Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 077 - Giugno- Anno Settimo

Rudi Mathematici
Rivista Fondata nell'altro millennio da
Rudy d'Alembert (A.d.S., G.C., B.S.)
rudy.dalembert@rudimathematici.com
Piotr Rezierovich Silverbrahms (Doc)
piotr.silverbrahms@rudimathematici.com
Alice Riddlet (Treccia)
alice.riddle@rudimathematici.com

www.rudimathematici.com

RM 076 ha diffuso ***651*** copie e il **31 Maggio** alle **16:05** per Google eravamo in **692** pagine

In copertina, F. Morgan (papà americano di una ventina di Quick & Dirty) alle prese con le superfici minimali.

1. Tra Tatooine e Tebe

Si scatenino pure tutti i mali del mondo,
ma io voglio conoscere la mia origine
(Sofocle)

"Che la Forza sia con Voi".

L'augurio ve lo trasmettiamo volentieri, certi che siano davvero pochi coloro che non sono in grado di riconoscerlo e collocarne l'origine cinematografica. Non ci aspettiamo che la totalità dei lettori sappia snocciolare in un amen tutti i personaggi dei sei film che ormai costituiscono la saga di Guerre Stellari, ma siamo ragionevolmente certi che alla stragrande maggioranza sia capitato di vederne almeno un paio. Siamo soprattutto convinti che anche tra coloro che non hanno mai pagato un biglietto per vedere un duello a base di spade laser, siano pochissimi quelli che non riescono a riconoscere il mistico saluto dei Cavalieri Jedi.

Questa sensazione di conoscenza epidermica, questo "sentito dire" anche tra coloro che sono tutt'altro che entusiasti della narrazione filmica che la sottende, è forse l'indizio più eclatante della nascita d'una mitologia. Non che sia un evento così stupefacente, anzi: è abbastanza naturale che un patrimonio culturale condiviso da un gran numero di persone assurga quantomeno al rango di "conoscenza riflessa" anche tra le persone che non se ne interessano (e che magari vorrebbero continuare a farlo). Provate a chiedere a chiunque viva in Italia se conosce o non conosce gli arcani bisillabi Inter, Juve e Milan: se trovate qualcuno che risponde di no, o ha un'età inferiore ai quindici mesi oppure è uno spudorato bugiardo che tenta di farsi passare per un intellettuale snob. Però, quantomeno, il calcio è anche cronaca di reali eventi sportivi: non è una pura fantasia creativa. Il ciclo di Guerre Stellari è invece qualcosa di diverso: nasce come onesto prodotto commerciale dell'industria cinematografica americana una trentina d'anni fa, e poi si espande alimentandosi del mito che è riuscito a generare. Mettendo i sei film della saga uno dietro l'altro, si ottiene una narrazione che non supera le quindici ore di proiezione, ma che è comunque ben impressa nella testa di milioni di persone. Soprattutto, continua a generare storie: anche se il creatore, George Lucas, ha dichiarato che non ci saranno ulteriori episodi della saga di Star Wars oltre alle due trilogie già prodotte, il mondo è già da tempo fecondato dal proliferare di continuazioni della storia, dall'esplosione di spin-off, insomma da un fervore generale assai prossimo al culto religioso. Basta provare a cercare un po' tra gli affezionati entusiasti, e si scopre immediatamente una pletora di organizzazioni, convegni, mostre, associazioni. Soprattutto, si scopre che la "storia" narrata dai film è solo una piccola parte della storia già immaginata e pensata. Se siete tra coloro che ancora non sanno che Anakin Skywalker è il primo e vero nome di Lord Darth Vader, non avete speranza di capire quanto sia esteso il fenomeno. Ma anche se siete tra coloro che invece ben lo sanno, magari sarete ugualmente sorpresi dallo scoprire che esiste anche un personaggio a nome Anakin Solo, e già l'accoppiamento tra questo nome e questo cognome lascia prefigurare (quantomeno agli intenditori) eventi epocali della saga lucasiana[1], anche se non verranno mai filmati.

La nascita del mito, insomma. È proprio caratteristico del mito quello di generare storie e simboli, di avere molte versioni parallele, molti canali che giustificano, a priori o a posteriori, gli eventi topici dei protagonisti. Certo, quello di Star Wars è un mito neonato, che non ha ancora compiuto trent'anni, e che è arduo vaticinare se

[1] Ecco, ce l'abbiamo fatta. Era un mezzo impegno formale, quello di riuscire a scrivere l'aggettivo "lucasiana" in un articolo di una prestigiosa Rivista di Matematica senza che questo fosse riferito alla celeberrima cattedra di Cambridge che fu di Newton.

riuscirà a sopravvivere fino al secolo di vita, eppure la dinamica di propagazione sembra inequivocabilmente la stessa dei miti vecchi di millenni. E la popolarità di questa neonata leggenda si misura meglio sui "non iniziati", sulle conoscenze acquisite controvoglia, per osmosi forzata, piuttosto che tra gli iscritti all'Obi Wan Kenobi fan club. Una spada laser è uno stupendo ossimoro, non solo tecnologico, ma anche squisitamente logico, alla fin fine, eppure tutti ne conosciamo bene almeno l'aspetto, e siamo sicuri che al mondo ci sono persone informate persino delle caratteristiche (per quanto puramente immaginarie) più nascoste. Alla stessa maniera, di un mito vecchio di venticinque secoli si conoscono forse solo alcuni elementi fondamentali e null'altro, e questi elementi noti rimangono di solito slegati, congelati nel loro ruolo meramente simbolico, piuttosto che disporsi come anelli ben allineati in una cronologia narrativa.

Facciamo un rapido test di associazione di idee: senza pensarci troppo, pensate a cosa vi viene in mente quando leggete il nome "Edipo". Fatto? Bene: per evitare di soffocare sotto un mezzo migliaio di mail al fine di verificare scientificamente il risultato del sondaggio, agiamo col poco scientifico buon senso e proviamo ad immaginare i risultati. Questa rivista è frequentata da lettori assai dotti, quindi ci aspettiamo una percentuale non irrisoria di persone che ad Edipo associano direttamente il mito greco e le tragedie di Sofocle; estimatori che magari riuscirebbero senza neanche farsi un giro cautelativo su Google a raccontare tutta la vicenda, caratterizzando bene ogni personaggio, da Creonte a Labdaco, e inserendo magari le opportune divagazioni su Tiresia[2] e Antigone. Ci aspettiamo però anche un buon numero di lettori che onestamente associano innanzitutto Edipo alla Settimana Enigmistica: da mezzo secolo, quel mai troppo lodato giornale titola ogni settimana pagine come "L'Antologia di Edipo", "La Pagina della Sfinge", per non citare il leggendario "Edìpeo Enciclopedico"[3]. Edipo è il primo solutore di indovinelli, e tra i lettori di un giornale che propone domande e problemi come il nostro, ci stupiremmo assai se non trovassimo persone che sanno tracciare una linea diretta e sicura tra Edipo e Martin Gardner. E in fondo tutti conoscono la risposta esatta data da Edipo all'indovinello della Sfinge[4], anche se magari sotto sotto restano convinti che la sfinge in questione sia quella sdraiata all'ombra delle Piramidi, e non quella che tormentava Tebe e dintorni.

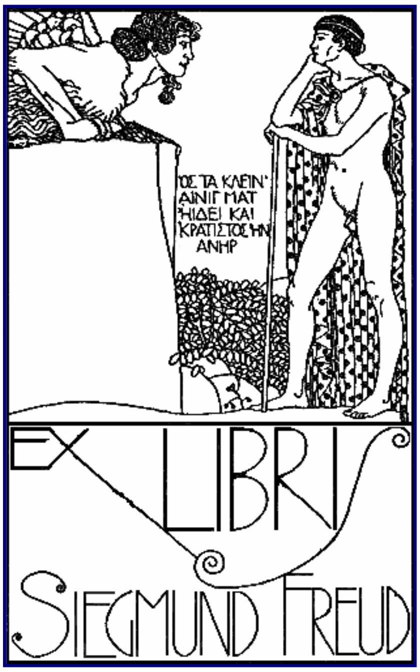
Una volta pagato il giusto tributo ai cultori dell'Enigmistica Classica, rimarremo con quella che crediamo essere la maggioranza assoluta dei votanti: Edipo richiama ineluttabilmente il suo complesso, la sindrome psicoanalitica che affligge quei

[2] Anche perché alcune divagazioni sono fondamentali, in questo ventunesimo secolo. Coloro che non conoscono la leggenda di Tiresia (che nacque maschio, diventò femmina, ritornò ancora maschio, e per questo fu interrogato da Zeus ed Era curiosi di sapere se fosse l'uomo o la donna a trarre più piacere dall'amore) rischiano di perdersi il senso di uno dei versi più belli della Pop Music inglese degli anni Settanta: *"Once a man, like the Sea I raged; once a woman, like the Earth I gave. And there is in fact more Earth than Sea"* (Genesis, LP "Selling England by the Pound", brano "The Cinema Show"). Sarebbe piaciuto anche a Sofocle.

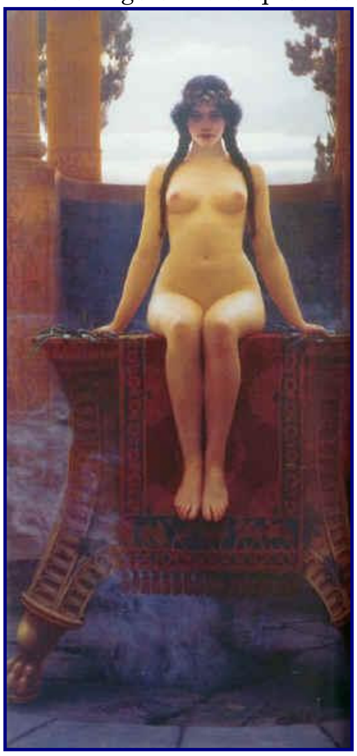
[3] … e qualcuno si lamenta che noi usiamo nomi strani per le nostre rubriche e i nostri giochi. Ogni tanto riceviamo lettere stupite del termine "allonimo", che pure i migliori dizionari riportano, ma siamo certi che nessuno si stupisce ormai di un termine come "Edìpeo", che certo mostra una capacità creativa di gran lunga superiore. Tutta colpa dell'uso e dell'abitudine: per controprova, si noti come "allonimo" suoni strano, pur essendo termine italiano dotato di limpida etimologia classica, mentre l'albionico "nickname", che tutti conoscono e accettano, è un barbarismo con un'etimologia spettacolarmente complessa. Ma di questa recente scoperta del GC parliamo in altra parte di RM, quindi soprassediamo.

[4] "Qual è l'animale che al mattino si muove su quattro gambe, durante il giorno su due e alla sera con tre, e che ha tanto maggior vigore quanto è minore il numero delle sue gambe?" – Riportiamo l'indovinello non nella speranza che qualcuno non lo conosca, quanto nella remota possibilità che qualcuno conosca l'indovinello senza sapere che si tratta del celebre quiz posto dalla Sfinge a Edipo.

maschietti[5] che desiderano la propria madre e per questo entrano in competizione con la figura paterna. È uno dei pilastri della teoria psicoanalitica, e questo ex-libris di Sigmund Freud rintracciato in rete è una buona dimostrazione di quanto il dottore viennese fosse colpito dall'edipica vicenda.



Vicenda che è criminale riassumere in poche righe, ma che sostanzialmente narra di Edipo, claudicante principe di Corinto, che nel fiore della giovinezza va a chiedere ragione di sé all'Oracolo di Delfi. La Pizia, suprema sacerdotessa, gli urla sdegnata il vaticinio infamante: è destinato ad uccidere suo padre e a giacere con la madre, una sorte abominevole tanto nella Grecia di Sofocle quanto nell'Europa del Duemila. Edipo rimane così sconvolto dalla profezia da decidere su due piedi di allontanarsi il più possibile dai suoi genitori, i monarchi di Corinto. In preda alla disperazione, vaga smarrito: è furioso e irritabile, litiga con un paio di viandanti arroganti e li fa fuori sulle vie della Beozia, arriva alla periferia di Tebe e scopre la città in subbuglio. Il re Laio è morto, la città quasi fuori controllo, e per di più un mostro tormenta i cittadini, assillandoli con indovinelli, sbranando coloro che non riescono a risolverli, e pretendendo giovinetti e giovinette in tributo. Edipo, con il peso della terribile profezia nel cuore, non teme di affrontare la terribile Sfinge e il suo quesito. Risponde esattamente all'indovinello, la Sfinge per l'onta si uccide, e i Tebani ne sono così contenti da supplicare Edipo di salire sul loro trono vacante. Il geniale vincitore della Sfinge ha però altro per la testa, e la generosa offerta non gli interessa proprio. Però, durante i festeggiamenti, ha occasione di vedere Giocasta, la regina vedova del defunto re Laio.



Vedova sì, ma pur sempre sui trentacinque, mica una novantenne; soprattutto, un vero schianto di donna. Edipo, con gli ormoni d'un giovane di neanche vent'anni, va letteralmente in visibilio, perde raziocinio e fermezza, e accetta il trono di Tebe solo per poter avere col trono anche la regina. Seguono quindici anni in cui Edipo si mostra re saggio e capace: Giocasta gli genera quattro figli di sangue reale, e non c'è in tutta l'Ellade uomo più felice di lui. Quando infine una feroce pestilenza comincia a devastare la città, non esita a farsi carico dei suoi doveri di monarca, e cerca una soluzione per mettere subito fine alla collera degli dei. Tiresia gli rivela in vaticinio che gli dei sono irritati perché l'assassinio di Laio è rimasto impunito, e subito Edipo, che neanche sapeva che il suo predecessore fosse

[5] Diciamo "maschietti" perché il complesso di Edipo, se coniugato al femminile, cambia anche di nome, e diventa il "complesso di Elettra". Di nuovo l'antica Grecia, ma se continuiamo a divagare parlando anche d'Elettra non riusciremo mai ad arrivare a parlare di matematica… Comunque, tanto per cambiare, Sofocle s'è occupato anche di lei.

stato ammazzato, diventa detective e giudice, per restituire il benessere alla sua patria: apre un simposio, a metà strada tra l'indagine e il processo. E qui le cose precipitano. In un susseguirsi di colpi di scena mai pienamente eguagliati dagli autori moderni, Sofocle fa passare ad Edipo momenti vieppiù drammatici, inframmezzati da apparenti buone notizie che invece si rivelano false o, peggio, tutt'altro che buone, fino a gettare il re di Tebe nella tragedia più pura. Tiresia racconta e vaticina, ricorda e profetizza: anni prima, Laio mandò a morire un suo figlio appena nato, perché l'oracolo gli aveva detto che sarebbe stato ucciso dalla prole di Giocasta. Il neonato ebbe i piedi trapassati dai chiodi e fu abbandonato alle belve. Ma si scopre poi che al vecchio re fu celato il fatto che il pastore incaricato dell'infanticidio non ebbe cuore d'abbandonare il piccino ai lupi, e lo condusse lontano, verso un destino ignoto. Mentre Giocasta abbassa gli occhi nel dolore del ricordo del suo primogenito, gli eventi continuano a farsi più cupi. Si scopre che fu nei pressi di Corinto che il bambino venne abbandonato. E proprio da Corinto giunge improvvisa la notizia che il vecchio re Polibo, il padre d'Edipo, è infine morto. La luttuosa notizia ha un risvolto rassicurante: Edipo è allora sfuggito al fato promessogli dall'immonda profezia! Ma non c'è di che gioire, perché in breve si comprende che non furono i regnanti di Corinto a generare Edipo: loro lo ebbero da un pastore che lo aveva trovato abbandonato. Tutto precipita: Edipo è zoppo, e la sua zoppia serve come crudele documento d'identità. Fu proprio il chiodo di Laio a trapassargli le caviglie, e ben si sa ormai che era Giocasta, la sua splendida moglie, la giovanissima regina allora derubata del suo primogenito. Non può esserci nulla di peggio, ogni dubbio è dissolto: Edipo era quel bimbo, e Giocasta, sua moglie, è indiscutibilmente anche sua madre. Ma forse sì, invece, forse può davvero esserci di peggio: lo stravolto Edipo fa ancora in tempo a scoprire che Laio è morto in viaggio, non distante da Delfi, ucciso col suo auriga da un viandante furibondo. Ed allora si rivede, furioso per il vaticinio dell'oracolo, mentre in uno scatto di rabbia uccide l'arroganza travestita da viaggiatori sulla via del tempio della Pizia. Giudice e detective prima; adesso ancora giudice, imputato, colpevole. E, inevitabilmente, boia. Mentre Giocasta si impicca per la vergogna, Edipo si acceca con le sue stesse mani. Finirà i suoi giorni mendicando, cieco e zoppo, appoggiandosi nei suoi ultimi giorni sulla spalla di Antigone, sua figlia e sorella.

Nell'economia della storia, l'episodio della Sfinge e del celeberrimo quesito è tutto sommato relegabile al rango di geniale trovata, ma decisamente non indispensabile. Edipo poteva far fuori il mostro in molti modi, anche se va reso merito a Sofocle e ai Greci antichi che spesso decidevano di esaltare le doti dell'intelligenza a scapito di quelle della forza bruta. È invece assai più fondamentale tutto il meccanismo scatenato dal rapporto incestuoso con Giocasta e da quello competitivo con Laio, e in questo senso non si può dire che la celebre interpretazione di Freud sia campata in aria. Il racconto crolla se si elimina la perversa catena di eventi che sono centrati sul talamo regale di Giocasta: eppure, per quanto quest'aspetto sia fondamentale, continua a non sembrare il solo ad esserlo, e forse neppure neanche il principale. Specialmente agli occhi di un antico pubblico ateniese, la tragicità di Edipo sembra trascendere il puro peccato carnale materno e l'omicidio paterno: la tragicità assoluta è altrove, nella storia d'Edipo. Non è un elemento della trama, ma è proprio l'ineluttabilità della trama stessa.

Per quanto andare alla ricerca di parallelismi e coincidenze non sia mai un'attività troppo difficile, come ben sanno tutti gli esegeti delle Centurie di Nostradamus, si vede subito che cercare influenze di Sofocle in Lucas è davvero troppo facile. I primi due film e buona parte del terzo[6] vertono quasi esclusivamente sullo scontro mortale

[6] Forse è bene ricordare agli ignari che la prima trilogia di Lucas ("Guerre Stellari/Una Nuova Speranza", "L'Impero Colpisce Ancora" e "Il Ritorno dello Jedi") contiene quelli che cronologicamente sono gli episodi

tra l'eroe biondo e vestito di bianco (Luke Skywalker) e il cattivissimo e nerissimo antagonista (Darth Vader), e sulla ferale notizia che questi altri non è che il papà[7] del biondo eroe. Non essendoci ancora traccia di una madre atta alla bisogna (morirà nella precedente trilogia[8]), il massimo dell'incesto che viene fornito è un blando malinteso suggerito in maniera non esplicita agli spettatori, che tendono a immaginare un flirt tra Luke Skywalker e la Principessa Leia Organa, finché non scopriranno (in un episodio successivo) che sono invece fratello e sorella, anzi, addirittura gemelli. Le cose si complicano nella trilogia[9] che narra degli episodi I, II e III. Darth Vader, il gran cattivo, alla fine del VI episodio, era tornato buon padre e valorosissimo Cavaliere Jedi, morendo durante la sua eroica riabilitazione. La seconda trilogia retroattiva doveva quindi vederlo come assoluto protagonista, tanto è vero che il primo episodio ce lo presenta ancora decenne tra le sabbie del pianeta natio, Tatooine.

Anche qui gli "edipi" freudiani si sprecano, anche se sono decisamente meno elementari. Il giovane Anakin Skywalker, prima di diventare Darth Vader, è un geniale bimbo senza padre e legatissimo alla madre. Ha solo una decina d'anni quando incontra Padmè Amidala, una principessa ben più vecchia di lui (a dire il vero, ha solo cinque o sei anni di più, ma la distanza tra i dieci di Anakin e i sedici di Padmè risalta ben di più di quella tra i venti di Edipo e i trentacinque di Giocasta), ma Anakin Skywalker è un ragazzino precoce, e cade di fatto sostanzialmente innamorato fin dal primo sguardo. Qui Lucas è bravo a mescolare le scene del puro amore filiale verso la vera madre e quello eroticamente prematuro verso Padmè: in realtà è aiutato dal fatto che le donne umane su Tatooine si vestono più o meno tutte alla stessa maniera, e lo spettatore disattento riesce a confondersi facilmente.

Occorre aspettare che il troppo piccolo Anakin cresca (detto in termini tecnici, cinematografici e commerciali, dobbiamo aspettare il film successivo), ma in un modo o nell'altro, il ragazzino riesce nel corso della trilogia a diventare il cattivissimo e nero Darth Vader (per non smentire Sofocle, il momento topico del passaggio al "Lato Oscuro" della Forza è causato dalla sete di vendetta sugli assassini della madre), a mettere incinta Padmè dei protagonisti della trilogia successiva, e perfino a causare di fatto la morte della moglie in un momento di furibonda disattenzione. Vista la configurazione orientata un po' troppo sul lato materno della trilogia (ma doveva forse compensare quello eccessivamente paterno della precedente) l'azione maschia è traslata nei duelli con spade laser tra maestri e

IV, V e VI della saga. La seconda trilogia ("la Minaccia Fantasma", "L'Attacco dei Cloni" e "La Vendetta dei Sith"), pur se filmata molti anni dopo, tratta invece degli episodi I, II e III. Parlando dei "primi due film" si intendono gli episodi IV e V.

[7] Il battage pubblicitario riuscì a tenere sulla corda milioni di appassionati, per quanto la terribile scoperta d'una stretta parentela tra l'eroe e l'antieroe dovesse risultare abbastanza scontata almeno per gli spettatori di madrelingua inglese, visto che l'interpretazione del nome "Darth Vader" come maschera di "Dark Father" è davvero elementare. Perché poi in Italia il "Vader" sia stato trasformato in "Fener", invece, non lo sappiamo.

[8] Ci rendiamo conto della sintassi stiracchiata della frase, ma non è mica facile spiegare che solo in futuro (tempo del cinema/laboratorio) ci verrà spiegato cosa è accaduto in passato (tempo del film/baricentro).

[9] Dimenticavamo: non è solo Lucas ad essere affezionato alle trilogie. L' "Edipo Re" di Sofocle è anch'esso solo un episodio d'una trilogia che comprende anche "Edipo a Colono" e "Antigone".

discepoli, che sono pur sempre legati da un rapporto padre/figlio almeno dal punto di vista professionale.

Questa è certamente una maniera un po' troppo parziale, riduttiva ed esasperata di leggere la doppia trilogia di Star Wars. Certo è però che quando si scopre che un personaggio minore, l'unico Cavaliere Jedi femmina con un ruolo di rilievo (principessa Leia esclusa, che però è tale soprattutto per diritto di nascita), ovvero l'anziana guardiana dell'Archivio del Tempio (che, insomma, è un po' la mamma virtuale di tutti i Cavalieri Jedi) si chiama Jocasta Nu, allora si tende a pensare che sia Lucas a prendere in giro noi, e non viceversa.

La cosa più sorprendente, però, è che esiste un altro parallelo più curioso, e questo certamente casuale. Con buona pace di Sigmund Freud, è assai probabile che la lettura più diretta che Sofocle voleva dare al mito di Edipo riguardasse non l'inconscio desiderio di possedere la genitrice e di uccidere il genitore, ma più semplicemente il trionfo spietato e assoluto del Fato, che era il vero e profondo aspetto religioso dell'epoca. I Greci antichi usavano i loro dei per rappresentare i vizi e le virtù degli uomini, in fondo: concedevano loro l'immortalità e qualche superpotere, innalzavano in loro onore templi bellissimi, ma non li ponevano, in ultima analisi, su un piano troppo diverso da quello dei mortali. Il Fato, invece, il Destino era davvero qualcosa di supremamente diverso. Ed Edipo, marchiato dall'oracolo di Delfi, non può far altro che coprirsi di colpa e di infamia, perché quello è il suo destino immutabile. Sofocle e la mitologia disegnano un Edipo in fondo giusto e saggio, timoroso delle leggi e degli dei, coraggioso e intelligente, ma che non può comunque, in nessuna maniera, sfuggire ai disegni del Fato[10] che lo vuole marchiare d'infamia. Con tutto il rispetto possibile per il regista americano, sarebbe stato davvero difficile per Lucas riuscire a ricreare una simile drammaticità dell'Ineluttabile, eppure riesce a darne una blanda (molto blanda, a dire il vero) sensazione, a causa della diacronia tecnica delle due trilogie di Guerre Stellari. Il terzo episodio della saga arriva nelle sale cinematografiche ventotto anni dopo il quarto, e gli spettatori che pagano il biglietto si aspettano certo di vedere nuovi duelli con spade laser, nuovi mondi in pericolo e migliaia di soldati imperiali fatti a fette, ma si aspettano anche e soprattutto che la trama si chiuda, riagganciandosi alla trilogia precedente/successiva. Sanno che Anakin Skywalker deve diventare Darth Vader, sanno che devono nascere Luke e Leia, e buona parte della loro attenzione è concentrata non su "cosa accadrà", ma su "come accadrà". E la sensazione dello spettatore ateniese di Sofocle è probabilmente la stessa, fin da quando sente la Pizia profetizzare il disgraziato futuro di Edipo.

Sono i Greci di trenta secoli fa che hanno fecondato l'Occidente col senso del Destino, senso che è ancora così fortemente diffuso e possente ai giorni nostri. E questo perché, una volta pagato lo scotto di sentirsi un po' prigionieri e impotenti, il potere del Destino offre un alibi sempre pronto e comodo per consolarci delle sconfitte. "Era destino, se non siamo riusciti…"; "Era scritto, che finisse così…". C'è sempre un Disegno, pronto ad un tempo ad imprigionarci e consolarci; e questo anche a dispetto di uomini come Edipo, che invece sono disposti a sfidare il Destino e sono pronti a pagare con la suprema infelicità, pur di conoscere il conoscibile. Perché è vero che la scienza, figlia della curiosità di Edipo e degli uomini come lui, ha dovuto e deve ancora lottare contro il fatalismo: in parte perché, una volta che si accetti l'idea della

[10] È affascinante leggere su questo tema il racconto "La Morte della Pizia" di Friedrich Dürrenmatt, dove lo scrittore svizzero espande la trama più volte, introducendo varianti nella trama classica e facendo generare Edipo da personaggi diversi della storia, che finiscono comunque a letto con lui se sono femmine/madri e uccisi da lui se sono maschi/padri. Si trova edito da Adelphi ad Euro 5,50, ma se foste costretti a trovarlo solo all'interno del volume Einaudi-Gallimard della Biblioteca della Pléiade che contiene tutti i romanzi e racconti di Dürrenmatt, compratelo lo stesso. Costa un vero sproposito, ma vale la spesa.

predestinazione totale di ogni cosa, si riduce la ricerca delle ragioni del mondo a pura perdita di tempo. Ma soprattutto perché il Destino invincibile deve rimanere per forza sconosciuto e inconoscibile, pena la perdita della sua stessa essenza.

Il rapporto tra Fato e Scienza sembra essere per questo quasi sempre conflittuale. Di fronte alla misteriosa complessità del mondo gli atteggiamenti possibili non sembrano essere altri che due: o l'accettazione del mistero, e con essa anche un po' l'alibi che concede la convinzione della non conoscibilità piena dell'Universo, o il tentativo umano dell'indagine. È ben difficile che possa essere un caso che molte religioni e mitologie mettano degli sbarramenti simbolici e profondi alla possibilità umana di conoscere: più esplicito di quello di Edipo c'è a questo proposito il mito di Prometeo, per non parlare della strana ambivalenza del biblico episodio dell'Albero della Conoscenza nell'Eden, che in un colpo solo sembra ammonire gli uomini, esortandoli ad un tempo a non conoscere quel che non gli è dato conoscere (perché riservato alla sola divinità), e a non praticare la "conoscenza" carnale. Una sintesi mirabile e ardita: non fosse che si è abituati fin da piccoli a conoscere la storia di Adamo ed Eva, si rimarrebbe molto stupiti dall'economia che sottende: una sola narrazione veicola due tra i più significativi divieti etici e religiosi della cristianità. In parte, la costrizione fatalista alla "non conoscenza" può discendere da banali questioni di concorrenza: in fondo, sia la mitologia che le religioni hanno anche, tra gli altri, il compito di "spiegare" la filosofia naturale, spiegare perché il mondo è fatto come è fatto. Dal luccicare delle stelle nel cielo notturno alla magia d'una ragnatela, tutti i grandi sistemi mitologici e religiosi hanno una spiegazione, sia esso leggendario come il mito di Aracne o mistico come il volteggiare dei serafini che spingono le sfere celesti; quando l'indagine dell'uomo scopre ragioni e cause meno fantasiose, e per questo dotate di una maggiore evidenza e credibilità, il conflitto diventa inevitabile.

Ma non è una battaglia facile, e a tutt'oggi ha un esito tutt'altro che scontato. Le glorie meccanicistiche dell'Epoca dei Lumi hanno esaurito la loro spinta entusiasta e propulsiva, e la fine dell'Ottocento resta il periodo di maggior fiducia nelle bianche armate dei Cavalieri Jedi della conoscenza umana. Il Lato Oscuro del Fato è pronto a colpire ancora.

Una lettura "fatalista" della Storia delle Scienze mostra in effetti degli aspetti preoccupanti, scatenati in quel periodo: le due punte di diamante della conoscenza scientifica, la Matematica e la Fisica, erano entrambe all'acme della gloria. Dal momento in cui con Galileo e Newton strinsero una sorta di alleanza nel tentativo di leggere e capire l'intero Universo, furono raggiunti incredibili traguardi, e l'universo meccanico e pienamente conoscibile sembrava davvero a portata di mano, come dimostra la sicurezza di Laplace e dei suoi colleghi. Però, forse proprio per la loro caratteristica di costituire l'avanguardia della conoscenza scientifica, le due scienze per prime hanno conosciuto delle crisi inquietanti. La matematica, pur mirando soprattutto alla conoscenza delle relazioni tra gli enti e pur decisa a trascurare la domanda sulla "realtà" degli enti che tratta, si è comunque scoperta incompleta. Peggio, si è scoperta "strutturalmente" incompleta: e, a ben vedere, ancora prima dell'arrivo di Godel, si erano già avuti sentori di come il magico strumento dell'Analisi si rivelasse troppo spesso inapplicabile in problemi complessi, se bastavano tre soli corpi interagenti a sfuggire ad una analisi puramente meccanica. Così la scienza serva e padrona di tutte le scienze è costretta a cambiare e a mutare, e si trova sempre più distante dall'idea che della matematica hanno i non addetti ai lavori. È in corso una rifondazione continua, e i matematici sono i primi a sorridere quando sentono usare la frase "matematicamente esatto" come sinonimo di verità totale e assoluta. La forza principale della scienza esatta per eccellenza sta tutta nella sua attenta analisi e precisa conoscenza dei limiti della sua apparentemente scontata "esattezza". I fisici, dal canto loro, hanno raggiunto una visione degli oggetti che costituiscono il mondo ben lontana da quella che poteva essere l'idea di Newton, e forse anche da quella di Einstein. Fin dagli albori della loro scienza sono stati ben disposti a "togliere il superfluo", pur di comprendere l'essenza degli eventi: hanno trattato oggetti complessi come punti materiali, ridotto i movimenti complessi a serie di spostamenti piccolissimi e virtuali, sono stati attentissimi ad eliminare gli eventi non significativi dal cuore del problema in esame. Ciononostante, mentre i filosofi ancora oggi pensano di poter riferirsi ad oggetti elementari come "un bicchiere d'acqua" con la convinzione di poterlo capire, contenere, possedere come idea, usare come base per una discussione ontologica, i fisici rimangono con la perfetta conoscenza dei limiti di tale definizione. Quel bicchiere pieno d'acqua è una nuvola solo parzialmente stabile fatta da atomi e molecole, e tra le superfici aria-vetro, aria-acqua e vetro-acqua c'è una continuo e incommensurabile interscambio di atomi e particelle, e quanto sembra a prima vista tangibile e definito, non lo è affatto. E le cose peggiorano andando ad osservare le cose più in profondità, perché lo studio dei movimenti e delle forze, quella cinematica e dinamica che tanta gloria portarono ai fisici del Settecento, può essere affrontata solo con strumenti statistici. E non solo per l'immane numero di oggetti che occorrerebbe misurare e controllare, ma anche stavolta per questioni strutturali, basilari, gnoseologiche. Heisenberg e il suo principio di indeterminazione stabiliscono un altro limite fatale all'esplorazione, e i fisici imparano a ridefinire la fisica e il modo di farla.

Le altre scienze sembrano ancora lontane dallo scontro con il Lato Oscuro del Destino, quello che sembra ergere barriere impenetrabili contro la ricerca, ma tutte le scienze, alla fine, dovranno fare i conti con gli oggetti più elementari e con le leggi del pensiero, e l'incontro fatale sembra essere solo rinviato.

Per fortuna, i matematici e i fisici non credono quasi mai al Destino, e continuano a cercare senza lasciarsi troppo spaventare dagli attacchi del Lato Oscuro della Forza. Continuano ad indagare tra i grandi misteri della logica e della natura, e non si lasciano terrorizzare dalle difficoltà. Come Edipo, vogliono sapere, costi quel che costi: e non sono solo i grandi geni a voler domare i grandi misteri, ma interi eserciti di ricercatori, che provano con impegno anche solo a scalfire il granito dell'ignoto. Sono loro, probabilmente, la vera forza motrice della conoscenza scientifica, più ancora dei singoli geni che firmano le grandi scoperte scientifiche.

Uno di questi era probabilmente Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, che nacque il sei Giugno 1857 a Yaroslavl, nella Russia degli Zar. Il suo nome non è certo il primo che viene in mente quando si passano in rassegna le maggiori menti matematiche della storia, ma ben rappresenta i molti studiosi che non temono di affrontare problemi complessi, armati solo di intelligenza e pazienza. Nato in una famiglia borghese, figlio di un astronomo e con un paio di fratelli che si fecero onore nei propri campi (Sergei Lyapunov fu uno stimato musicista, e Boris un membro dell'Accademia Sovietica delle Scienze in qualità di linguista), ebbe una formazione basata soprattutto su lezioni private: prima da parte di suo padre, che teneva lezione ai tre figli con l'aiuto di mappe del mondo e di una vastissima biblioteca piena di volumi in molte lingue; poi da parte di suo zio, Rafail M. Sechenov, fratello di un famoso filosofo, Ivan, e padre di Natalia, che a quel tempo era solo sua cugina e compagna di lezioni, ma che in seguito diventerà l'amatissima moglie di Aleksandr.

Nel 1870 fa il suo ingresso nel Ginnasio di Gorky[11], dove si era trasferito dopo la morte del padre. Per quanto destinato a restare nella storia della matematica, a Lyapunov fu negata la soddisfazione di essere il migliore in matematica della sua scuola; uno dei suoi compagni era Markov. Divennero amici e entrambi entrarono all'università di San Pietroburgo: qui Lyapunov iniziò a frequentare le lezioni di Chimica tenute da un certo Mendeleev. Le lezioni di chimica di quel docente gli sembrarono interessanti, e continuò a frequentare fino alla fine quel corso, ma nel giro di un mese decise che era però meglio orientare i suoi studi alla matematica e fisica, e cambiò in tal senso la facoltà universitaria. Qui rincontrò Markov e con lui seguì le lezioni di Chebyshev: e fu proprio quest'ultimo ad indirizzare Lyapunov sui campi di ricerca che lo tennero impegnato per tutta la vita. Si interessò innanzitutto di Idrostatica, e più precisamente del problema della stabilità delle forme ellittiche nell'equilibrio di un fluido turbolento. I due suoi primi lavori convergono sempre su tematiche che coinvolgono concetti ostici come l'equilibrio e la stabilità, ovvero le situazioni limite, le ultime ancora leggibili prima dell'avvento del Caos. Non è studio facile: gli fu poi proposto di applicare le sue conoscenze al problema della determinazione delle forme dei corpi celesti, e questo accadde su consiglio proprio di Chebyshev, al quale il problema era stato inizialmente offerto e della difficoltà del quale il grande matematico russo era ben conscio.

Forte dei successi ottenuti, conquistò una cattedra all'università, dove, per quanto ancor giovane, tenne delle memorabili lezioni nei campi più svariati: Meccanica Teorica, Integrazione delle Equazioni Differenziali, Teoria della Probabilità, Meccanica Analitica. Era difficile per un professore giovane guadagnarsi il rispetto degli studenti, a quei tempi, ma Lyapunov ci riuscì facilmente, e c'è ancora un po' di rimpianto a San Pietroburgo per il fatto che di quelle lezioni non sia rimasto alcun testo.

La sua carriera continuò, e il problema della Stabilità del Moto rimase per lungo tempo il suo principale campo di ricerca. Stabilisce e inventa innumerevoli metodi di approssimazione numerica, che ancora oggi sono chiamati "Metodi di Lyapunov", ed elaborò quella che ora è la teoria rigorosa moderna sulla stabilità dei sistemi[12]. Nei ritagli di tempo, dimostrò in maniera nuova e originale il teorema del Limite Centrale con metodi che sono tuttora considerati fondamentali nella Teoria delle Probabilità.

Va dato atto alla nostrana Accademia dei Lincei di aver capito per tempo l'importanza dei lavori di Lyapunov, che sembrano tutti orientati all'indagine dei grandi mostri del disordine, e infatti risultano preziosi a tutti gli studiosi moderni della Teoria del Caos. Ma Lyapunov era forse meno pronto ad affrontare il caos dei difficili tempi storici che gli toccava di vivere. Il suo importante lavoro sui corpi celesti lo rese ulteriormente famoso, partecipò con successo al Quarto Congresso di Matematica di Roma nel 1908, ma il destino era in agguato. Nel 1917 decise di trasferirsi ad Odessa, dal fratello Boris: il clima della Rivoluzione d'Ottobre probabilmente accelerò la sua ansia nei confronti della vita, che però era già elevata a causa di eventi più personali. Stava diventando, come un Edipo minore, parzialmente cieco: sua moglie, Nataliya Rafailovna Sechenov (che in fondo rimarca di nuovo una sorta di piccola edipicità nell'essergli anche cugina), sta per morire, e Aleksandr non è in grado di sostenere anche questo colpo del Destino. Quando, il 31

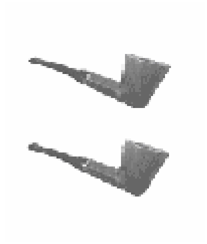
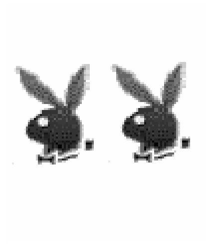
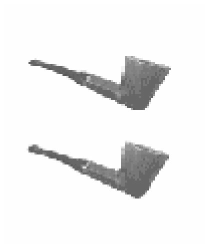
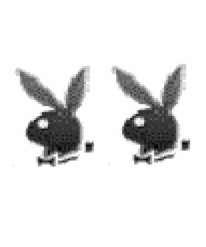
[11] La città di Gorky, così frequentemente raccontata nei romanzi dei grandi scrittori russi, è un'altra di quelle città che oggi è complicato ritrovare sugli atlanti: si tratta di Nizhni Novgorod. Che ci crediate o no, RM arriva anche lì: ciao, Nikolaj!

[12] … e possiamo concederci il lusso di non entrare in ulteriori dettagli, visto che per una volta RM ha deciso di utilizzare le proprie risorse in maniera sinergica. Fate un salto a leggere il PM, se siete più curiosi sui metodi di Lyapunov.

Ottobre 1917, Nataliya muore, Aleksandr si spara un colpo di rivoltella alla tempia: morirà tre giorni dopo.

Un'immagine frequente dei problemi complessi e non predicibili è quella meteorologica del battito d'ali della farfalla a Pechino che causa l'uragano in Florida. Una quantità enorme dei problemi attualmente sul tavolo degli scienziati ha complessità di questo ordine e grado. È davvero facile scoraggiarsi, sentirsi disarmati, di fronte a tali complessità: eppure, nei laboratori e negli studi universitari, c'è sempre qualcuno che non si lascia spaventare dalle parole della Pizia, qualcuno che, come Lyapunov, prende penna e carta e comincia a ragionare: "...essendo la superficie alare in una farfalla media pari a ..."

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Braccia sottratte all'agricoltura			
Cucchiaio di legno!			

2.1 Braccia sottratte all'agricoltura

Come vi abbiamo raccontato l'altra volta, le vacanze di Pasqua le abbiamo trascorse al Paesello (Luogo da Cui), in sane e rinfrancanti attività bucoliche, o quasi. C'era un tempo a metà tra il fetente e il disgustoso, e quindi la tendenza era piuttosto *indoor* (la porta del fienile funziona benissimo, nonostante l'abbia montata io), ma la tendenza a lavorare poco delle due Pesti riesce ad estrinsecarsi anche a livello teorico.

Questa volta, si trattava di pianificare la divisione del prato di fianco a casa; un prato triangolare rettangolo, con cateti ***300*** e ***400*** metri; si tratta di piantare una siepe rettilinea che divida il prato in due zone di ugual area. È evidente che abbiamo intenzione, tra tutti e tre, di lavorare il meno possibile, e quindi siamo interessati alla siepe *più corta* che svolga questo compito; ora, siccome vorremmo anche fare pochi conti, ci date una mano?

> *Mentre scrivevo, mi sono venute in mente un paio di estensioni che potreste essere interessati ad esaminare; vale sempre il solito caveat che, per queste parti, la soluzione non l'abbiamo ancora trovata, quindi attenti.*

...e se non vi avessi detto che la siepe era dritta?

...e se il triangolo fosse stato generico, con lati a, b, c?

2.2 Cucchiaio di legno!

Mi riferisco al "Torneo delle 6 Nazioni", di rugby. Avendo perso tutte le partite, l'Italia ha vinto questo scarsamente invidiabile trofeo; l'unica consolazione è stata che il Galles (dove ho alcuni amici e il cui simbolo è il *daffodil*, che riporta me e mia moglie ad alcuni sentimentali ricordi di gioventù) ha imbroccato finalmente il "Grande Slam", vincendo tutte le partite (trent'anni, che non ce la faceva!). Ferma restando la citazione d'obbligo di Oscar Wilde[13], mi ha stupito la possibilità di sviluppare un interessante problema relativamente al gioco.

[13] "Il rugby è un ottimo metodo per tenere una ventina di energumeni lontano dal Centro"

Dopo che siete riusciti a trascinare voi stessi, l'ovale e qualche quintale di avversari oltre la linea di meta (se sopravvissuti) si tratta di effettuare la "trasformazione", ossia di tirare un calcio al pallone da posizione prefissata e farlo passare tra i due pali della porta, sopra l'asta orizzontale; la "posizione prefissata" è definita in un modo piuttosto balordo, dovendosi trovare a ***50*** piedi dall'asse centrale della porta; la quale porta ha l'asta orizzontale a ***10*** piedi di altezza e una larghezza di ***18.5*** piedi.

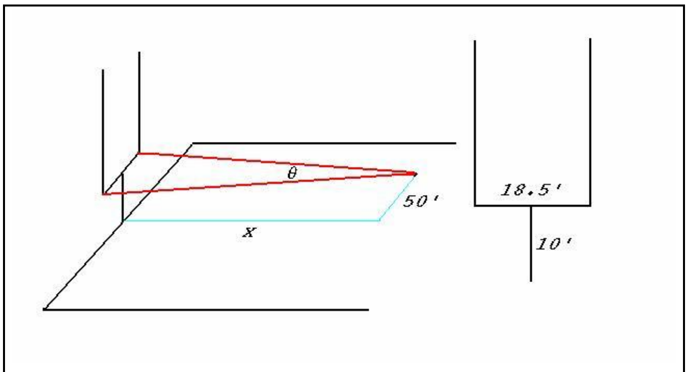


Figura 1 - La porta del rugby

Un disegno, come al solito, probabilmente rende tutto più chiaro. A che distanza x l'angolo sotto cui sottendete la porta è massimo?

3. E questo, dove lo metto?

Allora, cerchiamo di spiegarci.

È un problema "aperto", nel senso che dovete trovare una strategia; quindi, sarebbe perfetto come Summer Contest.

Solo che si possono fare sopra un mucchio di arzigogoli complicati, e quindi sarebbe perfetto come Paraphernalia Mathematica.

Solo che vi fará sudare, e quindi sarebbe perfetto come Problema.

Solo che è difficile, e quindi sarebbe perfetto come Bungee Jumpers.

Da cui, il titolo: l'unico posto dove non possiamo metterlo è come Compleanno o come Quick&Dirty, anche se Doc sarebbe capacissimo di cavarci un matematico da festeggiare e Rudy sarebbe pronto a sostenere che "Ci vuole un attimo, chiaro".

Facciamo così: noi lo posiamo qua, chi vuole prenderlo lo prenda, chi trova qualcosa mandi che mettiamo nelle soluzioni, poi verso ottobre magari ci scappa un PM.

> *Una singola lampadina illumina la stanza; cento persone vestite da carcerato, appena sbarcate in questo nuovo carcere, guardano il sorvegliante con aria perplessa.*
>
> "Siete i primi e sarete gli ultimi ospiti di questo accogliente carcere. Tra un'ora, sarete portati ognuno nella propria cella, dalla quale non potrete comunicare con nessun altro dei vostri colleghi; peró, a partire da domani una volta al giorno, io sceglieró a caso uno di voi e lo porteró in questa stanza a divertirsi; potrá gioire dello scoprire se la lampadina è accesa o spenta e, se vorrà, potrà spegnerla o accenderla con quel meraviglioso interruttore."
>
> *Un mormorio percorre la sala, alla prospettiva di questo emozionante divertimento...*
>
> "Se, ad un certo punto, uno qualsiasi di voi quando viene portato a questa stanza è convinto che tutti e cento siate stati portati qui almeno una volta, basta che me lo dica; se ha ragione, tutti voi sarete liberi. Ma, se sbaglia... Piú niente lampadine, piú niente interruttori, piú niente chiavi delle celle, piú niente di niente, neanche pranzi e cene.
>
> *Insomma, non vi conviene sbagliare... Avete un'ora di tempo per decidere una strategia, a meno che preferiate giocare con l'interruttore per l'eternità...*

Ecco, quello che vorremmo sapere è:

1. Esiste una strategia?
2. Se sì, qual'è il numero atteso[14] di giorni che dovete passare in carcere?
3. Esiste una strategia migliore? (goto 2)

Tutto questo lo abbiamo trovato su un articolo che probabilmente qualcuno di voi conosce (quantomeno chi ce lo ha mandato, che ringraziamo); siccome il PM sará sostanzialmente una traduzione di questo articolo, riconosceremo là agli autori la paternitá di tutto ció; sino ad allora, peró, non sbirciate!

Buone vacanze.

4. Bungee Jumpers

Provare che, per qualsiasi valore di n, è valida la:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}<1+\frac{3}{4}$$

In realtà la somma è sempre minore di $\frac{\pi^2}{6}$*, ma ci accontenteremo di avvicinarci a questo valore.*

La soluzione, a "Pagina 46"

5. Soluzioni e Note

E siamo arrivati anche a giugno, chiudendo così la stagione dei festeggiamenti in Redazione: a gennaio facciamo festa perché abbiamo cominciato un nuovo anno, a febbraio compie gli anni RM, a marzo il Capo, ad aprile Alice e a maggio il nostro Postino tuttofare; a giugno dichiariamo l'inizio delle vacanze estive, per essere sicuri di avere sempre qualcosa da festeggiare, con un qualcosa che somiglia ad un Summer Contest (il *"Dove lo metto?"*).

Questa volta non ci dilunghiamo molto in pettegolezzi, perché in realtà ce ne sono arrivati ben pochi: quasi tutti ci mandano dei problemi, e noi, che di grattacapi ne abbiamo già da vendere, ve ne giriamo almeno uno, che ci è sembrato interessantissimo, proposto da ***Alessandro***:

> PROBLEMA
> Se n e k sono due numeri interi positivi; tra 0 (incluso) e 10^n (escluso), quanti sono i numeri con la somma delle cifre uguale a k?
> L'ho risolto in parte, trovando una soluzione parziale, valida solo per k<100, eccola:
> SOLUZIONE:
> Per k<10:
>
> $$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$
>
> Per $k\geq 10$ e k<20
>
> $$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}-n\frac{(k+n-11)!}{(k-10)!(n-1)!}$$
>
> ed in generale, se m<10.
> Per $k\geq 10m$ e $k<10(m+1)$

[14] Inteso come valore probabilistico, essendo la scelta del guardiano pienamente casuale.

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{(k+n-1-10*i)!}{(k-10*i)!(n-1)!}*\frac{(i+n-1)!}{i!(n-1)!}\right)$$

Generalizzando il problema:
Se n e k sono due numeri interi positivi e b è un numero intero positivo maggiore di 1; tra 0 e b^n, quanti sono i numeri con la somma delle cifre uguale a k (in base b)?
Si ha la Soluzione:
Per $k<b$:

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}$$

Per $k\geq b$ e $k<2b$

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}-n\frac{(k+n-b-1)!}{(k-b)!(n-1)!}$$

ed in generale, se $m<b$.
Per $k\geq m\cdot b$ e $k<(m+1)b$

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!}-\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{(k+n-1-b*i)!}{(k-b*i)!(n-1)!}*\frac{(i+n-1)!}{i!(n-1)!}\right)$$

(Soluzione valida solo per $k<b^2$)
L'unica soluzione completa la trovo per $b=2$.
Se $b=2$, siccome siamo in base 2, allora la soluzione è il binomio di Newton:

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

con $k\leq n$ (ovviamente!)
DOMANDA:
Ti pongo quindi la seguente domanda: tu o qualcun altro della redazione di Rudi Matematici, sapreste trovare una soluzione completa per b qualsiasi o perlomeno per $b=10$?
Siccome io mi sono arenato sulla soluzione parziale che ti ho descritto; se riuscite a trovare la soluzione completa, me la fareste conoscere?

Naturalmente noi in Redazione ci abbiamo giocato, ma come dice giustamente il nostro Postino, i migliori solutori RM li ha tra i lettori, per cui vi lasciamo lavorare.

Spesso ci viene richiesta qualche spiegazione sul perché dell'originale scelta della parola "allonimo" per indicare i nomi di battaglia nostri e dei nostri lettori, e recentemente il Grande Capo ha deciso di aggiornarci su una delle più note alternative: "nickname":

> (...) "allonimo" ha un'etimologia più semplice di "nickname"; infatti, quest'ultimo non deriva da un qualche diavolo[15] di "Nicholas" che si faceva chiamare Nick, ma da "an ekename", dove "eke" ha il valore di "aggiuntivo, sovrabbondante, ulteriore". Sono riuscito a tirare in ballo anche la Tavola Periodica degli Elementi (o almeno un aneddoto su Mendelejev): quando M. faceva il prof di chimica, preparando le lezioni sugli elementi, aveva scritto le caratteristiche principali di ognuno su dei fogli e cercava di raggrupparli per dare una struttura alle lezioni; accortosi che molti erano "simili" e con pesi (OK, densità o quel che vi pare...) che seguivano una regola, ha inventato la Tavola. E cosa c'entra? C'entra, perché non tutti gli

[15] "Nick", in inglese, è il diavolo.

elementi stabili all'epoca erano noti; ad esempio, sotto il Silicio (Germanio) c'era un buco. M. ne ha previsto le caratteristiche chimiche (simili al Silicio) e, dovendo dargli un nome, l'ha chiamato "eka-Silicio", in cui la radice è la stessa di "ekename".

Tra le altre cose, è arrivata in Redazione una nuova espansione dell'ormai famosissimo "Tra dadi duri", pezzo di gran successo nel nostro Bookshelf, da parte di ***Alessandro***. Per motivi strettamente pratici rimandiamo la pubblicazione ad un altro numero, ma siamo decisi a pubblicare anche questo contributo. E adesso basta ciance, che la parte risolutiva è enorme! Al mese prossimo.

5.1 [75]

5.1.1 Mens sana in corpore sano

Ancora? Sì, proprio così, a numero già chiuso ci è arrivata la soluzione di ***BR1***, che ci è piaciuta moltissimo e vogliamo condividere con voi. A lui la parola:

Signori, ritengo che lo sgradevole episodio che mi è capitato qualche giorno fa sia avvenuto per causa vostra, per cui devo preavvertirvi che presto avrete notizie dai miei avvocati, già da me incaricati di richiedere un indennizzo di 10! €[16].

Vengo alla questione; avevo trovato quella che pensavo essere la soluzione al problema degli armadietti, e però qualche dubbio mi restava… Il modo migliore per verificare, mi sono detto, è la prova sperimentale. Col foglietto della soluzione in tasca, sono quindi corso alla palestra *Sensei*[17] e ho cominciato a girovagare fra i 1275 armadietti.

Le targhette erano ancora rimescolate; situazione ideale per la mia ricerca. Trovo quasi subito l'armadietto di mio interesse della prima fila, e provo ad aprirlo, usando la combinazione di lucchetto facilmente deducibile dal testo del problema. Niente, non si apre… Vado alla seconda fila. Stesso esito. Perplesso, riguardo i miei calcoli… Sembrano corretti… Vado alla terza fila e comincio ad armeggiare col lucchetto dell'armadietto che ***deve*** essere lui… Ancora niente… Mi volto, e mi trovo circondato da tre energumeni in kimono che mi guardano torvi, giocherellando con un assortimento d'attrezzi da ridicolizzare Torquemada:

"Cosa stai cercando nei ***nostri*** armadietti, pulce?" mi dice uno dei tre…

"Ehi, ma voi non siete Alberto, Fred e Alice[18]…?", abbozzo timidamente io…

"Alice ***a chi***???" sbotta il più grosso dei tre…

Il resto ve lo lascio immaginare… 10 giorni di prognosi, salvo complicazioni… Nelle lunghe ore a letto, fra una medicazione e l'altra, mi sono poi chiarito le idee… Adesso so bene che il problema degli armadietti ha ***2 soluzioni distinte***; ed io ero andato a frugare nella terna di armadietti relativa all'altra soluzione… (...)

Prima del rimescolamento, gli armadietti delle 3 file composte da ***N*** esemplari ciascuna sono numerati come nella tabellina qui sotto:

1	2	3	…	N-2	N-1	N
N+1	N+2	N+3	…	2N-2	2N-1	2N
2N+1	2N+2	2N+3	…	3N-2	3N-1	3N

16 Si noti che è 10! € e non 10 €!. Nel secondo caso il simbolo ! indica esclamazione; nel primo, fattoriale…

17 Veramente *Sensei* era il nome del maestro e non della palestra, ma non sottilizziamo…*[RDA]*

18 E cosa c'entra Alice? Cosa starebbe facendo in palestra con i miei pargoli? *[RdA]*

Dopo l'esercizio dinamico taoista, la numerazione è quella che segue:

1	4	…	3N-5	3N-2
2	5	…	3N-4	3N-1
3	6	…	3N-3	3N

Consideriamo ora la funzione:

$$E(f,N_f,B)$$

definita come segue:

- f è l'indice identificativo di una generica fila. Nel nostro caso, $f \in [1 \ldots 3]$;
- N_f è la posizione di un generico armadietto nella fila f. (Non la posizione *assoluta* valutata sul complesso delle file! Cioè $N_f \in [1 \ldots N]$; quindi ad esempio per il primo armadietto di *ciascuna* fila N_f è sempre 1, ecc…);
- B è una variabile booleana che può assumere i due valori **Prima** e **Dopo**, relativi agli istanti in cui si va a valutare la funzione E;
- la funzione E fornisce il valore presente sull'etichetta dell'armadietto di posto N_f della fila f, **Prima** o **Dopo** il rimescolamento. (E è definita in modo da produrre il valore assoluto dell'etichetta, cioè E vale ad esempio N+3 per il terzo armadietto della seconda fila **Prima** del rimescolamento ed 8 **Dopo**).

In base alla definizione di E, e dando un'occhiata alle tabelline sopra riportate, si può scrivere:

- Per un generico armadietto della prima fila:
  - $E(1, N_1, \text{Prima}) = N_1$
  - $E(1, N_1, \text{Dopo}) = 1 + 3(N_1 - 1)$
- Per un generico armadietto della seconda fila:
  - $E(2, N_2, \text{Prima}) = N + N_2$
  - $E(2, N_2, \text{Dopo}) = 2 + 3(N_2 - 1)$
- Per un generico armadietto della terza fila:
  - $E(3, N_3, \text{Prima}) = 2N + N_3$
  - $E(3, N3, \text{Dopo}) = 3 + 3(N_3 - 1)$

Adesso, se immaginiamo che N_1, N_2, ed N_3 non siano più le posizioni generiche degli armadietti, ma proprio quelle dei *tre armadietti che stiamo cercando*, questi tre numeri devono soddisfare alla condizione che, **Dopo** il rimescolamento, ciascuno dei tre armadietti associati ai numeri abbia l'etichetta che **Prima** era affissa ad uno degli altri due. Cioè:

$$\begin{cases} E(1, N_1, \text{Dopo}) = E(2, N_2, \text{Prima}) \\ E(2, N_2, \text{Dopo}) = E(3, N_3, \text{Prima}) \\ E(3, N_3, \text{Dopo}) = E(1, N_1, \text{Prima}) \end{cases} \qquad \textbf{[5.1]}$$

Quindi:

$$\begin{cases} 1+3(N_1 - 1) = N + N_2 \\ 2+3(N_2 - 1) = 2N + N_3 \\ 3+3(N_3 - 1) = N_1 \end{cases} \qquad \textbf{[5.2]}$$

Questo è un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite N_1, N_2, N_3 ed N. Per far collassare le infinite soluzioni nell'unica che ci interessa bisognerà sfruttare le altre due cose che sappiamo dal testo del problema:

- le 4 incognite possono assumere solo valori interi;
- N, in particolare, è confinata in un ben preciso intervallo.

Rimescolando le equazioni del sistema 2, viene fuori, dopo qualche calcoletto:

$$\begin{cases} N_1 = (15N+21)/26 \\ N_2 = (19N+11)/26 \\ N_3 = (5N+7)/26 \end{cases} \qquad \textbf{[5.3]}$$

Affinché i tre numeri al primo membro siano interi, occorre che lo siano le frazioni al secondo membro. Come si vedrà in seguito, è sufficiente garantire che la terza delle frazioni a secondo membro produca numeri interi, ed anche le altre due lo faranno. Si tratta di una equazione Diofantina, le cui infinite soluzioni possono essere espresse in funzione del parametro D:

$$N = 26D + 9 \qquad \text{con } D \in N$$

In definitiva, tutte le soluzioni del sistema 3 possono essere espresse in funzione di D come segue:

$$\begin{cases} N = 26D+9 \\ N_1 = 15D+6 \\ N_2 = 19D+7 \\ N_3 = 5D+2 \end{cases} \qquad \textbf{[5.4]}$$

Valori negativi di D producono valori negativi per N (che non ci interessano); le prime soluzioni per $D \geq 0$ sono riassunte nella tabella che segue:

D	N	N1	N2	N3
0	9	6	7	2
1	35	21	26	7
2	61	36	45	12
3	87	51	64	17
4	113	66	83	22
5	139	81	102	27
6	165	96	121	32
7	191	111	140	37
8	217	126	159	42
9	243	141	178	47
10	269	156	197	52
11	295	171	216	57
12	321	186	235	62
13	347	201	254	67
14	373	216	273	72
15	399	231	292	77
16	425	246	311	82
17	451	261	330	87
18	477	276	349	92
19	503	291	368	97
20	529	306	387	102

E quindi l'unica soluzione che soddisfa i dati del problema è quella che si ottiene per D = 16. Il 246° armadietto della prima fila porta, dopo il rimescolamento, l'etichetta N°736, che corrisponde al 311° armadietto della seconda fila. Su quest'ultimo è affissa l'etichetta N°932, che ci porta all'82° armadietto della terza fila. Su cui troviamo, come previsto, l'etichetta N°246…

E sono questi i tre armadietti che stavo per scassinare quando sono stato avvicinato dai tre palestrati incavolati…

Per farla breve, la mia disavventura deriva dal fatto che il sistema **[1]** può essere scritto ***anche in un altro modo…*** Invece di cercare l'etichetta dell'armadietto della *seconda* fila su uno di quelli della *prima* fila, e così via, si potrebbe cercare quella dell'armadietto della *terza* fila su quello della prima… E i requisiti del problema sarebbero comunque soddisfatti…

(...)[19]

Variazioni sul tema

Bloccato a letto per qualche giorno (e dolorante alquanto…), dovevo pur trovare qualcosa da fare, no? Allora ho provato a pensare a qualche approfondimento sugli armadietti. Dopo aver scartato altri modi ipotetici di alterare o estendere i termini del problema, ho deciso di vedere cosa succede facendo crescere man mano il numero delle file, F.

Facendo ciò, l'inconveniente patito con $F = 3$ di avere più di una soluzione cresce a dismisura; se infatti se per $N = 3$ le due soluzioni corrispondevano a:

- fila 1 rimanda a fila 2, fila 2 rimanda a fila 3 e fila 3 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 3, fila 3 rimanda a fila 1 e fila 1 rimanda a fila 2

con $F = 4$, ad esempio, dovremmo impostare ben 6 diversi sistemi di equazioni simili a quelle del sistema 1:

- fila 1 rimanda a fila 2, fila 2 rimanda a fila 3, fila 3 rimanda a fila 4 e fila 4 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 4, fila 4 rimanda a fila 3, fila 3 rimanda a fila 2 e fila 2 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 3, fila 3 rimanda a fila 2, fila 2 rimanda a fila 4 e fila 4 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 4, fila 4 rimanda a fila 2, fila 2 rimanda a fila 3 e fila 3 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 3, fila 3 rimanda a fila 4, fila 4 rimanda a fila 2 e fila 2 rimanda a fila 1
- fila 1 rimanda a fila 2, fila 2 rimanda a fila 4, fila 4 rimanda a fila 3 e fila 3 rimanda a fila 1

Questo vuol dire che, al crescere di F, un verificatore empirico non solo si troverebbe attorno un numero via via crescente di adirati frequentatori della palestra, ma anche avrebbe una probabilità man mano calante di beccare la F-pla giusta di armadietti…

Sconcertato da questo sinistro pensiero, ho deciso di concentrarmi sulla sola *soluzione primaria*; quella cioè per la quale ciascun armadietto rimanda ad un altro *vincolatamene appartenente alla fila successiva*, eccezion fatta per l'ultimo, che rispedisce alla prima fila.

Con questa ipotesi restrittiva, le equazioni del sistema **[1]** si generalizzano così:

[19] Qui il Nostro trova la seconda soluzione, con lo stesso procedimento.

$$\begin{cases} \mathrm{E}(1, \mathrm{N}_1, \mathrm{Dopo}) = \mathrm{E}(2, \mathrm{N}_2, \mathrm{Prima}) \\ \mathrm{E}(2, \mathrm{N}_2, \mathrm{Dopo}) = \mathrm{E}(3, \mathrm{N}_3, \mathrm{Prima}) \\ \ldots \\ \mathrm{E}(\mathrm{K}, \mathrm{N}_\mathrm{K}, \mathrm{Dopo}) = \mathrm{E}(\mathrm{K}+1, \mathrm{N}_{\mathrm{K}+1}, \mathrm{Prima}) \\ \ldots \\ \mathrm{E}(\mathrm{F}-1, \mathrm{N}_{\mathrm{F}-1}, \mathrm{Dopo}) = \mathrm{E}(\mathrm{F}, \mathrm{N}_\mathrm{F}, \mathrm{Prima}) \\ \mathrm{E}(\mathrm{F}, \mathrm{N}_\mathrm{F}, \mathrm{Dopo}) = \mathrm{E}(1, \mathrm{N}_1, \mathrm{Prima}) \end{cases} \qquad \textbf{[5.5]}$$

da cui discende un sistema che è la generalizzazione del **[2]**:

$$\begin{cases} 1 + \mathrm{F}(\mathrm{N}_1 - 1) = \mathrm{N} + \mathrm{N}_2 \\ 2 + \mathrm{F}(\mathrm{N}_2 - 1) = 2\mathrm{N} + \mathrm{N}_3 \\ \ldots \\ \mathrm{K} + \mathrm{F}(\mathrm{N}_\mathrm{K} - 1) = \mathrm{K}_\mathrm{N} + \mathrm{N}_{\mathrm{K}+1} \\ \ldots \\ (\mathrm{F}-1) + \mathrm{F}(\mathrm{N}_{\mathrm{F}-1} - 1) = (\mathrm{F}-1)\mathrm{N} + \mathrm{N}_\mathrm{F} \\ \mathrm{F} + \mathrm{F}(\mathrm{N}_\mathrm{F} \ \ 1) = \mathrm{N}_1 \end{cases} \qquad \textbf{[5.6]}$$

Si osservi che la generica (K-ma) e l'ultima di queste equazioni possono essere riscritte come segue (ciò servirà in seguito…):

$N_{K+1} = F(N_K - 1) - K(N - 1)$ oppure, esplicitando diversamente:

$N_K = [N_{K+1} + K(N - 1)] / F + 1$ e… **[5.7]**

$N_1 = FN_F$

Proviamo, sfruttando la seconda delle equazioni 9, a ricavare N_1, sostituendo man mano i termini N_K con K via via crescente:

$$\begin{aligned} N_1 = \ & N_2/F + (N-1)/F + 1 = \\ & = N_3/F^2 + 2(N-1)/F^2 + 1/F + (N-1)/F + 1 = \\ & = N_4/F^3 + 3(N-1)/F^3 + 1/F^2 + 2(N-1)/F^2 + 1/F + (N-1)/F + 1 = \\ & \ldots \\ & = N_F/F^{F-1} + (N-1)\sum_{K=1}^{F-1} K/F^K + \sum_{K=1}^{F-2} 1/F^K + 1 \end{aligned}$$

Utilizzando la terza delle **[7]** per rimpiazzare N_1 con N_F al primo membro, ed osservando che:

$$\sum_{K=1}^{F-2} 1/F^K = \left(F^{F-2} - 1\right)/\left[F^{F-2}(F-1)\right]$$

e:

$$\sum_{K=1}^{F-1} K/F^K = \left(F^F - F^2 + F - 1\right)/\left[F^{F-1}(F-1)^2\right]$$

si ricava, dopo una serie di più o meno arzigogolati passaggi algebrici:

$$N_F = \left[N\left(F^F - F^2 + F - 1\right) + \left(F^{F+1} - 2F^F + 1\right)\right] / \left[\left(F^F - 1\right)\left(F - 1\right)^2\right] \qquad \textbf{[5.8]}$$

Questa formula, con un piccolo *rimaneggiamento* fra poco descritto, è proprio quello che serviva; almeno nei limiti accessibili al sottoscritto circa il problema trattato.

Per giustificare il *rimaneggiamento* che segue, osserviamo che, fissato un certo numero F di file di armadietti, la **[8]** si può scrivere come segue:

$$N_F = (NC_1 + C_2) / C_0$$

con C_0, C_1 e C_2 che sono necessariamente numeri *interi*.

Il rimaneggiamento consiste nell'osservare che sia C_1 che C_2 sono esattamente divisibili per $(F - 1)^2$, uno dei due fattori che appare nel denominatore della **[8]**.

Allora, posto:

$$A_0 = C_0/(F-1)^2 = (F^F - 1)$$
$$A_1 = C_1/(F-1)^2 = (F^F - F^2 + F - 1) / (F-1)^2 \qquad \textbf{[5.9]}$$
$$A_2 = C_2/(F-1)^2 = (F^{F+1} - 2F^F + 1) / (F-1)^2$$

la **[8]** rimaneggiata diventa:

$$N_F = (NA_1 + A_2) / A_0 \qquad \textbf{[5.10]}$$

Dove A_0, A_1 e A_2 sono numeri *interi*, per quanto sopra affermato.

Prima di procedere, osserviamo che la 12 è l'equivalente pluri-file dell'ultima delle equazioni del sistema **[3]**, quello lì valido appunto per $F = 3$. E poi, detto tra parentesi, ci conforta il fatto che ponendo $F = 3$ nelle **[9]** spunta fuori, quasi miracolosamente (e chi ci sperava?) la terza delle **[3]**…

Anche la **[10]**, come la terza delle **[3]**, è una equazione Diofantina; da essa è possibile ricavare, analogamente a quanto fatto per il caso $F = 3$, tutte le infinite soluzioni al problema, nella forma:

$$\begin{cases} N = \alpha_0 D + \beta_0 \\ N_1 = \alpha_1 D + \beta_1 \\ N_2 = \alpha_2 D + \beta_2 \\ \dots \\ N_F = \alpha_F D + \beta_F \end{cases} \qquad \textbf{[5.11]}$$

con $D \in N$, e i vari termini α_K e β_K che sono opportune costanti intere che vanno computate caso per caso (cioè al variare di F).

Prima di procedere con la **[10]**, freniamo un attimo; e sistemiamo alcuni dettagli collaterali che sono rimasti in sospeso, fra le righe :

- elaborando la **[10]** secondo i dettami di Diofanto, ci si garantisce che N ed N_F siano *interi*, e che non appaiano quindi nelle soluzioni frazioni di armadietti (ante, cardini, ripiani…). Giocando con le equazioni **[7]**, si può provare che, fissati N ed N_F *interi*, tutti gli altri N_K sono *interi* anch'essi. In effetti, questo è il motivo per cui nel caso $N = 3$ si è usata la terza delle 3 per cercare le soluzioni (era lei quella che sosteneva l'intero castello);

- quindi, i vari N_K sono interi… Chi ci dice che siano *positivi*? Caso mai ne spunta fuori uno negativo (corrispondente ad un armadietto piazzato *fuori* della palestra)… Anche qui, basandosi sulla **[8]** e sulle **[7]**, si riesce a provare che, con $F>1$ (ovvio…) gli armadietti d'interesse appartengono all'insieme delle soluzioni accettabili;
- assodato che i vari N_K sono interi positivi, non siamo però ancora certi che *non superino N*; non vorremmo mica che un armadietto capitasse *oltre* la fine della sua fila… Ancora lavorando sulla **[8]** e le **[7]**, si riesce a verificare ciò;
- osserviamo che, una volta che sia stato fissato N_F, tutti gli altri armadietti sono inequivocabilmente deducibili dalla seconda delle **[7]**.

Adesso che ci siamo garantiti la coerenza delle soluzioni, possiamo tornare alla **[10]**; anzi, ALT! mi smentisco un attimo. Prima torniamo alla terza delle **[3]**, ed alle tabelle con le soluzioni del caso $F=3$. Si vede che le soluzioni, osservate dal punto di vista del numero di armadietti, hanno cadenza 26; e 26 è proprio pari (nel caso $N=3$) al termine A_0 della **[10]** (cioè a 33 - 1). Quindi c'è, fra le altre, la soluzione con $N=425$; poi quella con $N=425+26$. E quella con $N=425-26$ ecc.; ma non con valori intermedi di N. In fondo, mi è parso, non è tanto interessante il numero identificativo di tutti i singoli armadietti. Mi stimolava maggiormente la *cadenza* delle soluzioni piuttosto che le soluzioni stesse…

Nel caso $F=3$, capita che la cadenza è proprio pari ad A_0; che fosse lo stesso anche per N di valore superiore? No; basta porre $N=4$ e già spunta fuori che A_0, A_1 e A_2 sono interi che hanno dei *fattori comuni*, per cui si possono *ridurre*; la cadenza per $N=4$ non è 44 – 1 = 255, bensì 85, cioè 255/3…

Detto M il *massimo comune divisore* fra A_0, A_1 e A_2, la cadenza è fornita dalla relazione A_0/M.

F	A0	A1	A2
2	3	1	1
3	26	5	7
4	255	27	57
5	3124	194	586
6	46655	1865	7465
7	823542	22875	114381
8	16777215	342391	2054353
9	387420488	6053444	42374116
10	9999999999	123456789	987654321

E poi? Se si vogliono analizzare le cadenze al crescere di F, si va in crisi molto in fretta… fattorizzare numeri che crescono come F^F è un'impresa senza speranze…; in ogni caso, non è difficile provare che A_1 è sempre il più piccolo dei tre coefficienti, se F è abbastanza grossetto (basta $F=2$…); allora sarebbe sufficiente fattorizzare A_1…

La tabella che segue mostra i valori dei tre coefficienti A_i, al variare di F. Chi può fattorizzare A_1, domina il mondo.

NB: splendido è il valore di A_1 ed A_2 per $F=10$; ciò meriterebbe qualche analisi che a me sfugge, almeno per ora.

Lo sapete che le generalizzazioni ci piacciono sempre. Vediamo chi altro ci ha scritto.

5.1.2 Le biglie di Fred

Il mese scorso avevamo lasciato in sospeso, per questo problema, la soluzione errata del Capo. Ebbene, come ***PMP*** ha fatto notare circa dieci minuti dopo la distribuzione del numero, la soluzione che il Capo aveva trovato da qualche parte era errata perché la scalabilità del problema andava a farsi benedire non appena la prima biglia veniva estratta; ***Djzero00*** ha poi aggiunto qualche commento sarcastico che siamo così masochisti da allegarvi:

Cominciamo col dire che sono rimasto oltremodo deluso dall'assenza di risultati. Un po' ci contavo, che qualcuno avesse trovato una soluzione migliore delle mia (che non l'ho trovata, ma l'ho calcolata). Per non parlare poi della somma cantonata del Rudy, che mi fa un po' dubitare delle sue facoltà (a meno che fossero temporaneamente impedite da qualche sostanza chimica, naturale o artificiale che dir si voglia)[20].

Ci sono almeno due errori nel suo ragionamento. In primo luogo, il fatto che ridurre il tutto a quattro palle (invece delle 148 di partenza) dimentica il fatto che il problema si può ridurre a (3,1) solamente se il sistema (111,37) è obbligato (con probabilità 1) a passare per (3,1). Così non è, perché chiunque può capire che da (111,37) si può ragionevolmente arrivare, ad esempio, a (2,2) con una opportuna sequenza di estrazioni, senza passare per (3,1). E questo percorso non è considerato nella sua soluzione. In secondo luogo, non ho capito quali siano questi otto casi; c'è da dire che non mi sono sforzato più di tanto, in quanto NON è vero che si arriva alla stessa probabilità di rimanere con una bianca o con una nera (per essere precisi, la probabilità di rimanere con una nera è di 4/7). Non sono quindi in grado di indicare l'errore nel suo ragionamento, in quanto non capisco il suo ragionamento.

Per concludere, elaboro un po' il problema, ma senza risolverlo. Concordo con l'analisi di Qfwfq, che ho ottenuto per altra via. L'intero problema e' visto da me come un sistema dinamico probabilistico (si potrebbe pensare il tutto ad una bella catena di Markov, se non fosse che lo stato di partenza è un po' speciale, e che la teoria delle catene, almeno quella poca a me nota, non aiuta poi molto). Il sistema 'sacchetto di biglie' posso immaginarlo come assumere uno tra diversi 'stati', composto da i biglie nere e j biglie bianche. Purtroppo la caratterizzazione dello stato in questo modo non è sufficiente; per poterci lavorare bisogna tenere conto dell'evento che ha portato il sistema in quello stato, ovvero, se la precedente estrazione era di una biglia bianca o nera. In altre paorle, uno stato è caratterizzato da tre grandezze: numero di biglie nere, numero di biglie bianche, colore dell'ultima biglia estratta.

Ora la questione è complicata dal fatto che, se estraggo una biglia di un colore diverso dalla precedente, la rimetto dentro, pur cambiando ugualmente stato del sistema sacchetto (passo ad esempio da (i,j,N) a (i,j,B)). Potenzialmente, potrei infilarmi in un ciclo infinito in cui continuo ad estrarre biglie bianche e nere alternate, senza toglierle dal sacchetto.

Ma si può facilmente eliminare questo problema considerando le sequenze di estrazione:

1) ultima estratta N e poi (B.N)*.N

2) ultima estratta N e poi (B.N)*.B.B

3) ultima estratta B e poi (N.B)*.N.N

4) ultima estratta B e poi (N.B)*.B

dove l'asterisco indica zero o più (al limite infinite) estrazioni della sequenza racchiusa tra parentesi.

[20] Non si può essere delusi da alcunchè, perchè la regola primaria di RM è quella di non illudersi, e se uno la rispetta poi non viene deluso. RM non è una istituzione in cui la Redazione sa, chiede, verifica e risponde (caso della "Rivista Autorevole", che non saremo mai - anche per manifesta incapacità) e non è neppure un democratico luogo di intelligente discussione (caso del "Forum di Esperti"). RM è ragionevolmente anarchica, ci piace molto l'idea che chiunque possa discutere, provare e sbagliare, sennò finisce sempre che di matematica ne parlano solo quelli molto bravi, con gli altri (meno bravi, ma interessati) terrorizzati all'idea di prendere la parola. Non siamo mica "rudi" per modo di dire... Quindi, abbiamo un sommo rispetto delle cantonate, ne abbiamo prese di colossali in tutta la nostra vita, e non abbiamo intenzione di smettere.

DJZero00 stava scherzando con noi, e mostrava di aver ben compreso lo spirito di RM prendendoci in giro: ne approfittiamo comunque per ribadire la cosa a beneficio dei nuovi arrivati che potrebbero ancora non essere familiari con la mostra filosofia *[PRS]*.

Pigliamo ad esempio la prima sequenza. Qui siamo in uno stato, diciamolo (*i*,*j*,N) in cui ci sono *i* biglie nere, *j* biglie bianche, e l'ultima estratta è una biglia nera. Se adesso le sequenze di estrazione sono BN, BNBN, BNBNBN... eccetera, continuo a rimanere con *i* nere e *j* bianche, fino a che una doppia N non arriva a rompere l'equilibrio, e fa passare in definitiva da uno stato (*i*,*j*,N) ad uno stato (*i*-1,*j*,N). Per tutta la sequenza, le estrazioni hanno sempre la stessa probabilità (ovvero, *i*/(*i*+*j*) per l'estrazione di una biglia nera e *j*/(*i*+*j*) per l'estrazione di una biglia bianca).

Tutte e sole le sequenze di questo tipo sono responsabili del passaggio del sistema dallo stato (*i*,*j*,N) allo stato (*i*-1,*j*,N). Quindi, la probabilità di questo passaggio è data dalla somma delle probabilità di tutte le sequenze:

1-a) N -> *i*/(*i*+*j*)

1-b) BNN -> *i*/(*i*+*j*) · j/(*i*+*j*) · *i*/(*i*+*j*)

1-c) BNBNN -> *i*/(*i*+*j*) · *j*/(*i*+*j*) · *i*/(*i*+*j*) · *j*/(*i*+*j*) · *i*/(*i*+*j*)

eccetera.

Mettendo tutto assieme:

$$\text{Somma} = \frac{i}{i+j}\sum_0^\infty\left(\frac{j}{i+j}\cdot\frac{i}{i+j}\right)$$

La somma della serie (che converge, e vorrei anche vedere, essendo l'argomento minore di uno) è 1/(1-arg), per cui si arriva che la probabilità di transizione è

$$\frac{i(i+j)}{i^2+ij+j^2}$$

Adesso, calcolando nei quattro casi le varie probabilità, ottengo

- (*i*,*j*,N) evolve con probabilità $\frac{i(i+j)}{i^2+ij+j^2}$ nello stato (*i*-1,*j*,N)
- (*i*,*j*,N) evolve con probabilità $\frac{j^2}{i^2+ij+j^2}$ nello stato (*i*,*j*-1,B)
- (*i*,*j*,B) evolve con probabilità $\frac{i^2}{i^2+ij+j^2}$ nello stato (i-1,*j*,B)
- (*i*,*j*,B) evolve con probabilità $\frac{j(i+j)}{i^2+ij+j^2}$ nello stato (*i*,*j*-1,B)

Queste sono le probabilità di transizione in una catena di Markov; disgraziatamente, i testi in merito considerano solamente i casi in cui non dipendono dallo stato (da cui derivano meravigliosi risultati), cosa che invece qui accade.

A questo punto, dico $P_N(i,j)$ la probabilità che il sacchetto contenga *i* biglie nere, *j* biglie bianche e che l'ultima estrazione sia stata di una biglia nera. Ugualmente, $P_B(i,j)$ è la probabilità di *i* biglie nere, *j* bianche e con una bianca come ultimo estratto. Le quattro situazioni sopra si scrivono quindi:

- $P_N(i-1,j)=\frac{i(i+j)}{i^2+ij+j^2}P_N(i,j)$

- $P_N(i, j-1) = \dfrac{j^2}{i^2 + ij + j^2} P_N(i, j)$
- $P_B(i-1, j) = \dfrac{i^2}{i^2 + ij + j^2} P_B(i, j)$
- $P_B(i, j-1) = \dfrac{j(i+j)}{i^2 + ij + j^2} P_B(i, j)$

A questo punto, parto con due stati 'iniziali'

- (N-1,B,N) con probabilità N/(B+N)
- (N,B-1,N) con probabilità B/(B+N)

e, a colpi di estrazioni, posso procedere verso stati successivi, con una biglia in meno. Come Qfwfq, non risolvo analiticamente le ricorrenze, ma provo a calcolarle con un simpatico programma in C scritto per l'occorrenza. Rimango stupefatto dalla serie di numeri prodotta, ma arrivo al medesimo risultato di Qfwfq:

Probabilità di rimanere con una biglia nera: 0.501985158951649

Probabilità di rimanere con una biglia bianca: 0.498014841048350

Più che allegarvi il codice che produce tutti questi numeri, non so fare..

E di più non vogliamo commentare. Grazie anche a ***Qfwfq***, che è stato più diplomatico ("La risposta del Grande Capo al problema delle biglie di Fred non è affatto sbagliata! è la risposta giusta ma ad un altro problema...").

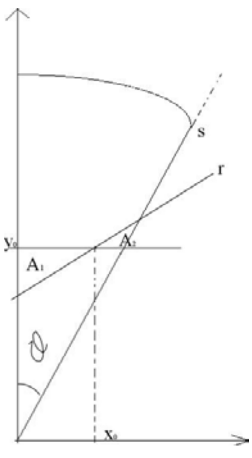
5.2 [76]

Come già dicevamo all'inizio, a maggio siete stati estremamente prolifici, e non si era mai visto un afflusso di soluzioni tutte diverse, in approccio, modalità di soluzione, formato elettronico. Se proprio non vi pubblichiamo tutti, non vi offendete, speriamo almeno di riuscire a citare tutti coloro che hanno contribuito…

Prima di cominciare, vi lasciamo solo una preghiera: nel mandare le soluzioni, pensate che devono essere integrate in un altro formato, e che ogni volta che Alice non può far uso del copia&incolla deve riscrivere integralmente il testo. Si trattasse di una normale lynotipe non sarebbe un problema, ma la nostra Alice è poco paziente e quando è troppo decide semplicemente di non pubblicare, ed il cut&paste resta un semplice cut. Aiutate Alice, tutti i formati editabili vanno bene: semplice testo, Word, OO, LateX…

5.2.1 Ancora la torta...

La leggendaria golosità di Fred ha colpito ancora! L'hanno risolto ***Gabriel***, ***Emanuele*** (new entry: benvenuto!), ***Djzero00***, e il ***Dr. Toki*** (ebbene sì, il nostro ***u_toki*** si è evoluto in forma superiore e ha cambato allonimo…). Diamo la precedenza al nostro nuovo adepto, ***Emanuele***:



> Dapprima facciamo delle considerazioni semplici e poniamo il problema dal punto di vista matematico: orientiamo un sistema coordinato come nella figura e sia $(x_0, y_0) = P$ il punto su cui si posa la mosca; consideriamo la parallela all'asse delle ordinate ed una qualsiasi retta che passi dal punto in questione e non tocchi il bordo. Ragionevolmente la retta che taglia la torta nel modo giusto sarà una retta del fascio centrato in P che sia compresa tra la retta orizzontale

$y = y_0$ e la retta passante per il punto d'intersezione del bordo della torta e la retta s. I tagli che potrebbero essere effettuati nelle altre posizioni sono svantaggiosi: il motivo è che il punto P è stato scelto "più vicino" al bordo laterale s che all'altro bordo lungo l'asse delle ordinate. In caso il punto P fosse più vicino all'altro bordo, non sconfortandoci affatto, ragioneremmo in modo del tutto analogo... come dice il Matematico: non lede alla generalità del problema!

L'intento che ci proponiamo è di calcolare in funzione di θ e m (coefficiente angolare della retta r del fascio centrato in P) il rapporto tra l'area A_1 e A_2, ovvero cerchiamo la funzione

$$F(\theta, m) = \frac{A_1}{A_2}$$

e poi la massimizziamo (dato che più grande è tale rapporto e più torta mangeremo).

La retta s ha equazione $y = x \cot g\theta$.

La retta r ha equazione $y = mx + (y_0 - mx_0)$.

Mettendo a sistema le due rette, ne troviamo il punto d'intersezione *[vi do solo la soluzione (AR)]*:

$$x = \frac{y_0 - mx_0}{\cot g\theta - m}$$

$$y = \frac{y_0 - mx_0}{\cot g\theta - m} \cot g\theta$$

Altresì si vede che la retta r taglia l'asse delle ordinate nel punto $(0, y_0 - mx_0)$ per cui possiamo calcolare subito le aree dei due triangoli:

$$A_1 = \frac{[y_0 - (y_0 - mx_0)] \cdot x_0}{2}$$

ed

$$A_2 = \frac{\left(\dfrac{y_0}{\cot g\theta} - x_0\right)\left(\cot g\theta \dfrac{y_0 - (y_0 - mx_0)}{\cot g\theta - m} - y_0\right)}{2}.$$

La funzione è quindi

$$F(\theta, m) = \frac{A_1}{A_2} = \frac{mx_0^2}{\dfrac{y_0 - x_0 \cot g\theta}{\cot g\theta} \cdot \dfrac{\cot g\theta (y_0 - mx_0) - y_0(\cot g\theta - m)}{\cot g\theta - m}}.$$

Dopo opportune semplificazioni si perviene alla scrittura

$$F(\theta, m) = \left(\frac{x_0}{y_0 - x_0 \cot g\theta}\right)^2 \cdot \cot g\theta \cdot (\cot g\theta - m).$$

Ora, la prima parentesi, una volta fissato l'angolo θ è una costante, così come il termine centrale. L'ultima parentesi è lineare in m. Pertanto essa risulta massima

> quando m è minima. Visto che la retta r non deve scendere oltre la retta orizzontale $y = y_0$, risulta che il valore minimo per m è proprio $m = 0$.
>
> Questo significa che il taglio da operare deve essere fatto in modo ortogonale al lato della fetta di torta che si trova più lontano rispetto al punto di approdo della mosca.
>
> Possiamo ora anche considerare il caso in cui la mosca si posa in un punto della bisettrice dell'angolo θ: in tal caso o sia taglia ortogonalmente all'asse delle ordinate, o perpendicolarmente alla retta s nulla cambia. Per cui l'importante è tagliare in modo ortogonale ad uno dei due lati (solo in questo caso però!).

Citiamo anche ***Gabriel***, che ci ha provato senza calcoli:

> Volete farmi impazzire con il calcolo infinitesimale, eh? Ditelo! Il povero Fred, per salvare quanto più possibile della sua fetta di torta, deve tagliarne una fetta usando il coltello orizzontalmente: praticamente deve levarne lo strato superiore, cercando di farlo il più sottile possibile! Nel problema non c'è scritto che il taglio deve essere ortogonale al piano di appoggio della torta, nè sono specificate le eventuali preferenze di Fred circa gli ingredienti della torta: chessò, per esempio, che la superficie è cosparsa di zucchero a velo e uvetta e Fred giammai vi rinuncerebbe!

Soluzione truffaldina, ma simpatica.

5.2.2 Lavori al Paesello!

C'è da dire che la curva della porta ha avuto un successo enorme. Forse faremmo più in fretta a dire chi non ha scritto in proposito, ma ecco i concorrenti: ***Djzero00***, ***Zar***, ***BR1***, ***Vincenzo*** (new entry: benvenuto!), ***Qfwfwq***, ***Floyd***, ***Caronte***, ***Pino*** (new entry: benvenuto!), ***Emanuele*** (doppio benvenuto per la duplice soluzione), ***Artifex***... e speriamo di averli nominati tutti. Principalmente ci siamo divertiti un mondo, perché tutte, ma proprio tutte le soluzioni erano piuttosto fantasiose. Dato che la parte di soluzioni in questo numero sta venendo troppo lunga, siamo forzatamente obbligati a delle scelte, ma sappiate che sono state veramente difficili. Per prima cosa, l'irresistibile aneddoto di ***Zar***:

> Qualche anno fa, in una classe della mia scuola, successe la seguente vicenda. Un insegnante di materia tecnica (elettronica, telecomunicazioni, quella roba lì), durante una lezione, scrisse alla lavagna una formula e subito dopo disse: "ecco, vedete, questa è l'equazione... di che curva?"
>
> La reazione degli studenti fu la seguente:
>
> 1) il gruppo di quelli che dormivano/chiacchieravano non reagì, come di solito fa questa categoria, ma continuò nell'attività precedente.
>
> 2) il gruppo di quelli che sono più o meno attenti, non avendo colto il tono interrogativo della parte finale della frase, rimase lì a guardare, prendendo atto e scrivendo qualcosa sul quaderno.
>
> 3) il gruppo di quelli bravi iniziò a scambiare qualche parola (sottovoce).
>
> L'insegnante, non avendo ricevuto risposta da nessuno dei tre gruppi, incalzò: "allora? Perché non dite niente? Tu (rivolto a uno dei bravi), perché parli? Cosa c'è?".
>
> Lo sciagurato rispose: "prof., ma come si scrive KeKurva? Con la kappa?"
>
> (Per la cronaca, era l'equazione di un'ellisse, rinominata da quel momento "l'equazione di KeKurva").

Ringraziamo ***Zar*** per questa perla, e per l'immagine animata della nostra curva. Così come ringraziamo ***Artifex***, che ha risolto a mano e inviato l'immagine scannerizzata proprio mentre scrivevamo queste righe... impagabile.

Ecco come lo risolve il nostro ottimo neoiscritto ***Vincenzo***, al quale va l'apprezzamento di Alice per l'aiuto editoriale:

> Mi faccio un breve ripasso, concedendomi il piacere intimo di scrivere le formule con eq. Editor. Data la famiglia di funzioni reali regolari $f(x,a)$ su un dominio D si definisce l'inviluppo $g(x)$ la funzione:
>
> $$\forall x \in D\ \exists a; \begin{cases} g(x) = f(x,a) \\ g'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,a) \end{cases}.$$
>
> Senza andare per il sottigliòne e supponendo di poter esplicitare $a(x)$:
>
> $$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, a(x)) + a'(x)\frac{\partial f}{\partial a}(x, a(x)).$$
>
> e dunque
>
> $$\frac{\partial f}{\partial a}(x, a(x)) = 0.$$
>
> Nel nostro caso (con "ovvio" significato dei simboli) si tratta della famiglia di rette:
>
> $$f(x,\theta) = -tg\theta \cdot (x - 2\cos\theta) = -tg\theta \cdot x + 2\sin\theta.$$
>
> indi
>
> $$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -\frac{x}{\cos^2\theta} + 2\cos\theta = 0$$
>
> $$\cos\theta = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$
>
> $$g(x) = f(x, \theta(x)) = 2tg\theta \cdot (\cos\theta - (x/2)) = 2\sqrt{1-(x/2)^{2/3}} \cdot \left(1-(x/2)^{2/3}\right) = 2\left(1-(x/2)^{2/3}\right)^{3/2}$$
>
> Con sgomento (© Wolfram research) si ottiene che:
>
> $$\int g(x)dx = \int 2\left(1-(x/2)^{2/3}\right)^{3/2} dx =$$
> $$= \frac{3}{4}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3} - \frac{1}{8}\sqrt{2-2^{1/3}x^{2/3}} \cdot \left(3\cdot 2^{1/6}x^{1/3} - 7\sqrt{2}x + 2\cdot 2^{5/6}x^{5/3}\right).$$
>
> Ma l'area della figura è immediata:
>
> $$\int_0^2 g(x)dx = \frac{3}{8}\pi.$$

Vi diamo la versione di ***Pino***, anche lui neoiscritto:

Faccio un piccolo disegno per chiarire: *[il disegno non siamo riusciti ad importarlo, ma immaginatevi una circonferenza a centro O, un raggio OP e il punto A sull'asse delle ascisse (AR)].* Sia α l'angolo tra PO e OA. Se $\pi/4 < \alpha < \pi/2$ la curva generata dall'anta è esattamente l'arco di circonferenza percorso da P. Se $\alpha < \pi/4$ invece la curva generata è diversa.

L'equazione della retta PA è:

$$y = -x\tan\alpha + 2\sin\alpha . \qquad \textbf{[5.12]}$$

Se α varia di un infinitesimo $\delta\alpha$ la nuova retta PA sarà

$$y = -x\tan\alpha + 2\sin\alpha + \left(-\frac{1}{\cos^2\alpha}x + 2\cos\alpha\right)\delta\alpha . \qquad \textbf{[5.13]}$$

La curva prodotta dall'anta è esattamente il luogo dei punti di intersezione tra la retta **[12]** e **[13]** e cioé in forma parametrica:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3\alpha \\ y = 2\sin^3\alpha \end{cases}$$

oppure in forma implicita

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{2^2} .$$

Complimenti anche agli altri, per le figure e tutto il resto. Tra l'altro a quanto pare la curva si chiama ***"astroide"***. Non possiamo non ringraziare ***Caronte***, che ha inviato due soluzioni due, una per iniziati ed una più discorsiva, per la prima volta lasciamo impubblicato il nostro divulgatore preferito, e speriamo che questo non gli impedisca di continuare a scriverci, speriamo di poter pubblicare il testo sul famoso *"Charontis Flexus"* nel prossimo numero.

5.2.3 Nè quick nè dirty – Piccolo Labirinto Frattale

Qui è stato ***Marco***, il nostro Senese solutore, a fare un figurone: ci ha scritto nella sua classica prosa, una "*Piccola Soluzione Frattale*":

Cerchiamo collegamenti che iniziano e finiscono dai bordi esterni. Definisco che due terminali esterni sono raggruppati se è possibile andare dall'uno all'altro lungo il labirinto, supponendo che + e - siano collegati. Essere raggruppati è banalmente una relazione di equivalenza e chiamo le sue classi gruppi.

Questa informazione è utile, perché tutte le volte che entro in una scatola, posso scegliere di uscire da un qualunque terminale raggruppato con quello di ingresso, senza dovermi stare a preoccupare del cammino effettivamente percorso dentro la scatola, cosa che, vedrete, sfrutterò spesso per evitare le nidificazioni.

L'obiettivo sarà perciò di avere gruppi più grandi possibile, in modo da avere maggiore libertà di scelta nell'uscire dalle scatolette.

Il labirinto collega tra loro già 1-15-16 (che perciò appartengono allo stesso gruppo); 3-12; 8-10-13; 11-14.

Alcuni raggruppamenti meno ovvi sono contenuti negli esempi del primo mail. Per essere precisi, il primo schianto dimostra che 10 e 11 sono raggruppati. Il cammino è:

10 A11 [A14] 11

Il terzo esempio (il ciclo non banale) mostra che 15 e 4 sono raggruppati:

15 A1 [A16] A10 [A8] B16 [B1] 4

Cose nuove di oggi: 4 e 5 sono raggruppati:

4 B1 [B4[21]] 5

6 è raggruppato con 3:

6 B8 [B11] C4 [C1] 3.

Stop. Rischematizzo la situazione dei gruppi

1-4-5-15-16

3-6-12

8-10-11-13-14

Mancano all'appello 2 (che però è farlocco ed è come se non esistesse; per la cronaca, dato che mi piace calcolare cose inutili, appartiene al gruppo di 3), 7 e 9.

Per il gruppo di 7 c'è da tribolare un po' di più.

Risulta che 7 è raggruppato con 3 (questo richiede il passaggio per +/-, cosa che per tutti gli altri raggruppamenti, eravamo riusciti ad evitare), ma per mostrarlo meglio, mi conviene far prima vedere che 10 è raggruppato con 1:

10 A11 [A10] A16 [A1] 1

7 A3 [A12] -/+ C10 [C1] 3

Con quest'ultimo raggruppamento difficile, è poi semplice far vedere che 9 è raggruppato con 3:

9 B3 [B7] 3

Secondo stop. Foto di gruppo ...ehm… di gruppi.

1-4-5-8-10-11-13-14-15-16

3-6-9-7-12

A questo punto la soluzione del PLF è fatta:

+ C10 [C13] A9 [A12] -

Questo naturalmente è solo uno dei percorsi possibili, e si può vedere che ne esistono altri.

Ora, questo sembra semplice, ma si tratta, ve lo ricordo, di una Piccola Soluzione Frattale ad un Labirinto Frattale. Se sostituiamo i passaggi inscatolando i raggruppamenti, salta fuori un percorso un po' meno ovvio:

+ C10 [C13] A9 [AB3 [ABC1 [ABCA1 [ABCA16] ABCA10 [ABCAA11 [ABCAA14] ABCA11] ABC10] AB+/- ABA12 [ABA3] AB7] A12] -

Come vedete, richiede di scendere fino al quinto livello e, in base alle prove che ho fatto, suppongo che con solo quattro livelli non ce la si faccia.

Per concludere il discorso, dato che restare con due gruppi senza sapere se si consocono oppure no sembra brutto, dimostro che 1 e 3 sono raggruppati:

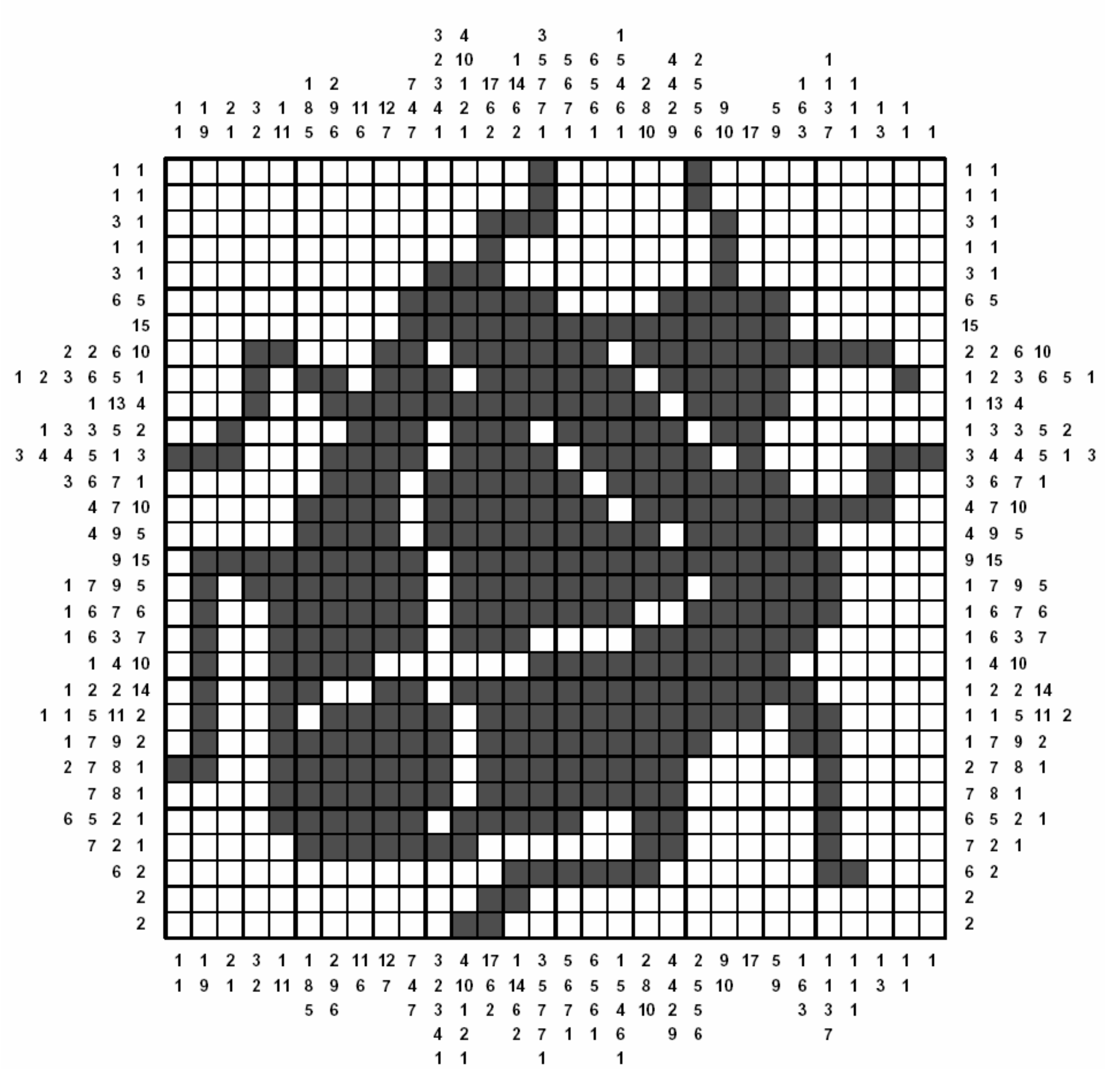
1 A1 [A5] 3

[21] A stretto rigore, entrando da B1, non posso uscire direttamente da B4. Però so già che 1 e 4 sono raggruppati (1 lo è con 15 e 15 lo è con 4). Lo stesso avverrà più e più volte ancora, ma non lo rimarcherò ulteriormente.

Con questo, tutti i sedici terminali esterni sono raggruppati, e quindi posso facilmente (!!!) dimostrare che il Piccolo Labirinto Frattale è connesso.

5.2.4 Zugzwang! Edel e Math Maze

Incredibile ma vero, qualcuno ha tentato di risolvere edel! Ringraziamo ***Qfwfq*** e ovviamente vi facciamo vedere il risultato:

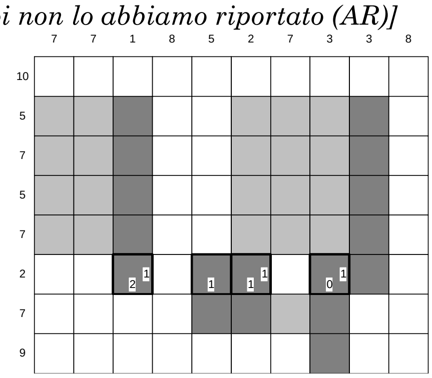


Marco ci scrive ancora per Mathmaze:

Passo 0

Niente, ho solo rifatto il disegno originale… *[e noi non lo abbiamo riportato (AR)]*

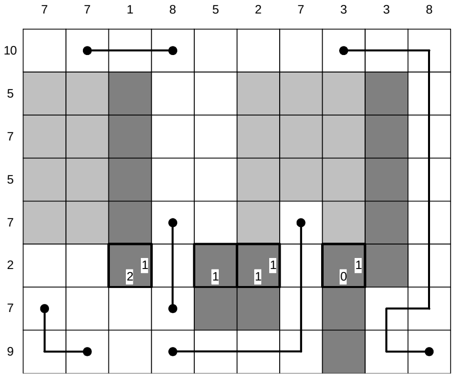
Passo 1



Deduzioni "automatiche" su quali caselle sono toccate/non toccate senza alcun dubbio dal percorso: le caselle tra i muretti sulla sesta traversa, la prima traversa, le due caselle sotto il quarto muretto, l'ultima colonna, ecc…

Schematizzo il risultato come in figura 1. Le caselle bianche sono senz'altro tagliate dal percorso, mentre le grigio scure sono senz'altro libere.

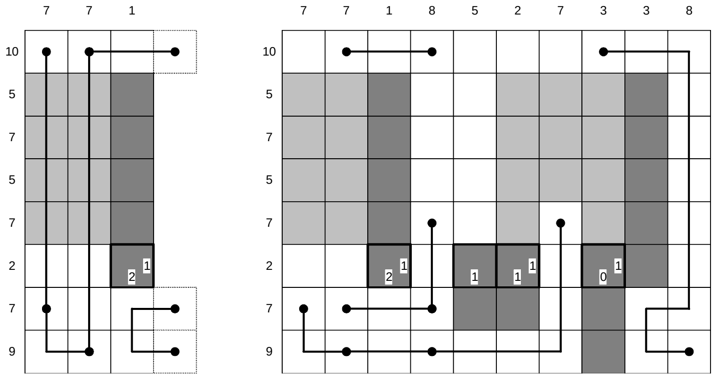
Passo 2



Se trovo una casella bianca, che non sia la casa di partenza o di arrivo e che ha solo due caselle vicine dove il percorso può passare, allora conosco il percorso in quella casella, dato che da una delle due vie di accesso il percorso deve arrivare e dall'altra deve andarsene.

Questa situazione si verifica nella zona vicino all'arrivo, sotto e a destra i muretti centrali, tra il primo e il secondo muretto e nell'angolo in basso a sinistra. La figura 2 mostra la situazione aggiornata.

Passo 3



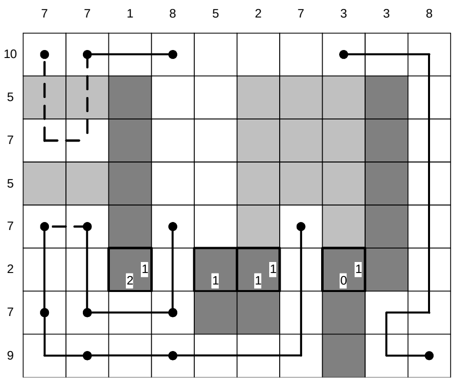
Consideriamo la terza colonna. Sappiamo che in alto (prima traversa) c'è un attraversamento (ossia il percorso passa da sinistra a destra una volta). Se ci sono altri attraversamenti, devono avvenire sotto al muretto e devono essere in numero pari (perché il percorso deve partire a sinistra e giungere a destra, quindi deve attraversare la terza colonna un numero dispari di volte).

Perciò sotto al muretto sono possibili due soli casi: o c'è un'inversione a "U" (zero attraversamenti) oppure ci sono due attraversamenti.

Non ci può essere inversione a "U", perché se fosse, utilizzando la tecnica delle vie di accesso del passo 2, le caselle delle prime due colonne risulterebbero piene, in violazione dei dati (vedi figura 3 a sinistra; è illustrato solo uno dei due casi possibili), oppure si creerebbe un tratto di percorso chiuso ad anello, cosa che è esclusa per ipotesi.

Perciò sotto al muretto ci sono due attraversamenti e la situazione diventa come figura 3 a destra.

Passo 4



Consideriamo ancora gli attraversamenti della terza colonna. Sappiamo che sono tre. Voglio stabilire che il primo che viene incontrato dal percorso è quello nella prima traversa.

Infatti: non può essere quello in settima traversa, dato che altrimenti il percorso dovrebbe collegare (restando a sinistra) gli attraversamenti in prima e in ottava, cosa che è impossibile senza intersecarsi.

Non può essere quello in ottava. Se lo fosse, la stessa tecnica del Passo 3, applicata questa volta dall'alto verso il basso mostrerebbe che le prime due colonne sono tutte attraversate, contro i dati.

Ne consegue che il primo attraversamento è quello in alto e che nelle prime due colonne avvengono due inversioni a "U" (una verso l'alto per passare dalla partenza al primo attraversamento e l'altra verso il basso per collegare i due attraversamenti sotto al muretto. Inoltre, la conta delle caselle piene ci dice che le due caselle vuote sono sulla stessa traversa, che può essere solo la seconda o la quarta.

La situazione è schematizzata dalla figura 4, dove il percorso tratteggiato indica che non abbiamo ancora stabilito l'altezza dove le inversioni a "U" hanno luogo: quella rappresentata è una delle due ipotesi possibili (con le caselle vuote nella quarta traversa).

Passo 5

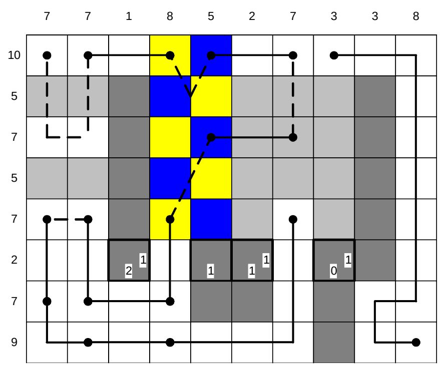
Consideriamo lo spazio centrale. Esso ha esattamente quattro vie d'accesso (1t,4c; 1t,8c; 5t,4c; 5t,7c). Sappiamo già che il primo ingresso è quello a nord-ovest e la seconda uscita è a nord-est. Voglio stabilire che la prima uscita è quella a sud-ovest (e, di conseguenza, il secondo ingresso è a sud-est).

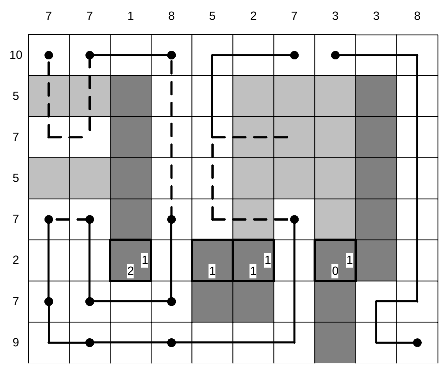
Se infatti il percorso uscisse da sud-est, rientrerebbe da sud ovest e non potrebbe uscire da nord-est senza intersecarsi nello spazio centrale.

Considero ora le caselle della quarta e quinta colonna al di sopra dei muretti. Le coloro a scacchiera alternativamente di giallo e blu, iniziando con il giallo. Studio ora i tratti di percorso che passano in questa zona. Dato che in sesta colonna ci sono solo due caselle piene, nella zona colorata ci può essere un solo tratto oppure due tratti. Non può essere un solo tratto (gli estremi sono a nord-ovest e sud-ovest, entrambi gialli).

Dimostro ora che il primo tratto entra a nord-ovest ed esce a sud-ovest. Se così non fosse, so che il percorso entra a nord-ovest, dopo un po' arriva in sesta colonna (dove fa qualcos'altro che non ci importa). Poi rientra in quinta colonna, per uscire da sud-ovest. Le uscite verso la sesta colonna sono già prese tutte, quindi i due tronconi devono toccare tutte le caselle colorate. Un troncone termina per forza in t1,c5 (che è blu) e deve essere iniziato su casella gialla (sia l'ingresso di nord-ovest, che quello di sud-ovest sono gialli).

Per facili ragioni di parità, anche il secondo troncone deve terminare in quinta colonna su casella blu. Non può essere in prima traversa (già occupata dall'altro troncone). Non può essere in quinta traversa (altrimenti il percorso si interseca, oppure si crea un anello nel tratto di percorso sotto ai muretti). Deve perciò essere in terza traversa. Si è perciò creata la situazione della figura 5 a sinistra. (ci sono dei tratteggi perché il percorso sulle caselle colorate non è univocamente determinato, ma importa poco).



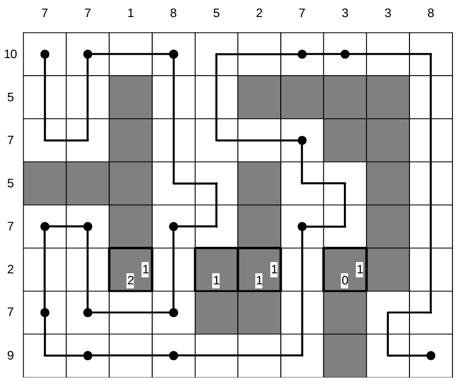


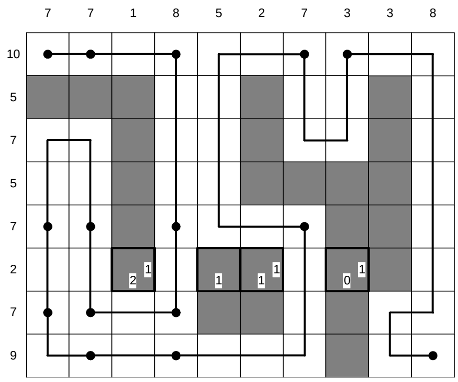
A questo punto siamo fritti: non c'è modo di congiungere l'estremo di sud-est con quello di nord-est rispettando il 3 dell'ottava colonna.

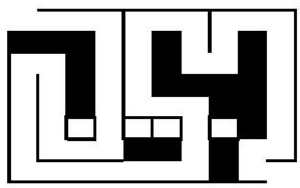
Ne segue che ci sono due tronconi, il primo che parte da nord-ovest e arriva a sud-ovest e il secondo che inizia in t1,c5 e termina su una casella blu di quinta colonna (figura 5 a destra), che può essere o quella in terza traversa, oppure in quinta.

Passo 6

Entrambi i casi descritti nel passo precedente sono possibili e ognuno conduce ad una soluzione accettabile. Semplici ragionamenti simili a quelli dei Passi 1 e 2 consentono di disegnare i percorsi completi in entrambi i casi. Le soluzioni sono in figura 6, che per quanto ho appena dimostrato, sono le uniche possibili.







La soluzione di ***Alessandro*** è in figura qui a lato, ed assomiglia decisamente alla seconda versione di ***Marco***.

6. Quick & Dirty

Dividete gli interi da 1 a 9 in tre insiemi di qualsiasi dimensione. Il prodotto degli interi di almeno un insieme è sempre maggiore di 71?

7. Pagina 46

In prima istanza, dimostriamo che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2,$$

affinando successivamente il calcolo.

Sia dato, per un determinato valore di n, il valore k per cui

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2^{k+1}.$$

Consideriamo ora la somma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\left(2^{k+1} - 1\right)^2}$$

e raggruppiamo i termini onde maggiorarli con il metodo di Oresme[22]:

[22] Si veda "La Serie Armonica", PM di RM 038 - Marzo 2002

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{\left(2^k\right)^2}+\frac{1}{\left(2^k+1\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2^{k+1}-1\right)^2}\right]<$$

$$1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots+\left[\frac{1}{\left(2^k\right)^2}+\frac{1}{\left(2^k\right)^2}+\ldots+\frac{1}{\left(2^k\right)^2}\right]=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}=\frac{1-\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^k}<2$$

che è la nostra prima tesi.

Per quanto riguarda l'affinamento del calcolo, si vede che è:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<$$
$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=$$
$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)-\frac{1}{4}$$

Ora, noto che[23]

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}<1$$

si ha

[23] Partendo dall'identitá:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

si ottiene

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$
$$\ldots,$$
$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$$

e, sommando tra di loro queste equazioni, otteniamo

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=1-\frac{1}{n}$$

che è la formula utilizzata.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(1-\frac{1}{3}\right)=1+\frac{3}{4}$$

che è la tesi.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Roba da Islandesi [3] - Le zanzare

Mi contraddico? Ebbene, mi contraddico.
In me è un universo, quindi contengo i miracoli.
W. Whitman, *Foglie d'erba* (traduzione *molto* libera[24])

...ammetto di avere una cosa in comune con gli Islandesi: la preoccupazione per le zanzare. Sono uno dei fortunati che viene, di norma, punto solo una volta l'anno; poi, probabilmente, si passano la voce.

Se la cosa è poco chiara, forse aiuta la citazione in testa; stiamo per parlare di una cosa della quale avevamo detto non avremmo parlato. Come al solito, prendiamola alla lontana.

L'idea è quella di trovare una formula, approssimativa quanto si vuole, per descrivere la crescita delle popolazioni; un risultato ragionevole, in questo campo, è stato ottenuto nel 1976 da ***Robert May*** (biologo), prendendo spunto dal modello logistico di ***Pierre François Verhulst***, che cercava di descrivere la variazione della popolazione in funzione dei parametri di nascita e di morte degli individui; le nascite erano considerate proporzionali al numero degli individui nella popolazione, mentre le morti dipendevano dalla massima capacitá dell'ambiente di nutrire la popolazione. Se consideriamo non i due parametri appena visti, ma il loro rapporto *r*, la formula per il numero di individui nell'anno *n+1* puó essere espressa in funzione degli individui presenti nell'anno *n* attraverso la:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \qquad \textbf{[8.1]}$$

dove $0 < x_n < 1$ è la popolazione all'anno *n*, mentre $r > 0$ è il rapporto tra nascita e morte.

La formula è ragionevolmente semplice da poter essere studiata con Excel ma, dato l'amore che mi unisce a questo applicativo, cerchiamo un'altra strada.

Una soluzione stabile (o, se preferite, un ***punto fisso***) sarà un punto per il quale otteniamo sempre lo stesso valore, ossia un valore x^* (si vede, che c'è l'asterisco?) per cui sia:

$$\begin{aligned} x^* &= f(x^*) \Rightarrow \\ x^* &= rx^*(1 - x^*) \end{aligned} \qquad \textbf{[8.2]}$$

che, risolta, fornisce (oltre al valore ***zero***) il valore:

$$x^* = 1 - \frac{1}{r}. \qquad \textbf{[8.3]}$$

Quindi, posto che si arrivi ad un valore stabile, ci aspettiamo che sia questo.

La stabilitá di un dato punto, peró, dipende dalla ***derivata*** della nostra funzione nel punto, che per noi vale $f'(x^*) = r - 2rx^*$; dato che $f'(0) = r$, l'origine risulta stabile per $r < 1$ e instabile per $r > 1$; più interessante il comportamento nell'altro punto, per cui abbiamo:

[24] ...ma che a me piace più dell'originale: *Do I contradict myself? / Very well then I contradict myself, / (I am large, I contain multitudes.)*. Capite, dire "large", di me, fa ridere...

$$f'(x^*) = r - 2r\left(1 - \frac{1}{r}\right) = 2 - r. \qquad \textbf{[8.4]}$$

Da cui, la soluzione **[3]** risulta stabile nell'intervallo $1 < r < 3$.

Va detto che "stabilità" può significare molte cose, e qui Excel aiuta; in ***Figura 1*** trovate l'andamento per $0 < r < 1$: evidentemente, se il tasso di morte è maggiore del tasso di nascita, la popolazione si estingue.

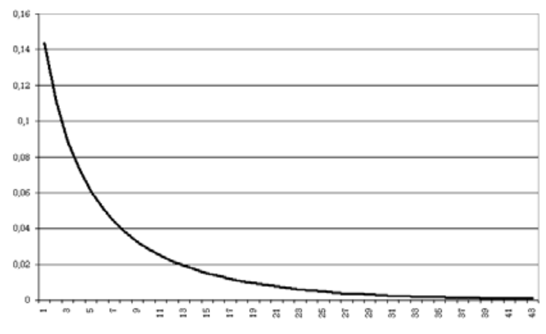


Figura 1 - $0 < r < 1$

Prendendo un valore leggermente più ottimista, come quello utilizzato in ***Figura 2***, per cui $1 < r < 2$, vediamo effettivamente la nostra popolazione stabilizzarsi ad un valore $\frac{r-1}{r}$ (anche se scritto leggermente diverso, è lo stesso valore ottenuto dalla **[3]**), in cui con passo lento e sicuro la nostra funzione cresce fino ad un certo punto e poi resta stabile.

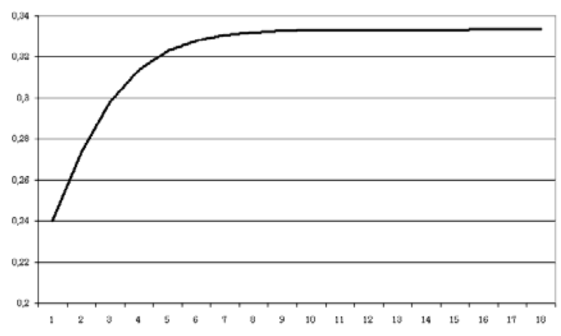


Figura 2 - $1 < r < 2$

Come dicevamo precedentemente, bisogna accordarsi su cosa significhi "stabilizzazione"; infatti, se proviamo qualche valore maggiore di 2, vediamo che pur raggiungendo sempre lo stesso valore, la nostra funzione prima ***oscilla*** tra valori maggiori e minori del nostro punto di arrivo; posto che vogliate provare a fare qualche calcolo, si vede che la velocità con la quale si arriva al punto di stabilizzazione è sempre più bassa.

Vedete questo comportamento in ***Figura 3***, dove abbiamo utilizzato $2 < r < 3$.

Il comportamento a partire dal punto per cui $r \geq 3$ comincia ad essere piuttosto strano; infatti, il sistema (come si vede dalla "tendenza" a rallentare nella convergenza per valori vicini a 3) si swtabilizza su ***due*** punti.

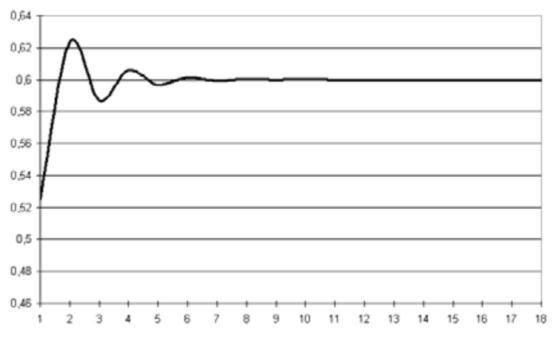


Figura 3 - $2 < r < 3$

Questo, se torniamo a vedere la nostra equazione originale, significa semplicemente che abbiamo trovato due punti *p* e *q* per cui valgono le due regole $f(p) = q$ e $f(q) = p$; in questo modo, la funzione è costretta a saltellare sempre tra questi due valori, non appena ne prende uno.

Calcolare quali siano questi punti non è difficile, nel momento stesso che si considera il fatto che, se ottengo prima l'uno e poi l'altro, *applicando due volte di seguito la funzione ottengo sempre lo stesso valore*; ossia, la funzione

$$f^2(x) = f(f(x)) \qquad \textbf{[8.5]}$$

ha un ***punto fisso*** in *p*. Per trovare il valore di *p*, dobbiamo risolvere allora l'equazione $f^2(x) = x$.

Il problema a questo punto è che se l'equazione di partenza era di secondo grado, qui bisogna lavorare con una *quartica*, e la cosa può non sembrare molto semplice; ricordiamo però che *giá conosciamo due soluzioni* della nostra equazione, che sono i punti fissi ottenuti precedentemente $x^* = 0$ e $x^* = 1 - \frac{1}{r}$; se fattorizziamo queste due soluzioni, l'equazione risultante sarà di secondo grado; le radici risultano

$$p, q = \frac{r + 1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}, \qquad \textbf{[8.6]}$$

che sono reali e distinte per $r > 3$; il comportamento della funzione, in questo caso, lo si vede in ***Figura 4*** che mostra il comportamento per $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

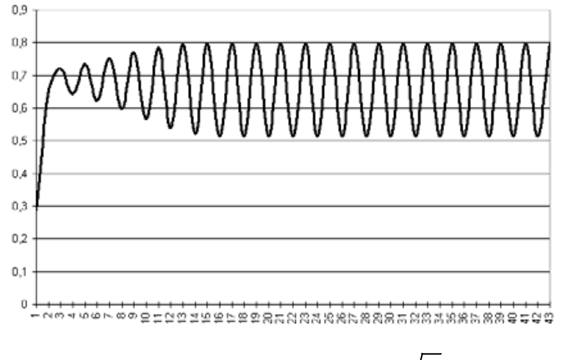


Figura 4 **-** $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Il motivo dello strano limite superiore dell'intervallo nasce dalla verifica della stabilità delle soluzioni trovate; questo richiede di individuare gli intervalli per cui è minore di 1 (in modulo) il moltiplicatore definito da:

$$\lambda = \frac{d}{dx}\left(f(f(x))\right)_{x=p};$$

nel nostro caso non è particolarmente complicato ma i calcoli sono piuttosto noiosi.

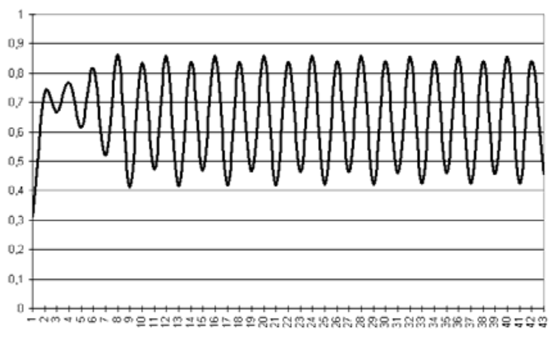


Figura 5 **-** $1 + \sqrt{6} < r < 3{,}54$

Con metodi simili (e calcoli più noiosi) si vede che oltre il valore $1 + \sqrt{6}$ i punti di oscillazione sono ***quattro*** (la cosa si vede in ***Figura 5***) ma la situazione dura poco; infatti, per valori maggiori di 3,54 i punti diventano ***otto***, poi ***sedici***... e il guaio è che questo succede ***sempre più spesso***. Bruttissimo.

In tutto questo disastro, fortunatamente, una buona notizia; ***Feigenbaum*** ha fatto un po' di conti in merito[25] e si è accorto di due cose

1. Il rapporto tra due intervalli successivi è ***costante***($\approx 0.4669\ldots$ e, giustamente, si chiama Costante di Feigenbaum).

[25] Più che altro delle prove: gli va comunque riconosciuto il merito di averle fatte, per via numerica, in un'epoca nella quale l'ultimo grido della scienza e della tecnica era la calcolatrice programmabile con un centinaio di passi: leggenda vuole che i "conti" siano stati fatti su una HP-65, e Excel allora era roba da Star Trek.

2. Non dipende dalla ***funzione*** che si utilizza: si ottengono gli stessi valori, ad esempio, con funzioni trigonometriche o iperboliche ($\approx 0.4669\ldots$ e, giustamente, si chiama Costante di Feigenbaum).

Bene, fermo restando che ne succedono di tutti i colori, potrebbe essere interessante trovare una rappresentazione grafica del tutto; la trovate qui di seguito in ***Figura 6*** (Ottenuta attraverso FractInt).

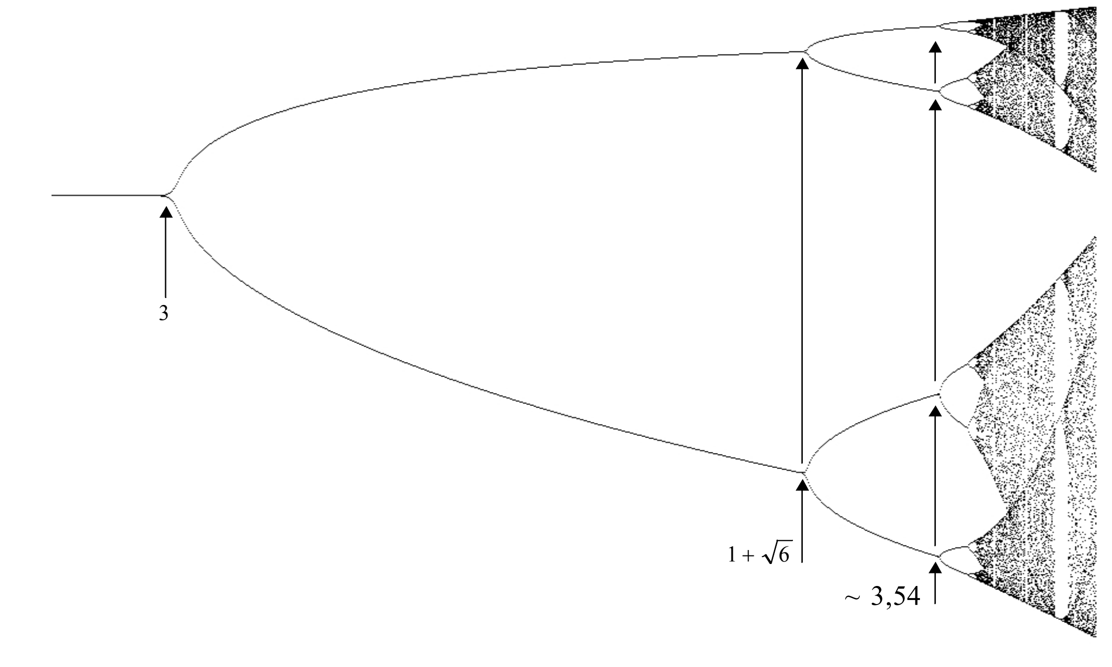


Figura 6 - Bifurcation

...il bello di certi frattali è che occupano pochissimo spazio; una volta tanto, l'immagine non appesantisce il numero della rivista, anche se verso la fine cercheremo di dare il nostro contributo in questo senso.

Che il grafico sia complicato, è indubbio; oltretutto, esistono dei valori (i "buchi" bianchi sulla destra) per i quali, dopo averci fatto perdere quasi tutte le speranze, sembra ricominciare a comportarsi bene, almeno per qualche tempo.

Esistono dei modi, decisamente complicati, per studiare un sistema del genere; uno è quello degli ***Esponenti di Lyapunov***, che ci permettono di stabilire quanto velocemente un sistema diverge (nello spazio delle fasi: volendo fare una brutale approssimazione, misura "quanti valori abbiamo" nel grafico qui sopra); gli esponenti sono, di solito, in numero uguale alle dimensioni che stiamo trattando ma, essendo qui interessati al fatto che il nostro sistema si comporti "male", è invalsa l'abitudine di considerare soltanto il maggiore.

La definizione degli esponenti di Lyapunov è piuttosto complessa e non staremo a tediarvi in merito; se siete interessati ad una trattazione formale vi consigliamo, come punto di partenza, la Wikipedia (in inglese: non ci risulta che quella parte sia stata tradotta in italiano) alla voce opportuna.

Fortunatamente, esistono dei metodi brutali che permettono di stimare con una certa precisione il comportamento dell'Esponente di Lyapunov dividendo per il numero dei cicli di calcolo il valore $\log|r-2rx|$ e studiando che valore si ottiene; i valori negativi indicano un comportamento stabile o ciclico, mentre quelli positivi indicano il caos; solitamente, si variano i colori nelle mappe in funzione del numero di cicli, riservando il nero per il comportamento caotico. Sembra strano ma come approssimazione è ragionevolmente buona, tant'è che è quella utilizzata in FractInt.

Bene, forti di questa rozza approssimazione di un magnifico strumento, proviamo a complicarci la vita, e a introdurre le zanzare.

L'idea è quella di avere due diversi sistemi logistici, o meglio far agire ***due parametri "r"*** su un medesimo sistema logistico e stare a guardare cosa succede.

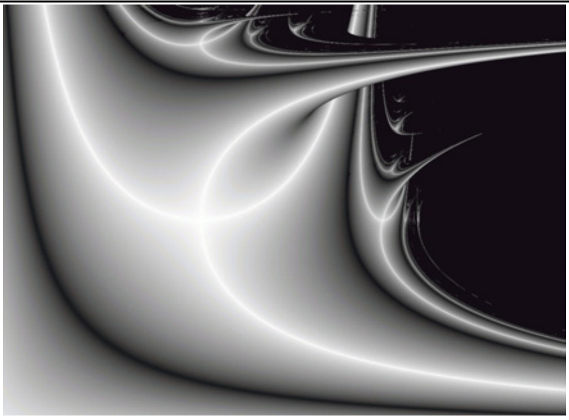


Figura 7 - Lyapunov, sequenza "ab"

Sì, ma come li alterniamo? Cominciamo da un caso semplice, una volta l'uno e una volta l'altro. Avete il risultato nell'immagine in ***Figura 7***, per quanto riguarda il quadrante positivo; gli altri quadranti, anche se non "agitati" come questo, sono comunque abbastanza interessanti e vi consigliamo di "farci un giro".

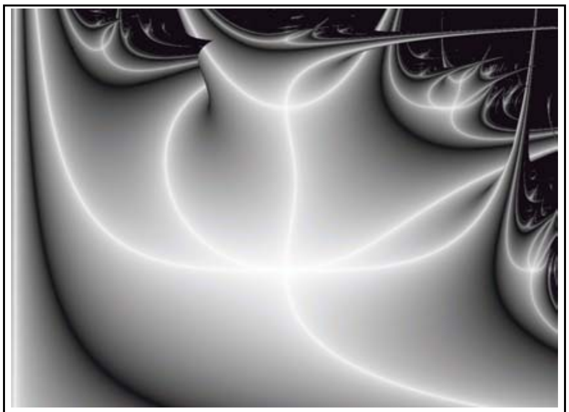


Figura 8 - Lyapunov, sequenza "aab"

L'immagine è stata ottenuta sempre attraverso FractInt, che permette di variare le sequenze utilizzate; dobbiamo però dire che, sadicamente, l'estensore di questa parte del programma ha deciso di complicarci piuttosto la vita. Infatti, per prima cosa bisogna costruire la sequenza in modo tale che *inizi con due a e termini con una b*, eventualmente scambiando *a* con *b* (il che ci causerà al più uno scambio tra i due assi ortogonali); quindi dovremo cancellare la prima *a* e l'ultima *b* e trasformare le *a* restanti in 1 e le *b* in 0 (la "doppia *a*" all'inizio ci garantisce che il numero inizia per 1), considerare il risultato come un numero binario e inserire il valore tra i parametri.

Se siete sopravvissuti a questo calcolo, sappiate che ha una specie di eccezione: il valore 0 corrisponde alla sequenza tracciata in ***Figura 7*** (quadrante positivo, mappa GAMMA1).

Figura 9 - Lyapunov, sequenza "aaabb"

Probabilmente la cosa non vi pare eccessivamente complessa; il mio consiglio è di provarci, possibilmente ingrandendo le parti in alto.

O, temerariamente, potreste provare con sequenze "vicine": ad esempio, in ***Figura 8*** trovate la sequenza sintetizzata da 1, e le cose già si complicano.

Solo per fare ancora un passo, il valore 2 lo trovate nella ***Figura 9***. Non procediamo oltre, ci limitiamo a segnalarvi che il sadico estensore dell'help (...chiamalo "help"...) forte del fatto che gli piacciono i sonetti, utilizza come esempio la sequenza che porta al valore 618, ma noi preferiamo mantenerci a quote più basse.

"E cosa c'entrano le zanzare?" Beh, la popolazione delle zanzare è influenzata da vari parametri; se uno di questi parametri presenta delle variabilità (come parametri potete scegliere, ad esempio, le condizioni metereologiche o la popolazione "appetibile[26]") possiamo studiare come evolve l'equazione logistica e scoprire se, quest'anno, saranno una fastidiosa presenza costante o si presenteranno a "ondate"...

Comunque, non scordate l'Autan®.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[26] Non sono assolutamente convinto dipenda, come diceva mia nonna, dall'avere il "sangue dolce". Siccome mi rendo conto che, per molta gente, questa è una catastrofe che si ripete annualmente mi interessa sapere se qualcuno ci ha studiato e scritto qualche articolo. Nel caso, fatecelo sapere, che qui siamo fermi a due ipotesi: una dal Manuale delle Giovani Marmotte ("I fiori di geranio, la sera, le tengono lontane") e l'altra di mia moglie ("Sarà quella schifezza che fumi nella pipa").