Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 088 - Maggio 2006 - Anno Ottavo

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio da

Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S)

rudy.dalembert@rudimathematici.com

Piotr Rezierovic Silverbrahms (Doc)

piotr.silverbrahms@rudimathematici.com

Alice Riddle (Treccia)

alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 087 ha diffuso ***987*** copie e il **30/04/2006** alle **23:10** per Google eravamo in **20300** pagine.

Nonostante la cosa sia stata mantenuta sotto il più assoluto riserbo, pare quest'anno Torino sia sede di evento olimpico. Secondo fonti solitamente ben informate, la mascotte risponde al nome di "Ruky", e il Grande Capo è molto seccato per l'errore di stampa. (Torino, 20 maggio-4 giugno 2006).

1. Figura e Sfondo

Ci va una bella forza per lanciare
un piano a coda lunga in alto mare.
E dove c'è un piano
intorno c'è sempre gente che fa baccano,
ci sono occhi che si cercano
ci sono labbra che si guardano

(Paolo Conte - *Aguaplano*)

Anche se ci piacerebbe molto chiarirla una volta per tutte, la possibile – anzi probabile – relazione tra Arte e Matematica continua serenamente a sfuggirci. Le cause dell'insuccesso possono essere moltissime: ad esempio, l'una e l'altra hanno linguaggi universali, ma estremamente tecnici; è di conseguenza possibile che solo chi intenda mirabilmente entrambi possa tentare una sintesi interdisciplinare con cognizione di causa. E se così fosse, ogni tentativo da parte nostra sarebbe sicuramente predestinato al fallimento[1]. Pur consci di ciò, non ci lasciamo comunque demoralizzare da banali e oggettive prove contrarie, e continuiamo a cercare. È capitato così che il molto dilettante matematico che scrive queste note si sia trovato a discorrere con un indubbio professionista dell'arte pittorica. L'occasione, per quanto strana possa sembrare, era data da una cena a base di specialità messicane, e a cucinare pensava l'artista, non il matefilo, con grande sollievo di tutti gli altri convitati.

Il professionista dell'arte è un pittore, che per comodità chiameremo Victor[2]: nato nella città che ha ospitato le Olimpiadi Invernali del 2002, da molti anni risiede stabilmente nella città che ha organizzato quelle del 2006; e no, non sembra aver intenzione di emigrare alla volta di Vancouver, di qui a quattro anni. L'accento americano è ancora distinguibile nella sua parlata, il che – per noi provinciali dell'Impero Culturale Contemporaneo – gli regala un'autorità critica del tutto particolare. L'autorevolezza era inoltre assai accresciuta dal lungo zinale da cuoco che indossava, mentre seguiva con occhi attenti la cottura dei burritos e delle tortillas (o eravamo ancora ai tacos?), e dal fatto che stava provando a farmi immaginare un albero di Natale in mezzo al mare.

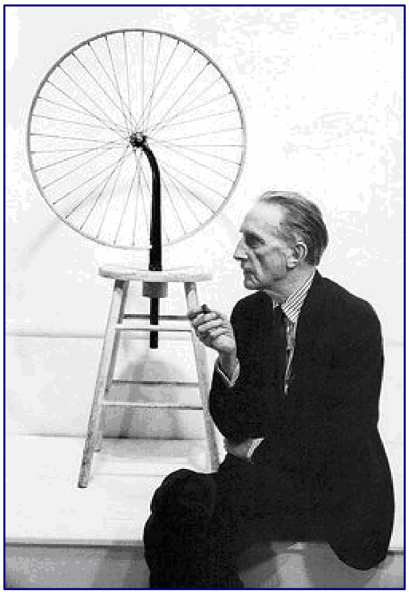
L'albero dovevo immaginarlo perfettamente addobbato, con festoni, palline e neve artificiale: possibilmente, anche con tanto di lucine accese. Mi si lasciava invece piena libertà di immaginare il mare (anche se era preferibile non immaginarlo in tempesta, perché in quel caso si poteva cadere nella tentazione di "logicizzare" il tutto, tramite l'invenzione di una nave naufragata durante un fortunale di fine anno, mentre a bordo si celebravano le rituali feste natalizie). Una volta suggerita, quella dell'abete natalizio galleggiante non è che sia immagine particolarmente difficile da visualizzare: ciò nonostante non osai confessare a Victor che il compito immaginifico mi era reso più difficile da un'interferenza provocata da una canzone di Paolo Conte. In "Aguaplano", infatti, il cantautore astigiano immagina di vedere nell'Atlantico, al largo di Rio de Janeiro, un pianoforte galleggiante ("a coda lunga, nero"). Albero di Natale e pianoforte si accavallavano ripetutamente nella mia mente, e il rischio grosso era quello di distrarsi al punto di sporcarsi i pantaloni con la terribile salsa guacamole. In una maniera o nell'altra, sia il pianoforte a coda che l'albero di Natale riuscirono infine a prendere ordinatamente posto nei flutti marini creati dai flussi mentali, ma ancora non riuscivano a rivelare in quale modo essi potessero essere correlati alla sublime "Essenza dell'Arte",

[1] Non tanto per il linguaggio tecnico dell'Arte, con il quale non ci siamo mai misurati e che pertanto potremmo – anche se con infima e aprioristica probabilità – scoprire in seguito di avere strumenti sufficienti a padroneggiare. È piuttosto il linguaggio tecnico della matematica a spegnere le nostre speranze: questo abbiamo la certezza assoluta e comprovata di non riuscire a trattarlo in maniera decente.

[2] Il nome di comodo "Victor" è stato scelto sostanzialmente per due ragioni: la prima, e più evidente, è che "Victor" è in assoluto il nome proprio più simile a "Pictor", voce latina per "pittore". La seconda (e molto secondaria) ragione è che il nome di comodo coincide perfettamente con il nome vero.

che alla fin fine restava pur sempre l'argomento iniziale da noi imprudentemente tirato in ballo durante gli aperitivi. Messo a parte delle mie difficoltà, Victor precisò subito che della vera essenza dell'arte non poteva parlarmi, perché non era certo in grado di definirla, nonostante la inseguisse da tutta la vita. Era però certo che, almeno limitatamente all'Arte Moderna e Contemporanea (e anche limitando ad uno solo i molti fattori che verosimilmente la governavano), si poteva probabilmente dire che la "Estrazione dal Contesto"[3] ne fosse un elemento fondamentale.

Il mio sopracciglio si alzò in perfetta concomitanza al versamento della tequila nel bicchiere. Che diavolo c'entrava – e soprattutto cosa voleva dire - "Estrazione dal Contesto"? Voleva dire che farsi domande sul "significato" (come io avevo appena fatto), era probabilmente un errore; anzi, a sentire Victor, il nocciolo di tutta la questione stava proprio nel fatto che a contribuire a costruire il "significato" di una parola o di un oggetto contribuisce in maniera maiuscola proprio il suo "contesto" naturale. Estratto dal contesto, lo stesso oggetto perde identità, e quindi perde significato, e allora può (o addirittura "deve") diventare oggetto artistico. Così, mentre continuava a riempire le tortillas e a togliersi l'unto col grembiule, io cercavo di capire se davvero l'albero di Natale o il pianoforte potessero diventare "artistici" solo perché traslati da un tinello ad un maroso del Pacifico. Non ero ancora del tutto convinto, anche se, effettivamente, è difficile non riconoscere che, dovendo scegliere, un abete con palline di vetro ha una sua maggiore dignità artistica tra le onde piuttosto che vicino a un presepe. Ma era sufficiente? Curiosamente, i versi successivi della canzone di Conte arrivarono a dare manforte al rosolatore di tortillas: non c'era solo un pianoforte a coda in alto mare, in quel testo, perché subito dopo comparivano anche "occhi che si cercano e gambe che si guardano". Non era più naturale invertire i soggetti e predicati verbali? Non sono gli occhi a guardarsi e – al limite – le gambe a cercarsi? Già; e forse proprio per questo, che nella canzone i termini si rovesciano: per ribellarsi al contesto, e meglio superare la barriera della memoria[4].



"Ma allora, perdinci, è arte qualsiasi cosa!" – contestai. Potevo accettare, dopo anni passati a studiare i misteriosi dettagli della Flagellazione di Piero della Francesca, che fosse Arte qualcosa di delicato, o di provocatorio, di sensibile o di violento; ma me lo aspettavo sempre tecnicamente complesso, di difficile realizzazione e con particolare sforzo creativo. Ero molto meno propenso ad elevare a tali onori pure la forchetta che tenevo in mano, anche se traslata dalla tavola zeppa di tortillas al bagno pubblico della stazione ferroviaria centrale di Marrakesh. All'obiezione, Victor posò il forchettone, abbandonò la padella sul fuoco e sparì, senza neanche togliersi il grembiule. Tornò poco dopo con un bel librone già aperto, e lo posò sul tavolo (con grave rischio per la rilegatura e subitaneo decesso di un paio di tacos): "Ecco, questa è una delle più grandi opere d'arte del Novecento", disse. Ed era vero, la conoscevo perfino io: la Ruota di Bicicletta di Duchamp. E allora il discorso acquisiva davvero un senso imprevisto, almeno ai miei occhi: forse perché avevo passato proprio quel pomeriggio a riparare un foro in una ruota, e per ore ero rimasto con le mani immerse nella bacinella

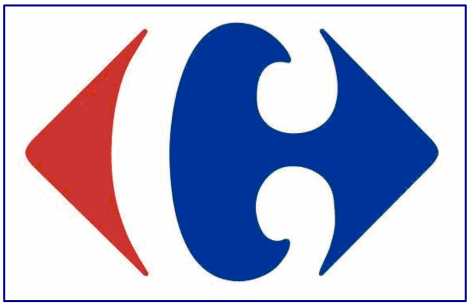
[3] Ad onor del vero, è assai probabile che Victor abbia usato una terminologia più chiara ed efficace: purtroppo non ricordo esattamente le parole usate. "Estrazione dal contesto", comunque, dovrebbe rendere l'idea.

[4] Oltre che, naturalmente per fini puramente retorici. Il GC, sempre preparatissimo sulle figure retoriche, annota che si tratta di "sinestesia"; ovvero l'avvicinamento, in una sola frase, di due o più termini appartenenti a sfere sensoriali distinte (come nel caso dei "colori caldi" o della "musica dolce").

alla ricerca di bolle d'aria, senza notare neppure la ruota della mia bicicletta rovesciata e immobile nell'aria, tale e quale l'opera d'arte di Duchamp. Io cercavo le quasi invisibili bolle, e non vedevo la ruota. Quella stessa ruota che, estratta dal contesto, incastrata in uno sgabello bianco e spogliata del resto della bicicletta riempie adesso da sola un museo, o mille libri d'arte.

L'Arte rifugge dalle generalizzazioni almeno quanto la Scienza ne è attratta, e per questo è davvero impossibile – se non semplicemente sbagliato – tentare di leggere con una sola chiave di lettura tutto l'universo dell'arte contemporanea. Non di meno, la ricerca degli esempi di Estrazione dal Contesto dà rapidamente buoni frutti: Andy Warhol estrae la zuppa Campbell dagli scaffali dei supermercati e la immobilizza su tela; estrae l'unicità di Marilyn riproducendola in serie e con colori impossibili, così come lo stesso Duchamp aveva già estratto il sorriso dalla Monna Lisa, arricchendolo con un paio di baffi di Salvador Dalì. E così di seguito, in una pletora quasi infinita di esempi: alla fin fine, estrarre qualcosa dal contesto equivale e generare sorpresa, e ecco allora le tele tagliate, i monumenti impacchettati, gli escrementi inscatolati. Fino allo spiazzamento finale e ingenuo, quello che porta il visitatore delle mostre di arte contemporanea (sempre vicino allo stress) immortalato da centinaia di barzellette: "Potrò sedermi su questa sedia, oppure è una scultura in esposizione?".

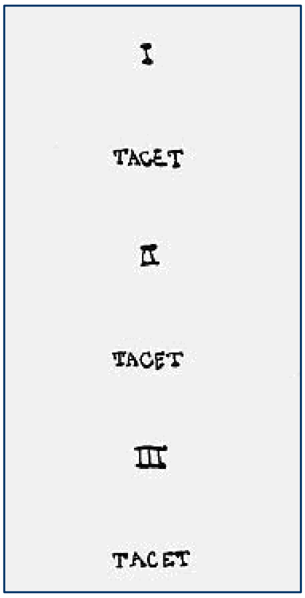
Può forse essere solo una coincidenza il fatto che la pittura sembra cominciare a rinunciare alla riproduzione realistica del mondo proprio quando la tecnica di riproduzione delle immagini viene inventata e rapidamente sviluppata; ma forse, invece, non è altro che applicazione trita del principio di causa ed effetto. Il volto sconvolgente della Madonna di Antonello da Messina basta e avanza a stupire profondamente chi non è abituato a vedere né immagini né bellezza, come dovevano essere, ad esempio, i contadini che per la prima volta ammiravano quel quadro nella chiesa della città. Allora l'Arte aveva forse anche il compito di stupire con la bellezza perfetta e perfettamente riprodotta: di certo, entrare in un museo o visitare una pinacoteca privata solo un secolo fa, quando le riproduzioni tecniche delle opere d'arte erano ancora povere e approssimate immagini dell'opera reale, doveva essere esperienza travolgentemente più piena di quella di oggi, in cui l'ammirazione è veicolata assai più dal "riconoscimento dell'opera" che dalla "sorpresa nello scoprirla".



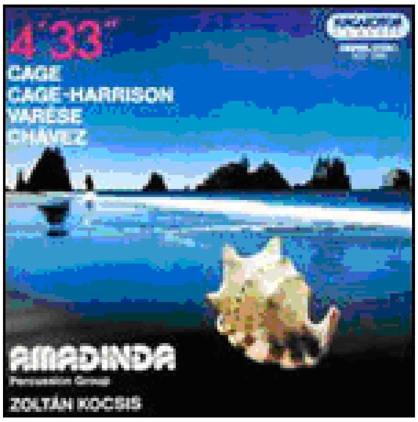
Ma la sorpresa è ottenibile anche con mezzi non necessariamente complessi; uno dei metodi più diretti è, ad esempio, il semplice artificio di mescolare la figura con lo sfondo. In un certo senso, lo "sfondo" d'una figura è il suo più elementare e immediato "contesto": e non sono certo solo i giochi visivi come le illusioni ottiche a tentare l'inganno sorprendente mediante inversione della figura con lo sfondo. Per mettere alla prova questo concetto c'è un metodo diretto estraibile dalla memoria della vita quotidiana: ed è probabilmente più efficiente di un test apposito, per il semplice fatto che il predisporsi a sostenere un test sulla percezione visiva mette in preallarme l'esaminando. Basta pensare ad una celebre catena di ipermercati[5]. Il logo della catena è composto da due strani tipi di frecce, una rossa orientata a sinistra e l'altra, più elaborata, blu e rivolta a destra. Campeggiano gigantesche sopra i tetti degli iperstore, e con i colori richiamano anche la bandiera francese, perché francese è appunto la catena in questione. Il marchio è sufficientemente noto da consentire un rapido test anche con chi non frequenta il supermercato: e la domanda da porre agli amici è semplice: è o non è evidente il "significato" delle due frecce colorate? Anche se può sembrare impossibile ad occhi esercitati alla ricerca delle curiosità ottiche, un gran bel numero di interrogati ha

[5] No, non ci danno un centesimo, non è pubblicità. È solo che è un esempio sorprendentemente efficace, almeno a giudicare dalle prove fatte con parenti e amici.

dichiarato di non aver mai notato che le due frecce servono a "disegnare" la lettera "C" (iniziale del marchio della catena), lasciandola però definita solo come sfondo e non come vera e propria figura. In buona sostanza, anziché usare come marchio una "C" maiuscola normale, i creativi transalpini hanno inventato un logo che, creando lo sfondo della "C", lascia che a disegnare la lettera ci pensi il panorama retrostante[6]. Va riconosciuto, a parziale discolpa di coloro che non avevamo mai individuato la maiuscola, che la C è decisamente più evidente su uno sfondo bianco, come è la pagina nella quale la abbiamo riprodotta, di quanto lo sia normalmente, costretta com'è a risaltare pur essendo costituita e disegnata da palazzoni o ciminiere.



Non sono solo le arti visive a giocare spietatamente con il concetto di figura e sfondo; per quanto possano sembrare relegati al campo dell'ottica, i concetti sono in realtà facilmente estendibili anche ad altre discipline. Uno dei più celebri musicisti contemporanei è John Cage, ed è almeno in parte paradossale che, senza alcun dubbio, il suo pezzo più famoso sia un pezzo di non-musica. Si tratta del celeberrimo 4'33", che è un brano della durata di quattro minuti e trentatre secondi esatti di silenzio. Perché questo silenzio (corrispondente dello "sfondo" per la forma/suono, luogo ove normalmente le note si rivelano) sia ben compreso e non confuso con un qualunque "silenzio occasionale", ci sono diverse regole da rispettare e osservare. Il pezzo, scritto nel 1952, fu eseguito per la prima volta il 29 Agosto 1952 a Woodstock, New York, dal pianista David Tudor. A quel tempo il pubblico non era sufficientemente informato della natura rivoluzionaria del pezzo, e cominciò a rumoreggiare e perfino ad andarsene nel bel mezzo dell'esecuzione, mostrando ben poca apertura verso la musica sperimentale.



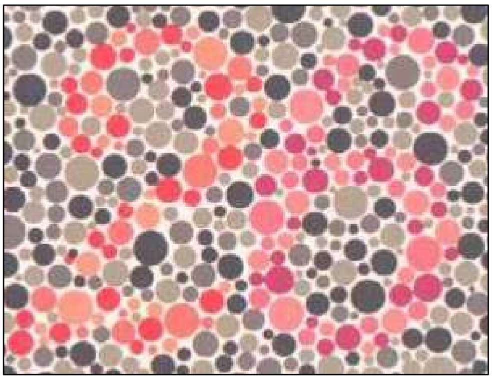
Ciò non di meno, 4'33" è diventato presto famosissimo: ancorché come pezzo da piano, viene spesso eseguito da un'intera orchestra, in cui tutti i professori seguono attentamente lo spartito (il pezzo è diviso in tre movimenti, tutti segnati dall'istruzione tecnica "Tacet"), e talvolta ne girano anche i fogli; e naturalmente l'opera è stata regolarmente incisa su disco. Ora, con un po' di sforzo si riesce anche a immaginare che qualcuno possa voler assistere allo spettacolo (visivo) di un'intera orchestra che si prepara a "non suonare" per 273 secondi[7], perché si tratta comunque dello spettacolo garantito da una "azione negante" – insomma un'azione che ha come

[6] Ci imbarazza vieppiù il fatto che, per descrivere il logo d'un supermercato, siamo finiti col pronunciare anche il nome d'un supermercato concorrente. È difficile sopravvivere innocenti, in un mondo a così alta densità consumistica…

[7] La scelta della durata del pezzo non è ovviamente casuale: i 4'33" equivalgono a 273 secondi, e 273 gradi Celsius (sotto lo zero) sono la temperatura dello "zero assoluto", zero gradi Kelvin.

scopo quello di negarne un'altra. Come ebbe a dire lo stesso Cage, "*Mi resi conto che non esiste una reale e oggettiva separazione tra suono e silenzio, ma soltanto tra l'intenzione di ascoltare e quella di non farlo*". In altri termini, il senso ultimo del silenzio del brano starebbe proprio nel "non cedimento" dell'intenzione d'ascolto: ne conseguirebbe allora che, in qualche modo, è davvero possibile "ascoltare" il silenzio che un musicista si accinge a "suonare". Ma è davvero più difficile capire le intenzioni di chi desideri acquistare e "ascoltare" il disco.

Il punto è che la figura e lo sfondo possono scambiarsi i ruoli e sorprendere nel farlo, ma esistono dei limiti che è difficile superare. Il visitatore che, come raccontavamo sopra, rimane indeciso se sedersi o meno su una sedia nella mostra di arte moderna perchè teme di sedersi su un'opera d'arte è solo un esempio di vittima di questo tipo di inversione. Lo si può prendere in giro perché rivela una scarsa sensibilità verso le forme dell'arte contemporanea (ma è più probabile che lo sbeffeggiamento gli arrivi da sedicenti critici, piuttosto che da artisti veri; questi, di solito, tendono intenzionalmente a mescolare arte e realtà, e non possono che essere lieti quando una persona si perde nei confini sfumati da loro creati), ma in alcuni casi è più semplicemente un segnale, un indice di possibile anomalia.



Nella figura qua a fianco, i possessori di una normale capacità di distinguere i colori non faranno fatica a distinguere il numero riportato nel disegno, ma l'immagine è stata creata esattamente allo scopo di "rivelare" coloro che tale capacità non hanno. Perché alla fine, anche dopo che l'inversione tra figura e sfondo è stata completata, dopo che la "sorpresa" è stata artisticamente fruita, è facile rendersi conto che solo chi è in grado di risolvere la figura dallo sfondo (e viceversa) è in grado di godere di certi artifici, artistici o meno che siano. Se questa possibilità viene meno, allora può venire meno anche l'artistica "Estrazione dal Contesto"; e talvolta rischia di farlo con esiti paradossali. Il 16 Gennaio 2004 la BBC decise di trasmettere attraverso il canale "Radio 3" il silenzioso pezzo di John Cage. Le regole sono stavolta tutte rispettate, perché per eseguirlo è riunita tutta l'orchestra sinfonica della BBC. L'azione più importante ai fini della diretta non saranno però i musicisti a compierla, ma un accorto tecnico radiofonico. Questi si ricorderà (in extremis, a dire il vero) di disattivare il sistema di sicurezza della radio, quello che fa partire in automatico una trasmissione di sicurezza (in genere un pezzo di musica classica, alla faccia del povero Cage) quando i sensori intercettano un periodo prestabilito di assoluto silenzio. I sistemi di sicurezza elettronici sono quello che sono, non riescono minimamente a distinguere il silenzio di tipo "sfondo – guaio in trasmissione" da quello di tipo "figura – forma artistica", quindi la disattivazione del sistema di emergenza era assolutamente necessaria, per poter trasmettere integralmente l'opera: altrimenti la BBC avrebbe fatto proprio la stessa figura del visitatore che scambia una scultura per una sedia.

C'è anche un'altra maniera per suscitare sorpresa (o sdegno, o ammirazione): e cioè quella di mostrare gli estremi di uno stesso contesto, e sovrapporli per misurarne la distanza. Immaginate di trovarvi a Parigi negli anni subito precedenti la Prima Guerra Mondiale: è città ricca e – come al solito – bellissima, e attraversa un momento felice, ancora ignara della tragedia che insanguinerà il continente da lì a poco. Immaginate una mattina invernale e un bus, nella capitale francese, pieno di persone borghesi e ragionevolmente eleganti; se improvvisamente salgono a bordo del mezzo pubblico due bambini piccoli, scalzi, che battono i denti per il freddo e che raccontano ai viaggiatori che i loro genitori li maltrattano e non comprano loro né scarpe né calze, è il contrasto con gli altri passeggeri del bus a colpire, più ancora che il normale senso di compassione generato dalla vista di bambini così poveri e sofferenti. Se invece, nella medesima città e nello stesso periodo, una coppia di bambini del tutto simile alla prima si trovasse a dover vivere in una casa ordinatissima e pulita, senza alcun giocattolo in vista nonostante l'età degli inquilini più giovani, e sentisse il bambino e la bambina parlare non con l'usuale parlata infantile e un po' chioccia, ma bensì in greco antico e in distici elegiaci, allora è un altro tipo di contrasto a sorprendere, e cioè un senso di presenza-assenza simultaneo dell'infanzia. Quando poi finalmente ci si accorge che i bambini che parlano in versi sono esattamente gli stessi che giravano scalzi nel gelo della mattina parigina, allora il corto circuito mentale può dirsi davvero completo.

I due bambini sono fratello e sorella, e si chiamano André e Simone: quest'ultima è di due anni e mezzo più piccola del fratello, e già vive in profonda ammirazione di André. Sono i rampolli di Bernard, un medico ebreo di Strasburgo, e di Selma, ebrea russa rifugiatasi in Belgio dopo l'assassinio dello zar Alessandro Secondo. Parte del destino dei due fratellini è scritto proprio nel carattere e nelle frustrazioni della madre: Salomea Reinherz. Detta Selma, è figlia di poeta e d'una assai brava pianista. Ha tutte le intenzioni di diventare medico, ma rimane davvero sconvolta quando scopre che il padre non le consentirà di seguire il destino che già pregusta. Con le ali tarpate da un genitore poco moderno e da una società ancora ben lontana dalle pari opportunità, Selma riversa la totalità delle proprie passioni sui figli, con l'intenzione di dar loro la migliore tra le educazioni possibili. È per questo che André e Simone non hanno giocattoli, e parlano in greco antico in famiglia. Ed è certo anche per questo – per protestare contro i genitori troppo protettivi (e anche un po' tiranni) – che mettono in scena la pietosa, ancorché falsa, rappresentazione sull'omnibus parigino. Certo è che l'educazione che Selma trasmette ai figli trova nei piccoli un terreno estremamente fertile: entrambi i fratelli Weil diventeranno estremamente famosi, André in matematica e Simone in filosofia.

Da molti punti di vista, André Weil può essere considerato il matematico che meglio rappresenta il Novecento, non fosse altro perché la sua lunga vita è ben contenuta all'interno del secolo scorso. Nasce infatti proprio un secolo fa[8], il 6 maggio 1906, a Parigi: e lascia questa valle di lacrime 92 anni più tardi, il 6 Agosto 1998, in quel di Princeton. Mamma Selma spinge forte sull'acceleratore dell'educazione per eccellenza: sette scuole diverse frequentate dai due fratellini nello spazio di cinque soli anni; insegnanti e tutor privati, oltre ad una buona dose di apprensione materna: "*Non credo che André abbia delle buoni basi in aritmetica*" - disse una volta Selma ad uno degli insegnanti di André. "*Non so cosa*

[8] Sembra proprio che la primavera del 1906 sia stata un periodo buono per la nascita di eccezionali matematici. Il mese scorso celebravamo il centenario di Godel, e ci ritroviamo adesso ad augurarci che i cugini francesi non tralascino di celebrare degnamente il centenario di André Weil. Se siete scaramantici e credete ai ricorsi secolari della storia, tenete d'occhio i reparti maternità, in questi primaverili mesi del 2006.

dirle" replicò l'insegnante "*qualunque cosa io dica sull'argomento, lui sembra conoscerla già…*". Insomma, per quanto siano evidenti le responsabilità materne, è innegabile che André in una tale esasperazione educativa ci si trovi benissimo. Ha otto anni quando scova a casa della zia un libro di matematica, lo legge per intero e decide di diventare matematico. E quella degli otto anni deve essere un'età particolarmente creativa, per il piccolo Weil: vedendo che la sorellina Simone (cinquenne) ancora non sa leggere, decide che può essere davvero un bel regalo di compleanno per il papà insegnarglielo. La sorellina minore lo adorava, quindi si impegnò a fondo, e ci misero solo qualche settimana a raggiungere l'obiettivo. Ma, dal punto di vista dei piccoli Weil, la cosa non era probabilmente vista come particolarmente eccezionale. Simone imparò da sola diverse lingue durante l'adolescenza, e dal canto suo André imparò da autodidatta il sanscrito a dodici anni.

Come talvolta succede, ad una tale profonda dedizione per la conoscenza fa da contraltare anche qualche mania meno comprensibile. Selma era affetta da una irrazionale mania per la pulizia e di paura per la contaminazione, che trasmise in parte anche ai figli, soprattutto a Simone, che anche in età adulta mantenne una certa idiosincrasia verso i contatti fisici. Del resto, la gracile e piccola Simone doveva anche fare i conti con il quotidiano confronto con l'eccezionalità del fratello: la mente di André era così brillante che, nonostante la forte ammirazione, Simone non potè evitare di cadere in una sorta di depressione adolescenziale, pensando di non essere affatto dotata di notevoli capacità intellettuali. Riuscì a superare la crisi, per fortuna, e a diventare una delle figure più autorevoli della filosofia europea: si convertì al Cristianesimo[9] e divenne una guida spirituale per molti correligionari.

Andrè, dal canto suo, si limitò a diventare uno dei migliori matematici del suo tempo[10]. Studia alla École Normal di Parigi, e diventa subito famoso. Si interessa di Teoria dei Numeri, di Geometria Algebrica e di Teoria dei Gruppi, e i suoi studi sono di quelli che fanno scuola: due suoi allievi, proseguendo gli studi iniziati con Weil, arriveranno alla Medaglia Fields[11]. Ma il nome di Weil resta per sempre legato soprattutto a quello di un matematico inesistente[12]; è soprattutto lui che, con Dieudonné e altri, fonda il gruppo Bourbaki che si prefigge di rifondare la matematica, e che produrrà una quantità spaventosa di testi.

La matematica come forma estetica era quella che più attraeva Weil: l'Arte, insomma, espressa attraverso le formule e i teoremi. La voglia di sorprendere e di inseguire la bellezza si riconosce nell'eterno sfidare il mondo e i suoi limiti: affascinato dalla filosofia indiana, studiò il Bhagavad Gita nell'originale sanscrito, visitò l'India e arrivò a conoscere il Mahatma Gandhi. Durante la Seconda Guerra Mondiale, andò in Finlandia per incontrarsi con un collega finnico, ma venne arrestato e scambiato per una spia, perché aveva in valigia delle lettere scritte in russo (scritte, naturalmente, da un collega matematico moscovita). Andò vicinissimo ad essere fucilato, e venne salvato in extremis proprio dall'accademico di Helsinki che confermò l'identità e le intenzioni del matematico francese. Tornato in patria, si rifiutò di vestire la divisa, e, pur non essendo un pacifista, preferì farsi dei mesi di prigione piuttosto che andare a combattere al fronte[13]; ciò

[9] André e Simone erano figli di ebrei non praticanti, e scoprirono di essere – almeno formalmente - ebrei soltanto nel 1919, ovvero all'età di dieci e tredici anni. E questo in un periodo in cui l'identità ebraica era comunque decisamente "segnante".

[10] Non particolarmente modesto, comunque: ad un suo amico che lo presentò ad altri definendolo appunto "Il maggior matematico vivente" replicò che l'aggettivo "vivente" era eliminabile.

[11] Deligne nel 1978 e Yau nel 1982.

[12] E lasciamo al lettore l'arduo compito di decidere se Bourbaki faccia parte della figura o dello sfondo nell'immagine della matematica del Novecento.

[13] "È sorprendente come io riesca a lavorare bene in prigione; forse dovrei fare in modo da riuscire a prolungare la mia permanenza qui" – scrive in una lettera diretta alla moglie. Alla fine, riuscirà a lasciare la prigione proprio perché accetterà di entrare nelle forze combattenti.

nondimeno, era pur stato lui a scegliere come nome per il progetto di rifondazione della matematica quello di un "generale poldavo[14]".

In conclusione, è davvero curioso notare come il nome di André Weil sia profondamente intessuto nella trama della Matematica del Novecento (ha quasi dimostrato l'Ultimo Teorema di Fermat; ha quasi dimostrato l'Ipotesi di Riemann; ha riscritto quasi tutta la matematica; esistono teoremi e congetture che portano il suo nome, e così via…) eppure, per qualche ragione, il suo nome rimane un po' defilato nel panorama matematico che si tende a ricordare. Forse, chissà, a causa della sorella, quasi altrettanto famosa. O forse solo per il nome, così simile a quello di Weyl[15] e non troppo diverso da quello di Wiles[16]. O forse perché vive ancora all'ombra della sua invenzione più grande, quella di Bourbaki.

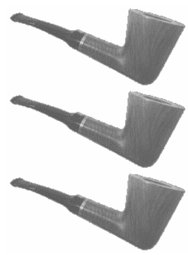
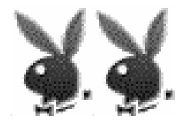
O forse ancora perché, come pochi altri grandi, ha preferito non risaltare come "figura" nella storia della matematica moderna, ma piuttosto di mettersi a costituirne il solido sfondo. E le fondamenta.

[14] Inutile precisare che la Poldavia non esiste affatto.

[15] Ne parliamo in RM82, "Difficile come contare fino a dieci", Novembre 2005.

[16] No, non ne abbiamo ancora parlato, nei compleanni. Ancora.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Problema temporaneamente brutto			
Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?			

2.1 Problema temporaneamente brutto

Ogni *new entry* di questa rivista passa attraverso una domanda obbligata: "perché date tre valutazioni dei problemi?" Come dovreste ormai sapere tutti, generalmente la cosa passa dal (dis)amore o dall'ignoranza (non ci offendiamo assolutamente nell'ammetterlo: usiamo la parola nel senso letterale) da parte di ognuno di noi rispetto a determinati campi della matematica; ogni tanto, però, capitano dei casi in cui ci sono delle ragioni più particolari. Qui, ad esempio, il problema piace a tutti (anche a Rudy), e Rudy ritiene che la soluzione che ha lui sia apprezzata anche dai colleghi. Il guaio è che l'aggeggio usato per risolverlo gli piace talmente che, cercando di scriverci un PM, è arrivato a pagina *cinquanta* e anche a lui la cosa sembra un filino eccessiva, per un singolo numero della rivista. Ha comunque promesso che cercherà di spezzettarlo; conoscendo il pollo, ci aspettiamo qualcosa per dopo l'estate, ma non ci sbilanciamo a dire di quale anno. Comunque, il Capo ha cercato almeno uno straccio di "soluzione" alternativa; vi raccontiamo il suo metodo usando una vecchia barzelletta, risalente al tempo in cui i computer erano "grossi".

Come si valuta quanto sia importante un professore di facoltà scientifica?

Il livello più basso è quando per fare i conti non vi pongono limiti al tempo-macchina. Con l'avanzare della carriera accademica, raggiungete il giorno in cui la macchina per fare i conti è tutta vostra. Ma potete dire di aver raggiunto l'apice solo quando vi viene fornito il mezzo migliore: *un laureando!*

Ora, siccome anche Doc ormai si è laureato, in Redazione ci difetta la materia prima; comunque, qui in Redazione non siamo assolutamente d'accordo con l'ipotesi di Rudy sostenente che, avendo lui due *Validi Assistenti*, anche se distanti ancora anni(luce) dalla laurea, lo si debba considerare equivalente ad un Barone Universitario.

Va detto che, quando Rudy chiede loro di fare un test, di solito sono ragionevolmente accondiscendenti; inoltre, quando vengono imposti loro dei ruoli ben precisi in un gioco, non si lamentano neanche tanto se uno dei due perde più spesso dell'altro e i suggerimenti di strategia vincente viaggiano con una certa tranquillità.

Cercate un ***asso*** nero, un ***otto*** rosso, un ***due*** rosso e un ***sette*** nero in un mazzo di carte rovinato; incollate dorso su dorso l'asso e l'otto (in modo da ottenere una carta sola) e il due e il sette (altra carta unica); la prima la diamo ad Alberto, la seconda a Fred. Dividete inoltre equamente tra di loro un buon numero di *fiches*. Ciascuno di loro pensa e, al "via!", mostra (contemporaneamente all'altro) una faccia della propria doppia carta. Se i colori corrispondono vince Alberto, se sono opposti vince Fred; l'importo vinto è pari al valore della carta mostrata.

Ora, siccome $8+1=2+7=9$, il gioco, anche se piuttosto stupido, sembrerebbe onesto[17]. Allora, come mai dopo un centinaio di giocate Fred sembra avere una trentina di *fiches* in più?

2.2 Festa di RM, o meglio: Dove sono le vostre scatole?

Dobbiamo confessarvi che tenevamo questo problema per tra qualche tempo, quando la nostra personale Corte dei Conti (sarebbe Doc: Postino, Archivista, Grande Comunicatore, eccetera) ci avesse segnalato il superamento dei duemila iscritti "attivi". Rudy, però, sostiene che se riesce a trovare problemi complicati questi vanno "sparati" subito (beh, quasi. Appena troviamo uno straccio di soluzione, almeno per tentativi...); da questo fatto, potete dedurre che (1) Per quanto riguarda i problemi Rudy è un dittatore, e (2) quando vi sembreranno troppo semplici, vuol dire che ha temporaneamente finito quelli tosti.

Cosa c'entra il duemillesimo iscritto? Lui niente, c'entra quello dopo. Vedete, abbiamo 2002 scatole numerate da 0 a 2001; inoltre, ciascuno di voi (temporaneamente supposti) 2001 abbonati ad RM ha un numero d'ordine di iscrizione: lo zero lo abbiamo tenuto per Doc.

Ora, la nostra idea per la festa era di mettere, nell'n-esima scatola, un numero potenzialmente infinito di vassoi di paste, ogni vassoio della n-esima scatola contenente n pasticcini. Indi, cominciare in questo modo:

Tanto per cominciare, vi dividiamo in due gruppi (Doc incluso in uno dei due). Il primo gruppo sfila tutto assieme davanti alle scatole. Se, davanti alla scatola marcata n, due persone si accorgono che la somma dei loro numeri è uguale a n, prendono dalla scatola un vassoio e si mangiano ciascuno il proprio numero di pasticcini. Data l'ampia disponibilità di vassoi per ogni scatola, nessuno litiga e tutti sono contenti, anche se un po' appesantiti.

> Ad esempio, se ***CID*** (#274) e ***Lilavati*** (#997) si trovano davanti alla scatola 1271, tirano fuori un vassoio (contenente 1271 pasticcini) e ne mangiano rispettivamente 274 e 997.

Inoltre, se qualcuno di voi ha il numero $n/2$, quando arriva davanti alla scatola n si mangia un intero vassoio; per intenderci, agisce come se fosse "i due" della somma.

> Sempre ad esempio, ***Zar*** (#196), arrivato davanti alla scatola 392, si prende un vassoio e si mangia 392 pasticcini.

Successivamente (tanto i vassoi non finiscono) il secondo gruppo esegue la stessa operazione.

Vi chiederete: "Io in che gruppo sono?" Beh, quel perfido di Rudy ha definito i gruppi in modo tale che ogni gruppo estragga in totale dalle scatole lo stesso numero di vassoi.

Ora, ci poniamo un problema, anzi due.

Tanto per cominciare, "Ultimo" (#2001), appartiene al gruppo di Doc?

Inoltre, chi mangia più pasticcini?

Rudy è riuscito a rispondere a questa forma dell'ultima domanda, ma (sarà perfido, ma non conta frottole) gli piacerebbe anche sapere quanti pasticcini mangia ognuno, e se le varie formule siano generalizzabili per un numero qualsiasi di abbonati. Qui, proprio, ha cominciato a remare...

[17] *Affermazione che riferita ad un gioco proposto dal Capo è per definizione falsa... (AR&PRS)*

3. Bungee Jumpers

Provare che se il polinomio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

assume il valore 7 per 4 valori interi (distinti) di x, allora non assumerà il valore 14 per alcun valore intero di x.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Aprile, dolce dormire... è proprio quello che si vorrebbe fare anche noi, inesorabili Redattori di RM. Ma il numero è quello di maggio, e poco contano le condizioni al contorno della preparazione di questa edzione, e se la maggior parte delle mail non-matematiche arrivate in redazione questo mese non sono proprio trattabili in questa sezione.

Forse l'unico evento di rilievo è che un lettore ci ha proposto un nuovo teorema per la pubblicazione, come se noi fossimo in grado di verificarne la correttezza e darne abbastanza lustro... Inutile dirvi che ne siamo stati molto lusingati, ma non considerandoci rivista autorevole a questo riguardo (per il semplice e provato fatto che ci prendiamo spesso le nostre cantonate e non siamo matematici professionisti), decideremo in seguito se pubblicare o meno...

Data la scarsità di argomenti saremo brevi, e ringrazieremo semplicemente per tutti gli auguri di buona Pasqua e per i compleanni, e passeremo subito al sodo, cioè ai problemi. A proposito, ***Gnugnu*** ci manda ancora materiale su "Non sono sicuro" (da RM085), che intitola "Sicurezza abbastanza sicura". Il Capo ha apprezzato enormemente il materiale e sta meditando un altro pezzo per il bookshelf anche per questo problema che ha risvegliato molta attenzione. Alice ha deciso di non includerlo per dare più spazio alle varie chiaccherate dei lettori di questo mese, visto che i problemi erano finalmente un po' più facili, per onorare i compleanni dei due meno dotati matematici in Redazione.

4.1 [086]

4.1.1 Venerdì 17

Non ve lo voleva dire, il Capo, ma visto che si tratta di curiosità e ***Zar*** non si è dimenticato della domanda a trabocchetto del Capo [*è più probabile che l'anno cominci di Sabato o di Domenica?*], vi diamo tanto di risposta. Direttamente con le parole del nostro GC:

> Nessuno ha dato la risposta esatta, e si sono sprecati i "chiaramente 1/7" (a parte Zar che non si fida di noi, e fa bene).
>
> Nel calendario gregoriano ci sono 146097 giorni in 400 anni; questo numero è divisibile per 7, quindi il calendario (settimanale) si ripete ogni 400 anni. In 400 anni ci sono 4800 mesi. Di questi il primo del mese è:
>
> 688 volte domenica
>
> 687 volte martedì
>
> 687 volte venerdì
>
> 685 volte mercoledì
>
> 685 volte giovedì
>
> 684 volte lunedì

> 684 volte sabato
>
> Quindi paradossalmente, un mese ha maggiori probabilità di iniziare la domenica piuttosto che qualsiasi altro giorno della settimana. In 400 anni, comunque, ci sono solo 400 gennai; il primo gennaio risulta:
>
> 58 volte domenica
>
> 56 volte lunedì
>
> 58 volte martedì
>
> 57 volte mercoledì
>
> 57 volte giovedì
>
> 58 volte venerdì
>
> 56 volte sabato
>
> Quindi ci dono maggiori probabilità che cada di domenica
>
> E se la domanda è "da dove comincio a contare?" andate a pulire i cancellini: dopo 400 anni ricomincia uguale e quindi qualsiasi momento va bene, per cominciare il conto...

Sì, il Capo è fatto così, cerca sempre di fregarvi. E i calendari sono una delle sue passioni, per cui è quasi impossibile fregare lui, sulle loro particolarità...

4.2 [087]

E va bene, lo ammettiamo ancora una volta, erano un po' più facili del solito. Ma ne è valsa le pena, così abbiamo più spazio per citare tutti quelli che hanno scritto e riportare i commenti più salaci. E se parliamo di sale è perché i pasticcini sono stati abbondanti solo sulle pagine virtuali di RM, la Redazione non è ancora riuscita a riunirsi per festeggiare i tre genetliaci come si deve...

4.2.1 Compleanno di Alice!

Forse faremmo più in fretta ad elencare chi non ha scritto per questo problema, veramente si sono fatti vivi un po' tutti: ***Andrea, Gabriel, Gnugnu, Sand, Damir Wilras, Toki, Celeste, Flo, Gavrilo, Zar, Cid, Loba, Rethi***. Prima di dare qualsiasi soluzione, ci dobbiamo cospargere il capo di cenere per aver usato un termine non corretto (*Delikatessen*), lasciamo a ***Gavrilo*** la possibilità di meglio correggerci con questo quadro storico:

> Cominciamo con il dire che in tedesco (ed anche in *schwitzerdütsch*) una pasticceria si chiama *Konditorei* (in tedesco *Delikatessen* è per lo più una gastronomia/drogheria, mentre a New York *Delicatessen*, spesso abbreviato in *Deli*, è un ristorante kosher ebraico ashkenzita, che in genere serve tra l'altro sandwich di *pastrami*). Il *pastrami* è una carne conservata (parente del *corned beef*) che fu introdotta a New York da un ebreo lituano immigratovi nel 1887: Sussman Volk. Egli aprì una macelleria kosher, che divenne il primo *Delicatessen*, quando iniziò a vendere il *pastrami*, dovuto alla ricetta di un suo amico rumeno, con la quale questi lo ricompensò. Volk infatti conservò un baule di cose del rumeno, mentre egli faceva un viaggio di un paio d'anni in Europa. Il *pastrami* è un modo di conservare la carne di origine rumena: *păstra* è un verbo rumeno che significa conservare. Quanto poi al fatto che le *Deli**k**atessen* tedesche appaiano un po' diverse come grafia dalle *Deli**c**atessen* newyorkesi, ciò si deve al fatto che circa ogni cento anni i tedeschi sentono il bisogno di modificare la *Rechtschreibung* (= *ortografia*), e fecero una riforma all'inizio del '900 (oltre un decennio dopo che Volk era arrivato a New York). In questa riforma fu abolito l'uso in tedesco della lettera **C**, che fu sostituita

> dalla **K**, se dura, e dalla **Z**, se dolce, e rimase soltanto nelle grafie composite **CH**, **SCH** e **TSCH**.

Alice dice che è vero, e quando le abbiamo chiesto perché non avesse corretto il testo del problema si è chiusa in un silenzio misterioso.

Abbiamo veramente difficoltà a scegliere una soluzione da fornirvi: ***PMP*** manda un "43" evocativo di significati cosmici e non ha voglia di spiegarci come ha fatto, ma tutti gli altri hanno fatto disegni colorati e fornito programmini in diversi linguaggi per ottenere tutte le possibili combinazioni di vassoi. A parte ***Sand***, che ha attribuito al risultato il significato di "età di Alice" suscitandone le più accese ire, potremmo scegliere chiunque, per esempio ***Toki***, che da tanto non si fa sentire:

> ...E adesso vediamo quanti pasticcini mangerete alla festa (purtroppo io non potrò essere presente, altrimenti avrei scritto "mangeremo").
>
> Indico con x, y e z il numero di vassoi contenenti, rispettivamente, 6, 9 e 20 pasticcini che compongono una generica combinazione di vassoi; questa combinazione avrà quindi, in tutto, 6x+9y+20z pasticcini.
>
> Dato che, al variare di x, si ottengono tutti numeri che sono uguali *mod*6, mi basta trovare 6 opportune coppie (y,z) tali che i corrispettivi valori di 9y+20z siano i minimi valori che siano così esprimibili e che siano uguali a 0, 1, 2, 3, 4 e 5 *mod*6.
>
> I multipli di 9 sono alternativamente uguali a 0 e a 3 *mod*6 e quelli minimi sono rispettivamente 0 e 9.
>
> I multipli di 20 sono alternativamente uguali a 0, a 2 e a 4 *mod*6 e quelli minimi sono rispettivamente 0, 20 e 40.
>
> Per ottenere un numero uguale a 1 *mod*6 sommo due numeri uguali a 3 e a 4 *mod*6 e quello minimo è 49=9+40.
>
> Per ottenere un numero uguale a 5 *mod*6 sommo due numeri uguali a 2 e a 3 *mod*6 e quello minimo è 29=20+9.
>
> Il numero maggiore fra questi è 49: questo vuol dire che il numero più grande che non riesco a ottenere con la combinazione 6x+9y+20z è 49-6=43.
>
> Infatti:
>
> 44=2 *mod*6=6x4+9x0+20x1
>
> 45=3 *mod*6=6x6+9x1+20x0=6x0+9x5+20x0
>
> 46=4 *mod*6=6x1+9x0+20x2
>
> 47=5 *mod*6=6x3+9x1+20x1=6x0+9x3+20x1
>
> ecc.

E non dimentichiamo di citare ***Loba***, che ha inviato un meraviglioso regalo per Alice:

> Pensando alla nostra treccia selvaggia mi sono tornate in mente le promesse fatte qualche tempo fa di riportarvi quanto auditu all'INdAM. Mentre stendo le cose per bene, vi butto lì una cosetta carina: le n-trecce.
>
> Indichiamo con B_n={Diagrammi di cordicelle con n vertici superiori e n vertici inferiori tali che ogni vertice superiore è collegato con esattamente un vertice inferiore. Una cordicella può passare sopra o sotto un'altra, ma non possono annodarsi (i.e. le cordicelle vanno solo dall'alto verso il basso, non possono tornare in su)}.
>
> Se definiamo su B_n l'operazione * detta "incollamento" in cui i vertici inferiori del primo operando (appartenente a B_n) vengono ordinatamente "incollati" ai vertici superiori del secondo, abbiamo che la struttura così ottenuta è un gruppo ciclico

infinito (isomorfo a [Z,+]). Quel che più mi preme sottolineare ora, però, non è tanto quello che si può fare con i gruppi di trecce (argomento sul quale ho avuto un'illuminante conversazione con Sam)[18], ma il fatto che siano un gruppo, cioè, in particolare, che di ogni treccia esista l'inversa, ovvero una treccia che, incollata alla treccia data, mediante una lieve trazione dà luogo a n cordicelle stese, senza intersezioni.

Che Alice non incontri mai la sua Nemesi!

Impagabile.

4.2.2 Compleanno di Doc!

Avete ragione, gli scerzi più cattivi li facciamo sempre a lui, al nostro Postino ed Impareggiabile Paroliere. In compenso lo hanno salvato tutti dalla pazzia spiegandogli in modi innumerevoli come mai poteva tenersi la sua prima scelta. Un grazie di cuore a ***PMP, Gnugnu, Sand, Andrea, Damir Wilras, Celeste, Flo, Zar, QfwfQ, Cid***.

Andrea in particolare mette in guardia il Doc contro la cattiveria degli altri redattori:

> Il ragionamento è errato - non si possono sommare 2x e x/2 perché sono "pere e mele" in quanto x non è una variabile ma un valore ben definito che è differente nei due casi considerati.
>
> Il ragionamento giusto è il seguente. Supponendo che sia ragionevole scegliere la scatola con il valore atteso di pasticcini più alto, e una probabilità a priori uguale per le due scatole, calcoliamo i valori attesi y per la scatola corrente e z per l'altra scatola: otteniamo naturalmente E[y] = E[x] = 1/2. Quindi è indifferente cambiare.
>
> Ma se per un attimo ricoloriamo con le tinte fosche della realtà la candida astrazione matematica, forse possiamo giungere a soluzioni differenti. La prima cosa che ci insospettisce è che con le nostre precedenti elucubrazioni eravamo arrivati a capire che i pasticcini sono 43, un numero non divisibile per 3: qui c'è una truffa, e non può essere che ai danni del povero Doc. Poi dovremmo chiederci - perché a Doc viene proposto di cambiare? volete farci credere davvero che i protagonisti di questa storia hanno a cuore l'estetica matematica anche quando in ballo ci sono dei pasticcini? La mia sensazione è che a Doc è proposto lo scambio solo perché in prima battuta aveva scelto la scatola con più pasticcini. Quindi il consiglio è di non cambiare assolutamente, e buon appetito.

Di ***Damir*** vogliamo da mesi pubblicare la firma, e così facciamo qui a destra. ***Sand***, ci dice ancora:

> Ragionamento: il paradosso è noto come "two-envelope paradox". Il paradosso sta nel fatto che lo stesso ragionamento può essere ripetuto una volta effettuato lo scambio, cosicché il presunto vantaggio costringerebbe Doc a continuare a cambiare scatola all'infinito. Ma la simmetria della situazione dimostra che non può esserci nessun vantaggio nello scambio. Il che però non dà risposta al paradosso, che mostra una situazione di favore.

[18] *Quando RM andava ad una cifra (sia come numero d'ordine che come diffusione) era stato proposto un problema tratto dal secondo capitolo del terzo libro di Martin Gardner ("Teoria dei gruppi e trecce"), dove ci sono anche alcuni giochini in merito. Non solo, ma io sono convinto che la "illuminante conversazione con Sam" fosse basata sulla "treccia" che il Nostro proponeva come gioco alla mitica Sagra del Pesce Algebrico cui partecipammo: ricordo che Sam imponeva di usare dei movimenti che erano si generatori del gruppo (e quindi qualsiasi posizione/elemento del gruppo era raggiungibile, inclusa l'identita`), ma scelti in modo particolarmente perfido... (RdA)*

> Io il paradosso lo risolvo semplicemente così: ci sono due scatole, una contiene X e l'altra 2X pasticcini. Probabilità media 3X/2. Per ciascuna delle due scatole. Che permane scambiando le scatole. Fine.
>
> Ma la cosa, lo so già, porterà a discussioni infinite. Questi problemi sembrano fatti per far litigare i matematici.

Ebbene sì, è proprio quello che ci piace fare... perché abbiamo una teoria ben nota su quello che bisognerebbe fargli, ai matematici, da piccoli.

5. Quick & Dirty

Su una scacchiera $N \times N$ sono posizionati N^2 cavalli; questi cavalli vengono "alzati" contemporaneamente e ognuno di esso atterra sulla scacchiera dopo una mossa regolare di cavallo.

Per quali valori di N la cosa è possibile?

> *Nonostante il massimo riserbo di cui è stata ammantata la notizia, pare che quest'anno Torino sia sede di evento olimpico.*
>
> *Siccome un cavallo parte da una casella di un colore per finire in una casella di un altro colore, dobbiamo avere lo stesso numero di caselle per ogni colore, quindi N^2 deve essere pari; questo avviene solo per N pari..*

6. Pagina 46

Siano a, b, c, d i quattro valori in oggetto, ossia si abbia:

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 7.$$

Questo implica che a, b, c, d siano radici di:

$$P(x) - 7 = 0.$$

Ossia che $P(x) - 7$ è divisibile per $(x-a), (x-b), (x-c), (x-d)$.

Quindi possiamo scrivere:

$$P(x) - 7 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x), \qquad \textbf{[6.1]}$$

dove $p(x)$ rappresenta il quoto della divisione e può essere una costante.

Supponiamo ora esista A (intero) per cui $P(A) = 14$; allora, dalla **[6.1]**, si ha che deve essere:

$$P(A) - 7 = (A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A),$$

ossia che

$$14 - 7 = 7 = (A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A).$$

Il che è assurdo, in quanto 7 non può essere il prodotto di 5 fattori interi distinti tra loro.

7. Zugzwang!

7.1 Ultima

Nonostante la cosa sia stata mantenuta sotto il più assoluto riserbo, pare quest'anno Torino sia sede di evento olimpico. Quindi, abbiamo cercato un gioco in tema.

Ora, presumiamo siate in grado di praticare la Nobile Arte almeno al livello che Bagnoli definiva genialmente "spostare legname", quindi non stiamo qui a spiegarvi quello originale; inoltre, agli inizi di questa rubrica avevamo promesso che non avremo parlato di giochi già analizzati, sia in parte (come gli scacchi: ormai neanche più Fred apre di pedone di Torre) sia in toto (come il filetto: al più, con quello, ci inventiamo dei giochi nuovi). Però un minimo di riconoscimento alle Olimpiadi vorremmo darlo.

L'idea originale era quella di analizzare quelli che sono normalmente definiti "scacchi fantasia", ma una rapida esplorazione in questo campo ha mostrato che, come diceva mia nonna, non si sono proprio fatti cadere l'ernia (mia nonna era *politically uncorrect* e fiera di esserlo); inventati l'Amazzone (o Donna Cavallotta: Donna +Cavallo), l'Elefante (o *Alfil*: se il movimento del Cavallo è 2x1, questo è 2x2), la Giraffa (idem: 4x1) e il Cammello (3x1) resta poco da fare, a parte accorgersi che la tendenza diventa quella di ignorare questi pezzi e sfruttare le loro caratteristiche solo in fase di "difesa personale" (se non capite cosa intendo dire, giocate qualche partita e tutto sarà più chiaro).

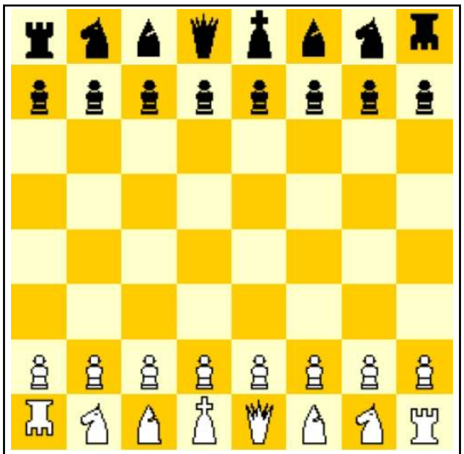


Figura 1 - La scacchiera di Ultima (versione "con quello che ho in casa")

Già, solo che Rudy ha trovato una variazione degli scacchi che ha pochissimo a che fare con gli scacchi: si limita a riciclarne i pezzi (e ad usarli in un modo piuttosto brutale: sconsigliata la scacchiera Swarowsky), ma le cose cambiano abbastanza alla svelta: se volete usare gli scacchi, la disposizione di partenza è quella indicata in ***Figura 1***.

"Ci sarà da fidarsi, da come ha messo le Torri?" Ve l'avevo detto, che non erano trattati molto bene. Lasciamo perdere, tanto gli scacchi ci servivano solo per parlare delle Olimpiadi.

Se non vi trovate con la disposizione, in ***Figura 2*** vedete la posizione con i simboli che i giocatori abituali utilizzano; presumendo (come i Redattori) che vi troviate meglio con i pezzi "fatti apposta", vi invitiamo a costruirveli; se anzichè partire da delle pedine della Dama inventate nuove forme tridimensionali, fatecele avere (in mogano o in POV-Ray, fate voi).

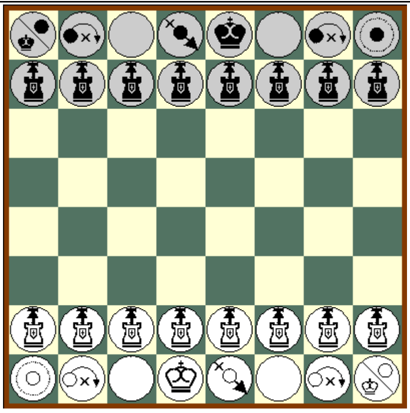


Figura 2 – La scacchiera di Ultima (versione "giusta")

Scopo del gioco (o meglio, della sua invenzione: lo scopo finale è sempre quello di ridurre l'avversario ad uno straccio) pare sia stato usare *tutti* i modi possibili degli scacchi eterodossi per effettuare una mossa o presa, il che dovrebbe garantire un congruo mal di testa.

Ricominciamo da capo, che qui devono essere definite un mucchio di cose: tanto per cominciare la prossima parte ha lo stesso *thrilling* di un dizionario (tant'è che si chiama "Dizionario"), quindi se non siete degli apprezzatori della pedanteria il consiglio è di usarlo come tale: saltate (c'è scritto dove rientrare) e tornate indietro quando necessario.

Dizionario

cattura di custodia: un pezzo effettua una cattura di custodia quando, muovendo in una casella adiacente ad un pezzo nemico, forma una linea retta tra sé, il pezzo nemico e un pezzo amico. Se un pedone forma più linee di questo tipo, tutti i pezzi coinvolti sono "custoditi".

cattura di prossimità: la cattura avviene portando il pezzo in una casella adiacente al pezzo da catturare: in pratica, la presa avviene con una mossa di Re.

cattura per imitazione: la cattura avviene imitando il metodo di presa del pezzo da catturare.

cattura coordinata: il pezzo da prendere deve trovarsi all'incrocio tra la riga (colonna) del pezzo attaccante e la colonna (riga) del Re attaccante. Durante la presa nè il pezzzo attaccante nè il Re muovono, quindi è possibile prendere due pezzi con cattura coordinata.

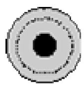
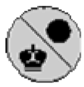
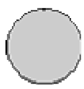
Robert Abbot: questa voce è stata inserita solo per vedere se state leggendo tutto il dizionario, infatti non è citato da nessuna altra parte. È l'autore dell'articolo sul Recreational Mathematical Magazine dell'agosto del 1962 in cui venivano definite le regole di Ultima: non solo, ma se qualcuno di voi conosce un tizio che si chiama Martin Gardner, questo qui è un suo amico: è quello che ha inventato *Eleusis*.

mossa passiva: mossa che non comporta una presa.

overtaking: il pezzo salta in una casella libera oltre il pezzo avversario catturandolo; non può saltare oltre pezzi amici e può effettuare il salto di più pezzi contemporaneamente.

suicidio: il pezzo viene rimosso dalla scacchiera, anche se non è in presa da parte dell'avversario. Il suicidio conta come una mossa.

***Se avete saltato il dizionario, ricominciate da* qui**. Bene, cominciamo con la descrizione dei pezzi, e approfittiamone per introdurre anche la notazione che viene "normalmente" usata. In corsivo, il nome inglese dei pezzi; se manca il nome italiano, qulunque proposta sarà entusiasticamente accettata.

Simbolo	Nome	Comportamento
	*Withdrawer*	Effettua una ***mossa passiva*** di Donna. Effettua una ***cattura di prossimità***. Non può mai muovere in una casella occupata.
	Pedone	Effettua una mossa di Torre e può effettuare una ***cattura di custodia***. Non può mai muovere in una casella occupata.
	*Long Leaper*	Effettua una mossa di Donna, ma cattura per ***overtaking***.
	Immobilizzatore	Effettua una mossa di Donna, ma non può catturare. Qualsiasi pezzo in una casella adiacente è immobilizzato; se due immobilizzatori avversari sono adiacenti, sono contemporaneamente immobilizzati sin quando uno dei due non viene catturato. Un pezzo immobilizzato da un Immobilizzatore può commettere ***suicidio***.
	Coordinatore	Effettua una mossa di Donna, ma prende con ***cattura coordinata*** con il proprio Re. Non può mai muovere in una casella occupata.
	Camaleonte	Effettua una ***mossa passiva*** di Donna, ma ***cattura per imitazione***. I Camaleonti possono immobilizzare gli Immobilizzatori ma non possono catturarli.

"Rudy, non ci hai spiegato come muove il Re!". Stranamente (almeno, secondo la nostra opinione) muove come al solito; e la partita si vince come al solito, mettendo sotto scacco matto il Re avversario. Siccome però se non ci mettiamo anche qui qualcosa di speciale non siamo contenti, se il Re avversario è immobilizzato da un Immobilizzatore, allora possiamo metterlo sotto scacco di Re. E vi prego di notare che se un Re è sotto

Immobilizzatore, un semplice scacco che richieda il movimento del Re per essere parato è equivalente ad uno scacco matto.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 (Sempre meno) evidenti ragioni di simmetria

Al momento, non abbiamo la più pallida idea se questo nostro pezzo arriverà dove vogliamo arrivare; comunque, siccome (come diceva Andrea Pazienza) partire è obbligatorio, in quanto serve per arrivare, cerchiamo almeno di cominciare dal più lontano possibile.

Prendiamo in considerazione la sequenza di funzioni definita ricorsivamente come:

$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = y \\ f_{n+1} = \dfrac{f_n + 1}{f_{n-1}} \end{cases};$$

indubbiamente, una cosa dall'aria piuttosto balorda. Siccome sappiamo che non lo farete mai, vi calcoliamo i primi termini:

$$x,\ y,\ \frac{y+1}{x},\ \frac{x+y+1}{xy},\ \frac{x+1}{y},\ x,\ y,\dots$$

Ammetterete che la cosa, data la bruttura vista sopra, è piuttosto inaspettata; *la sequenza ha periodo* **5**, e ripete i suoi termini all'infinito[19].

Una rappresentazione piuttosto bislacca si può dare nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_1} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_2} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_1} \begin{bmatrix} f_5 \\ f_4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_2} \begin{bmatrix} f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau_1} \dots$$

dove abbiamo definito due ***mappe*** τ_1 e τ_2 che possono essere espresse in modo esplicito come:

$$\begin{cases} \tau_1 : \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \dfrac{g+1}{f} \\ g \end{bmatrix} \\ \tau_2 : \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ \dfrac{f+1}{g} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Se continua a non piacervi, avete tutta la nostra comprensione; però questo aggeggio ha un paio di caratteristiche interessanti. Ad esempio, se applicate uno dei due due volte di seguito ottenete l'oggetto di partenza. Non solo, ma se li applicate in successione ***cinque*** volte di seguito anche qui riottenete l'originale (lo abbiamo fatto prima, quindi non vi diciamo neanche di provarci). Tutto questo si può esprimere come:

$$\begin{cases} \tau_1^2 = \tau_2^2 = 1 \\ (\tau_1\tau_2)^5 = 1 \end{cases}$$

[19] Per gli esperti: ogni termine è un *Polinomio di Laurent* (a coefficienti interi non negativi), e il tutto è noto come ***fenomeno di Laurent***.

che, come dovreste ricordare da quando abbiamo trattato dei gruppi, è la definizione di ***gruppo diedrico di* 10 *elementi***.

Se la cosa vi sembra complicata possiamo semplificarci la vita con un caso simile: buttiamo via i "**+1**" che compaiono e prendiamo i logaritmi; sarebbe la prima volta che un logaritmo semplifica qualcosa, ma proviamo.

In questo caso, otteniamo le due mappe:

$$\begin{cases} s_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y-x \\ y \end{bmatrix} \\ s_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ x-y \end{bmatrix} \end{cases}.$$

E questo ve lo calcolate da soli, noi ci limitiamo a darvi il risultato finale:

$$\begin{cases} s_1^2 = s_2^2 = 1 \\ (s_1 s_2)^3 = 1 \end{cases}:$$

ossia, il nostro aggeggio è la definizione di ***gruppo diedrico di* 6 *elementi***.

Dovrebbe ormai comunque esservi chiaro come si fanno i conti; inventarsi funzioni del genere non è particolarmente complicato, e si arriva piuttosto facilmente a verificare che (la verifica è semplice, ma per scriverle c'è voluto quasi tutto il mese...):

$$\begin{aligned} s_3 &: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 2x-y \end{bmatrix} & (s_3 s_1)^4 &= 1, \\ s_4 &: \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 3x-y \end{bmatrix} & (s_4 s_1)^6 &= 1, \\ \tau_3 &: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ \dfrac{f^2+1}{g} \end{bmatrix} & (\tau_3 \tau_1)^6 &= 1, \\ \tau_4 &: \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} f \\ \dfrac{f^3+1}{g} \end{bmatrix} & (\tau_4 \tau_1)^8 &= 1. \end{aligned}$$

Ossia, tutti gruppi diedrici.

Beh, per dirla con le parole di un comico: "...E questo, cosa mi rappresenta?" Semplice; ricordatevi che per ognuna, oltre a quella indicata, c'è anche l'altra condizione, quella dei quadrati uguali all'identità; ossia, per definizione, questi aggeggi sono delle ***riflessioni***. Per rendere comprensibile la cosa con un esempio, in ***Figura 1*** vedete il caso $(\tau_2 \tau_1)^5 = 1$; per motivi che forse[20] un giorno ci saranno chiari, questa riflessione si indica come $I_2(5)$. Attenti che le linee spesse sono proprio linee, non specchi visti dall'alto.

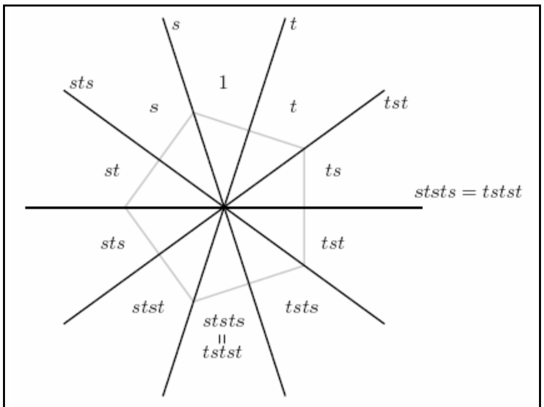


Figura 1 – La riflessione pentagonale

[20] Nel senso che non abbiamo la più pallida idea se e quando finiremo di parlare di questa roba

Ora, quest'ultima notazione ci permette di introdurre una potentissima generalizzazione; cosa succede, se anzichè riflettere lungo dele linee rifletto lungo dei piani? E se uso, genericamente, degli *iperpiani*?

Qui la cosa si complica; infatti, già solo il passaggio alle tre dimensioni implica che, anzichè il nostro cerchio, si debba piuttosto cercare un qualche cosa che sta su una sfera, che non è facile. L'idea dovrebbe essere più che altro quella riuscire a costruire un "caleidoscopio sferico" di specchi[21] che riescano a "far fare il giro" ai punti sin quando si torna all'origine; fortunatamente, in questo caso è abbastanza facile trovare un esempio al contempo semplice e complicato; se dividiamo una sfera in una serie di triangoli sferici aventi angoli[22] $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{5}\right)$, dovremmo riuscire ad ottenere qualcosa che ci permetta di capire come funziona il tutto. Bene, il risultato delle nostre ponzate lo vedete in ***Figura 2*** (disegno sempre di King, evidentemente) ed è la generazione di un gruppo che, per gli stessi oscuri motivi di cui sopra, viene indicato con H_3 e ha ordine (o numero di elementi) pari a 120. Ci aspettiamo, a questo punto, che le similitudini (o meglio, l'isomorfismo) con il gruppo icosaedrico siano immediate *[Se anche a voi come a Rudy il disegno qui sopra ricorda più un dodecaedro che un icosaedro, non preoccupatevi: i due aggeggi sono duali, quindi non esiste problema: inoltre, se "guardate bene", vi accorgete che su questi punti potete anche tracciare un icosaedro (RdA)].*

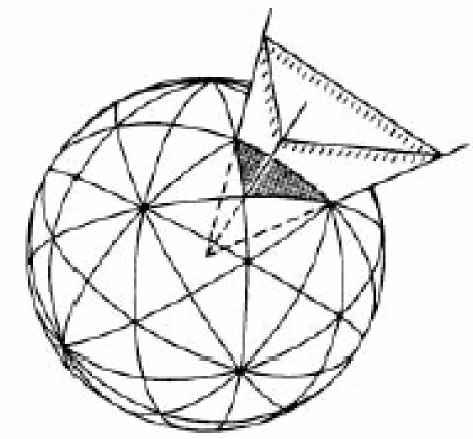


Figura 2 – Il Caleidoscopio Sferico

Se guardate bene la figura, vi accorgete che (esattamente come succede con un caleidoscopio) i nostri specchi generano l'intera sfera; questo era già successo con il pentagono della figura precedente (uno "spicchio" vi generava tutto). Non ci sognamo neanche di dimostrarlo, ma ci teniamo a dire che funziona in qualsiasi dimensione; non solo, ma la costruzione è minimale.

A questo punto, dovrebbe essere immediato che *se in due dimensioni potevate costruirne quanti volevate, in tre (o più) non è detto che ci si riesca*; ma, per dimostrarlo, prima dobbiamo inventarci qualche nome complicato.

Presumo sappiate tutti di cosa parliamo, quando diciamo "poligono regolare", "poliedro regolare", eccetera; anche senza visualizzarli o anche solo contarli, non dovreste avere problemi a spostare il concetto alle dimensioni superiori. Ora, quello che farebbe comodo è avere un termine unico per definire questi aggeggi; che, fortunatamente, esiste. Passiamo dalla definizione formale, altrimenti sembra troppo facile.

> Un ***politopo regolare*** in uno spazio euclideo è un politopo convesso il cui gruppo di simmetria (ossia il gruppo delle isometrie dello spazio invarianti rispetto a lui) agisce transitivamente su una collezione nidificata e completa di elementi nella forma:

$$vertice \subset spigolo \subset facce \subset \ldots$$

spaventati? Tranquilli, era solo per evitare che vi sembrasse tutto troppo facile. Quello che ci interessa, è il fatto che ***il gruppo di simmetria di un politopo regolare è un***

[21] L'idea non è nostra, purtroppo: con un filo di invidia, riconosciamo che vada attribuita a Bruce King.

[22] Abbiamo detto "triangoli ***sferici***". quindi, inutile provare a sommare.

gruppo di riflessioni. Vi raccontiamo subito il finale: il contrario non è vero. Però qualche esempio può permetterci di capire meglio il concetto.

Il *primo esempio* è semplicissimo, e ci serve praticamente solo per mettere a posto un po' di notazioni; dato un ***m-agono*** (centrato nell'origine) nello spazio bidimensionale, il suo gruppo di simmetria si indica con $I_2(m)$ e contiene (o meglio: è generato da) m riflessioni, corrispondenti lle m linee di simmetria riflessiva dell'm-agono. Non solo, ma soddisfa sempre la legge $(st)^m = 1$: prendete una linea passante per l'origine e perpendicolare al lato nella sua metà, prendete un'altra linea passante per l'origine e per un vertice, immaginatele riflettenti e avete ottenuto gli "specchi" s e t della vostra simmetria. Questo gruppo contiene $2m$ elementi e il caso m=5 lo abbiamo visto e illustrato (in ***Figura 1***).

Il *secondo esempio* introduce qualche complicazione: prendete[23] un tetraedro (se volete restare nel mondo reale: funziona lo stesso con un ***simplesso regolare***, che qui è la stessa cosa). Per ogni spigolo, scegliete un piano passante per il la metà dello spigolo e per tutto lo spigolo opposto; fate questo lavoro per tutti gli spigoli (sono **6**) e in questo modo trovate i **6** (iper)***piani di simmetria*** del simplesso. Giusto per prendere fiato, ci meritiamo una piccola digressione.

> Esiste una definizione di simplesso molto più soddisfacente di quella vista qui sopra; data una base ortonormale (o standard) di $\Re^{n+1}$, si definisce simplesso ortonormale (o standard) n-dimensionale il guscio convesso dei punti terminali dei versori della base. Se vi serve un esempio, prendete due vettori nel piano (n+1=2), di pari lunghezza e perpendicolari tra loro: unite tra di loro tutti (nel senso di "ognuno con tutti") i punti terminali e ottenete una linea. Siccome i versori erano una base dello spazio bidimensionale, la linea è il simplesso dello spazio monodimensionale. Se ripetete il ragionamento per lo spazio tridimensionale (qui n+1=3), unite i punti (sempre "ognuno con tutti") e ottenete un triangolo equilatero, che quindi è il 2-politopo. Se poi riuscite a trovare una base quadridimensionale, unendo i punti come sopra vi ritrovate il 3-politopo, altrimenti noto come tetraedro. E se volete andare avanti fate pure. Chiaro, adesso?

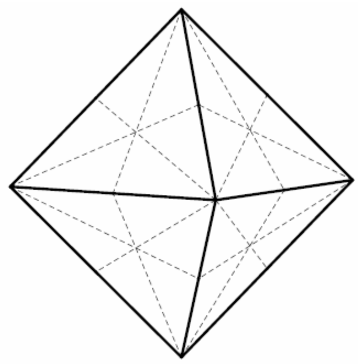


Figura 3 - B_3

Torniamo al tetraedro; il suo gruppo di simmetria si indica con A_3; se numerate i quattro vertici, vi accorgete che questo gruppo è equivalente al gruppo delle permutazioni S_4; in genere (e la cosa dovrebbe essere chiara dalla digressione sopra) A_n è isomorfo a S_{n+1}.

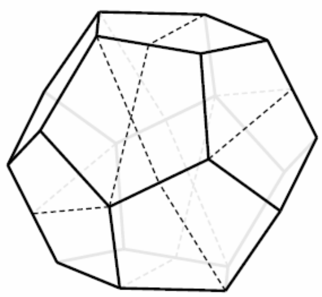


Figura 4 - H_3

Non dovreste avere problemi con il *terzo esempio*; l'*n-crosspolitopo* è definito come il guscio convesso dei punti terminali di una base ortonormale in $\Re^n$. La cosa ha l'aria di un *deja-vu*, e in effetti somiglia molto a quella del simplesso; il suo gruppo di riflessioni, indicato con B_n,

[23] "..., comprate, costruite o rubate...", come diceva Baez. Dovreste comunque sapervene costruire uno, ve lo abbiamo spiegato.

viene generato da A_{n-1} aggiungendo la riflessione che trasforma il vettore della base e_1 in $-e_1$.

Altrettanto immediato il *quarto esempio*; in tre dimensioni, le simmetrie sono quelle del dodecaedro (o dell'icosaedro; tra l'altro, non lo avevamo detto, ma tra l'ottaedro e il cubo c'è la stessa parentela) e il gruppo viene indicato con H_3; vedete indicati i piani di riflessione nella ***Figura 4***.

Adesso andiamo più svelti e senza disegni, che viene complicato; vi ricordate che in ***quattro*** dimensioni abbiamo sei politopi regolari; non dovreste avere problemi con il *4-simplesso*, il 4-*cubo* e il 4-*crosspolitopo*, che abbiamo già visto; per quanto riguarda gli altri, il 120-*celle* (con 120 facce dodecaedriche) e il 600-*celle* (con 600 facce tetraedriche) definiscono entrambi lo stesso gruppo di riflessioni, indicato con H_4; dovreste ricordarvi, però, che esiste anche uno strano aggeggio non avente corrispondente tridimensionale: il 24-*celle*, con 24 celle ottaedriche. Questo individua un ulteriore gruppo di riflessioni (quadridimensionali), indicato con F_4.

Tutto chiaro, fin qui? Bene, giusto per dare dei nomi alle cose, i sistemi di specchi (in qualsiasi numero di dimensioni) si chiamano "Combinazioni di Coxeter[24]".

"Beh, e dov'è il guaio?" Semplice: che tutto questo lo avevamo già detto. La parte complicata comincia adesso.

Restiamo nella realtà, e parliamo di "piani", o meglio smettiamo di parlarne; siccome possiamo individuare un piano indicando semplicemente una retta a lui perpendicolare, anzichè portarci dietro gli (iper)piani, ci limitiamo a definire due vettori opposti tra loro e perpendicolari al piano; prendiamo due vettori per ogni piano di riflessione, buttiamo via i piani e quello che ci rimane (perfettamente equivalente) è noto come ***sistema di radici***.

Esiste, per questi aggeggi, una definizione formale piuttosto interessante, allmeno se ci limitiamo ai sistemi finiti: il trucco sta tutto nella terza parte che, logicamente, è la più complicata.

> Un sistema (finito) di radici è una raccolta finita e non vuota Φ di vettori non nulli nello spazio V per cui:
>
> 1. Ogni sottospazio unidimensionale di V contiene o nessuna radice o due radici $\pm\alpha$
> 2. Per ogni $\alpha \in \Phi$, la riflessione σ_α permuta Φ
> 3. Per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$, abbiamo $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - a_{\alpha\beta}\alpha$, con $a_{\alpha\beta} \in Z$.

Cerchiamo di chiarire l'ultima; possiamo scriverla come:

$$\sigma_\alpha(\beta) - \beta = a_{\alpha\beta}\alpha$$

Ossia: se prendiamo due radici (attenzione che sono vettori) α e β e riflettiamo il secondo secondo il piano del primo, la congiungente del punto finale del secondo vettore con il punto finale della sua riflessione è parallela al primo vettore. Forse un disegno (anche se piuttosto brutto) aiuta; lo trovate in ***Figura 5***. Inutile

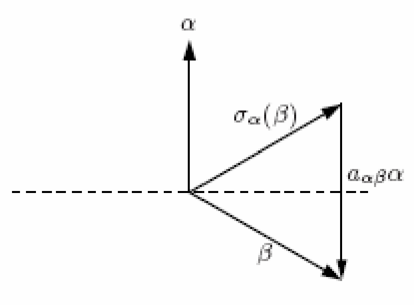


Figura 5 – La chiave di volta dei sistemi di radici

[24] Bruttissima traduzione dei "Coxeter's Arrangements", di cui ci assumiamo l'intera responsabilità.

ricordare che la congiungente degli estremi dei due vettori è pari alla differenza dei medesimi, da cui la formula vista sopra.

Possiamo rimaneggiare la nostra formula, e quello che sinora dovrebbe essere stato unicamente un sospetto diventa palese: quanto abbiamo detto, se chiamiamo i vettori in un modo più ordinato, si può scrivere come (attenzione che la prima alfa ha un pedice "i" praticamente invisibile):

$$\sigma_{\alpha_i}\left(\alpha_j\right)=\alpha_j-a_{ij}\alpha_i .$$

Il che significa che *tutte le nostre riflessioni sono descrivibili attraverso matrici*, dette ***Matrici di Cartan***.

"...e ci voleva tanto?" Beh, sì. Anche perché in questo modo riusciamo a ricavarle abbastanza semplicemente; ad esempio, con un po' di geometria analitica si riescono a ricavare le più semplici quadridimensionali:

$$A_4:\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\quad B_4:\begin{bmatrix}2&-2&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}.$$
$$C_4:\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-2&2&-1&0\\0&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}\quad D_4:\begin{bmatrix}2&0&-1&0\\0&2&-1&0\\-1&-1&2&-1\\0&0&-1&2\end{bmatrix}$$

Siamo i primi ad ammettere che non siano effettivamente una bellezza, ma siamo andati a cercarci un caso complicato apposta; se provate con i casi in 2 o in 3 dimensioni, vi accorgete che sono ragionevolmente semplici.

Bene, capito di cosa stiamo parlando, cerchiamo di darne una definizione più formale:

> Una matrice di interi $n\times n$ $\lfloor a_{ij}\rfloor$ è una Matrice di Cartan di un sistema di radici se e solo se:
>
> 1. $\forall i, a_{ii}=2$;
> 2. $\forall i\neq j, a_{ij}\leq 0; a_{ij}=0 \Leftrightarrow a_{ji}=0$;
> 3. Esiste una matrice diagonale D con valori interi positivi sulla diagonale principale per cui DAD^{-1} è simmetrica definita positiva.

Ammettiamo che, come al solito, il punto (3) non sia una meraviglia di chiarezza; e, come al solito, il trucco sta tutto lì. In sostanza, si impone che sia in grado di "riflettere".

A noi le matrici non sono mai state particolarmente simpatiche, anche se riescono a rappresentare un approdo di ragionevole semplicità in alcuni rami specialmente compicati della matematica; qui, per fortuna, riusciamo a trasformarle in qualcosa di un pochino più semplice: il metodo lo ha trovato ***Dynkin***, che dovreste conoscere[25], e il tutto è noto come ***Diagrammi di Dynkin*** (o Dynkin-Coxeter, o permutazioni dei due...). Ogni vertice di un Diagramma di Dynkin è etichettato dagli elementi dell'insieme degli indici della matrice *[nota complicata: c'è quindi una biiezione con le radici semplici]*; per le

[25] È il papà di praticamente tutti i Bungee Jumpers sinora pubblicati.

connessioni tra il vertice ***i*** e il vertice ***j*** (con ***i*** sulla sinistra) vengono usati i simboli di ***Tabella 1***.

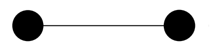
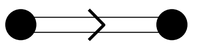
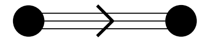
	se $a_{ij} = a_{ji} = 0$
	se $a_{ij} = a_{ji} = -1$
	se $a_{ij} = -1$ e $a_{ji} = -2$
	se $a_{ij} = -1$ e $a_{ji} = -3$

Tabella 1 – I disegnini di Dynkin

A questo punto, due domande sorgono spontanee alla vostra mente (la seconda per prima, ma andiamo con ordine).

"Sicuro ci siano tutti?" Sì, la cosa ce lo garantisce la definizione di Matrice di Cartan vista sopra.

"E che ci faccio, con 'sta roba?" Giusto per dirne una, riuscite a catalogare tutte le Matrici di Cartan, il che significa che riuscite a catalogare tutti i sistemi di simmetria in qualsiasi numero di dimensioni; siccome non lo farete mai, ve lo facciamo noi e trovate la pappa fatta in ***Tabella 2***: la cosa è nota come ***Classificazione di Cartan Killing dei sistemi di radici***; se volete capire bene come funziona, prendetevi uno dei primi quattro casi e provate a rifarlo per n=4; a quel punto, dovreste essere in grado di ricavare le matrici degli altri.

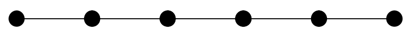
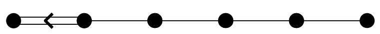
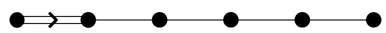
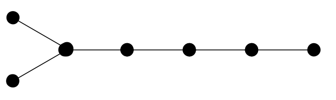
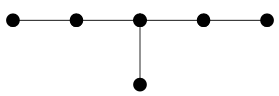
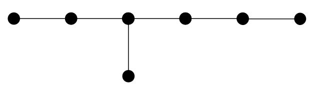
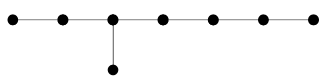
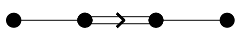
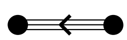
$A_n(n \geq 1)$	
$B_n(n \geq 2)$	
$C_n(n \geq 3)$	
$D_n(n \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	

Tabella 2 –* Tutti *i disegnini di Dynkin

Attenzione, che il fatto di aver catalogato i sistemi di radici non ci garantisce di aver fatto la stessa cosa con le riflessioni; infatti, manca qualcosa e qualcosa è di troppo.

Tanto per cominciare, se vi ricordate, all'inizio avevamo inserito anche un altro gruppo che lavorava in due dimensioni, $I_2(m)$, basato sui poligoni regolari: e, avoler fare i pignoli, G_2 ha preoccupanti parentele con $I_2(6)$.

Non solo, ma se guardate bene, C_n e B_n si somigliano da matti, e forte è il sospetto che vogliano suppergiù dire la stessa cosa.

I più attenti inoltre ricorderanno che, nell'espressione generica di gruppo $(st)^m = 1$, quando lavoravamo con le simmetrie, avevamo visto che erano ammessi unicamente i valori $m \in \{2,3,4,6\}$.

...e sarebbe meglio anche ricordarsi del nostro primo incontro, H_3, basato sul dodecaedro...

"Insomma, tutto da rifare?" No, ma quasi. Comunque, viene più semplice di quanto sembri. Solo che dobbiamo cambiare un po' di cose, tra cui il nome; quelli che andiamo a vedere adesso, sono detti ***Diagrammi di Coxeter*** (e basta); qui, piuttosto che inserire più linee che uniscano i medesimi punti, si preferisce semplicemente indicare quante dovrebbero essere con il numero.

Anche qui il tutto si può organizzare in tabellina; solo, se voltete limitarvi ai gruppi *cristallografici* (ve lo ricordate, che il nome di "Teorema della Restrizione Cristallografica" ci piaceva da matti?) dovete escludere i gruppi H e i gruppi I.

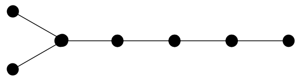
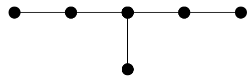
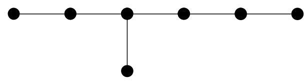
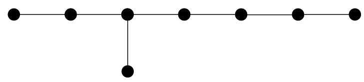
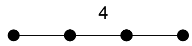
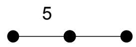
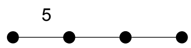
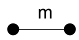
$A_n(n \geq 1)$	
$B_n(n \geq 2)$	
$D_n(n \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
H_3	
H_4	
$I_2(m)(m \geq 5)$	

Tabella 3 – I disegnini di Coxeter

Ora, dovreste ricordarvi che abbiamo detto che il gruppo di simmetria di un politopo regolare è una riflessione (se non vi ricordate cos'è un politopo regolare, andate a vedervi la definizione verso l'inizio), ma abbiamo anche detto che *non è vero il contrario*; infatti, solo alcuni di questi disegnini sono associabili ai politopi. La cosa decisamente interessante è che l'associazione è valida solo per i diagrammi *lineari*; quindi, D e E (tutti quanti) spariscono.

Non solo, ma questi aggeggi sono anche utili per catalogare altro, di cui, però, meglio se ne parliamo tra un po' di tempo; la cosa infatti prevede di parlare di altri oggetti (ragionevolmente semplici, tranquilli) per prendere un po' di familiarità.

Ve l'avevamo detto, che non sapevamo se lo avremmo finito...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms