Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 089 - Giugno 2006 - Anno Ottavo

1. Normale come Biancaneve **3**

2. Problemi... .... **11**

2.1 ...postali 11
2.2 ...di parcheggio 12

3. Bungee Jumpers **12**

4. Soluzioni e Note **13**

4.1 [087] 13
4.1.1 Compleanno di Doc! 13
4.2 [088] 15
4.2.1 Problema temporaneamente brutto 15
4.2.2 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole? 17

5. Quick & Dirty **17**

6. Pagina 46 .... **18**

7. Paraphernalia Mathematica **20**

7.1 In teoria, è un gioco... [001] 20

Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici
Rivista fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddle (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM088 ha diffuso **1019** copie e il **30/05/2006** alle **23:23** per Google eravamo in **15600** pagine.

Data la vicinanza temporale di alcuni secondari eventi olimpici, le decorazioni matematico-natalizie torinesi sono state mantenute più a lungo; chi risulta scomparso dal Duemila è purtroppo il ***MateTram***; ora se ripensate un attimo alla copertina di marzo, viene fuori che quando l'idea non ce la rubano i milanesi, lo fanno gli inglesi.

1. Normale come Biancaneve

ANORMALE – Agg.
Non conforme agli standard.
In materia di pensiero e di condotta,
essere indipendenti implica essere anormali,
ed essere anormali implica essere detestati.
Pertanto il consiglio è quello di sforzarsi
di ottenere la massima somiglianza possibile
all'Uomo Medio, piuttosto che alla propria natura.
Chi riuscirà nell'intento sarà premiato con la pace,
con la prospettiva della morte,
e con la speranza di finire all"Inferno.
*(*Ambrose Bierce – The Devil's Dictionary*)*

Cosa è "normale"? Normale è indossare abiti che compri solo per andarci al lavoro e guidare attraverso il traffico una macchina che devi ancora finire di pagare, cosicché tu possa conservare quel lavoro che ti serve per pagare quei vestiti, quella macchina e anche quella casa che lasci vuota tutto il giorno, proprio perché devi andare al lavoro per guadagnare quel tanto che serve per potertela permettere.
(Ellen DeGeneres)

Una corsa è facile da capire. Si parte tutti insieme, e si deve cercare di arrivare prima degli altri. Tutto qui: chi ci riesce e taglia per primo il traguardo vince, mentre tutti gli altri, invece, perdono. È facilissimo da spiegare anche ai bambini piccoli, che in qualche modo devono avere istintivamente il senso della corsa, della fretta, della fuga. Forse per memorie ataviche di prede inseguite da zannuti carnivori, in cui era sempre l'ultimo del gruppo a soccombere. E questa sarà forse tattica anche naturale, ma non per questo scontata: i pesci che si muovono in banchi, come le aringhe o le aguglie, seguono ad esempio una strategia del tutto diversa: non cercano di correre più veloci dei compagni, ma di nascondersi dietro di essi. E questo comportamento genera la forma compatta del banco, dalla geometria[1] serrata e mobilissima, che varia aspetto e forma certo in funzione dei movimenti dei predatori, ma anche cercando sempre di conservare la compattezza e l'unicità del banco stesso.

Ma a parte la genesi delle gare sportive che alle fughe preistoriche possono essere ricondotte, resta indubitabilmente il fatto che non servono lezioni e spiegazioni sui regolamenti per fare da spettatore ad una maratona o ad una Ventiquattro Ore di Le Mans. Si guarda la corsa, si spera che arrivi primo il proprio beniamino, e tutto finisce lì. Invece spiegare tutti gli aspetti di una grande corsa ciclistica a tappe è ben altra cosa. Il Giro d'Italia (ma anche il suo fratello maggiore, il Tour de France) è al tempo stesso gara e "contenitore di gare": lo si nota immediatamente alla fine d'una qualunque telecronaca, quando immancabilmente compaiono due tabelloni. Uno reca l'ordine dei corridori in "classifica generale", ovvero la situazione attuale della "gara" propriamente detta, quella che dura tre settimane intere; l'altro è invece l'ordine d'arrivo della tappa appena conclusa, ovvero la gara quotidiana "contenuta" all'interno della gara maggiore. È questa in fondo una complicazione di piccolo ordine: anzi, più probabilmente è una complicazione inevitabile e dall'esito felice, perché raddoppia il piacere dei tifosi che seguono la gara e

[1] E se il modello matematico di un gruppo di zebre in fuga è probabilmente semplice da disegnare (Regola Unica della Preda: massimizzare la distanza dal Predatore), quello di un banco di pesci potrebbe rivelarsi assai più divertente da simulare.

l'impegno dei corridori. Se è indubbio che vincere una grande corsa a tappe è traguardo che incorona una vita da campione, è anche vero che perfino la semplice vittoria di una tappa prestigiosa può essere impresa memorabile che dà lustro perenne al curriculum d'un ciclista. Ciò non di meno, questa semplice complicazione rende già più complessa la lettura di qualche arrivo di tappa: se la Maglia Rosa[2] si trova in fuga davanti al plotone in compagnia d'uno o due compagni d'avventura, quasi certamente eviterà di impegnarsi nella volata finale che determinerà il vincitore di tappa. Esistono complesse alleanze e diplomazie all'interno d'una gara e di solito[3] è assai meglio non farsi troppi nemici e rinunciare ai premi minori quando si lotta per ottenere il massimo trofeo. E questa è cosa già complessa da spiegare al bambino piccolo di cui parlavamo poco sopra.

Ma questo è ancora niente: a ben vedere, in una corsa a tappe sono raccolti atleti e gare diversissime: se si assiste ad un meeting di Atletica si avrà occasione di vedere gare diverse con atleti specializzati in gare diverse: velocisti nei cento metri, mezzofondisti che si confrontano sui due giri di pista, resistentissimi atleti che macinano dieci chilometri di tartan prima di lanciarsi nella volata finale. Nel ciclismo delle corse a tappe è come se tutti questi atleti disputassero simultaneamente la stessa gara, avendo tutti qualche possibilità di vittoria. Si affiancano e rincorrono nella stessa tenzone tappe pianeggianti controllate dalle squadre degli sprinter che si animano solo negli ultimi chilometri per poi esplodere negli ultimi metri; tappe a cronometro in cui ogni ciclista è tragicamente solo con sé stesso; tappe ondulate e lunghe, adatte alle fughe a sorpresa; crudeli tappe di montagna, con decine di chilometri di ascesa e ritardi spaventosi sotto lo striscione dell'arrivo. Ogni ciclista corre in genere con obiettivi parziali, solo per certe tappe o certi traguardi, certi premi; e ogni squadra avrà al suo interno lo scalatore, il velocista, il gregario, il capitano: e mentre quest'ultimo lotterà per la classifica generale e la Maglia Rosa, il velocista proverà a vincere il maggior numero di tappe e magari aspirare alla Classifica a Punti (e relativa Maglia Ciclamino); e questo sprinter sarà in genere di conformazione fisica (potente, grosso e muscoloso) del tutto diversa da quella dello scalatore (asciutto, leggero e piccolo) che lotta per il Gran Premio della Montagna (Maglia Verde). I gregari devono aiutare di volta in volta i primattori, ma talvolta ricevono carta bianca per andare a caccia di gloria; talvolta per vittorie di tappa, ma più frequentemente si disputeranno, nelle tappe nelle quali non hanno compiti pressanti di supporto, premi volanti anche piccolissimi, magari messi a disposizione all'ultimo minuto da volenterose amministrazioni di paesini attraversati dalla corsa. E siccome (anche se non sembra), il ciclismo è uno sport di squadra (o quantomeno un bell'ibrido, visto che a finire negli albi d'oro sono sempre i singoli corridori, ma ogni campione ha alle spalle una squadra, di solito fortissima), a fine giornata tutti i premi, importanti o meno, si mettono in comune e si dividono in parti uguali[4]. E in questo melange complesso e articolato, che non viene neanche più raccontato dai giornali assetati di notizie clamorose, è facile immaginarsi le riunioni strategiche della squadra, con il Direttore Sportivo che ripartisce compiti,

---

[2] A beneficio di coloro (che immaginiamo pochissimi) che ancora non lo sanno: il primo in Classifica Generale del Giro d'Italia indossa come simbolo del primato una maglia di colore rosa; il regolamento vieta alle squadre che prendono parte alla gara di avere maglie sociali con questo colore; colore che è proprio questo e non altri perché rende omaggio alla Gazzetta dello Sport, il quotidiano sportivo che organizza il Giro d'Italia e le cui pagine sono – appunto - di colore rosa. Per sineddoche, il primo in classifica è detto, appunto, "Maglia Rosa".

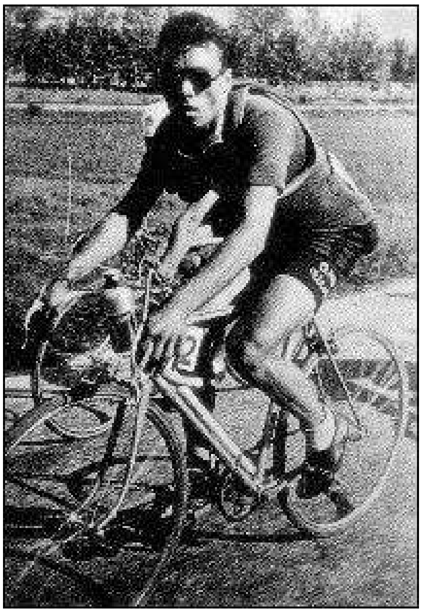
Tutto quanto scritto fino a questo punto è trasferibile in terra francese operando le seguenti facili sostituzioni: Rosa/rosa→Gialla/giallo; Giro→Tour; Gazzetta dello Sport → l'Equipe.

[3] Di solito, ma non sempre. Può capitare di essere talmente forti e spietati da non curarsi del numero e dell'irritazione degli avversari, e pertanto di vincere sempre, senza alcun riguardo diplomatico, lottando per ogni misero premio, prosciutti e mortadelle di paese compresi. Certo, per poterlo fare occorre essere tremendamente forti, nonchè voraci come cannibali. Tali e quali ad Eddy Merckx, insomma, che proprio "Cannibale" era soprannominato.

[4] Almeno, così si narra che facessero, un tempo: non siamo abbastanza al dentro delle corse professionistiche attuali per sapere se la tradizione è mantenuta. Tradizione che imponeva anche che l'unico a non fruire della "spartizione dei premi" fosse proprio il campione, la star, il capitano della squadra, perché in genere era l'unico ciclista famoso e poteva ben accontentarsi dei lauti ingaggi e dei contratti dei circuiti e delle esibizioni.

incarichi e obiettivi, in maniera non troppo diversa da quanto si faccia normalmente nelle riunioni di progetto degli uffici di tutto il mondo. E se compare un nuovo premio ottenibile, ad esso inevitabilmente farà seguito una strategia e una tattica per conquistarlo, per quanto strana e anormale tale strategia possa apparire.

Negli anni subito successivi alla Seconda Guerra Mondiale, il ciclismo era lo sport più popolare, più ancora del calcio. Il Giro attraversava la nazione con ancora le ferite aperte dalla guerra, e il pubblico si riversava per le strade a vedere i corridori. Non c'era la televisione, e così era lo sport che doveva arrivare sotto la casa degli italiani. E ci arrivava a bordo non di "un mezzo sportivo", com'è ormai diventata la bicicletta oggi, ma con il più diffuso mezzo di trasporto popolare[5], com'era la bicicletta mezzo secolo fa. I ciclisti erano veri personaggi famosi, e ogni aspetto della corsa ben noto ai tifosi: e in un simile entusiastico ambiente non stupisce che qualcuno abbia deciso di inventare un "primato al rovescio", ovvero che fosse in qualche modo portato alla gloria, considerato, premiato, anche colui che chiudeva la classifica generale. Era l'invenzione della "Maglia Nera", puro contrappasso cromatico e sostanziale della Maglia Rosa; inizialmente, la maglia era oggetto puramente virtuale[6], e il ciclista ultimo in classifica era Maglia Nera pur indossando in corsa la sua normale divisa sociale. In seguito diventò una maglia vera e distinguibile nel plotone dei corridori. Come spesso accade, l'ultimo della lista riesce a ritagliarsi una gloria al contrario, gloria in minore ma comunque gloria, negata a coloro che restano anonimi nella mezza classifica: e un po' per il prestigio, un po' per i soldi del premio di consolazione, tra alcuni ciclisti particolarmente dotati si scatenò la competizione per la Maglia Nera.



Tra tutti, il più celebre è senza dubbio Luigi (detto Luis) Malabrocca, che riuscirà a condurre felicemente sul traguardo finale di Milano le maglie nere del 1946 e 1947. E non era impresa da poco, ostacolato com'era da Giovanni Pinarello, che mirava al medesimo obiettivo. La naturale istintività della corsa veniva del tutto stravolta da trucchi e artifici messi in atto per arrivare ultimi, e nel contempo rimanere in gioco. Correre in bicicletta è ancora oggi un lavoro faticoso, ma a quei tempi forse lo era di più, e non ci si poteva permettere in squadra un corridore che mirasse solo ad arrivare ultimo: doveva lottare nei traguardi volanti, negli sprint di seconda fila, doveva portare a casa premi in natura e in denaro, prima di potersi permettere il lusso di combattere per l'ultima piazza in classifica. E con il rischio fatale di finire fuori gara per sempre, perché ogni tappa ha la sua spada di Damocle del ritardatario, il suo "tempo massimo"[7]; e se si arriva oltre quel limite, il giorno dopo non ci si

[5] Eric J. Hobsbawn, storico inglese, chiama la bicicletta "straordinaria macchina di democrazia", per evidenziare il ruolo fondamentale che essa ha avuto nel ridurre le distanze geografiche per la maggioranza dei cittadini poveri europei. *[La rivoluzione è come la bicicletta: se nessuno pedala, cade (RdA)].*

[6] Come è tornata ad essere adesso: in compenso, è assurta a modo di dire vitalissimo, al punto che è davvero difficile non ritrovarla in qualsivoglia contesto classificatorio (come nei titoli dei giornali: *"Italia maglia nera della competitività nel 2005"* , etc. etc.)

[7] Il tempo massimo è definito di volta in volta, anche se probabilmente nelle tappe dei Giri del dopoguerra era più tollerante di quello – abbastanza stretto – di oggidì. Dal regolamento del Giro d'Italia 2006 (Articolo 17), si evince che il tempo massimo dipende dalle difficoltà e dal tipo della tappa, dalla velocità media con la quale la tappa viene percorsa, e perfino che è variabile a discrezione dei giudici in caso di particolari condizioni atmosferiche. In ogni caso è stabilito su base percentuale rispetto al tempo del vincitore: e va da un minimo del 7% (per tappe facili percorse lentamente) fino al 15% delle tappe di alta montagna e al 25% delle particolarissime tappe a cronometro.

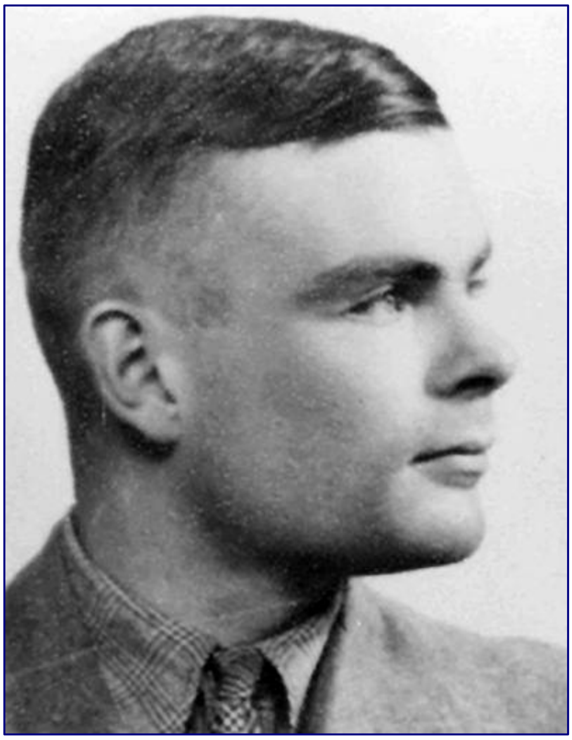
può più presentare ai nastri di partenza. Curiosamente, il bravissimo Malabrocca nulla potè, nel 1949, contro Sante Carollo. Nel 1946 gli bastò arrivare quattro ore e dieci minuti dopo il vincitore Bartali; nel 1947 trionfò con fatica, dovendo aumentare il suo ritardo dal vincitore (Coppi) a poco meno di sei ore; ma nel 1949, pur lottando degnissimamente e chiudendo con 7 ore, 47 ' e 26" di ritardo nei confronti della Maglia Rosa (di nuovo Coppi), dovette arrendersi di fronte alla "classe naturale" di Carollo, che sfiorò le dieci ore di ritardo. Classe naturale che gli derivava dall'essere più muratore che ciclista, messo in squadra quasi per sbaglio, che riusciva ad arrivare ineluttabilmente ultimo e con ritardi abissali senza sforzo e quasi senza premeditazione alcuna[8].

Ciò che appare significativo, in questa storia di lotta senza quartiere per l'ultimo posto, è come si possa stravolgere il senso naturale di un contesto e, con pochissimo sforzo d'adattamento, cominciare a considerare "normali" quelli che, almeno sulla carta, sono invece atteggiamenti del tutto paradossali nella logica della gara. Del resto, la scoperta di isole di illogicità rigogliosamente coltivate in quelli che consideriamo comportamenti razionali e consolidati è tutt'altro che difficile: basta cercare con un minimo di senso critico e di infantile curiosità. Ad esempio, i rituali del corteggiamento, della seduzione, dell'accoppiamento e della riproduzione sono regolamentati da norme variabilissime nel tempo e nello spazio, e con una tale estensione di variabilità da rendere la "corsa al contrario" di Malabrocca e Pinarello naturale quanto un caposaldo della logica aristotelica. Ci sono zone del mondo in cui si ritiene che i capelli delle donne emanino particolari raggi in grado di sconvolgere l'equilibrio psicofisico dei maschi, e di conseguenza vanno coperti e nascosti. Questo non è più valido alle nostre latitudini e ai nostri tempi, ma chiunque abbia superato i quarant'anni di età potrà ricordare che anche nel nostro paese sono esistite (e in parte esistono ancora) regole complesse che in qualche maniera stabilivano i criteri di acconciatura delle chiome femminili. Difficilmente queste potevano essere portate lunghe e sciolte nelle signore sposate, ad esempio, senza parlare dei metodi complessi di velatura, in genere e per fortuna solo parziale, in particolari occasioni sociali[9]. Più evidenti ancora di questi formalismi che lentamente mutano (ma solo in alcune parti del mondo, e non sempre nella stessa direzione) c'è il fatto che durante gli spot televisivi degli abbronzanti o dei centri di fitness – in onda anche nella cosiddetta "fascia protetta" - si riesce ad osservare una quantità di pelle esposta che supera di molto i sogni più rosei dei cacciatori di riviste osé nelle edicole di trenta o quarant'anni fa. Qualunque sia l'opinione personale dei singoli, è comunque indubbia una evidente constatazione: questi principi di etica/estetica sociale variano grandissimamente e su tempi tutt'altro che storici. È quindi veramente un peccato scoprire che molte persone hanno sofferto – e molte continuano a soffrire – perchè considerate "anormali" in questo delicatissimo ambito: e sapere che solo dieci o vent'anni dopo quella stessa anormalità non sarebbe stata più vista come tale non basta certo a risanare le sofferenze patite. Perché è indubbio che, per quanto variabilissima sia nei tempi che nei principi, la "moralità" dei propri tempi è elemento importantissimo per poter vivere una vita ragionevolmente serena, e trovarsi fuori fase con essa è cosa estremamente rischiosa.

---

[8] Probabilmente è testo apprezzabile più dai cicloamatori che dagli amanti della matematica (ma siamo certi che l'intersezione dei due insiemi non è vuoto); quindi, citiamo volentieri: Benito Mazzi, "Coppi, Bartali, Carollo e Malabrocca". Ediciclo, Euro 14, 00.

[9] In genere occasioni di carattere religioso, ovviamente, ma non solo. Sembra comunque che l'occasione principe di "velatura", quella matrimoniale, sia di diversa origine simbolica. In questo caso è proprio il velo (assai più della celeberrima equazione vestito bianco=purezza) a simboleggiare la verginità della sposa, essendo in questo caso né più né meno che un sostituto visivo dell'imene. La consumazione del matrimonio, atto che si svolge in privato, è pubblicamente riprodotta quando lo sposo solleva il velo della sposa per baciarla. Tutto il resto dell'abito nuziale femminile contribuisce all'effetto generale della sposa come "dono da scartare" tendendo un po' a rappresentare la nubenda come un pacco regalo per il marito, che invece è vestito in maniera formale ed elegante, ma non in modo "speciale".



Alan Mathison Turing nacque a Londra il 23 Giugno 1912, e per molti versi l'aggettivo "normale" non gli si addice affatto. È anche vero che, dovendo scrivere delle vite di matematici famosi, è abbastanza frequente trovarsi a raccontare di persone non esattamente normali: come recita un proverbio spesso citato da coloro che esortano alla tolleranza e temono l'emarginazione attuata dalle società miopi, "Non si può essere insostituibili senza essere diversi". Ciò non di meno, si può tranquillamente essere dei geni innovativi nella matematica e persone perfettamente inserite e rispettate nel proprio ambiente sociale; ma non è questo il caso di Alan Turing. Destinato ad essere riconosciuto in seguito come uno dei padri – se non decisamente "il padre", singolare e principale – della moderna computer science, Alan non mostra come altri geni una precoce intelligenza e una brillante mente esplorativa. Durante l'infanzia e l'adolescenza palesa qualche caratteristica intellettuale insolita (come, ad esempio, un precoce interesse verso la Teoria della Relatività e gli esperimenti di Chimica, bilanciato da un solido terrore nei confronti del latino e delle Sacre Scritture), ma in generale i suoi risultati scolastici non sono tali da lasciar intravedere un roseo futuro di geniale scienziato. Anzi.

Eppure, questo studente non particolarmente brillante, apparentemente destinato ad una grigia carriera innestata in una non meno grigia vita, cambierà il mondo. E lo farà almeno un paio di volte. Qualcosa succede, durante la sua prima gioventù, e quando lo ritroviamo a Cambridge, nel King's College, nel 1931, è già un altro Alan Turing quello che si applica alle più avanzate ricerche matematiche. È ricercatore originale nei metodi, deciso nella ricerca dei risultati; sembra che non voglia semplicemente studiare e accettare i teoremi ottenuti dai suoi predecessori, ma che si imponga di "ritrovarli", dimostrandoli di nuovo con i suoi propri metodi. Metodi poco convenzionali. Tra il 1931 e il 1935, i suoi interessi di ricerca spaziano dalla teoria della probabilità, oggetto delle sue prime pubblicazioni, allo studio dei Principia Mathematica di Russell e Whitehead; è proprio il periodo in cui l'approccio russelliano è messo in crisi dal teorema di Incompletezza di Gödel. È anche il periodo in cui Turing viene a conoscenza, grazie alle lezioni di Max Newman[10], dell'esistenza dell'ancora aperto problema della Decidibilità (*Entscheidungsproblem)*, uno dei famosi ventitré problemi di Hilbert, che chiedeva se fosse possibile, almeno in via di principio, trovare un metodo o processo tramite il quale stabilire se una qualunque affermazione matematica potesse essere provata o meno.

È il terreno perfetto per Turing: è attratto dai processi mentali, i suoi metodi sono già analitici nel senso più logico del termine, e le relazioni tra mente e macchina sono ciò che più lo interessa: nell'Aprile del 1936 è pronto a pubblicare "*On Computable Numbers with an application to the Entscheidungsproblem"* dove risponde alla domanda di Hilbert, non prima di aver ridefinito con cura il concetto di "metodo o processo" implicito nella domanda[11]. Alan ha solo ventiquattro anni, e all'interno di quella pubblicazione è già descritta, almeno nei principi, quella che passerà alla storia come la "Macchina di

[10] Maxwell Herman Alexander Newman (1897-1984) topologo (ma anche pianista e scacchista).

[11] E la risposta è "No".

Turing". La pubblicazione in sé avrà però minor fortuna di quello che si merita: prima che venga data alle stampe esce la memoria sullo stesso tema firmata da Alonzo Church, e Turing deve fare buon viso a cattivo gioco, ritardare l'uscita della pubblicazione del suo studio (uscirà solo in Agosto) e citare come riferimento la pubblicazione di Church. Ma uno studio comparato delle due pubblicazioni rivela subito l'originalità del lavoro di Turing: mentre quello di Church è studio puramente logico matematico, Turing si immerge nella definizione dei processi e degli algoritmi. Il suo tentativo è quello di razionalizzare e in un certo senso meccanicizzare le leggi della logica, che sono in ultima analisi le leggi stesse del pensiero; è il primo serio passo verso l'integrazione tra il mondo logico e quello fisico o, se si vuole tirare all'estremo la metafora, il primo reale punto di contato tra hardware e software. In questo senso la "Macchina di Turing" è universale e antesignana di tutti i moderni elaboratori. E in questo senso, Alan Turing è il vero artefice della tecnologia principe dei nostri tempi, reale creatore del mondo tecnologico così come lo conosciamo.

Ma questo è soltanto lontano futuro, nel 1936. Turing comincia ad attrarre l'attenzione dei migliori logici del mondo: Von Neumann è incuriosito dai progressi dell'inglese, il quale continua nel suo lavoro come se niente fosse. Dimostra prima che la sua prova per algoritmi sulla Decidibilità è logicamente coincidente a quella di Church; passa poi ad interessarsi della "*ordinal logics*[12]", sulla quale terrà la tesi di dottorato, fino a raggiungere poi gli estremi dell' "incontabile (*uncomputable*[13])", quasi a voler continuare a far procedere il discorso di relazione tra il pensiero-logico e il pensiero-macchina. Ma non aveva pace: tra il 1936 e il 1939 rifiutò un'offerta che gli arrivava da Princeton (in particolare da Von Neumann), decise invece di rimanere a Cambridge e di seguire le lezioni di Wittgenstein sulla filosofia della matematica (che pochissimi matematici frequentavano, a dire il vero); poi cominciò a costruire un congegno meccanico che sarebbe dovuto servire a calcolare gli zeri della Funzione Zeta di Riemann[14].

Di certo, quel che accade negli anni successivi al 1939 fu tale fa distogliere l'attenzione del mondo da gran parte dei teoremi matematici. Lo scoppio della Seconda Guerra Mondiale

cambia per necessità gli usi e le abitudini degli europei, e degli inglesi in modo particolare. Alan Turing fu fin dall'inizio della guerra inserito nel celebre gruppo di Bletchley Park, dove i crittoanalisti inglesi[15] tentavano di scardinare i codici segreti delle forze armate tedesche. L'impresa di decrittazione era davvero quasi impossibile, perché i migliori cervelli di Germania avevano prodotto la terribilissima Enigma, macchina cifratrice estremamente complessa e dalla logica crittatoria tutt'altro che banale. Se gli inglesi riuscirono a sconfiggere Enigma – e dando così un contributo davvero notevole, forse anche decisivo, per le sorti della

[12] Che potremmo tentare di tradurre come "logica ordinale" ma che, essendo parola tecnica, potrebbe suonare anche in maniera del tutto diversa, nella letteratura in lingua italiana…

[13] Con ovvio riferimento di contrapposizione alla sua pubblicazione più famosa, quella appunto chiamata "On Computables…"

[14] Non è infrequente, oggigiorno, sentire ragazzi ancora indecisi sulla scelta della facoltà universitaria che palesano il desiderio di fare Informatica, frenati però dalla "stranezza" data dalla presenza di "troppi esami di matematica". È probabile che il rapporto con i PC sia ormai vissuto dai giovani in maniera del tutto indipendente dalle origini – prettamente matematiche – della computer science. E quindi, tanto per riallacciarci al tormentone di quest'articolo, quei ragazzi potrebbero anche trovare "strano" che il padre dell'informatica sia stato a tutti gli effetti matematico, non meno interessato ai mostri sacri della matematica di quanto lo fosse per gli algoritmi delle sue macchine.

[15] Abbondavano anche i profughi polacchi, nel gruppo.

guerra – fu per una serie di concause, e non certo solo per il lavoro di decrittazione che si svolgeva al Bletchley Park. Ci fu un contributo fondamentale dei servizi segreti polacchi; un altrettanto decisivo recupero, da parte dei militari inglesi, di una macchina Enigma usata dalla marina tedesca; e così via. Anche con questi elementi, però, scoprire in via definitiva i segreti di Enigma fino al punto di poter effettivamente decrittare i messaggi degli Alti Comandi tedeschi fu impresa titanica, resa possibile solo dalle incredibili capacità di Turing di ridurre ad "atomi logici" ripetibili tutte le azioni necessarie. Insieme a Welchmann riuscì a costruire una complicata macchina di decrittazione chiamata "Bomba[16]", che ebbe ragione di Enigma fino al 1942, quando i Tedeschi, finalmente insospettiti, complicarono ulteriormente il sistema di crittografia. Ma nel frattempo l'Inghilterra aveva resistito per tre anni agli attacchi tedeschi, e l'esito della celebre "Battaglia dell'Atlantico" sarebbe stato quasi certamente diverso, in assenza del gruppo di Bletchley Park[17].

Alla fine della guerra, Alan Turing ha solo trentatrè anni, e un mondo intero di successi dovrebbe dischiudersi per lui. E furono davvero molti gli interessi che coltivò: quelli professionali, soprattutto, con il progetto ACE (Automatic Computing Engine) con il quale partecipò alla competizione con gli americani verso i primi veri calcolatori elettronici. Ma si interessò anche di biologia, pubblicando persino un lavoro d'una certa importanza (*Le basi chimiche della Morfogenesi*) e ottenendo, a tempo perso, una delle migliori prestazioni nazionali nella maratona, al punto che solo un malanno dell'ultima ora gli impedì di partecipare alle Olimpiadi di Londra del 1948. Continua a interessarsi di matematica, di quella che sarà poi l'informatica, e inventa il "Test di Turing" per misurare le capacità di una macchina, test sul quale esiste una letteratura ormai vastissima.

Ma Alan Turing rimane quello che è sempre stato: una persona poco "normale", almeno a giudizio di color che sanno ben distinguere la normalità dall'anormalità. Certo, la sua diversità principale, in quei tempi difficili, era la sua evidente omosessualità: e forse proprio per non sottostare al gratuito giudizio del normali, Turing sembrava divertirsi a manifestare sempre più atteggiamenti strani e anticonformisti. Si vestiva come meglio veniva, indossando spesso la giacca del pigiama al posto della camicia, quando addirittura non si presentava al campo da tennis vestito (solo) di un impermeabile. Pedalava per Cambridge indossando la maschera antigas durante il periodo dell'impollinazione, per evitare la febbre da fieno[18], e sembrava ossessionato dalla favola di Biancaneve e i Sette Nani, in particolar modo dal pezzo in cui la strega cattiva compie il suo sortilegio per avvelenare Biancaneve.

Cose da matti, insomma. Da matti e da omosessuali. Usate i vocaboli più comuni per definire questi due concetti, traslateli in una bigotta Inghilterra degli anni Quaranta, e immaginate quello che doveva essere per Turing il concetto di "normale". E visto che ormai siamo giunti al punto, ritornate indietro, alla prima gioventù di Alan Mathison Turing, quando quell'uomo che avrebbe duplicemente cambiato il mondo era ancora solo uno studente non troppo diligente né promettente. Cosa accadde a quel sedicenne, per cambiarlo così tanto? Cosa lo allontanò definitivamente dai binari della "normalità", per condurlo nei sentieri ben più aspri del totale anticonformismo?

---

[16] Il cui meccanismo è ovviamente complesso, ma anche solo il nome non scherza. Si ritrova spesso citato in testi di lingua inglese come "Bomb", ma più spesso come "Bombe". Curiosamente, i siti che sembrano più attendibili riportano invece proprio "Bomba", come la corrispondente parola italiana.

[17] *Enigma* ha fecondato la fantasia non solo degli storici e dei matematici, ma anche di scrittori e registi. Nel 2001 è stato girato un film con Kate Winslet, e un celebre romanzo di Robert Harris, intitolato appunto "Enigma" è entrato nella classifca dei bestseller. In italiano è edito da Mondatori, euro 8, 40.

[18] A costo di rischiare di fare la parte degli anticonformisti a tutti i costi, ci pare opportuno far notare che, alla fin fine, indossare una maschera dotata di filtri per non respirare pollini allergogeni non ci sembra azione poi troppo "anormale". Quantomeno, non più anormale che il non farlo solo perché le convenzioni sociali stabiliscono che "non è carino andare in giro con una maschera".

Tutto, probabilmente, nasce dal suo amore per Christopher Morcom, un coetaneo che incontra nel 1928. Christopher era studente brillante e intelligentissimo, assai più promettente di Alan. Il legame tra i due ragazzi, davvero poco più che adolescenti, non può certo evolversi in modo naturale, visto che Christopher, tragicamente, muore a soli diciott'anni, nel 1930. La tragedia sconvolge a tal punto Alan da cambiare radicalmente la sua vita: si sente chiamato "a fare ciò che avrebbe potuto fare Christopher", e quindi centuplica il suo impegno. La sua giovane mente, come risulta dalle lettere che scrive regolarmente alla madre di Morcom, è tormentata dall'interrogativo cruciale: come riesce la mente umana a risiedere nella materia? Come è possibile che la morte riesca ad estrarla così totalmente? Come si può fare in modo di reintegrare una mente brillante - come quella di Christopher, certo - all'interno della materia non inanimata? Da qui, da una tragedia crudele, da una passione difficile e quasi adolescenziale nasce uno dei geni più rivoluzionari del secolo. E non c'è quasi nulla di "normale" in tutto questo: né nel tipo di amore coinvolto – ancora condannato da quasi tutte le società umane – né nella lucida follia del matematico che fruga le leggi del pensiero solo al fine di poterle in qualche modo riprodurre, e magari rigenerare i pensieri dell'amato. E non c'è niente di normale – a ben vedere – nel voler convincersi che il pensiero sia ospitabile nella materia inanimata. Almeno, non è certo un pensiero normale nel 1930, quando la frase "Intelligenza Artificiale" è ancora da inventare, quando l'idea che possano esserci milioni, miliardi di computer potentissimi in ogni casa, su ogni scrivania, tutti facilmente collegabili con poche e facili operazioni, appare più fantascientifica d'un viaggio sull'appena scoperto Plutone.

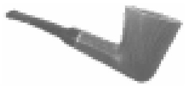
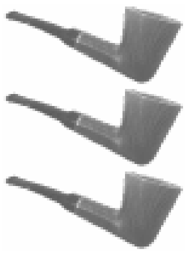
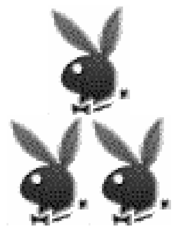
Nulla di normale, nel genio che – quasi per definizione – normale non può essere. Alan Turing, alla fine, non riuscì più a far convivere la sua omosessualità e la sua vita. Nel Giugno del 1954 uno scandalo gli tolse anche l'ultimo desiderio di combattere, e si tolse la vita. Siccome non era per niente normale, rifuggì dai metodi classici: nessun colpo alla tempia, niente precipitazione o taglio delle vene. Era pur sempre il giovane ragazzino affascinato più dagli esperimenti di chimica che dal latino, era pur sempre il matematico strambo che recitava ossessivo il sortilegio della strega cattiva di Biancaneve. Così, un paio di settimane prima del suo quarantaduesimo compleanno, Alan Mathison Turing si mise sia nei panni della Strega Cattiva che in quelli di Biancaneve, prima avvelenando una mela col cianuro e poi dandole il morso fatale.

Per molto tempo è circolata la leggenda che il logo della Apple fosse una mela proprio in memoria di Turing. I responsabili dell'azienda hanno sempre negato, forse spaventati all'idea che il simpatico logo multicolore potesse in qualche modo legarsi troppo alla funebre icona d'un suicida.

Beh, forse sbagliano. Suicidarsi mordendo una mela avvelenata dopo aver cambiato il mondo non è certo tragico, al massimo grottesco. Più probabilmente, è divinamente ironico e sarcastico. Però, sì, non c'è dubbio alcuno: non è assolutamente *normale*[19].

[19] Gran parte delle notizie sulla vita privata di Alan Turing sono state estratte dal sito di Andrew Hodges; matematico, allievo di Roger Penrose e omosessuale, Hodges ha fatto di Turing la sua personale icona. È appena giunto nelle librerie italiane il suo "Alan Turing. Una biografia". Costa 19 euro.

2. Problemi...

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
...postali			
...di parcheggio			

Piccola nota sul secondo problema: ci siamo limitati a tre birre per quanto riguarda la valutazione di Alice e a tre coniglietti per quanto riguarda quella di Doc; se avessimo dovuto mantenere la loro valutazione stimata, a Dublino avrebbero bevuto succo d'arancia per un mese e Hugh Hefner sarebbe diventato frate trappista.

Rudy sostiene inoltre che, quantomeno per l'estensione, ci sarebbe da aggiungere almeno una pipa *[Certo; le mie pipe sono esponenziali... (RdA)]*. Comunque non si sporge, anche perché l'estensione non l'ha risolta neanche lui.

2.1 ...postali

Per motivi che trascendono gli scopi di questo problema, Rudy si è trovato, giorni fa, nell'occasione di dover inviare un pacco per posta. E il suo comportamento è stato, tanto per cambiare, il solito.

Mentre i Validi Assistenti si occupavano di trovare una scatola, scovare un ufficio postale compiacente, incartare il tutto eccetera, Rudy cercava in Internet le tariffe (con l'intento di far pagare l'invio a sua moglie) e, come al solito, si è perso.

Infatti ha scoperto che il concetto di "misura" applicato ai pacchi postali (parallelepipoidali) è una cosa per cui, come ama dire, "Il processo di Kafka sembra un tranquillo picnic".

Ad esempio, gli Americani.

Tanto per cominciare, trovano un'interessante definizione di lunghezza: per un postino americano, questa è la dimensione più lunga di un pacco.

Per quanto riguarda le altre due dimensioni, non vengono prese in considerazione separatamente, ma si calcola il "perimetro" della sezione del pacco (e gli americani la chiamano *girth*, che ha giustappunto il significato di "giro") o, se preferite, il doppio della somma delle due dimensioni restanti.

La cosa divertente è che in America spedire i pacchi costa ragionevolmente poco *se la somma della lunghezza più il "giro"* è un valore minore di ***130*** (pollici).

Tutti gli uffici postali prevedono (come da noi) un "passaggio" per far passare i pacchi; il motivo dell'aria assorta di Rudy (oltre che servirgli a sembrare impegnato, così non gli danno altro da fare) è che sta cercando di calcolare quale possa essere il lato minimo di un passaggio quadrato attraverso cui possano entrare alla Posta tutti i pacchi che "pagano poco".

Se gli date una mano, magari si decide a darsi da fare e perde quell'aria imbambolata...

2.2 ...di parcheggio

Nel senso che a prima vista sembrano problemi di parcheggio, in realtà i due terzi della Redazione li considerano problemi da astanteria di ospedale psichiatrico *[solo perché arrivo agli appuntamenti con quarantacinque minuti di anticipo? (RdA)]*.

Chiunque conosca Rudy e abbia fissato un appuntamento con lui sa che a qualunque ora arrivi nel luogo deputato lo troverà già lì con notevoli probabilità. Lui sostiene che è perché non gli piace cercare parcheggio; la cosa non ci convince molto, ma è probabile che sia vera, visto quello che succede in merito all'andata e al ritorno dal suo lavoro-che-paga-ma-non-appaga.

Infatti, Rudy di solito si ritrova nel cortile di casa verso le quattro del pomeriggio, quando tutti i condomini sono ancora al sudato lavoro.

Ora, lo spazio di parcheggio preferito da Rudy è lungo ***tre*** macchine e non porta le divisioni dello spazio per ogni singola macchina; siccome tanto lo fanno tutti i condomini e nessuno si è mai lamentato, chi arriva piazza la macchina negli spazi un po' dove capita.

"...ma che cavolo di lavoro fa, che è già a casa alle quattro?"

Beh, dovrebbe essere in ufficio tra le otto e mezza e le nove, ma normalmente arriva in ufficio alle sei; lui sostiene che in questo modo prende due piccioni con una fava, trovando il parcheggio "sui piedi di Erasmo" (come dice lui: trattasi del guardiano notturno) e svolgendo, in quelle tre ore, buona parte del lavoro della giornata.

Insomma, neanche sul lavoro ci sono grossi problemi di parcheggio, per il Nostro; e, anche lì, si verifica una situazione simile a quella di casa; solo che in questo caso lo spazio parcheggio è lungo ***quattro*** macchine.

Per essere più chiari: uno arriva e piazza la macchina nel parcheggio in uno spazio "che ci stia", con distribuzione uniforme (nel senso che non va a cercarsi il posto più largo e non si cura particolarmente di che distanza ci sia tra una macchina e l'altra; basta che sia positiva); le macchine sono tutte lunghe uguali *[esattamente* **1** *"Tojo" (RdA)]* e finchè ce ne stanno gli utenti le mettono.

Ora, la domanda è: quante macchine ci saranno, mediamente, nei parcheggi quando non possa più parcheggiarci nessuno?

Attenzione che abbiamo chiesto "mediamente", quindi sono ammessi i decimi e i centesimi di macchina.

Il consiglio di Rudy è di procedere con calma (sennò gli bollate la macchina), magari iniziando ad analizzare i casi piuttosto semplici con parcheggi larghi una o due macchine; poi, potreste provare a vedere se si riesce a generallizzarlo per ***n*** macchine... Il che è esattamente l'espressione che il Nostro non è riuscito a risolvere.

3. Bungee Jumpers

Dimostrare che se il polinomio a coefficienti interi

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

è uguale in valore assoluto a 1 per due interi $x = p$ e $x = q$ ($p > q$) e se l'equazione $P(x) = 0$ ha una radice razionale a, allora $p - q$ vale 1 o 2 e $a = \dfrac{p+q}{2}$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Ragazzi, ce l'abbiamo fatta. Se leggete queste righe vuol dire che abbiamo (soprattutto la nostra linotype Alice) superato la vergogna per le innumerevoli[20] sviste del numero ottantotto e ci abbiamo riprovato.

Pettegolezzi per gli eventi del mese ne abbiamo pochi: ringraziamo tutti per gli auguri al Doc, soprattutto ***Cid***, che con i tre regali ai tre Redattori di RM ci ha lusingato e fatto felici. In particolare il regalo per il Doc sarà al più presto inserito tra le pagine del sito, non appena rusciamo a riprenderci dal lavoro in arretrato.

Il mese scorso abbiamo fatto pubblicità alle Olimpiadi degli scacchi e ci eravamo persino dimenticati che tra le file dei nostri lettori c'è uno degli arbitri delle competizioni: ***Bob***. Complimenti a lui e a tutti i partecipanti.

A proposito di Olimpiadi, non pensate nemmeno per un attimo che noi si possa aver dimenticato quelle di Cesenatico: in questa occasione avevamo un inviato speciale che ha distribuito biglietti da visita e arruolato nuovi accoliti, e dal quale aspettiamo al più presto un accurato reportage.

Per quanto ci riguarda, passiamo ora alle soluzioni inviate dai lettori, quelle non ci mancano mai.

4.1 [087]

4.1.1 Compleanno di Doc!

Qfwfq aveva ancora qualcosa da aggiungere:

> In effetti mi sembra che questo famoso problema (che se non sbaglio fu introdotto niente meno che da Raymond Smullyan alla fine degli anni 80) non sia stato discusso molto approfonditamente in rm88. Siccome è ormai diventato un classico tra chi si diletta di probabilità, credo meriti qualche parola in più!
>
> Dalle risposte al mese precedente sembrerebbe che la causa del paradosso risieda su un uso improprio della teoria della probabilità. Questa opinione è abbastanza diffusa, ma tuttavia si può mostrare che non è questo il caso. Su quando sia lecito o meno usare il concetto di probabilità è in effetti un argomento (non matematico) sul quale si è discusso e si discute tantissimo. Se per esempio io proponessi "Se indovini la mia età vinci 50 euro altrimenti perdi 1 euro", sarebbe lecito usare una distribuzione di probabilità per descrivere il fatto che è più probabile (in base ad altre eventuali informazioni sulla mia vita) che io abbia tra i 20 e i 60 anni piuttosto che meno di 20 o più di 60? Per alcuni (cosiddetti "frequentisti") questo uso sarebbe assolutamente errato perché la mia età non è una variabile aleatoria. Per altri (i cosiddetti "bayesiani" perché usano spesso il teorema di Bayes per ricavare informazioni invertendo probabilità condizionate) è una procedura non solo lecita ma anche molto efficace per descrivere quanto sappiamo di un certo argomento.
>
> Secondo l'atteggiamento frequentista ha ragione Andrea a dire che "una volta scelta una scatola non ha senso considerare come aleatorio il fatto che l'altra contenga il doppio o la metà di pasticcini" per il semplice fatto che le scatole non sono preparate in modo aleatorio. Tuttavia non è qui il nocciolo del problema, infatti adesso mostrerò una versione del paradosso che fa uso di dadi e monete, analizzabile con la probabilità classica (non bayesiana), dove il paradosso persiste pienamente.

[20] Il GC ha detto che 88 si prestava a una "doppia infinità" di qualcosa, noi abbiamo pensato ad imbottirla di errori, ma c'è chi, come Loba, ha pensato l'avessimo fatto apposta "per vedere se eravate attenti"....

Supponiamo dunque che chi prepara le scatole si munisca di un dado e lo lanci fino a che non esca un 6 e chiami n il numero di lanci effettuati prima dell'uscita del 6. Se quindi esce 6 al primo lancio, n=0, se esce al secondo n=1 e cosi via. Determinato n in questo modo, mette in una scatola 2^n pasticcini ed il doppio, cioè 2^(n+1), nell'altra. Ovviamente p(n)=1/6 (5/6)^n, inoltre nelle scatole vi sono un numero di pasticcini che necessariamente è una potenza di due.

Il concorrente sceglie una scatola a caso (eventualmente con l'aiuto di una moneta), la apre ed osserva il contenuto, e può decidere se cambiare o meno.

Supponiamo che apra la scatola e osservi 2^k pasticcini.

Se k=0 (cioè vi è 1 pasticcino) conviene cambiare perché nell'altra vi sono certamente 2 pasticcini.

Se k>0 allora si possono calcolare le seguenti probabilità condizionate:

p1 = P(nelle scatole vi sono 2^k e 2^(k+1) pasticcini | nella scatola scelta vi sono 2^k pasticcini)

p2 = P(nelle scatole vi sono 2^k e 2^(k-1) pasticcini | nella scatola scelta vi sono 2^k pasticcini)

dove | si legge "condizionata al fatto che".

Per il calcolo di p1 e p2 si usa il teorema di Bayes[21] che simbolicamente scrivo cosi

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{\sum_B P(A \mid B)P(B)}$$

Dal calcolo viene che p1=5/11 e p2=6/11.

Se non cambio mi tengo 2^k pasticcini, se cambio in media ottengo p1 2^(k+1) + p2 2^(k-1)= 2^k(2p1 +p2/2)= 2^k 13/11, e quindi conviene cambiare.

Questa media ha un significato frequentista: si può fare una simulazione al computer ed osservare che al crescere delle simulazioni (condizionate al fatto che il pacco scelto contiene 2^k pasticcini) si tende al valore medio.

Siccome sia nel caso k=0 che nel caso k>0 conviene cambiare, è inutile aprire il pacco: conviene cambiare sempre, qualunque sia il contenuto! Ecco riapparso il paradosso.

L'origine del paradosso è facilmente individuabile nel fatto che il valore medio di pasticcini nelle scatole è infinito. Infatti $\sum_n 2^n 1/6(5/6)^n = \infty$.

Usare distribuzioni con valori medi infiniti porta facilmente a paradossi, anche se poi si condiziona (e le probabilità condizionate hanno valori medi finiti). Avendo, per esempio, una disponibilità infinita di denaro, è facile individuare una strategia che vinca alla roulette con probabilità 1.

Come esercizio si può variare un poco il problema e supporre che n sia determinato con p(n)=(1-x) x^n (nel caso precedente x=5/6), e nelle scatole si mettano a^n e a^(n+1) pasticcini. Il numero medio di pasticcini nelle scatole diverge se a>1/x. Si vede che se a<1/x il paradosso non esiste (cioè nel caso k>1 non conviene cambiare le scatole, e quindi è necessario osservare il contenuto per decidere) se invece a>1/x il paradosso appare.

[21] *[Ho del materiale per un PM piuttosto bruttino sul teorema di Bayes: se me lo chiedete in almeno due, potremmo anche provare a vedere di scriverlo. Però poi promettete di litigare sulle probabilità, altrimenti non è divertente... (RdA)]*

> Il problema originale non era affrontabile con l'approccio Frequentista, ma poteva ben essere impostato secondo (per alcuni discutibile) l'approccio Bayesiano. Tuttavia assumere (come si era fatto) che p1=1/2 e p2=1/2 implicava necessariamente che il valore medio di pasticcini nella scatola fosse infinito.
>
> Morale: Le distribuzioni di probabilità con valore medio infinito portano a paradossi.

Che come morale ci sembra di buon auspicio.

4.2 [088]

4.2.1 Problema temporaneamente brutto

Il primo problema del mese scorso è piaciuto abbastanza, anche se in tanti si sono lamentati perché era troppo facile. Il motivo per cui "non piaceva" al Capo, è che non aveva ancora scritto il PM sulla Teoria dei Giochi, cosa che, se leggete fino in fondo scoprirete ha cominciato a fare da questo mese. Se costruite la Tabella di Nash del giochino, vi accorgete che *non ha un punto di sella* (il *minimax* di Nash), quindi è sbilanciato. Il Capo voleva vedere se qualcuno trovava una soluzione alternativa...

Ci hanno provato ***PMP***, ***Sand***, ***Damir Wilras***, ***Zar***, ***jvanbie*** (con una risposta intutiva), ***Ugo***, ***Cid***. Vediamo cosa dice ***Sand***:

> Il problema temporaneamente brutto è bello. Facilino, anche, ma bello, anche se con un appunto che spiego dopo. Io l'ho risolto seguendo l'approccio classico della teoria dei giochi, con la seguente tabella dei payoff:
>
> | | 1 | 2 |
> |---|---|---|
> | 7 | | |
> | 8 | | |
>
> Ipotizzando una strategia mista (qualsiasi altra strategia risulta strettamente dominata, quindi inutilizzabile) per entrambi i giocatori, vale a dire: Alberto sceglie l'8 in modo casuale con frequenza x e Fred sceglie il 7 con frequenza y, dove x e y sono entrambi strettamente compresi tra 0 e 1, si calcola immediatamente la vincita media a giocata V di Alberto (che per la simmetria del problema corrisponde alla perdita media di Fred): V=8-10x-15y+18xy
>
> La soluzione è identificata dal punto di equilibrio, ovvero la coppia di x e y per i quali nessuno dei giocatori ha convenienza a modificare la propria strategia. Data la linearità del problema in x e y presi separatamente, tale equilibrio è indifferente e si ottiene per x=15/18, y=10/18. In tal caso V=-1/3, quindi mediamente Fred vince 33,3 fiche ogni cento giocate.
>
> L'appunto, e qui entriamo nell'opinabile, sta nell'aver anticipato la soluzione del problema. Io lo avrei posto nei termini usuali, ovvero: dopo 100 giocate, quante fiches in più (o in meno) si ritroveranno i due giocatori?
>
> Scusatemi, ma sono affezionato ai canoni tradizionali.

PMP ci manda un applet per trovare le strategie ottimali, e nota che la strategia di Fred non è ottimale, visto che non ottiene il guadagno massimo. ***Cid*** invece, lo risolve in maniera diversa.

> Ovviamente se Alberto e Fred giocassero rosso o nero con probabilità del 50%, il gioco sarebbe onesto. Consideriamo invece che entrambi cerchino di seguire la migliore strategia possibile. Quale può essere una strategia vincente per Fred?
>
> Chiamiamo X la probabilità con cui Fred gioca il **sette** nero.
>
> Chiamiamo Y la probabilità con cui Alberto gioca l' **otto** rosso.
>
> Con probabilità X•Y vince Fred e guadagna 7 *fiches*.
>
> Con probabilità X•(1-Y) vince Alberto e guadagna 1 *fiche*.
>
> Con probabilità (1-X)•Y vince Alberto e guadagna 8 *fiches*.

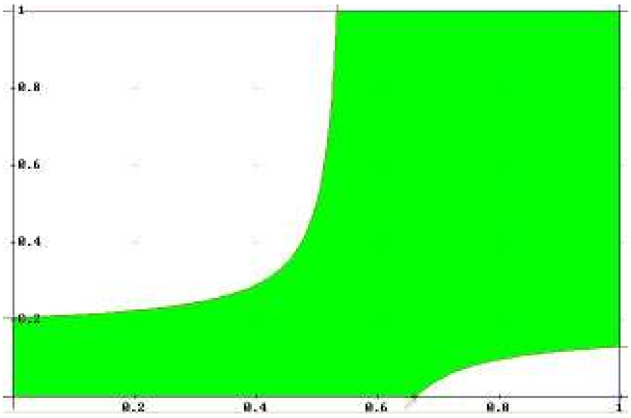
Con probabilità (1-X)•(1-Y) vince Fred e guadagna 2 *fiches*.

Il gioco è vantaggioso per Fred se:

$$7 \cdot x \cdot y + 2 \cdot (1-x) \cdot (1-y) - 8 \cdot (1-x) \cdot y - x \cdot (1-y) > 0,$$

che semplificato diventa:

$$18 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 10 \cdot y + 2 > 0.$$



Considerato che X e Y sono sempre comprese tra 0 e 1 essendo probabilità, abbiamo che l'equazione precedente è rappresentata dall'area verde della figura seguente, da cui si può notare che esistono valori di X che garantiscono la vittoria a Fred, indipendentemente dal valore che assume Y.

Vediamo ora qual è l'intervallo in cui deve essere scelto X per garantirsi la vittoria.

Ponendo Y=0, nell'equazione $18 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 10 \cdot y + 2 = 0$, otteniamo: $3 \cdot x = 2$.

Ponendo Y=1, nell'equazione $18 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 10 \cdot y + 2 = 0$, otteniamo: $15 \cdot x = 8$.

Dunque X deve rispettare il seguente intervallo: $\frac{8}{15} < x < \frac{2}{3}$.

Vediamo ora qual'è il valore di X che garantisce il migliore risultato per Fred.

Si può notare che la funzione:

$$18 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 10 \cdot y + 2 = 0$$

ha un asintoto verticale per $x = \frac{5}{9}$; andando a sostituire questo valore di X nella funzione:

$$z = 18 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x - 10 \cdot y + 2$$

si ricava $z = \frac{1}{3}$ indipendentemente dal valore di Y. Questo valore è il valore massimo che questa funzione può raggiungere.

Con il valore $x = \frac{5}{9}$, su 99 giocate ho:

Con probabilità $\frac{5}{9}$•Y vince Fred e guadagna 7 *fiches*.

Con probabilità $\frac{5}{9}$•(1-Y) vince Alberto e guadagna 1 *fiche*.

Con probabilità $\frac{4}{9}$•Y vince Alberto e guadagna 8 *fiches*.

Con probabilità $\frac{4}{9}\bullet$(1-Y) vince Fred e guadagna 2 *fiches*.

Quindi il numero di fiches che Fred vince vale:

$$\left(7\cdot\frac{5}{9}\cdot y+2\cdot\frac{4}{9}\cdot(1-y)\right)\bullet 99=\left(3\cdot y+\frac{8}{9}\right)\bullet 99,$$

e il numero di fiches che Alberto vince vale:

$$\left(8\cdot\frac{4}{9}\cdot y+\frac{5}{9}\cdot(1-y)\right)\bullet 99=\left(3\cdot y+\frac{5}{9}\right)\bullet 99.$$

Da cui si ricava che la differenza tra le *fiches* di Fred e quelle di Alberto vale:

$$\left(3\cdot y+\frac{8}{9}\right)-\left(3\cdot y+\frac{5}{9}\right)\bullet 99,$$

che semplificato da il seguente risultato: 33 *fiches,* e ciò significa che se Fred gioca il **sette** nero con probabilità uguale a: $\frac{5}{9}$, dopo 99 giocate avrà (circa) 33 *fiches* più di Alberto, indipendentemente dalla strategia di gioco che Alberto decida di seguire.

Ancora una volta il Capo aveva ragione. C'era un altro modo.

4.2.2 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?

Questo è il momento per un'ennesima *errata corrige* del numero 88, che vi diamo direttamente secondo le istruzioni del Capo:

> C'è da segnalare l'ennesimo errore del numero 88: Nel P2 (che nessuno ha risolto... e vorrei vedere...): la frase: *"[...] quel perfido di Rudy ha definito i gruppi in modo tale che ogni gruppo estragga in totale dalle scatole lo stesso numero di vassoi"* va sostituita con la frase: *"[...] quel perfido di Rudy ha definito i gruppi in modo tale che ogni gruppo estragga da ogni scatola lo stesso numero di vassoi"*; o, meglio (mi sembra più chiara, nel senso che gli estratti per scatole diverse possono essere diversi): *"[...] quel perfido di Rudy ha definito i gruppi in modo tale che data una scatola, ogni gruppo in totale estragga da quella scatola lo stesso numero di vassoi".*

In realtà una soluzione è arrivata in Redazione, e anche una bella soluzione, da parte di ***Cid***, il commento del Capo è precedente. Abbiamo deciso di non pubblicarla qui per dare a lui e a tutti voi più tempo e spazio. Infatti ***Cid*** stesso ci scrive:

> Lo so che la dimostrazione di quanto scrivo rimane incompleta, ma per una dimostrazione completa... *Hanc Marginis (Temporis) Exiguitas Non Caperet…*

Buon lavoro, ragazzi

5. Quick & Dirty

L'altra volta abbiamo giocato a scacchi, questa volta giochiamo a poker.

C'è una cosa che non mi è mai stata molto chiara; una delle regole del poker dice che una scala a colore vince sempre un poker. Ora, supponiamo di giocare con un mazzo da 52 carte; le scale possono avere come prima carta 1, 2, 3,..., 10 (nell'ultimo caso viene chiusa dall'asso); quindi, posso farne 10 per ogni seme, totale 40 nel mazzo.

Invece, quando faccio un poker, posso farne solo 13 in tutto il mazzo, quindi le probabilità di fare poker sono minori di quelle di fare scala.

Ma allora perché vince la scala?

6. Pagina 46

Esprimiamo la radice razionale di $P(x)=0$ nella forma $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$; esprimendo il polinomio in funzione delle potenze di $x-p$, otteniamo:

$$P(x)=c_0(x-p)^n+c_1(x-p)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}(x-p)+c_n,$$

dove i coefficienti c_i sono interi e ottenibili in funzione dei coefficienti originali a_i.

Nota **c_0 è uguale al coefficiente a_0 di $P(x)$; c_1 è uguale al coefficiente di più alto grado del polinomio di grado $n-1$ $P(x)-c_0(x-p)^n$, c_2 è pari al coefficiente di massimo grado del polinomio di grado $n-2$ $P(x)-c_0(x-p)^n-c_1(x-p)^{n-1}$... eccetera**

Se nell'ultima espressione per $P(x)$ imponiamo $x=p$, otteniamo allora $c_n=P(p)=\pm 1$.

Se nella medesima espressione imponiamo $x=\frac{k}{l}$ e moltiplichiamo il risultato per l^n, otteniamo:

$$l^nP\left(\frac{k}{l}\right)-c_0(k-pl)^n+c_1l(k-pl)^{n-1}+\ldots+c_{n-1}l^{n-1}(k-pl)+c_nl^n=0.$$

Da cui, dovendo essere $P\left(\frac{k}{l}\right)=0$, si ha che:

$$\frac{c_nl^n}{k-pl}=\pm\frac{l^n}{k-pl}=c_0(k-pl)^{n-1}-c_1l(k-pl)^{n-2}-\ldots-c_{n-2}l^{n-2}(k-pl)-c_{n-1}l^{n-1}$$

deve essere un intero.

Ma siccome pl è divisibile per l e k è primo rispetto a l, allora $k-pl$ è primo rispetto a l e quindi lo è anche rispetto a l^n.

Da questo segue che $\pm\frac{l^n}{k-pl}$ è un intero solo se $k-pl=\pm 1$.

Identicamente si dimostra che $k-ql=\pm 1$.

Sottraendo l'eguaglianza $k-pl=\pm 1$ dalla $k-ql=\pm 1$, otteniamo $(p-q)l=0$ oppure $(p-q)l=\pm 2$. Ma $(p-q)l>0$ in quanto $p>q$ e $l>0$, il che implica $(p-q)l=2$, ossia $k-pl=1$ e $k-ql=1$.

Allora, se $p-q>2$, $P(x)=0$ non può avere radici razionali.

Se però $p-q=2$ o $p-q=1$, allora possiamo avere una radice razionale $\frac{k}{l}$.

Sommando le equazioni

$$\begin{cases} k - pl = -1 \\ k - pl = 1 \end{cases}$$

otteniamo

$$\begin{cases} 2k - (p - q)l = 0 \\ \dfrac{k}{l} = \dfrac{p+q}{2} \end{cases}$$

che è l'ipotesi.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 In teoria, è un gioco... [001]

La sedia è scomodissima, la luce della lampada puntata verso di voi vi sta facendo venire un tremendo mal di testa e i tre tizi dall'aria scarsamente amichevole che vi stanno facendo domande da due ore non migliorano sicuramente la situazione.

"Allora, abbiamo pescato te e il tuo amico con gli attrezzi da scasso a neanche venti metri dalla gioielleria svaligiata, ma continuate a negare di essere stati voi a fare il colpo; certo, sapete che continuando in questo modo potete sperare di farla franca e farvi solo un annetto per l'attrezzatura che vi portavate dietro. Ma quanto puoi fidarti del tuo compare? Se lui decide di accusarti e tu continui a dire che non c'entrate niente, ti ritrovi una ventina d'anni al fresco, mentre lui se ne esce subito libero come un fringuello. E questo non sarebbe bello, vero? Preferiresti essere tu ad uscire, vero?..."

"Già, e se parliamo tutti e due? Vi ritrovate due clienti per vent'anni?"

"Beh, in questo caso, potremmo prendere in considerazione uno sconto di pena per la collaborazione mostrata... Diciamo una decina di anni a testa. Comunque non abbiamo la minima intenzione di stare qui ad aspettare i tuoi comodi: hai cinque minuti per decidere."

Situazione tutt'altro che invidiabile anche se, probabilmente, la conoscete tutti: se non per essere stati "temporaneamente trattenuti presso la locale casa circondariale", almeno per il film che, qualche anno fa, ha mostrato che i matematici anche se un po' matti sono tendenzialmente umani.

Come si risolvono dilemmi del genere?

Lo strumento principale (almeno per i casi più semplici) è fornito da una semplice tabellina che, in funzione dei diversi casi, presenta i guadagni; per quanto riguarda il "Dilemma del Prigioniero" visto poco sopra, la tabella si trova in ***Figura 1***, con una grafica che noi preferiamo rispetto alla formulazione standard.

		"A"	
		Confessa	**Sta Zitto**
"B"	**Confessa**	10 / 10	20 / 0
	Sta Zitto	0 / 20	1 / 1

La lettura di questo aggeggio è ragionevolmente semplice; "A" opera per colonne, "B" per righe; ciascuno ha le proprie "attese" (scarsamente desiderate in questo caso, ma lasciamo perdere) nella casella di incrocio delle due strategie, con il numero in alto a destra per "A" e in basso a sinistra per "B".

Armati di questo potente strumento matematico, vi lanciate nel veloce ragionamento: "Possono succedere due cose: o 'B' confessa o sta zitto. Supponiamo 'B' confessi: se sto zitto, mi danno venti anni, se confesso anch'io me ne danno dieci; quindi, se 'B' confessa, mi conviene confessare. Supponiamo ora 'B' stia zitto: in questo caso, se sto zitto mi danno un anno, mentre se parlo mi liberano; quindi, se 'B' sta zitto, mi conviene confessare".

Ossia, in entrambi i casi vi conviene confessare, e c'è da scommettere che 'B' ha fatto lo stesso ragionamento; quindi confessate entrambi e vi fate dieci anni a testa mentre, se vi foste comportati "irrazionalmente" e foste stati zitti, vi avrebbero affibbiato solo un anno.

Quello che vi ha fregato è il fatto che vi siete ritrovati in un ***Equilibrio di Strategie Dominanti***. Per capire il quale sono necessarie un paio di definizioni.

Si definisce ***Strategia Dominante*** la strategia che se scelta da un giocatore garantisce comunque il miglior risultato per ogni scelta dell'avversario.

Nel "Caso della Gioielleria Scassinata", abbiamo esaminato entrambe le possibilità di scelta del nostro collega e abbiamo visto che, in ognuno dei due casi, per noi era meglio vuotare il sacco. Infatti, il parlare garantiva un guadagno maggiore (o meglio, il minimo della pena) in entrambi i casi (se l'altro stava zitto facevamo l'*en plein*, ma non si può avere tutto dalla vita...)

Siccome non siamo usi scegliere i nostri complici tra gli scemi del villaggio, è abbastanza probabile che anche il nostro Esimio Collega faccia la stessa scelta.

Definiamo quindi ***Equilibrio di Strategie Dominanti*** la situazione (e i guadagni) in cui entrambi i giocatori hanno una strategia dominante e entrambi la giocano.

È interessante notare (e il nostro esempio va benissimo, per questo) che *non è detto che l'Equilibrio di strategia dominante sia la miglior scelta possibile per ogni singolo giocatore*; infatti, nel nostro caso, se io parlo e l'altro sta zitto è, dal mio punto di vista, la scelta migliore.

Ora, all'epoca in cui questo giochino furoreggiava negli ambienti matematici, Von Neumann era interessato all'analisi di giochi un po' più terra-terra (leggenda vuole che abbia cominciato questo studio in quanto accanito giocatore di poker) e abbia scoperto che l'analisi è possibile solo per alcuni giochi; vediamo un paio di esempi.

> *Forniamo a Fred e ad Alberto due monete; al "via!" ciascuno di loro decide se girare la moneta su "testa" o su "croce". Se entambe le monete mostrano la stessa faccia, Alberto si prende le due monete; in caso contrario le prende Fred.*

No, non glie l'ho fatto giocare: mi manderebbero a quel paese in un tempo zero, probabilmente.

		Alberto	
		Testa	**Croce**
Fred	**Croce**	-1 / +1	+1 / -1
	Testa	+1 / -1	-1 / +1

Comunque, non dovreste avere problemi a mettere i risultati in tabella: la trovate qui di fianco.

Se resistete alla noia e la guardate un attimo, vi accorgete di una cosa: per ogni scelta di strategia (che sarebbe un modo difficile per dire "qualunque cosa succeda"), ognuno di loro perde esattamente quanto vince l'altro.

Ossia, si definisce ***Gioco a Somma Zero*** un gioco in cui qualunque sia la strategia scelta, la somma (algebrica) dei guadagni e delle perdite sia zero.

...E adesso dovreste cominciare a vedere una luce rispetto al problema del mese scorso...

Ammettiamo che l'esempio di gioco a somma zero qui sopra non sia esattamente un mostro di interesse, ma ci serviva per introdurre il concetto; è possibile trovarne anche di più complicati, quali un modello (semplificato) di competizione sui prezzi. Esempio? Esempio.

> *Due compagnie di produzioni alimentari sostanzialmente equivalenti (non facciamo nomi, ma potete pensare a due produttrici di* soft drink *o a due catene di* fast food*) hanno appena deciso di aprire due punti vendita nel vostro quartiere, e devono mettere in piedi i piani commerciali. Da un'attenta analisi di mercato, risulta che il loro prodotto di punta si può vendere a* 1 *o a* 2 *Euro; nel primo caso ne verrebbero venduti* 10000 *pezzi al mese (garantendo un ricavo di* 10K *Euro), mentre nel secondo caso ne verrebbero venduti* 5000 *pezzi al mese (garantendo lo stesso ricavo); nel caso entrambe le compagnie applichino lo stesso prezzo verrebbero a dividersi il mercato in parti uguali, mentre se una delle due applicasse il prezzo più basso*

conquisterebbe l'intero mercato. Il guadagno è rappresentato dal ricavo meno i costi fissi di produzione, quantificati in 5K *Euro*.

Qui di fianco trovate la tabella dei guadagni per le due compagnie; si vede subito che il gioco è a somma zero.

		Pepsi Donald	
		1 Euro	**2 Euro**
Burger Coke	**1 Euro**	0 / 0	-5K / +5K
	2 Euro	+5K / -5K	0 / 0

Ciascuna delle due compagnie sa che se venderà a 1 Euro guadagnerà come minimo 0, mentre se venderà a 2 Euro il guadagno minimo sarà una perdita di 5K Euro; quindi entrambe sceglieranno una strategia che *massimizzi il guadagno minimo*, appunto perché ognuna delle due sa che tutto quello che lei perde rappresenta un guadagno per l'altra compagnia (appunto perché il gioco è a somma zero).

Possiamo allora definire quella che viene definita ***Criterio di massi-minimo*** (maximin criterion): in un gioco a somma zero, è razionale per ciascuno dei due giocatori scegliere la strategia che massimizza il minimo guadagno, e questa è definita "*soluzione del gioco*".

C'è un punto del gioco di "Testa o Croce" che non abbiamo analizzato; contrariamente al caso dei due avvelenatori del quartiere, il gioco in sostanza ha più di due strategie; i giocatori possono rendere casuale la loro giocata, assegnando una qualsiasi probabilità ad ognuna delle strategie di base.

Si definisce quindi ***Strategia mista*** la possibilità per un giocatore di scegliere tra due o più specifiche strategie secondo probabilità definite.

Quando prima ci riferivamo alla scoperta di ***Von Neumann***, intendevamo esattamente questo: *ogni gioco a somma zero a due giocatori ha sempre una strategia di massi-minimo, pura o mista.*

Dovrebbe ora esservi abbastanza chiara la grossa limitazione della teoria di Von Neumann (e Morgenstern: bellissimo nome, che meriterebbe di essere ricordato più sovente): possono esistere dei giochi a somma addirittura non costante e, purtroppo, sono quelli in cui una teoria potrebbbe fare più comodo. Un esempio classico è la corsa agli armamenti: dovreste riuscire anche voi a costruire una tabella in cui sia considerato il caso di distruzione reciproca (massima spesa per le armi) e il caso di investimento in campo culturale della stessa cifra (lauti stipendi ai redattori delle riviste di matematica).

		"Acme"		
		P=1	**P=2**	**P=3**
"Edni"	**P=1**	0 / 0	-10 / 50	-20 / 40
	P=2	50 / -10	20 / 20	10 / 90
	P=3	40 / -20	90 / 10	50 / 50

Proviamo con un esempio? Descrizione veloce, che potete adattarvelo facilmente.

Abbiamo due compagnie in grado di vendere un determinato prodotto[22]*;*

[22] Un paio di note: gli inglesi hanno, per indicare il "prodotto" in questi casi, il bellissimo termine "*widgets*", di cui non ci risulta traduzione altrettanto significativa in italiano. Per quanto riguarda il nome delle due compagnie, da bravi cultori dei cartoni di Wile E. Coyote per la prima non abbiamo avuto problemi; la seconda l'abbiamo costruita scambiando ogni vocale e consonante della prima con la seguente. Sarebbe carino aver definito uno standard: considerando che 5 è primo con 26, 130 nomi di società fanno sempre comodo...

> *ognuna di esse può scegliere il prezzo di* 1, 2 *o* 3 *Euro. I guadagni (al netto delle spese di produzione) sono indicati nella tabella.*

è immediatamente evidente che il gioco non è a somma zero; la somma dei profitti di entrambe le compagnie per ogni caso, infatti, può ammontare a 0, 20, 40 o 100 in funzione delle strategie scelte dai venditori. Questo significa semplicemente che *non esistono soluzioni di massi-minimo*.

Non solo, ma se una delle due sceglie un prezzo pari a 3, il prezzo migliore per l'altra compagnia è 2; ma se una sceglie un prezzo pari a 2, il prezzo migliore è 1... Quindi, *non esiste equilibrio di strategia dominante*. E qui, finalmente, compare il personaggio principale.

Si definisce ***Equilibrio di Nash*** l'insieme di strategie per le quali un giocatore non può beneficiare da un cambio di strategia sin quando gli altri giocatori mantengono invariate le loro strategie.

Complicato? Certo. Proviamo comunque ad applicarlo al giochino con Acme e Edni.

Chiaramente, (***P=3***, ***P=3***) *non* è un equilibrio di Nash; infatti, "Acme" può aumentare i propri guadagni abbassando il prezzo, se "Edni" lo mantiene invariato: ossia la nuova situazione diventa (***P=2***, ***P=3***). Ma a questo punto "Edni" può passare a (***P=2***, ***P=1***) e, rapidamente, eliminiamo tutte le strategie tranne (***P=1***, ***P=1***), che è l'equilibrio di Nash.

Compito per le vacanze: trovate l'equilibrio di Nash per i due venditori di schifezze e per i due rapinatori di gioielleria.

Fatto? Bene, dovreste esservi accorti che *ogni strategia dominante rappresenta un equilibrio di Nash e, nei giochi a somma zero, questa è un'estensione della soluzione di massi-minimo*.

Adesso complichiamo la cosa

> *Due stazioni radio (nomi non proprio di fantasia) possono scegliere tra tre diversi "format", mutuamente esclusivi tra di loro: "News", "Musica", "Cultura". Essi garantiscono uno "share" rispettivamente del* 50%, 30%, 20%. *Se le due stazioni scelgono lo stesso format, si dividono lo share. I guadagni (per pubblicità) sono proporzionali allo share.*

Tabellina? Tabellina.

		BBC		
		Nws	**Mus**	**Clt**
RKO	**Nws**	25 / 25	30 / 50	20 / 50
	Mus	50 / 30	15 / 15	20 / 30
	Clt	50 / 20	30 / 20	10 / 10

Verificatevi da soli che il gioco non è a somma costante e che non esistono equilibri di strategia dominante; ormai dovreste essere in grado.

Anche se un po' noioso, si riescono ad individuare gli equilibri di Nash, e si vede che ne esistono due: (***Nws***, ***Mus***) e (***Mus***, ***Nws***). Inoltre, è interessante notare che entrambi questi casi siano decisamente efficienti, in quanto in entrambi il guadagno delle due stazioni è uguale (pari a 80) e non esistono altri casi in cui si possa avere un guadagno totale maggiore (queste cose non sono *sempre* vere per gli equilibri di Nash, ma questo è un altro problema).

Va detto che gli equilibri di Nash non sempre rappresentano delle situazioni in cui sia facile arrivare; nel nostro caso, potremmo supporre che BBC e RKO, supportate dai nostri calcoli, decidano *entrambe* di utilizzare il format "News", più vantaggioso tra i due negli equilibri di Nash. Questo però le porterebbe allo stato (***Nws***, ***Nws***), ossia arrivando ad una soluzione sub-ottimale. O, ancora peggio, ciascuna delle due potrebbe pensare che, siccome l'altra sceglierà "News", piuttosto che lo stesso formato (che darebbe un guadagno 25) convenga scegliere "Musica"; siccome però il ragionamento lo fanno entrambe, si ritroverebbero nello stato (***Mus***, ***Mus***), con il 15% di share a testa!

I giochi di questo genere, in cui è necessario prevedere la strategia dell'avversario e in un certo qual modo addattarsi ad essa, sono noti come ***giochi di coordinazione***. La presenza di più soluzioni (o Equilibri di Nash) dal punto di vista matematico rappresenta un problema; nella realtà, di solito ci si affida a quelle che sono note come convenzioni sociali, ma questo dal punto di vista matematico è, di solito, scarsamente soddisfacente. L'esempio preferito, in questi casi, è una cosa del tipo "Vi svegliate al mattino in un nebbione tremendo e non vi ricordate se siete in Gran Bretagna o negli Stati Uniti. Da che parte della strada guidate?". Anticonvenzionali sì, ma a tutto c'è un limite.

C'è da dire che continuare a giocare con due persone non è molto divertente, e non ci porta molto lontano. Prima di prendere in esame l'intera popolazione mondiale, proviamo con qualcosa di più complesso ma ragionevolmente limitato.

Il ritorno dalle vacanze è sempre terribile, ma questo potrebbe vincere l'Oscar.

Tanto per cominciare, l'aereo era in ritardo, quindi vi hanno fatto finire su un altro scalo. Poi si sono accorti che dovevate rifare il check-in per la vostra destinazione. Piccolo problema: ormai è tardissimo, il check-in è chiuso e state aspettando che trovino un impiegato intenzionato a registrarvi. Voi e i vostri compagni di sventura, stanchissimi, siete stravaccati nella sala e quasi non vi reggete più in piedi; sapete benissimo che, quando arriverà l'addetto, inizierà a distribuire i posti avanzati nel volo in ordine: prima verranno assegnati i posti migliori, poi a decrescere sino all'ultimo, che è all'incirca sul timone di coda. È vostra intenzione, nella ressa che sicuramente si genererà, cercare di accaparrarvi il miglior posto

Ad un certo momento, uno dei vostri compagni si alza e si trascina stancamente sino al banco... Evidentemente con l'intenzione di essere servito per primo e avere il posto migliore. L'idea di alzarvi non vi entusiasma, data la stanchezza, ma forse sarebbe il caso di mettersi in coda; anche perché un altro paio di persone stanno facendo la stessa cosa. Cosa fate[23]?

Quantifichiamo la cosa: se siete i primi ad essere serviti avrete un alto guadagno; in assenza di coda la vostra posizione è aleatoria, ma in presenza di coda il vostro guadagno diminuisce leggermente: diciamo di due punti. Qui sotto trovate la tabellina: la colonna "V. Medio" indica in assenza di coda quanto vi aspettate in media: non è altro che la media aritmetica di tutti i restanti punteggi.

[23] Vi raccontiamo un aneddoto capitato ad uno di noi che non c'entra assolutamente nulla. Una vecchia battuta (di Campanile, probabilmente) diceva che "un inglese che deve aspettare forma ordinatamente una coda di una persona". Sabato 6 maggio alla recente Fiera del Libro di Torino erano disponibili quattro biglietterie, che avrebbero aperto alle nove; alle otto e mezza, c'era ormai una coda di circa duecento persone. Tutte davanti alla stessa biglietteria. Very british, *neh*?

	Senza Coda		Con Coda
Ordine	V. Atteso	V. Medio	V. Atteso
Primo	**20**	**12,5**	**18**
Secondo	**17**	**11**	**15**
Terzo	**14**	**9,5**	**12**
Quarto	**11**	**8**	**9**
Quinto	**8**	**6,5**	**6**
Sesto	**5**	**5**	**3**

Abbastanza chiaramente, se siete ***primo*** vi conviene mettervi in coda; vi assicurate un guadagno 18 mentre senza coda il valore medio che vi aspettate è 12,5. Siccome il valore medio è *minore* del valore atteso con coda, vi mettete in coda.

Ora, fermo restando che quel dannato arrivista che si è piazzato per primo sarà sicuramente servito per primo, vi mettete in coda? Il secondo ha a disposizione (essendo il primo posto occupato) un valore medio di 11; minore di 15, quindi coda.

E avanti così, sin quando si piazza il quarto (valore medio 8, con coda valore atteso 9).

Il quinto, si accorge che se non si mette in coda ha un valore medio 6,5 *mentre il valore in coda diventa minore*; da quel punto in poi, quindi, *conviene l'assenza di coda*. Ossia, in questo caso, 4 *persone in coda rappresenta l'***Equilibrio di Nash**.

È per questo che i matematici sono così disordinati.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms