+2)$; l'integrale tra 0 e 1 vale circa 0.189, e quindi il numero medio di macchine che parcheggeranno sarà
>
> $1/2 \cdot 3 + 1/2 \cdot 0.189 \cdot 3 + 1/2 \cdot 0.811 \cdot 2 = 2.311$ circa.
>
> Il tutto se mi ricordo qualcosa di teoria della misura, il che ha probabilità piuttosto bassa.
>
> Il problema generale lo lascio a qualcun altro, e me ne vo in bicicletta; però vorrei fare notare come il grafico la funzione P(X) negli interi positivi deve essere piuttosto divertente.

L'altra soluzione arriva da ***Unk&Wunk***: il Capo, da attento lettore di fantascienza un pochino datata, ha subito capito a chi si sono ispirati *[Per gli ignoranti: Eric Frank Russell, "Galassia che vai": Unk è il tizio che ha inventato la ruota, Wunk quello che ha scoperto il fuoco, o viceversa. Ma non sapevamo avessero formato un brain trust (RdA)].* In ogni caso, ecco cosa ci scrivono:

> Veniamo al problema, cercando di generalizzare qualche risultato semplice. Se la lunghezza è 1 e il parcheggio è casuale, dovrebbe starci meno di una macchina, quindi zero.
>
> Con lunghezza 2 dovremmo riuscire a risolvere un unico problema di parcheggio, visto che con lo stile che contraddistingue i condomini più di una macchina non dovrebbe starci.
>
> Per un parcheggio di lunghezza 3, confessiamo di esserci abbandonati alle più sfrenate simulazioni, fermo restando che almeno una macchina (il primo che arriva) ci sta. Anzi ce ne stanno due, ma pensare subito alla seconda frega.
>
> Un metodo ci è venuto in mente mentre ci trovavamo in una città (che dovreste conoscere bene) piuttosto affollata nella seconda metà di giugno.
>
> U:"In generale, il secondo trova due spazi di lunghezza totale 2"

W:"Ma non puoi trattarli come il caso di uno spazio di lunghezza 2"

U:"No, perché non necessariamente sono interi"

W: "Insomma, un caso diverso..."

U e W: "Ma chi l'ha detto che è diverso???"

Per chi non c'era e non ha visto le facce: perché non trattiamo il caso generale? Insomma, "L" genericamente reale, in modo tale da risolvere un caso solo una volta per tutte.

E qui siamo finiti sulle spese, nel senso che dopo aver reso immangiabili un numero imprecisato di pastasciutte, bistecche e altre cibarie lasciate sul fuoco mentre pensavamo al problema abbiamo pattuito di andare a mangiare in trattoria sin quando non lo avessimo risolto (o fosse uscito il numero di luglio con una soluzione), entrando all'ora di apertura e facendoci cacciare fuori all'ora di chiusura. Seguono deduzioni.

1. $N(L)$ è definito solo per $N \geq 0$
2. Ovviamente, $\forall L < 1 \Rightarrow N(L) = 0$

Consideriamo la prima auto parcheggiata con la testa[15] in un intervallo $(x, x + dx)$; in questo modo, abbiamo 1 macchina parcheggiata e due settori liberi di lunghezza x e $(L - 1 - x)$ (abbiamo ignorato il dx).

La probabilità che la prima macchina parcheggi come detto sopra è $\frac{dx}{L-1}$, in quanto la testa può essere dappertutto in $(0, L-1)$ e stiamo considerando unicamente un segmento di lunghezza dx. Quindi il contributo a $N(L)$ vale:

$$[1 + N(x) + N(L - 1 - x)] \cdot \frac{dx}{L-1}$$

Integrando su x tra 0 e $L-1$, si ha:

$$N(L) = \int_0^{L-1} \frac{dx}{L-1} + \int_0^{L-1} \frac{N(x)dx}{L-1} + \int_0^{L-1} \frac{N(L-1-x)dx}{L-1}$$

(dedurre questi tre termini dalla formula precedente è forse elementare, ma vorremmo capiste quanto eravamo scoraggiati. E quanto era contento il trattore della trattoria, che già ad un rapido sguardo ai nostri fogli iniziava a presumere lunghe serate in nostra compagnia)

Se chiamiamo i vari integrali I_1, I_2, I_3, abbiamo:

$$I_1 = \int_0^{L-1} \frac{dx}{L-1} = \frac{L-1}{L-1} = 1$$

In I_3, effettuiamo il cambiamento di variabili $y = L - 1 - x \Rightarrow dy = -dx$; questo inverte i limiti di integrazione:

[15] *U&W non lo dicono, ma consideriamo la "testa" della macchina come il punto più vicino all'origine del parcheggio [RdA].*

$$I_3 = -\int_{L-1}^{0} \frac{N(y)dy}{L-1}$$

Scambiando i limiti di integrazione per eliminare il segno meno, si ottiene:

$$I_3 = \int_{0}^{L-1} \frac{N(y)dy}{L-1} = \int_{0}^{L-1} \frac{N(x)dx}{L-1} = I_2$$

(Qui le nostre esclamazioni hanno destato un borbottio di delusione del trattore)

Da cui:

$$N(L) = 1 + \frac{2}{L-1}\int_{0}^{L-1} N(x)dx$$

Cerchiamo ora di valutare $N(L)$ nei diversi casi:

1] $1 \le L < 2$. Abbiamo

$$N(L) = 1 + \frac{2}{L-1}\int_{0}^{L-1} 0dx = 1$$

che sappiamo essere corretto: lo zero sotto integrale nasce dal fatto che (a meno di battute sull'abilità di guida) $N(x)\big|_{0 \le x < 1} = 0$.

2] $2 \le L < 3$. Abbiamo

$$\begin{aligned} N(L) &= 1 + \frac{2}{L-1}\int_{0}^{1} 0dx + \int_{1}^{L-1} dx \\ &= 1 + \frac{2}{L-1}(0 + L - 2) \\ &= 1 + 2\frac{L-2}{L-1} \end{aligned}$$

A questo punto, con grande delusione del trattore, abbiamo deciso che potevamo prendere il restante caso $L = 4$ con maggiore calma: complicato, ma compatibile con l'arte del fornello. Siccome non vorremmo scrivervi tutto noi il numero di luglio (tra l'altro, come mai state riducendo le dimensioni dei numeri?), lavoriamo in modo assertivo.

La prima auto dividerà il parcheggio in due parti, una grande G e una piccola P; P è uniformemente distribuito tra 0 e $\frac{3}{2}$, mentre G è distribuito nello stesso modo tra $\frac{3}{2}$ e 3. La probabilità che sia $P < 1$ è $\frac{2}{3}$, e quindi la probabilità che sia $P > 1$ è $\frac{1}{3}$. Se $P > 1$ ci staranno tre macchine, mentre se $P < 1$ ce ne staranno $1 + N(l)$, ossia:

$$N(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3}\left[1 + N(l)\right]_{l=2}^{l=3}$$

(scusate la notazione, ma ve la siete cercata: ci pare di capire apprezziate Equation Editor).

Ossia

$$N(x) = 1 + \frac{2}{3}\left(1 + \int_2^3 \left[1 + 2\frac{x-2}{x-1}\right]dx\right)$$

Facendo un po' di conti (quelli facili) e imponendo $y = x - 1$,

$$\begin{aligned} N(x) &= 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \int_1^2 \frac{y-1}{y} dy \\ &= \frac{7}{3} + \frac{4}{3}\int_1^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy \\ &= \frac{7}{3} + \frac{4}{3}[y - \ln y]_{y=1}^{y=2} \\ &= \frac{11}{3} - \frac{4}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

ossia ci stanno circa 2.74... macchine, e cominciamo a capire perché Rudy si alza presto.

Non avendo nessuna intenzione di arricchire trattori, ci limitiamo ad alcune considerazioni per grandi N: nel seguito, abbiamo considerato $N > 7$.

La prima macchina si parcheggia in $[X, X+1]$: a questo punto, negli intervalli $[X+1, X+4]$ e $[X-3, X]$, dato che sono lunghi 3, ci stanno 2 macchine in ognuno. Caso particolare del parcheggiatore incapace: se uno degli intervalli è lungo $3-\varepsilon$, può darsi che ci stia solo una macchina

Se le macchine sono distribuite uniformemente, la distanza media tra due macchine in uno dei due intervalli visti sopra è $\frac{1}{3}$.

Quindi, in ognuno degli intervalli (lunghi 4) $[X-3, X+1]$ e $[X, X+4]$ ci stanno 3 macchine; se ci sono k macchine, avremo $k+1$ intervalli e quindi

$$k + \frac{k+1}{3} = L \Rightarrow k = \frac{3L-1}{4}$$

Siamo tristemente consci che questa risposta è scarsamente soddisfacente, ma cominciamo a sentire il calo degli zuccheri, la carbonara è pronta e il trattore vuole sapere quando ne fate un altro.

Insomma, si è capito poco di questi due, da dove sono usciti e perché abbiano voluto risolvere il problema di parcheggio del Capo, ma pare si siano divertiti e hanno divertito pure noi. Alla prossima, gente!

5. Quick & Dirty

L'altra volta abbiamo giocato a scacchi, questa volta giochiamo a poker.

C'è una cosa che non mi è mai stata molto chiara; una delle regole del poker dice che una scala a colore vince sempre un poker. Ora, supponiamo di giocare con un mazzo da **52** carte; le scale possono avere come prima carta **1**, **2**, **3**,**...**, **10** (nell'ultimo caso viene chiusa dall'asso); quindi, posso farne **10** per ogni seme, totale **40** nel mazzo.

Invece, quando faccio un poker, posso farne solo **13** in tutto il mazzo, quindi le probabilità di fare poker sono minori di quelle di fare scala.

Ma allora perché vince la scala?

Una mano con un poker ha sempre una quinta carta, quindi per ogni poker ci possono essere altre **48** *quinte carte diverse. Quindi, nel mazzo si possono formare* $48 \times 13 = 624$ *diversi poker. Che sono un po' di più di quaranta, quindi è più facile.*

6. Pagina 46

Siano p e q due interi entrambi pari o dispari; allora $P(p)-P(q)$ è pari, in quanto

$$P(p)-P(q)=a_0\left(p^n-q^n\right)+a_1\left(p^{n-1}-q^{n-1}\right)+\ldots+a_{n-2}\left(p^2-q^2\right)+a_{n-1}(p-q)$$

è divisibile per il numero (*pari*) $p-q$.

In particolare, per p pari, $P(p)-P(0)$ è pari. Ma (per ipotesi), $P(0)$ è dispari, e quindi $P(p)$ deve essere dispari, e quindi $P(0)\neq 0$.

Analogamente, per p dispari, $P(p)-P(1)$ è pari. Siccome (per ipotesi) $P(1)$ è dispari, segue per lo stesso ragionamento che $P(p)\neq 0$. Di conseguenza, $P(p)$non può valere zero per alcun valore intero (pari o dispari) di x; ossia, $P(x)$ non ha radici intere, che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 In teoria, è un gioco... [002]

Voglio sperare abbiate passato il mese facendo i maleducati in coda, in applicazione pratica a quanto detto l'altra volta.

Non so per voi, ma per noi l'ultima parte, dove prendevamo in esame un numero di giocatori maggiore di due è risultata piuttosto ardua da trattare; il metodo visto, quando si hanno molti partecipanti, non è molto utile. Infatti, quando si comincia a trattare con numeri grandi o indeterminati, meglio prendere altre strade. Storiella? Storiella.

> *Lunedì, ore 06:00 – Marito - Grunt. Giaoradialzarsilavarsivestirsicaffè... L'autobus tanto per cambiare è in ritardo e pieno come un uovo con due tuorli. Basta, domani prendo la macchina, per andare in ufficio.*
>
> *Lunedì, ore 07:45 – Moglie – Ecco, la solita coda; comunque non sperarci, a scuola ci arrivi lo stesso. Dimmi tu se devono muoversi tutti a quest'ora... Basta, domani ti prendi l'autobus, per andare a scuola.*

Visto che (tutti gli)/(tutte le) utenti del servizio pubblico e (tutti i)/(tutte le) *kouropompoi*[16] pensano la stessa cosa e sono nella stessa sostanza organica, forse possiamo provare a generalizzare: in prima istanza, potremmo rappresentare il loro "guadagno" (mai parola fu più inadatta) attraverso il grafico in ***Figura 1***. Le ordinate rappresentano il guadagno del singolo utente, le ascisse la percentuale di utenti che utilizzano l'auto; la linea rossa continua il "guadagno" degli utenti di mezzo pubblico, mentre quella blu tratteggiata rappresenta lo stesso parametro per chi usa la propria auto; il grafico tiene conto del fatto che, se ci sono molti utenti di autobus, questi ultimi diventano tanti e grossi, e quindi neanche gli automobilisti in questo caso sono contenti.

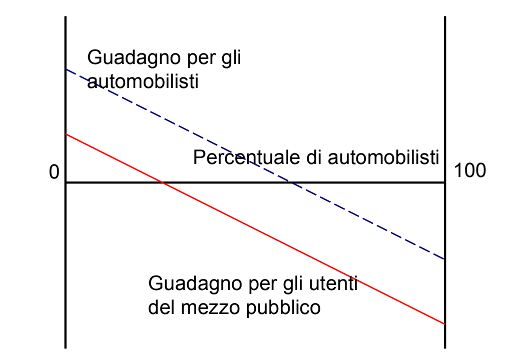


Figura 1 – Lunedì fetente (sbagliato).

Vogliamo sperare non siate d'accordo[17].

In effetti, si potrebbe essere un po' meno estremisti; pur restando vero che gli autobus diventano bolge infernali in caso di grossa frequentazione, di sicuro gli automobilisti stanno meglio (ma non tanto: anche gli autobus occupano spazio sulla strada, e molto). Quindi, probabilmente dovremo rivedere il nostro grafico come indicato in ***Figura 2***, dove abbiamo cercato di rendere questo concetto.

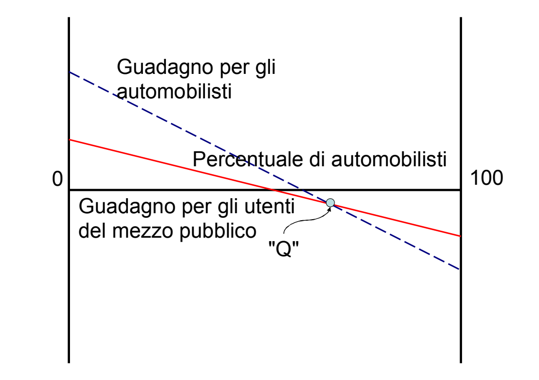


Figura 2 – Lunedì fetente (vero, purtroppo...)

[16] Parola assolutamente inventata, ma probabilmente esatta

[17] Esistono innumerevoli motivi per non essere d'accordo; il nostro preferito, anche se non è il principale, ha comunque in sè un vago aroma del Paradosso di Russell: "Ma gli autisti di bus, li conti come automobilisti?"

Vorremmo focalizzare la vostra attenzione sul punto "***Q***". Come dicono i matematici (e gli economisti, questa volta d'accordo), "quando due rette si incontrano, di solito succede qualcosa di importante". In effetti, questo punto ha interessanti caratteristiche: se un utente del bus passa alla macchina, si sposta in una regione alla destra di ***Q***, dove gli automobilisti stanno ancora peggio, in particolare starà "peggio di prima" chi ha effettuato il passaggio (e quindi tenderà a non farlo); al contrario, partendo da ***Q***, un automobilista che passi al bus ci sposterà alla sinistra di ***Q***, dove gli utenti del bus stanno peggio; in particolare, starà peggio lui (e quindi tenderà a non farlo).

Insomma, questa sembra un'estensione dell'***Equilibrio di Nash*** e, contemporaneamente, del ***Dilemma del Prigioniero***: se individualmente cambiamo idea stiamo peggio, ma se lo facessimo in modo coordinato... Proviamo a buttarla un attimo sul politico.

Questo è un esempio di "sovrasfruttamento delle risorse[18]": le strade si consumano (in modo proporzionale al numero di ruote che gli passano sopra), e queste sono un bene comune, e gli automobilisti le consumano più degli utenti del bus; quindi, gli automobilisti hanno un vantaggio *personale* dall'usare la macchina, almeno sin quando le strade sono nuove, per poi trovarsi peggio. In generale, il sovrasfruttamento delle risorse si può definire come il fatto che le risorse condivise tendono ad essere sovrautilizzate e quindi degradate, a meno che si istituisca un qualche sistema di regolazione (quale la tassa di circolazione o concetti similari tipo "pagare il bus[19]"). Se queste cose vi sembrano elementare buon senso, provate ad applicarle in altro ambito: un sindaco di un paesino ligure, anni fa, decise che solo le fanciulle esteticamente valide potevano circolare per il centro storico in abiti discinti, e un mucchio di gente (giustamente, e non solo quella "aestethically challenged") la prese a male. Poi, tornate all'esempio di cui sopra con la stessa arrabbiatura, e meditate.

Quello che volevamo introdurre è il concetto di ***cooperazione***. A titolo introduttivo, vi rifiliamo un paio di casi: provate a studiare il comportamento in entrambi.

> *State andando (in macchina, ma non preoccupatevi) ad un appuntamento, quando sulla strada trovate un albero caduto; scendete e vi accorgete che non potete aggirarlo. Sapete anche che cercando di spostarlo da solo l'unico risultato che otterrete sarà un "colpo della strega". Mentre siete lì a meditare e preoccuparvi, arriva dall'altro lato un'altra macchina che, palesemente, è nella stessa situazione: in due ce la fareste di sicuro...*

Piccola complicazione:

> *State andando sulla stessa macchina, sulla stessa strada, con lo stesso albero e lo stesso rischio di mal di schiena; solo che questa volta avete in tasca le fedi nuziali per il matrimonio del vostro migliore amico, di cui siete testimone di nozze (e quindi dovete arrivare in perfetto orario). Dall'altra parte, anzichè un automobilista, arriva Japhy Ryder[20]...*

Visto il pessimo risultato della trasposizione in PDF delle tabelle, questa volta ve le fate voi; diciamo che nel primo caso "procedere" dà un guadagno ***5***; "restare lì" dà un guadagno ***0***, mentre il "colpo della strega" ha un guadagno ***-5***.

Situazione completamente diversa tra voi e Japhy nel secondo caso.

---

[18] Come al solito, l'inglese è decisamente più bello: "Tragedy of the Commons". Andate a studiarvi la storia dell'allevamento inglese, se non sapete cosa sono i "Commons".

[19] Rudy è particolarmente sensibile a questo concetto: vive in una zona (e prende il tram in momenti) in cui una parte infinitesima degli utenti paga il biglietto. Per citare Beppe Grillo: "Ho preso il tram, ho bollato il biglietto e al 'tlin!' l'autista ha detto: 'Cos'è 'sto rumore?".

[20] Personaggio di "The Dharma Bums", romanzo sostanzialmente autobiografico di Jack Keruak (rappresentato all'interno del libro dal personaggio di Sal Smyth). Citato qui in quanto Rudy lo preferisce ampiamente a "On the Road", anche se i personaggi reali sono gli stessi. Andando a cercare i nomi ha ritrovato l'edizione (City Lights, clearly) in inglese. Indovinate cosa leggerà quest'estate.

Qui, se "procedete" guadagnate tutti e due ***5***, ma mentre se Japhy resta fermo guadagna ***0***, voi di sicuro avete un guadagno (posto che lo si possa chiamare così) ***-4***.

Soluzione abbastanza evidente dal punto di vista matematico, ma la vita reale presenta altre possibilità, tipo "Japhy, dammi una mano e magari ti guadagni qualche soldo..." Nel seguito, mi raccomando, cercate di considerare obiettivamente queste forme di compensazione.

Proviamo con un altro caso, clamorosamente simile a quello del lunedì mattina: qui, il problema è di coordinare il gioco di un numero potenzialmente infinito di giocatori. E proviamo a parlare di economia, finalmente.

> *Voi (e un certo numero* **N** *di investitori) avete a disposizione un certo gruzzolo da investire; trovandovi in un mercato piuttosto semplice, potete scegliere tra due tipologie di investimento (niente "giardinetti", come si dice nel ramo): una a basso rendimento e una ad alto rendimento. Sapete inoltre che, essendo la tipologia ad alto rendimento piuttosto rischiosa, più investitori ci saranno più sarà redditizio; la stessa cosa succede con la tipologia a basso rendimento, ma in misura minore. Come investite?*

Anche qui, una visulizzazione aiuta; la trovate in ***Figura 3***. "Ma è quella di prima, girata al contrario!" Certo, e appunto per questo presenta alcune caratteristiche interessanti.

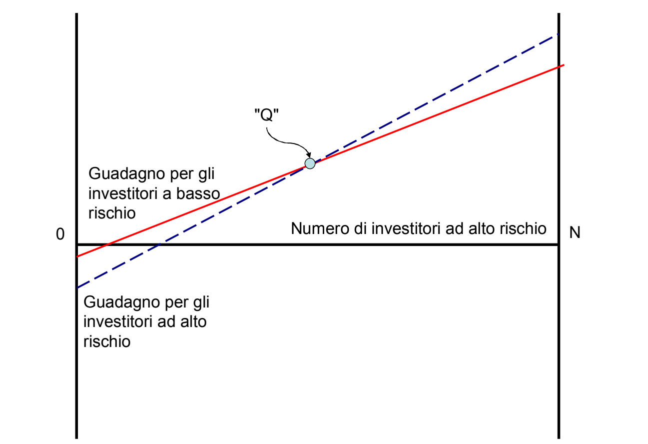


Figura 3 – Investite in matematica!

In generale, notiamo che se ci sono pochi investitori ad alto rischio, conviene stare sul prudente, mentre all'aumentare dei "raiders", conviene decisamente rischiare.

Come sopra, la situazione interessante si ha quando le due linee si incrociano: supponiamo che in un dato momento si abbia un numero di amanti del rischio maggiore dell'ascissa di "***Q***"; evidentemente non siamo in condizione di equilibrio, in quanto la strategia migliore, per tutti, è rappresentata dall'investimento rischioso. Se, invece, supponiamo i nostri investitori si trovino alla *sinistra* di ***Q***, continuiamo a non essere in condizione di equilibrio, in quanto rende di più l'investimwnto a basso rischio.

Insomma, ci sono ***tre*** equilibri:

> ***Tutti investono ad alto rischio***: in questo caso, siamo in equilibrio perché nessun investitore guadagnerebbe di più passando all'altro investimento
>
> ***Tutti investono a basso rischio***: in questo caso, siamo in equilibrio perché nessun investitore guadagnerebbe di più passando all'altro investimento
>
> ***Siamo nel punto*** Q: in questo caso, siamo in equilibrio perché le due strategie sono egualmente valide.

Chiaro? Bene, almeno l'ultimo punto è sbagliato.

Infatti, in questo caso siamo in presenza di un ***equilibrio instabile***: qualsiasi variazione casuale ci farebbe precipitare in uno dei due casi precedenti.

Sinora, ci siamo focalizzati su ***soluzioni non-cooperative*** ai giochi, e abbiamo visto che, in genere, risulta piuttosto difficile dare una risposta unica alla domanda "Qual'è la scelta razionale della migliore strategia?"

In effetti, quello che ci serve è riuscire a definire un criterio per valutare i guadagni dei partecipanti al gioco visti come un tutto: in generale, potremmo dire che una strategia è migliore di un'altra se:

1. Fa stare meglio almeno un giocatore
2. Non fa stare peggio ogni altro giocatore

Se nessuna strategia è migliore di una data, quest'ultima viene definita (dal nome dell'inventore) ***Ottima secondo Pareto*** (o Pareto-Ottimale, se vi piacciono i termini costruiti in questo modo barbaro).

Proviamo con un esempio?

Un'azienda sta prendendo in considerazione l'idea di cambiare il sistema operativo del suo parco computer; la scelta è tra un sistema Open Source e uno proprietario. Nello stesso momento, il fornitore dei computer deve strutturarsi per garantire assistenza tecnica. I due giocatori devono essere "pronti" (ossia aver fatto la scelta) nello stesso momento.

		Utente	
Fornitore		20 / 20	0 / 0
		0 / 0	5 / 5

Figura 4 – C'è un pinguino alla finestra

Qui di fianco, trovate l'opportuna tabella (decisamente parziale, lo ammettiamo): riteniamo comunque che, giocherellando opportunamente con i concetti di maggior conoscenza tecnica richiesta per il sistema Open Source e maggior costo del sistema proprietario riusciate a giustificarvi il tutto da soli (in caso d'emergenza, scambiate i simboli).

Non dovreste avere problemi ad analizzare il gioco: non è altro che l'ennesima variazione sul Dilemma del Prigioniero, anche se c'è qualche ulteriore complicazione: questo, può essere visto come un ***gioco cooperativo***: in pratica, Utente e Fornitore possono "mettersi d'accordo", ossia ***formare una coalizione***[21].

		Utente	
Fornitore		90 / -50	0 / 0
		0 / 0	40 / -30

Figura 5 – La spartizione del malloppo

La prima decisione da prendere da parte dei giocatori è evidentemente se associarsi alla coalizione o no: dalla ***Figura 4***, sappiamo che nessuno dei due può avere un guadagno garantito maggiore di zero; se scelgono il sistema Open Source in modo concorde, invece, abbiamo un guadagno totale pari a ***40***, e la soluzione è sicuramente migliore.

Focalizziamoci sul momento in cui è

[21] Volendo mantenere questo pezzo scevro da qualsiasi considerazione morale o etica, "gioco cooperativo" e "formare una coalizione" possono essere intesi non solo per acquistare il software, ma anche per pagarsi le tangenti in cambio di prestazioni illegali.

avvenuta la consegna del software, ma questo non è stato pagato, ossia il fornitore è andato sulle spese ma, potenzialmente, l'utente ha ancora in tasca tutto il guadagno (il famoso "pagamento a sessanta giorni"): in questo caso, la nostra tabella diventa quella presente in ***Figura 5***. Non spaventatevi per i valori negativi, quello che ci interessa è dividere i guadagni in modo soddisfacente per entrambi, adesso.

Se non abbiamo sbagliato i conti, i guadagni (che avremo) dovrebbero essere pari a quelli della tabella precedente.

Qui abbiamo un paio di interessanti considerazioni:

1. Siccome i benefici totali da spartirsi sono ***40***, nessuno dei due partecipanti può avere un beneficio maggiore di questa cifra.
2. "Giocando da solo" ciascuno dei due avrebbe un beneficio ***0***, quindi nessuno accetterà un guadagno inferiore a ***0***.

Se tabuliamo queste informazioni, otteniamo il grafico della ***Figura 6***: qui sono rappresentate ***tutte*** le soluzioni aventi somma ***40***, ma solo quelle sulla linea rinforzata rappresentano delle situazioni accettabili per entrambi i giocatori: nella parte sinistra del grafico, infatti, sono presenti quelle inaccettabili dal fornitore, in quanto per lui sarebbe una perdita (si potrebbe fargliele accettare in questo caso se si cominciasse a parlare di "gioco ripetuto", ma qui stiamo parlando d'altro).

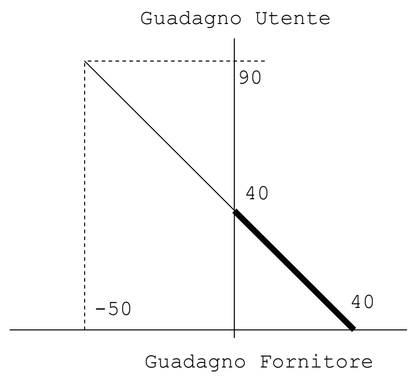


Figura 6: Arrivano i soldi

Quello che ci interessa ora è notare che anche qui abbiamo ***un'infinità di soluzioni***, in linea di principio, e ciascuna di queste è accettabile. Qui l'analisi si fa complicata, in quanto sono necessari una serie di altri concetti e, paradossalmente, un aiuto ci verrà dall'esaminare la miglior situazione in condizione di competitività, ossia quello che si chiama il "nucleo" (Core).

E, se ci passate il gioco di parole, sarà "duro".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms