Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

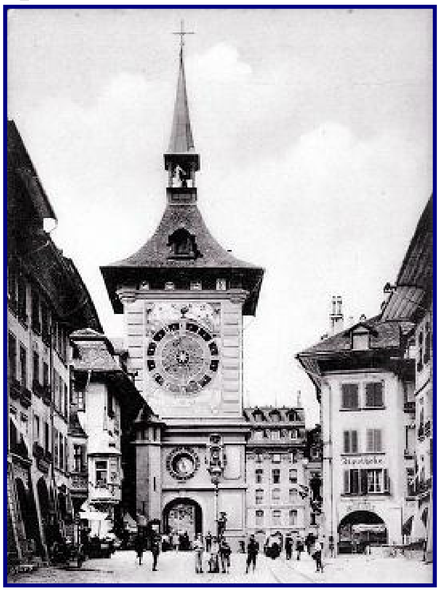
Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 074 – Marzo 2005- Anno SETTIMO

1. Varianti ed Invarianti

Gli dice Pilato: "Che cos'è la verità?"
E detto questo uscì di nuovo verso
i Giudei e disse loro:
"Io non trovo in lui nessuna colpa"
(Vangelo secondo Giovanni 18:38)

1.1 Variante per variante, variante al quadrato



La Zeitglockenturm a Berna

La Zeitglockenturm tace, finalmente. Non sempre i rintocchi della più celebre torre di Berna suonano piacevoli, quando si abita poco lontano da essa[1]. Il tempo che passa e scade con tautologica regolarità dovrebbe dare la possibilità di lasciarsi dimenticare, ogni tanto. Specialmente quando si abita in un appartamento piccolo e spoglio, senza troppe possibilità di avere un po' di solitudine, quando si è senza la speranza d'avere cinque minuti di concentrazione e di silenzio, o, come stasera, senza la possibilità di fuggire dagli occhi profondi e tristi di Mileva. Molto meglio continuare a guardare fuori dalla finestra, verso l'acciottolato lucido e bagnato della strada. È difficile guardare quegli occhi.

Ma li ha sempre più spesso, quegli occhi. Li indossa ogni volta che se ne sta lì, ad allattare Hans, con quell'espressione a mezza strada tra la colpevolezza e l'indagine. Canta sottovoce, si dondola piano e culla il piccolo, ma si vede che sta pensando a Lieserl. Dovrebbe avere due anni adesso, più o meno. Come si fa a cullare un figlio di pochi mesi senza pensare alla sorella, due anni appena, e già perduta per sempre? Non è possibile. Non ci si riesce. Quantomeno, Mileva non ci riesce, e allora si mette quegli occhi, e allatta, e dondola, e canta.

Un altro rintocco. La via è ancora umida, grigia, lucida e bagnata. Già scuro, in questo freddo Gennaio svizzero, ma almeno adesso Hans dorme nella sua culla. Se Hans dorme, Mileva forse ha cambiato occhi, forse è tornata ai fogli e alle formule, e forse allora si può continuare a guardare le gocce che cadono sul vetro senza rischio di vedere tristezza e rimprovero in quel volto piccolo e balcanico. O forse no, perché se è già sui fogli starà di nuovo parlando con Michele, e se parla con Michele non ci vorrà molto, prima che arrivino domande e richieste. E esortazioni. E stimoli, e pungoli, e ricerca affannosa d'entusiasmo. Senza più Lieserl negli occhi, senza più Hans fra le braccia, ma con altre intenzioni. Non sarà ancora possibile guardare la pioggia a lungo, stasera.

- Bert! Ci raggiungi un attimo, per favore? È importante!

Ciao, pioggia.

- Bert! Per favore…

- Sono qui. Solo un attimo.

La sedia, unica vuota delle tre attorno al tavolo. Bert la riempie stancamente, alza occhi e baffi verso Mileva, poi verso Michele, di nuovo verso la moglie.

- Io e Michele pensiamo che dovresti proprio riuscire a mettercela, nella terza relazione – dice Mileva tutto d'un fiato, orecchie sempre pronte a cogliere un vagito di Hans, sguardi in tralice a cercare conferma e supporto nell'espressione di Michele – è davvero improbabile che quella pubblicazione abbia varcato le Alpi, e se anche lo

[1] Al numero 49 di Kramgasse, per esempio.

avesse fatto, non è certo stata notata da nessuno di importante. E sarebbe un bel colpo di scena conclusivo, per l'articolo.

- Io credevo che stessi rivedendo ancora la matematica della prima…

- Ma sì, sì, quello l'ho già fatto. L'ha rivista anche Michele, e persino Marcel; e anche lui dice che non ci sono bestialità, nelle prime due memorie. Però lo sapevamo già, non saranno i formalismi a procurarci problemi, né per la "Lichtes Betreffenden" né per la "Suspendierten Teilchen". Quella che trattano è fisica, soprattutto fisica, molti concetti e poco formalismo. Se ci abbiamo preso, faranno certo un gran bel botto, ma è invece sulla terza che… Ma dicci qualcosa, insomma; sei sempre dell'idea di mandare anche quella agli "Annalen", vero?

- Credevo che avessimo già affrontato la questione… se dobbiamo mandarla, mandiamola. Però se davvero ritenete che la "follia" dell'italiano possa essere in qualche modo contrabbandata come conseguenza della "Elektrodynamic bewegter Korper", dovremo sfruttarla meglio. Ve l'ho già detto: trovate la maniera di giustificarla in qualche modo, e il più sarà fatto. Credo sia addirittura meglio scriverci una quarta memoria apposita, in maniera da rendere la cosa ancora più eclatante e spettacolare.

- Beh, non è che sia proprio una passeggiata, giustificarla – Michele parlava lento, senza guardare in faccia nessuno degli altri due – proprio per questo volevamo sapere cosa ne pensassi tu. Ve la sentite, tu e Mileva, di firmare una pubblicazione in cui sostenete un'enormità come l'equivalenza tra massa e energia? E di farlo senza avere la possibilità di mettere alcun riferimento serio in bibliografia, con il rischio che qualcuno si accorga che l'idea era già stata pubblicata in Italia, senza una vera pezza d'appoggio, senza niente?

Nella stanza accanto, Hans ricominciò a vagire. Mileva si alzò stancamente, e si avviò zoppicando verso la culla. Aveva di nuovo l'ombra di Lieserl negli occhi. Bert si avvicinò a Michele Besso, gli mise una mano sulla spalla, e con l'altra disegnò un arco a comprendere l'intero appartamento.

- Guardalo, Michele. È un appartamento da impiegato statale, grigio come il lavoro che faccio ogni giorno in ufficio. Mileva ha già quasi trent'anni, e nessuna residua possibilità di laurearsi e intraprendere una professione decente. Io devo provare a diventare professore, devo per forza, capisci? Ci sono delle idee passabili, nei nostri scritti, e Mileva è brava, col formalismo matematico. Dei tre articoli, basta che solo uno abbia un po' di risonanza, e forse mi aprirà la possibilità d'una carriera accademica. Forse non serve neppure che regga ad esami accurati, forse può bastare che incuriosisca un po' gli addetti ai lavori, e che il cognome scritto in copertina diventi familiare nell'ambiente dei fisici; solo questo, forse, basterà a far sì che i signori dell'ETH si ricordino di avermi già visto a Zurigo, e poi, magari, chissà… Però deve essere qualcosa che colpisca, che faccia davvero impressione. I quanti, certo: non si parla d'altro, di questi tempi, e "quanti di luce" è una bella frase d'effetto, e quella nostra prima idea potrebbe davvero funzionare, se siamo fortunati. Ma anche se non funzionasse, se ne parlerà lo stesso. E prima ancora che l'eco si sia spenta, faremo in modo che abbiano da pensare al moto delle particelle in sospensione. Anche quest'analisi non è nuovissima, ma lo è il punto di vista: soprattutto, se pubblicati uno dopo l'altro, quei due articoli riusciranno a far superare al mio nome la barriera del ricordo. Poi, prima ancora che l'eco si spenga, proveremo con l'Elettrodinamica dei corpi in Movimento. Non dobbiamo, non possiamo lasciar passare troppo tempo! Però, se la pubblichiamo per prima, il rischio è che non venga neanche presa in considerazione, neanche letta. Saranno comunque in molti a non comprenderla, anche così, e a maggior ragione dobbiamo per forza aprirle la strada prima…

- Va bene, ma non potremmo fermarci qui? Ognuna delle tre è un rischio, perché aggiungerne un quarto, il più grosso di tutti, il meno originale di tutti? E se qualcuno conosce il De Pretto?

- Il tempo, Michele, il tempo… Non avranno tempo di capire, e non devono averne. L'italiano ha pubblicato, ma, a ben vedere, anche quella sua idea non è poi totalmente nuova. Ne parlò, ne scrisse, Poincaré. Ne parlò, quasi scherzando, lo stesso Newton. Non serve che sia vera, serve solo che possa esserlo. A quel punto, il mio nome sarà già abbastanza famoso.

- Solo il tuo? Credevo che l'avreste firmata entrambi, tu e Mileva. E magari anche Marcel…

- Marcel non ha bisogno di pubblicità, o meglio, ad essere franchi, credo che lui pensi che questi siano cavalli buoni solo per chi non ha niente da perdere, non per chi ha già una buona carriera davanti a sé. E per quanto riguarda Mileva… non so, lo confesso. Il suo nome dovrebbe certo figurare, visto il gran lavoro che ha fatto, ma già il mio è nome debole, al limite del dilettantismo; il suo, poi, senza neanche un decente titolo di studio… Tu, piuttosto: tu dovresti quanto meno essere citato, da qualche parte.

- Non pensare a me, adesso. Sono un ingegnere, non aspiro certo a cattedre, io. Ma Mileva? Non credi che lei abbia almeno desiderio di vedere i vostri cognomi accoppiati in copertina?

- Ne abbiamo discusso un po', e a dire il vero è lei stessa ad essere molto cauta, in proposito. Io non so bene cosa fare… un nome solo si ricorda meglio, e poi siamo sposati, e allora un cognome solo può bastare per entrambi, no?

Michele alzò lo sguardo. Sul vano della porta che separava il soggiorno dalla stanza da letto Mileva stava in piedi, appoggiata allo stipite, cullando ancora il piccolo Hans.

- Albert ha ragione, Michele – disse sospirando, quasi senza alzare lo sguardo dal figlio – Siamo una famiglia, siamo un solo nome, tutti e due. Siamo "una sola pietra", no? E allora, che vale? Basta e avanza il cognome di famiglia: anche io sono una Einstein.

1.2 Prima variante: Mileva

A. Einstein nel periodo di Aarau

Quando varca i cancelli dell'ETH[2] di Zurigo, Mileva Maric è soltanto la quinta donna ad essere ammessa in quell'Istituto. Non è già più una giovinetta: corre l'anno 1896 e lei, nata a Titel, in Vojvodina (Serbia)[3] nel giorno della vigilia di Natale del 1875, ha già quasi ventun anni. Non sono anni in cui è facile per le donne frequentare gli istituti universitari, e la giovane serba ha optato per Zurigo proprio perché sono pochissime le università europee che accettano donne tra i loro studenti. Pur essendo storicamente la quinta a varcare i cancelli dell'Istituto, Mileva non ha nessuna compagna con cui instaurare una qualche complicità femminile: nel 1896 è l'unica donna del suo corso di studi. Del resto, la sua classe non è certo molto

[2] Eidgenössische Technische Hochschule, Istituto Federale Svizzero di Tecnologia.

[3] Tutte le fonti concordano nel definire Mileva Maric "serba", ma alcune sostengono che sia nata a Zagabria. Nel dubbio, preferiamo lasciarla nascere in un piccolo centro serbo, piuttosto che nella capitale croata.

frequentata: gli studenti sono poco numerosi, e uno di essi è un ragazzino tedesco di diciassette anni appena, che come lei ha la famiglia lontana: tra Milano e Pavia, in Italia. Il ragazzino non è già più cittadino tedesco, non è ancora cittadino svizzero, e non sembra essere destinato ad un avvenire brillante. Qualche tempo prima aveva fallito l'esame di ammissione all'ETH (che peraltro aveva tentato in anticipo sui tempi, grazie ad una speciale dispensa), ed aveva ripiegato andando a studiare in un liceo di Aarau per preparare un secondo tentativo, quello che avrà poi miglior esito proprio nel 1896. Tra i pochi studenti della sua classe non appare come il più dotato: non certo quanto Marcel Grossmann, ad esempio, giovane ungherese di solo un anno più vecchio, che già palesa tutti i sintomi d'una grande mente matematica.


Mileva Maric Einstein

C'è uno strano miscuglio di moderno e d'antico, in questa storia di inizio ventesimo secolo: Mileva viaggia come una giovane donna dei nostri tempi, attraversando mezza Europa alla ricerca della migliore università: viene spontaneo considerarla dotata e intraprendente, giudizi che si concedono ancor oggi a fanciulle disposte a vivere da sole in terra straniera pur di costruirsi una formazione adeguata. Di famiglia non ricca, ma comunque appartenente alla borghesia serba, giunge a Zurigo dove presumibilmente sarà ancora considerato una stranezza, un segno dei tempi, vederla sedere in gonna lunga e crinoline nei banchi popolati quasi esclusivamente dai maschi. Ancora quattro anni più tardi, in Germania, Emmy Noether avrebbe avuto ben maggiori difficoltà solo per ottenere il permesso di assistere alle lezioni dell'università di Erlangen, senza neanche ottenere lo status di "studente". Mileva affronta un primo anno di studi a Zurigo in maniera molto brillante, al punto di ottenere per l'anno successivo un semestre di studio ad Heidelberg. Una brillante carriera al femminile sembra aprirsi per la giovane serba: ma un essere umano è un sistema complesso e complicato, e con fragilità impreviste. Mileva è claudicante dalla nascita, e nonostante una indiscutibile fierezza negli occhi tramandataci dalle sue foto dell'epoca, non è quella che si possa definire una bellezza classica. È circondata da pochi compagni di classe, tutti più giovani di lei, e forse si sente fragile anche per essere di qualche anno più vecchia di loro. Forse per bisogno di vincere le sue paure, forse per innata fragilità, forse per pura passione e affinità elettive, Mileva si ritrova ad imbastire una storia d'amore con quel compagno di classe di quattro anni più giovane. Nel 1899 Albert Einstein ha vent'anni, Mileva Maric ventiquattro: si frequentano con assiduità, e le rispettive famiglie sono al corrente della loro relazione. Forse perché poco fiduciosi nel fascino femminile dei Mileva, forse perché ventiquattro anni non vengono a quei tempi considerati troppo pochi per un matrimonio, non sembra che la famiglia Maric si sia mai opposta alla relazione tra i due studenti dell'ETH. Sono Hermann e Pauline Einstein che, da Milano, si oppongono vigorosamente: Mileva è troppo vecchia per Albert, è zoppa, e, per quel che può contare, non è neanche ebrea. Non è quanto hanno sognato come nuora, non è la persona giusta per quel figlio che vive da solo a Zurigo.

In qualche modo, la relazione sembra influire anche sul rendimento di entrambi: Albert è sempre stato uno studente anomalo, molto brillante in alcune materie e del tutto apatico in altre, ma Mileva aveva sempre raggiunto un buon profitto: eppure, forse a causa dell'innamoramento, forse a causa delle difficoltà che esso comporta, forse per altre cause del tutto inconoscibili, gli esami che entrambi affrontano nel 1900 hanno esiti abbastanza disastrosi. Albert arriva ad una media di 4,91 su 6,00, Mileva si ferma a 4,00. Gli esiti finali respingono Mileva, che non riuscirà mai più ad ottenere il diploma, mentre Albert riesce ad ottenere l'ambito riconoscimento, ma senza particolari meriti. Di tutti i diplomati della sua classe, è l'unico a cui non viene offerto direttamente un lavoro.

Il nuovo secolo inizia in maniera non troppo esaltante, per la coppia: Albert cerca un impiego, e negli archivi dell'ETH è ancora conservato un suo annuncio in cui si offre come insegnante per lezioni private: per buona parte del 1901 torna presso la famiglia a Milano, mentre Mileva non lascia Zurigo. Nella tarda primavera, a Maggio, i due riescono a incontrarsi per qualche giorno sul lago di Como: è probabile che le loro preoccupazioni principali siano, in quel periodo, la necessità di ritentare l'esame all'ETH per Mileva, per non dilapidare anni di studi, e un posto di lavoro per Albert: è ancora apolide, e l'ottenimento della cittadinanza svizzera dev'essere un'altra ragione di cruccio. Dopo quei pochi giorni di vacanza lacustre, entrambi avranno un altro elemento di preoccupazione: qualche tempo dopo essere rientrata a Zurigo, Mileva si accorge di essere incinta.

La scoperta non deve essere delle più rasserenanti: l'estate e gli esami di fine corso sono alle porte, e Mileva fallisce di nuovo l'ottenimento del diploma. Gli amici svizzeri della coppia si prodigano per far ottenere un posto di lavoro e un reddito sicuro ad Albert, anche perché la famiglia Einstein continua a non vedere di buon occhio la relazione tra i due giovani. I buoni uffici di Marcel Grossmann riusciranno alla fine, nel 1902, ad aprire ad Einstein le porte dell'Ufficio Brevetti di Berna, ma non abbastanza in fretta per addolcire la gravidanza di Mileva. Sola, non maritata, incinta, in terra straniera, con famiglia e compagno lontano, rattristata dal secondo fallimento consecutivo agli esami dell'ETH, è difficile che la giovane promessa della scienza serba abbia trascorso una serena attesa del suo primogenito. Decide infine di tornare in Serbia, a Novi Sad, dove avrà accanto almeno la famiglia, al momento del parto: ed è a Novi Sad che vede la luce Lieserl, in pieno inverno, a Gennaio.

Non è davvero facile immaginare cosa deve essere passato per la mente di Albert Einstein e di Mileva Maric in quei primi giorni del 1902. La necessità d'un lavoro, la precaria condizione professionale di Albert, la più che precaria condizione generale di Mileva, i difficili rapporti con le famiglie. Non è una situazione sostenibile: in qualche maniera, Lieserl deve uscire dalla vita della coppia, e ne esce, infatti. Non si sa con certezza neppure quale sia stato il suo destino, se sia deceduta in tenerissima età per un attacco di scarlattina o se, come sembra più probabile, sia stata affidata in adozione a qualche famiglia di Novi Sad. Sia come sia, Lieserl Einstein perde la vita o cambia cognome senza che suo padre, a quanto sembra, sia mai riuscito a vederla.

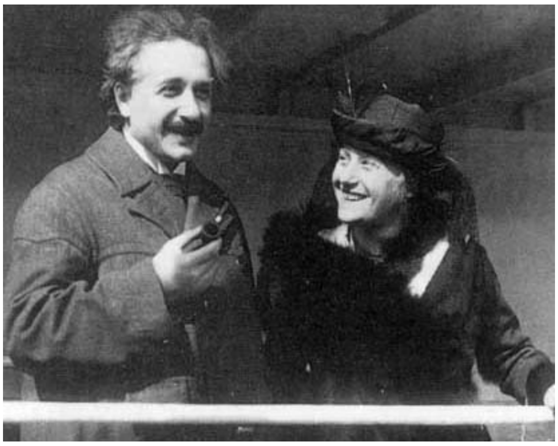
Quello stesso anno sembra chiudersi però in maniera migliore di come è iniziato: quando Albert trova lavoro e casa a Berna, Mileva può raggiungerlo e la coppia si riunisce. Nella capitale svizzera, nel giorno dell'Epifania del 1903, i due si sposano: comincia per entrambi quella che sembra essere destinata ad essere una vita normale d'una normale coppia piccolo-borghese.

Nel 1904 nasce Hans Albert, mentre il padre, approfittando del tempo libero che gli lascia il lavoro non troppo impegnativo all'Ufficio Brevetti, comincia a pubblicare qualche articolo scientifico, senza però suscitare troppo clamore. Ma dopo il 1904 arriva il 1905, anno che placidamente rivoluzionerà il mondo scientifico.

E non solo quello scientifico. Occorrerà del tempo affinché i colpi delle pubblicazioni einsteiniane del 1905 vengano assorbite, ma la vita di Einstein vivrà quell'anno comunque come uno spartiacque indelebile. Ci vorranno altri dieci anni prima di arrivare alla Relatività Generale del 1916, ne dovranno passare ancora quattro prima che il suo nome diventi abbastanza famoso da potersi dimettere dall'Ufficio Brevetti, nel 1909, per andare ad occupare cattedre accademiche: Zurigo prima, poi

Praga, per una breve parentesi, poi ancora Zurigo. Più avanti, non avrà che da scegliere: non ci sarà istituzione che non gli farebbe ponti d'oro per averlo. Dal mero punto di vista della produzione scientifica significativa e rivoluzionaria, comunque, quasi tutto quel che di Einstein rimane è racchiuso tra il 1905 e il 1919: dopo il 1919, Einstein si dedicherà quasi esclusivamente alla Teoria del Campo Unificato, senza ottenere però risultati realmente significativi. Dopo il 1905, tutti i suoi sforzi son destinati al grandioso lavoro di integrazione delle forze gravitazionali nei principi della Relatività Speciale, al fine di partorire la Relatività Generale. L'esplosione creativa del 1905, che dal nulla sembra aver di fatto "cambiato tutta la fisica" resta brillante e misteriosa come l'accensione d'una supernova nel noioso cielo d'estate.

E diventa inevitabile chiedersi quale sia stato il ruolo dell'ambiente, nella generazione di una tale esplosione creativa: come sempre succede, il riconoscimento pubblico del genio avviene necessariamente in ritardo, e per Einstein la regola non viene smentita. Ma è un riconoscimento senza precedenti, nella storia moderna: si varcano le frontiere ristrette degli ambienti accademici, si infrangono le comunità degli addetti ai lavori, e il nome di Albert Einstein, specialmente negli ultimi anni della sua vita, diventa sinonimo assoluto di genio scientifico. Saltano tutte le sfumature di grigio, perché è così che accade sempre nei processi che portano alla fama e alla celebrità: bianco o nero, e Einstein è di un bianco accecante. Alla fine, sarà una figura pubblica di grandissimo rilievo e non limitata all'ambito scientifico; la sua immagine diventerà un bene prezioso, e non soltanto per lui stesso. Qualunque siano state le cause, forse pubbliche, forse private, forse semplicemente di salvaguardia della privacy, fatto sta che Einstein non palesò mai le sue vicissitudini private giovanili. A Princeton, dove alla fine si trasferirà definitivamente, viveva serenamente con Elsa Löwenthal, una sua cugina sposata in seconde nozze, e con le figlie di questa; le corrispondenze e le carte che rivelarono le sue vicissitudini private con Mileva saranno rese note solo molti anni dopo la sua morte[4]. Sono carte che intaccano l'immagine che il mondo ha di Albert Einstein, e siccome la celebrità e il mito implicano anche oneri, oltre che onori, sono molti i curiosi che hanno indagato sui contenuti e sui fatti privati della coppia.



Albert ed Elsa 1921

Il matrimonio tra Albert e Mileva non entra subito in crisi, dopo il 1905, ma non procede di vita serena. Non sembrano esserci troppe ombre fino al 1909, e nel 1910 nasce un altro figlio della coppia, Eduard. Dal 1912, la crisi familiare va in crescendo, fino a raggiungere l'acme nel 1914. Albert frequenta già Elsa, e nel 1916 finisce con chiedere il divorzio. Per parte sua, Mileva vede crollare sostanzialmente ogni suo sogno: il matrimonio fallisce, ha due figli ancora piccoli a cui badare,

[4] Tutte le carte einsteiniane furono affidate dal fisico alla segretaria Helen Dukas e a Otto Nathan, che le protessero a lungo dalla curiosità sia degli scienziati che della gente comune. Riuscirono ad evitare la pubblicazione di un libro di Frieda, moglie di Hans Albert Einstein, e quindi nuora dello scienziato. Anche a causa della volontà di Einstein di destinare ogni suo scritto alla Hebrew University, anche un progetto di pubblicazione della Princeton Press (CPAE- Collected Papers of Albert Einstein) viene ostacolato. Infine, l'editore del CPAE scopre dell'esistenza di lettere personali di Einstein, raggiunge Evelyn Einstein, figlia di Frieda e Hans Albert, che ha ancora il manoscritto inedito della madre, ma non le lettere originali. Messisi alla ricerca, l'editore e la nipote di Einstein alla fine trovano in una cassetta di sicurezza quattrocento lettere di famiglia, e ricostruiscono la storia di Mileva. Nel 1987 (e poi nuovamente nel 1982) vengono pubblicate in libri della Princeton Press.

e come se non bastasse Eduard, l'ultimogenito, palesa già qualche sintomo di confusione, forse già un prodromo di quella che, in età adulta, si rivelerà essere una forma di schizofrenia. Circondata anche da altre serie difficoltà familiari (una sorella, anche essa con disturbi psichici che la costringono a lunghi ricoveri ospedalieri, l'ha raggiunta a Zurigo) alla fine si dice disposta a concedere il divorzio, richiedendo che le vengano versati i soldi del Nobel che si prevede Albert vincerà di lì a qualche anno. Nel 1921, Albert manterrà fede all'impegno e consegnerà integralmente a Mileva il denaro del premio della Reale Accademia di Svezia.

Mileva resta sempre a Zurigo, dove muore e viene sepolta nel 1948. Quando la sua storia viene resa pubblica, sono in molti a voler indagare e scavare nelle vite private dei due, estraendo anche con un filo di perversa e soddisfatta indignazione gli aneddoti più tristi e cupi che hanno accompagnato la crisi del matrimonio dello scienziato più famoso del mondo. Particolari anche molto imbarazzanti vengono pubblicati e si procede con soddisfazione al tentativo di distruggere un mito, che è attività certo non meno divertente di quella di costruirlo. Quando il clamore scandalistico si placa, agli storici della scienza resta comunque più di un interrogativo aperto: Mileva Maric Einstein aveva per certo la formazione d'una fisica, e altrettanto per certo finì con l'abbandonare le sue ambizioni accademiche e di ricerca scientifica a causa della sua relazione e del suo matrimonio con Albert Einstein. È ben difficile immaginare che due compagni di studi universitari, innamorati e conviventi, non parlino e non condividano idee e opinioni durante la stesura da parte di uno di essi dei più importanti articoli di fisica del secolo: è ancora più difficile cercare di capire in quale misura un partner possa aver attivamente contribuito alla creazione scientifica dell'altro. Finché si resta nell'opinabile, tutto lo spettro delle possibilità rimane aperto: esistono partigiani dell'immagine di Albert Einstein come scienziato unico e solitario, i quali sostengono che al massimo Mileva può aver contribuito alla correzione delle bozze delle memorie, e forse neanche a quello. Esistono partiti che più si sentono vicini alla figura tragica di Mileva, come alcune associazioni femministe o alcuni enti che difendono la cultura e la scienza nazionale serba, che invece arrivano a sostenere che il vero autore della Teoria della Relatività sia Mileva Maric, relegando Einstein a bieco profittatore delle capacità della coniuge. Una posizione intermedia che raccoglie diversi consensi è quella che immagina Mileva incaricata dei controlli e degli sviluppi della matematica presente negli articoli, cavalcando la ben nota immagine di un Einstein profondamente "fisico e concettuale", ma con qualche difficoltà nel districarsi nel formalismo matematico. Le carte della coppia vengono passate al setaccio, e da una parte e dall'altra si punta l'attenzione su singoli passi: un aggettivo possessivo plurale invece che singolare, se riferito alla parola "lavoro", scatena dibattiti a non finire. Da una parte, c'è l'immagine sacra del genio solitario del ventesimo secolo che è assai difficile da scalfire, dall'altra c'è la curiosità puntuale e un certo desiderio di giustizia storica da rivendicare. La maggior parte degli esperti oggi conclude che non c'è prova certa che Mileva Maric abbia, in grado maggiore o minore, fornito contributi originali alla Teoria della Relatività e alle altre memorie del 1905: una sorta di sospensione del giudizio, insomma, accompagnata dalla constatazione (o "concessione") che non era insolito, a quei tempi, che una moglie si dedicasse interamente e oscuramente a curare famiglia e interessi del marito, lasciando i posteri nella totale impossibilità di separare i suoi eventuali contribuiti originali da quelli del coniuge. "Siamo entrambi Einstein" è una frase che Mileva Maric diceva davvero.

1.3 Seconda variante: Olinto[5]

> "La materia di un corpo qualunque, contiene in se stessa una somma di energia rappresentata dall'intera massa del corpo, che si muovesse tutta unita ed in blocco nello spazio, colla medesima velocità delle singole particelle. (...) La formula mv^2 ci dà la forza viva e la formula $(mv^2)/8338$ ci dà, espressa in calorie, tale energia. Dato adunque m=1 e v uguale a **300 milioni di metri**, che sarebbe la velocità della luce, ammessa anche per l'etere, ciascuno potrà vedere che si ottiene una quantità di calorie rappresentata da **10974 seguito da 9 zeri** e cioè oltre dieci milioni di milioni. A quale risultato spaventoso ci ha mai condotto il nostro ragionamento? Nessuno vorrà facilmente ammettere che immagazzinata ed allo stato latente, in un chilogrammo di materia qualunque, completamente nascosta a tutte le nostre investigazioni, si celi una tale somma di energia, equivalente alla quantità che si può svolgere da milioni e milioni di chilogrammi di carbone; l'idea sarà senz'altro giudicata da pazzi."
>
> *"Ipotesi dell'etere nella vita dell'universo",*
> *Olinto de Pretto, Aprile 1903.*
> *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze,*
> *Lettere e Arti, tomo LXIII, parte II,*
> *pagine 439-550, Febbraio 1904.*

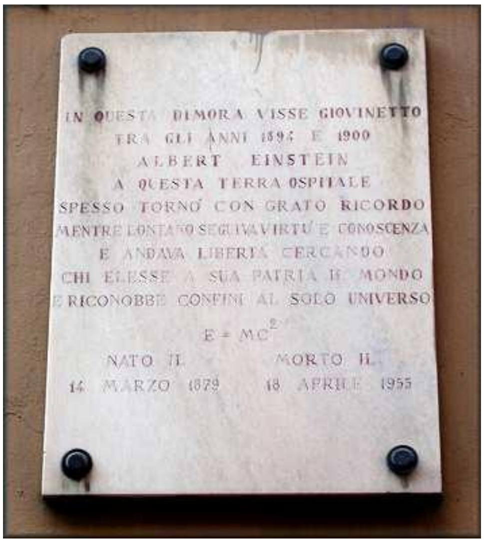
Eugualeemmeciquadro. Neanche più una formula, ormai: risuona quasi come un mantra laico e universale, un decasillabo ritmato, una dichiarazione d'intenti. Si può non riconoscerla come l'equivalenza tra massa e energia, ma saranno comunque riconoscibili i cinque segni che la compongono. Si può non sapere cosa sia la E, la m, o la c che spudoratamente si riproduce e si moltiplica per sé stessa, ma si riconosce sempre, quasi misticamente, la formula nel suo insieme. Qualcuno la conoscerà come la "formula della bomba atomica", facendole così un drastico servizio di riduzione, essendo ben di più che la ricetta di un esplosivo. Se esistono persone che conoscono una sola formula, di certo conoscono proprio questa: $E=mc^2$, evocativa quanto lo è "abracadabra", buona da scrivere di nascosto sulle lavagne, ottima da incastrare in marchi commerciali hi-tech, da ripetersi in cerca di conforto prima d'un esame, così come si recita una preghiera, o quasi. Einstein la evoca ma non la esplicita, nelle sue memorie relativistiche del 1905, ma è la sua firma nella storia, legata a lui quanto lo è la croce per Gesù Cristo, totalmente e inevitabilmente. Quasi una rivelazione, un vangelo, nell'immaginario collettivo: e forse il "quasi" è di troppo.

Albert Einstein con Michele Besso

Il quarto articolo del 1905, il secondo

[5] A parte le solite farneticazioni e opinioni personali dell'autore dei compleanni di RM, che ormai i lettori di RM ben conoscono e sapranno facilmente riconoscere anche stavolta, quasi tutte le informazioni storiche e i riferimenti seri di questo paragrafo sono stati selvaggiamente saccheggiati dall'articolo "Albert Einstein e Olinto De Pretto: un dimenticato precursore italiano dell'equivalenza tra massa e energia" di U. Bartocci e M.Mamone Capria. L'articolo nella sua interezza (e non solo l'articolo) sono raggiungibili al sito http://www.dipmat.unipg.it/~bartocci/depre.html.

destinato alla Relatività, non ha riferimenti o bibliografie. Einstein si limita a riportare un unico ringraziamento, e il destinatario dell'onore è Michele Besso, che per tutta la vita resterà il migliore amico del fisico. La dedica, posta in coda all'articolo, recita: *"A conclusione osservo che durante il lavoro ai problemi qui trattati il mio amico e collega M. Besso mi stette fedelmente a fianco e che io devo allo stesso parecchi preziosi incitamenti"*. Mancano altre referenze, così usuali nelle pubblicazioni scientifiche: predecessori, paralleli, precedenti più o meno prossimi al contenuto della pubblicazione, conforti autorevoli da chiamare a garanzia e a difesa delle critiche. Niente, a parte quel "grazie" a Besso. Michele Angelo Besso è un ingegnere svizzero, anche se il nome rivela ampiamente le sue origini italiane. Nato a Trieste[6] nel 1873, anche Besso frequenta l'ETH di Zurigo, ma cinque anni prima di quanto faccia Albert Einstein; molto bravo in matematica e affascinato dalla fisica teorica, diventa amico del fisico tedesco prima per affinità musicali, poi per quelle più generali affinità che sempre si ritrovano nella nascita delle amicizie durature. Parlano insieme di fisica, ma non solo: sarà Albert a presentare a Michele quella che poi diventerà la signora Besso, e quando i due novelli sposi dovranno tornare in Italia per mancanza di lavoro sarà Einstein che riuscirà, nel 1904, a trovare a Besso un posto non dissimile dal suo, a Berna, nell'Ufficio Brevetti. Le famiglie Einstein e Besso si frequentano, e Michele e Albert continueranno a scriversi per più di mezzo secolo, che significa che rimarranno in contatto per tutta la vita. Saranno confidenti fino alla fine, che arriverà quasi in simultanea per entrambi. Besso morirà a Ginevra il 15 Marzo 1955, Einstein a Princeton il 18 Aprile dello stesso anno; giusto il tempo, o quasi, di scrivere ai parenti di Michele una poetica lettera di condoglianze, che termina con la frase *"…per coloro che credono nella fisica, la separazione tra passato, presente e futuro è soltanto un'illusione, per quanto tenace"*. A Berna, tra il 1904 e il 1905, Besso è cassa di risonanza per le teorie di Einstein: *"sono stato il tuo pubblico nel 1904 e nel 1905…"*, scrive Besso ad Einstein, e la dedica nella memoria relativistica conferma splendidamente questo debito di riconoscenza verso l'ingegnere italo-svizzero.

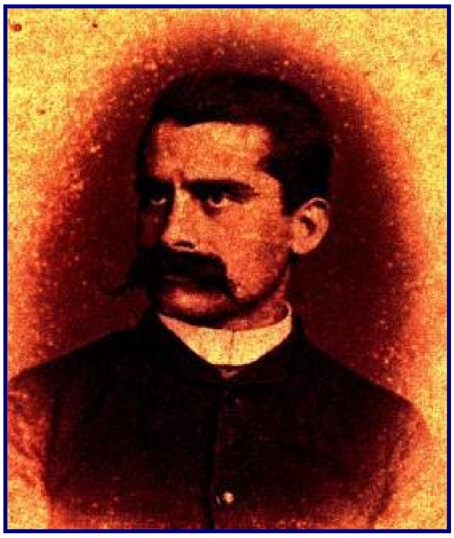


Via Bigli 21, a Milano

Può forse risultare curioso, per gli italici lettori di queste pagine, constatare come l'Italia fosse ben presente nella vita dell'Einstein di inizio secolo, e non solo per la sua posizione geografica subito a sud di quelle Alpi che Albert vedeva ogni giorno. La sua famiglia d'origine e quella del suo migliore amico sono entrambe nel paese giardino d'Europa, ed entrambi vi si recano di tanto in tanto, per una ragione o per l'altra. Einstein scrive e parla tedesco per tutta la sua vita, parla e scrive in inglese durante i suoi ultimi anni americani, ha studiato francese, oltre che latino: ma non può non conoscere almeno un po' d'italiano. È quasi certo che lo parlasse fluentemente, ed è oggettivamente difficile immaginarsi il

[6] Finché non lo si prova direttamente, è difficile rendersi conto del senso di frustrazione che anche le più piccole e assolutamente dilettantesche ricerche storiche (come sono quelle che servono a scrivere questi compleanni) riescono a causare. Se nella nota numero 3 segnalavamo l'incertezza del luogo di nascita di Mileva Maric, non ci troviamo in condizioni migliori con Michele Angelo Besso, anzi. Altre fonti, che però ci sembrano assai meno accurate dell'articolo di Bartocci e Mamone Capria che citiamo nella nota precedente, fanno nascere Besso non a Trieste (che, vale la pena ricordare, nel 1873 non era ancora città italiana) ma direttamente a Riesbach, che è praticamente un sobborgo di Zurigo.

contrario, visti i suoi trascorsi in Lombardia, la sua vita e la situazione geografica della sua famiglia. Michele Besso non è in condizioni diverse, anzi. Se il padre di Albert, Hermann Einstein, gira per il nord Italia come direttore della "Privilegiata Impresa Elettrica Einstein", uno zio di Michele, Beniamino Besso, ha un ruolo importante nel sistema ferroviario italiano, ed è al pari del nipote affascinato dalla "teoria e pratica" delle scienze fisiche. Una delle solite capriole della storia fa sì che tra i "colleghi" di questo zio di Michele figuri un ingegnere di vaglia, Augusto De Pretto, che avrà una brillante carriera nei Lavori Pubblici del regno. E quest'ingegnere ha un fratello visionario e creativo, che scrive memorie e articoli sull'etere e sull'energia.



Olinto De Pretto

Congetture. Niente più che congetture, quelle che seguono: però è vero che le pubblicazioni italiane di inizio Novecento hanno poca diffusione nell'ambiente scientifico internazionale proprio a causa della lingua, e, anche se si è ben lontani da poterne avere la certezza, la catena di contatti tra Olinto De Pretto, autore di una curiosa pubblicazione del 1904 in cui si discetta di equivalenza tra massa ed energia, e Albert Einstein, padre di $E=mc^2$, passa attraversi pochi passaggi e forti legami: Olinto e Augusto De Pretto sono fratelli; Michele e Beniamino Besso sono zio e nipote, e molto legati: Michele viveva presso lo zio, quando, prima di giungere all'ETH di Zurigo, studiava nei licei romani. Tra Besso e Einstein si è già visto quanto fosse solida l'amicizia, e anche l'anello più debole della catena, quello tra Beniamino Besso e Augusto De Pretto non è poi del tutto fragile, essendo i due colleghi, e accomunati da interessi scientifici. Per buon peso, la memoria di De Pretto, per quanto possa essere stata poco dibattuta, aveva la magica parola "etere" nel titolo, e vista l'importanza che ha l'etere (anzi, la sua assenza) nella Relatività Speciale, è virtualmente indubbio che Einstein la avrebbe letta, se solo ne avesse intravisto da qualche parte il titolo. Congetture; si resta, come quasi sempre accade, nel mare magnum delle congetture. Si parla di possibilità, non di certezze, ma questo accade molto più spesso di quanto si potrebbe normalmente pensare. La parola "verità" è una delle più dibattute dai filosofi, oltre che una delle più soggette a continua ridefinizione da parte degli scienziati: per gli storici (compresi gli storici della scienza) essa è poco più di un indirizzo deontologico e idealistico: bisogna cercare di ricostruirla, bisogna provarci disperatamente e affannosamente, ma senza avere neppure la certezza che sia mai esistita davvero. Che cos'è la verità?

Se è davvero difficile cercare di capire davvero quale possa essere stata la genesi della formula più famosa del mondo, è altrettanto certo che l'immagine mitica e consolidata nella cultura collettiva dello scienziato solitario e spettinato che pensoso si interroga sulle carte o di fronte ad una muta lavagna è altrettanto lontana dalla inconoscibile "verità". Ancora più lontana, forse, l'idea di una genesi globale, radicale, ex-novo di tutte le teorie einsteiniane: il vero capolavoro della Relatività Speciale non è la creazione di formule, ma la capacità di cambiare il modo di guardare a quelle formule, a quei concetti; anche perché molte delle formule esistevano già, si stagliavano da tempo su quaderni e libri, si mostravano funzionanti e possibili, ma senza che nessuno realmente le comprendesse nella loro interezza. Quantomeno, senza che nessuno le interpretasse come manifestazioni d'una rivoluzionaria

Weltanschauung: l'etere era già stato abbattuto da Michelson e Morley, e le "trasformate di Lorentz" e la "contrazione di Fitzgerald" non sono battezzate con nomi di fantasia, ma con riferimento a persone che avevano già in mano un algoritmo matematico in grado di calcolare alcuni fenomeni misteriosi, pur senza avere un'idea generale dei fenomeni stessi. E sull'equivalenza tra massa ed energia, la cui estensione trascende e supera la teoria della relatività, non disse "cose da pazzi" soltanto Olinto De Pretto. Come sempre nelle ricerche fatte col senno di poi, molto dipende da quale sia lo sguardo di chi legge, oltre che la penna di chi scrive; però la lista dei possibili precursori di Einstein è davvero lunga. Newton, 1704: *"…i corpi dotati di massa e la luce sono convertibili gli uni nell'altra…"*. Tolver Preston, 1875: scrive il suo libro "Fisica dell'Etere" e vi asserisce in prosa articolata che l'energia è proporzionale alla massa moltiplicata il quadrato della velocità della luce, e di seguito porta qualche esempio esplicativo *"… la massa di un grano contiene un'energia non inferiore a quella posseduta da una massa di quarantamila tonnellate che si muova alla velocità di una palla da cannone (1200 piedi al secondo)…"*. Poincaré, 1900: introduce un "Momento di Radiazione" che esprime come S/c^2, laddove S è il flusso di radiazione. Alla fine della dissertazione, trattando degli effetti di rinculo della radiazione, giunge all'espressione $mv=(E/c^2)c$, dove è evidente che, almeno dal punto di vista dimensionale, $m=E/c^2$. E dopo Poincaré[7], Olinto de Pretto, con la sua memoria di cui riportiamo il passo cruciale ad inizio capitolo; e dopo De Pretto, anche Fritz Hasenohrl, che arrivò ad un $m=8/3(E/c^2)$, salvo poi accorgersi d'un errore e ridurre il coefficiente 8/3 a solo 4/3, ma perdendo l'occasione di correggere da solo l'ultimo errore, quello che un suo commentatore trovò in seguito nei suoi calcoli, e che una volta eliminato riduceva il coefficiente 4/3 ad un invisibile 1. E poi Planck, nel 1907 (e quindi dopo l'articolo einsteiniano), ma in maniera del tutto indipendente da Einstein. E, volendo, si può anche rendere tutto più truce e dozzinale, fino ad elencare le critiche piovute addosso alla terza memoria einsteiniana del 1905, perchè non sembra giustificare appieno la celeberrima equazione di equivalenza tra massa ed energia. E quindi qualche inevitabile sospetto di plagio, e accuse, e difese, e le polemiche che da sempre tormentano la scienza quando questa è ancora fresca cronaca, più ancora e più ferocemente di quanto faccia quando infine la cronaca diventa storia.

[7] E' difficile sbarazzarsi di Poincaré in poche righe, quando si parla di Relatività Ristretta. Se la letteratura inglese ha la sua celebre leggenda che insinua il sospetto che le opere di William Shakespeare non possono essere state scritte da una persona dalle origini così poco letterarie, sostenendo pertanto che il vero autore di tutte le commedie e le tragedie del bardo di Stratford on Avon sia stato in realtà Sir Francis Bacon, la matematica e la fisica di inizio Novecento hanno una storia del tutto analoga da raccontare. C'è infatti chi ritiene che il vero autore della Teoria della Relatività sia appunto Poincaré, e non Einstein: l'impiegatuccio svizzero-tedesco non poteva certo partorire un simile capolavoro, mentre il matematico francese era certo molto interessato alle applicazioni matematiche in fisica, come dimostrano le sue opere dell'epoca. I sostenitori dell'ardita ipotesi non sono comunque mai troppo chiari (come, del resto, non lo sono neppure i sostenitori dell'ipotesi Bacon versus Shakespeare) sul perché Poincaré non avrebbe dovuto prendersi la responsabilità diretta della pubblicazione della Teoria della Relatività. Un aspetto meno radicale, ma estremamente divertente dell'influsso di Poincaré su Einstein (del quale sono debitore al GC e al suo sterminato archivio cartaceo) è che uno studio recente ha condotto un parallelo tra Picasso ed Einstein. Il primo, celeberrimo quadro "cubista" del pittore di Malaga, "Les demoiselles d'Avignon", è infatti del 1906, quasi contemporaneo alle memorie di Einstein sulla Relatività Speciale: e, come in quegli articoli di fisica teorica, anche su quella tela del pittore spagnolo il concetto di "spazio" viene definitivamente rotto e rivoluzionato nella storia dell'arte. Indagini sulla vita di Picasso hanno portato alla conclusione che la rivoluzione cubista sia stata ispirata dalla crisi del concetto di simultaneità nello spazio, in maniera non diversa da come la Relatività è stata inizialmente ispirata dalla crisi del concetto di simultaneità nel tempo. Picasso e Einstein non si conoscevano, ma sembra dimostrato che entrambi siano stati profondamente influenzati dalla lettura di *"La Science et l'hypothese*", il libro fondamentale del 1902 in cui Poincaré tenta una geometrizzazione della natura.

1.4 Invarianti

"Tutto è relativo" è la frase che più frequentemente viene attribuita ad Albert Einstein, ma sembra proprio che il fisico nativo di Ulm non l'abbia mai pronunciata. Di certo, se mai lo fece, non la declamò con l'intento di dire qualcosa di memorabile, anche se di frasi celebri di Einstein ne esistono centinaia: e questo perché, nonostante il nome abbia senza dubbio un certo fascino e molto successo, la Teoria della Relatività è diretta molto di più alla ricerca delle invarianti che delle varianti relative ai vari sistemi di riferimento. Ma esisteva già la Relatività galileiana, che esprimeva quali fossero le trasformazioni necessarie per analizzare la cinematica di un oggetto in sistemi di riferimento diversi, e poiché la teoria einsteiniana partiva proprio da considerazioni analoghe (riservandosi comunque di modificare sostanzialmente l'approccio classico in materia), il nome "Relatività" restò inevitabilmente attaccato alla teoria. Ciò non di meno, uno degli aspetti centrali della Teoria della Relatività Speciale è proprio quello di abbattere i concetti classici di tempo e spazio assoluto (cosa che in parte, e con approccio più epistemologico che fisico, era già stata fatta da Ernst Mach) e la connessa convinzione dell'esistenza d'un sistema di riferimento privilegiato, ma cercando allo stesso tempo di determinare quale fossero le grandezze che comunque rimanevano invarianti nonostante questa democratizzazione di osservatori e di sistemi di riferimento. Il "cronotopo", lo spaziotempo quadridimensionale, viene introdotto esattamente a questo scopo.

Un desiderio analogo di consistenza e certezza nasce quando si cerca di indagare sugli eventi che portarono alla nascita della Teoria della Relatività e del mito di Albert Einstein: le due possibili "varianti" introdotte nei primi capitoli di quest'articolo sono ben lungi dall'essere le uniche voci dissonanti dalla storiografia ufficiale einsteiniana: l'impatto che la figura di Albert Einstein ha sull'immaginazione dell'opinione pubblica è ancora così forte che, inevitabilmente, qualsiasi possibile "variante" fa notizia, raccoglie l'interesse (e le conseguenti critiche, positive o negative) del pubblico; conseguentemente, il terreno è fertile per ogni novità, minimo aneddoto o scoperta sensazionale che sia.

Come si è visto nelle pagine precedenti, chi scrive queste note ha seri problemi anche solo a scoprire la città di nascita di personaggi nati poco più di un secolo fa, e questo basta a mostrare quanto poco autorevole sia come commentatore di argomenti ancora densi di contenzioso storico; non ha la minima idea di quanto sia realistica o romantica l'ipotesi di una Mileva Maric che contribuisce in maniera creativa ai lavori del 1905, e men che meno riesce a valutare le reali possibilità che Einstein possa o meno aver letto la memoria di Olinto De Pretto, ed esserne stato in qualche misura influenzato. Sono eventi entrambi possibili, con qualche probabilità di essere realmente accaduti. A fortiori, l'immaginaria ricostruzione narrativa riportata in testa a questo scritto, che volutamente coniuga entrambe le possibili "varianti", ha una probabilità proporzionalmente piccola[8] di essere un quadro realistico di una serata del 1905 di Albert Einstein. È però bene comprendere che anche l'immagine mitizzata dello scienziato è altrettanto fuori della realtà: Einstein non era un extraterrestre, anche se qualche film[9] tenta di spacciarlo per tale; era probabilmente superiore, ma non infinitamente superiore, ai molti scienziati a lui contemporanei, in alcuni aspetti fondamentali dell'indagine scientifica. Non era un matematico di

[8] Anzi, più piccola ancora: la probabilità totale è data infatti non solo dal prodotto della probabilità che Mileva avesse un ruolo creativo nelle memorie del 1905 per la probabilità che Einstein avesse effettivamente letto la memoria di Olinto De Pretto, perché la piccola e perfida narrazione presuppone anche una esplicita "volontà di plagio" da parte di Einstein. Cosa che non è affatto scontata, invece: esistono molti modi legittimi di essere "influenzati" da una lettura, senza necessariamente finire nel dolo premeditato.

[9] Ipotesi ventilata, ad esempio, da "Incontri Ravvicinati del Terzo Tipo", di Steven Spielberg.

levatura eccezionale, anche se l'uomo della strada, se richiesto di pronunciare il nome del maggior matematico del XX secolo, quasi inevitabilmente pronuncerà il suo; non ha creato dal nulla e in perfetta solitudine le sue teorie. Aveva una incredibile capacità di porsi le domande giuste, e una superlativa capacità di cercare le risposte in modo non convenzionale: il coraggio del rivoluzionario certo non gli faceva difetto. Dal momento in cui viene riconosciuto come "genio" (e questo momento può grosso modo collocarsi in corrispondenza della conferma sperimentale, da parte di Sir Arthur Eddington durante l'eclisse del 1919 della previsione einsteiniana della deviazione della luce in corrispondenza di masse gravitazionali), e soprattutto durante tutto il suo periodo americano, Einstein fu eletto a simbolo della fisica, della scienza, dell'intelligenza, della saggezza. Come tutte le mitizzazioni, anche questa aveva connaturate delle contraddizioni: si può essere il miglior fisico teorico di tutti i tempi e essere nel contempo poco abile come presidente del neonato stato di Israele, eppure la presidenza gli fu offerta davvero. Un'ottima dimostrazione della saggezza "reale" di Einstein sta proprio nel coraggio che mostrò nel rifiutarla. Era davvero diventato un simbolo, più che uno scienziato: Leo Szilard non avrebbe alcuna speranza di far giungere la sua esortazione a costruire la bomba atomica nelle mani di Franklin Delano Roosevelt, se, al fondo di quella lettera non ci fosse stata la firma di Albert Einstein[10].

Forse anche per questo esiste una vera cornucopia di sue citazioni, e quasi tutte sono davvero profonde, intelligenti, e tali da mostrare che l'uomo Einstein era davvero un uomo eccezionale. Eccezionale, ma non perfetto: la semplificazione che lo voleva ad un tempo genio, santo e totalmente privo di difetti è frutto del mito, che può resistere solo se è semplice da comprendere, e senza dubbi fastidiosi. Per questo, tra tutte le citazioni famose einsteiniane quella che più ce lo rende simpatico è una delle meno note, che recita: *"Mi sento come Re Mida, solo che tutto quello che tocco non si trasforma in oro, ma in un circo"*.

Anche se in questo mese cade il 126° anniversario della sua nascita, anche se fra qualche giorno appena cadrà il cinquantesimo anniversario della sua morte[11], ci sembra più significativo accodarci alle celebrazioni che hanno decretato il 2005 "Anno della Fisica" perché cade un secolo dopo il celeberrimo 1905. Abbiamo la convinzione che Einstein, pur con tutti i suoi umani difetti, con la sua poca maestria nel condurre i rapporti familiari, pur con l'inevitabile immodestia che milioni di adulatori devono alla fine avergli almeno in parte procurato, sarebbe lieto di vedere celebrare il suo "annus mirabilis" più ancora che sé stesso. Nel 1905, il mondo della fisica prende

[10] Molto si è scritto sulla lettera di Einstein a Roosevelt, in cui si attira l'attenzione del presidente americano sulla necessità di dedicare uomini e risorse alla produzione di armi atomiche. A molti, la lettera in questione, accompagnata dalla "formula della bomba atomica, $E=mc^2$", basta e avanza per classificare Einstein come l'inventore di tutti gli ordigni nucleari. In realtà la lettera fu fortissimamente voluta (e scritta) da Leo Szilard, fisico ungherese, che fece di tutto per convincere Einstein a firmarla. Questo fa concludere, ad altri più informati, che il vero guerrafondaio sia stato, appunto, Szilard. Ma la verità, come sembra sottintendere Pilato, è spesso nascosta e difficile da conoscere per intero. Szilard era terrorizzato dalla possibilità che la Germania nazista potesse produrre l'atomica, e fece davvero di tutto per sollecitare gli USA ad inaugurare un progetto per la creazioni di atomiche americane. Nonostante la firma di Einstein, la lettera non ebbe comunque molto effetto: era datata 2 Agosto 1939, e a smuovere la ritrosia del governo americano non bastò neppure, un mese esatto dopo, l'invasione della Polonia da parte di Hitler. Il progetto Manhattan partì solo nell'agosto del 1942, dopo Pearl Harbor e relativo ingresso in guerra degli Stati Uniti. Szilard prese parte attivamente al progetto, ma quando comprese che nè la Germania nè il Giappone sarebbero mai riusciti a vincere la corsa all'atomica, cominciò ad essere terrorizzato all'idea che gli USA usassero comunque la bomba contro i giapponesi. Fu il più acceso sostenitore della necessità di evitare di sganciare la bomba su Hiroshima, e fece circolare la più autorevole petizione contro l'atomica. Rimase profondamente sconvolto dagli effetti delle due bombe americane sul Giappone, al punto di abbandonare la fisica per darsi alla biologia, e per tutta la vita fu uno dei massimi riferimenti contro la proliferazione nucleare.

[11] Albert Einstein nasce ad Ulm il 14 Marzo 1879. Muore a Princeton il 18 Aprile 1955.

coscienza di alcune fondamentali e rivoluzionarie scoperte: che siano tutte integralmente prodotto del genio di Albert Einstein o meno, è comunque in quest'anno che esse vedono "pienamente" la luce. Sono le invarianti che stiamo cercando, perché da qualunque punto di vista lo si voglia guardare, quanto accade nell'annus mirabilis einsteniano resta assolutamente stupefacente e magicamente misterioso. Da marzo a settembre la più prestigiosa rivista di fisica dell'epoca, gli "Annalen der Physik", pubblica quattro articoli a firma del quasi totalmente sconosciuto impiegato dell'Ufficio Brevetti di Berna. Ognuno di quei quattro articoli possiede una carica dirompente e rivoluzionaria per la fisica dell'Ottocento, ognuno di quei quattro basterebbe a rendere celebre e rispettato il suo autore, ognuno di quei quattro potrebbe essere il coronamento finale d'una lunga e brillante carriera accademica.

Marzo: memoria sull'effetto fotoelettrico[12]. Il quanto d'azione introdotto quasi controvoglia da Planck nel 1900 prolifica nell'einsteiniano "quanto di luce", il fotone; si rimette in discussione la natura puramente ondulatoria della luce, si risolve uno degli aspetti ancora inspiegabili per la fisica classica, e viene introdotto il concetto di quantizzazione dell'energia. Da solo, quest'articoletto primaverile giustifica il premio Nobel della Fisica che Einstein riceverà nel 1921.

Maggio: memoria sul moto browniano[13]. "Date uno sguardo con occhi nuovi alle particelle in sospensione in un liquido", sembra suggerire Einstein in questo articolo, "e se non siete ancora convinti della natura atomica della materia, forse i dubbi vi lasceranno". Utilizzando un fenomeno che i biologi osservavano regolarmente ma che restava ancora inspiegato, Einstein dà un altro colpo importante alla vecchia idea del "continuo" in fisica e nella teoria dell'energia cinetica e in termodinamica. Il meno celebre e celebrato degli articoli del 1905 basta da solo a garantire all'autore un posto perenne nei libri di fisica.

Giugno: Elettromagnetismo e Movimento[14]. Non ci sarà nessun premio Nobel per quest'articolo, perché, in fondo, i premi sono dati da istituzioni a coloro che meglio ottengono risultati nell'ambito degli avvenimenti controllati dalle istituzioni stesse, e non sono in grado di darlo a chi rovescia per intero il mondo su cui quelle istituzioni poggiano. Einstein racconterà spesso che fin da piccolo si interrogava su come potesse apparire il mondo se lo si potesse osservare cavalcando un raggio di luce; ciò che quel pensiero ha generato, lo si ritrova in quest'articolo. Bisogna guardare alla luce, al tempo, allo spazio, allo stesso concetto di misura, con occhi diversi di quelli della fisica classica. L'elettromagnetismo e la sua manifestazione più evidente, la luce, sono intrecciati strutturalmente con la meccanica: è la nascita della Teoria della Relatività Speciale. Non è solo la spiegazione di problemi ancora insoluti, ma una rivisitazione integrale dei fondamenti della fisica, a partire da Galileo e Newton. Un articolo di fisica che non interesserà solo i fisici, ma arriverà col tempo ai filosofi e alla gente comune.

Settembre: tra le altre conseguenze della memoria di giugno (e ci vorranno decenni perché siano pienamente acquisite), una viene già descritta nel quarto articolo[15] del 1905. Dal moto alla quantità di moto, attraverso la massa; dall'elettromagnetismo formalizzato da Maxwell alla luce, e attraverso questa all'energia. Le correlazioni non sono casuali, ma strutturali. La massa dei corpi, la materia insomma, coincide

---

[12] *Über einen die Erzeugung und Verwandlung del Lichtes betreffenden heuristischen gesichpunkt.*

[13] *Die von der molekularkinetischen Theorie der Warme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen.*

[14] *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.*

[15] *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieeinhalt abhängig?*

con l'energia. Sono equivalenti, esprimono lo stesso concetto, a meno di una semplice costante moltiplicativa: il quadrato della velocità della luce nel vuoto.

Cento anni fa esatti: un secolo, ormai. Questo 2005, quinto anno del ventunesimo secolo, si chiama "Anno della Fisica" proprio per celebrare il quinto anno del ventesimo, così prodigo per la scienza di Newton. Speriamo che almeno un po' riesca a somigliargli.

1.5 Covarianti

A differenza di Newton, che è il solo fisico a cui si osi compararlo, Einstein non fu mai un vero matematico. Fu fisico, profondamente fisico, e come tale doveva necessariamente avere una buonissima conoscenza e un'altrettanto ottima familiarità con gli strumenti matematici: conosceva senza dubbio molta più matematica di qualsiasi redattore di riviste di matematica ricreativa, ma la sua non era comunque una "mente matematica": la sua modalità d'indagine del mondo era quella del fisico, anzi, del filosofo naturale. Ciononostante, non esiste e non potrà mai esistere una qualsiasi storia della matematica che non parli di Einstein, perché poche altre volte nella storia della scienza la matematica è stata messa così fortemente sotto esame da parte delle teorie fisiche: e ha superato la verifica con il massimo dei voti.

Dal suo inizio fino al suo massimo trionfo, la Relatività ha sempre avuto implicazioni matematiche profonde: si è già visto come Poincaré fosse in qualche modo apparentabile alla Teoria della Relatività Ristretta, e Poincaré è uno dei due massimi matematici dell'epoca: l'altro è David Hilbert, che sarà il primo a scrivere le equazioni definitive della Teoria della Relatività Generale[16]. Comunque, tra questi due estremi, sono moltissimi i matematici puri che devono fare i conti con le fantasie einsteniane. Soprattutto la Relatività Generale, con la conseguente rivisitazione dei fenomeni gravitazionali, richiede strumenti matematici inaspettati. Quando Einstein si rese conto di aver bisogno d'una nuova matematica, si rivolse al primo della classe. Al primo della sua classe all'ETH, quel Marcel Grossmann che fu uno dei suoi migliori amici e al quale doveva anche il posto all'ufficio brevetti di Berna. Grossmann si mise alla ricerca di qualcosa di adatto, e scoprì un intero sistema di calcolo che era stato sviluppato come sempre si sviluppano le cose della matematica: senza il minimo riguardo a che possano poi essere applicate o meno alla fisica o a qualsiasi altra cosa. Ancora una volta, è la terra che giace a sud delle Alpi Svizzere che offre il suo contributo: il calcolo tensoriale, o calcolo differenziale assoluto, è soprattutto una disciplina italiana. In Italia, Gregorio Ricci-Curbastro lo ha sviluppato tra il 1888 e il 1892: ha poi preso sotto la sua ala protettrice il migliore dei suoi studenti, Tullio Levi-Civita, e con lui continuerà l'investigazione sui tensori: nel 1900 pubblicano insieme "Metodi di calcolo differenziale assoluto e loro applicazioni", ed è a questo testo che Albert Einstein fa riferimento nello sviluppo della sua Teoria della Relatività Generale.

Ma non basta: è sempre la relatività che mette drasticamente sul tavolo delle discussioni scientifiche la questione della geometria dello spazio, dell'Universo. Si era sempre presupposto, in ultima analisi, che lo spazio fisico fosse niente più che spazio euclideo, ma la rivoluzione einsteiniana costringe a porsi la domanda con occhi nuovi. Così, altre intere branche della matematica, anche queste nate senza la minima

[16] Accenniamo a questo anche nel compleanno di Emmy Noether, "Questione di Attributi", RM50. Per non essere dai meno di coloro che sostengono che il vero autore delle memorie einsteiniane è Mileva Maric, in quello scritto ventiliamo l'ipotesi (assolutamente non corroborata da prove, ma quantomeno del tutto originale, a quanto ci risulta) che alla stesura delle equazioni della Relatività Generale possa aver contribuito Emmy Amalie Noether. Insomma, quando si parla di Relatività, "cherchez la femme".

speranza iniziale di poter un giorno diventare "descrittrici del mondo", vengono guardate e studiate con occhi nuovi. Le geometrie non euclidee di Hermann Minkowski e di Bernhard Riemann acquistano improvvisamente un'importanza e un'urgenza del tutto nuove.

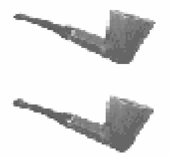
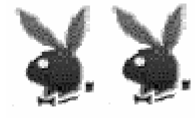
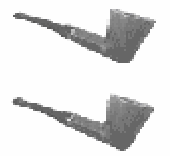
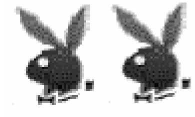
C'è una frase famosa che viene attribuita a molti autori diversi: probabilmente non si tratta di errori di attribuzione, quanto piuttosto del semplice fatto che la frase contiene una meraviglia che molti grandi studiosi hanno provato, e hanno sentito ogni volta il bisogno di esternare tale loro profondo stupore. Anche Einstein è tra questi, e questo stupefacente concetto, detto con le sue parole, suona così: *"Com'è possibile che la matematica, che in fin dei conti è un prodotto del pensiero umano indipendente dall'esperienza, sia così meravigliosamente adattabile agli oggetti della realtà?"*. È lo stesso stupore di Galileo, quando osserva che il libro della natura è scritto in caratteri matematici. Però Einstein viaggia in uno strano territorio di confine, e il suo stupore dovrebbe essere ancora maggiore di quello del pisano: Galileo ha "una sola matematica", e si stupisce che con essa si riesca a descrivere molta parte della natura. Einstein ha visto il trionfo della fisica ottocentesca, e la perfetta descrizione di quasi ogni evento conoscibile attraverso le equazioni di Newton, di Maxwell, di molti altri; è stato l'artefice principale del terremoto che ha minato lo stupendo edificio della scienza positivista e sicura di sé, ha abolito gli assoluti, ha aumentato le dimensioni dell'universo, lo ha piegato ad una nuova geometria. Ha visto le fondamenta della fisica crollare, e con esse ha visto tremare la matematica che ne era il cemento collante. Ha cominciato a costruire nuovi concetti fondamentali, e ha subito trovato altro cemento, più solido del precedente, per costruire il suo nuovo edificio.

Se è stupefacente vedere un sistema fisico magicamente sorretto dalla matematica, quanto è stupefacente vederlo crollare, volerne erigere un altro più resistente e duraturo, e trovare già pronta la malta matematica necessaria alla costruzione?

Forse, non si tratta di coincidenza. È già strano trovare una perfetta aderenza tra due discipline teoricamente indipendenti l'una dall'altra, diventa stranissimo, incredibile, supporre che l'aderenza si rinnovi anche nelle generazioni successive di quelle stesse discipline.

Forse, la fisica indaga il cosmo, e ne cerca le ragioni; forse, la matematica è la maniera profonda e coerente che ha l'uomo di ragionare. Se così fosse, non ci sarebbe più occasione di meraviglia, nel constatare che le leggi fisiche sono descrivibili da formule matematiche: anzi, ci sarebbe una sorta di maledizione implicita nel cervello dell'uomo, una gabbia dalla quale non può, per propria natura, scappare: la sua sola possibilità di conoscenza coerente sarebbe infatti proprio la conoscenza matematica, e dire che le leggi della fisica sono scritte in caratteri matematici equivarrebbe, molto meno misteriosamente, a dire che le leggi della fisica sono riportate dall'uomo nei soli caratteri che l'uomo riesce a comprendere.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Problema che gira			
La scozzata faraone			

Meta-Problema: Oibò!

2.1 Problema che gira

No, non avete sbagliato rubrica; siamo nei problemi, non nella posta.

Però questo mese sono circolate una serie di mail da parte di ***Fabio*** *[...apprezziamo la sua sfrenata fantasia nella ricerca degli allonimi...(RdA)]* relative all Compleanno scritto da ***Dario*** *[Qui non diciamo niente: lui l'allonimo ce l'ha, ma per problemi di copyright ha pubblicato con il nome "non di qui" (RdA)]* nel quale si parlava di un problema piuttosto vecchiotto e piuttosto noto. Come direbbero alcuni nostri amici, prima o poi "ce tocca", quindi lo trattiamo qui. Credo la prima versione sia in latino, ve la risparmio. Vi ricordo che il periodo non è proprio quello della tolleranza religiosa e della fratellanza universale, quindi l'ambiente è piuttosto sanguinario

> Un vascello sul quale si trovano *quindici* turchi e *quindici* cristiani viene colpito da una tempesta e il capitano ordina di gettare fuori bordo *la metà* dei passeggeri. Per sceglierli si procederà come segue: tutti i passeggeri verranno disposti in cerchio e, cominciando a contare a partire da un certo punto, ogni *nono* passeggero verrà gettato in mare. In che modo si devono disporre i passeggeri perché solo i turchi siano designati dalla sorte per essere gettati a mare

Questa è la versione originale[17] (copiata paro paro dalla mail di Fabio), ma se notate "quindici", "la metà", "nono" li abbiamo scritti in corsivo; qualcuno se la sente, di generalizzare? Che so, ***T*** turchi, ***C*** cristiani, buttiamo fuori bordo ogni ***k***-esimo passeggero... È implicito che vogliamo restare in "***C***", a bordo...

2.2 La scozzata faraone

Pare in italiano si chiami così; confesso, una volta tanto preferisco l'inglese "shuffle".

[17] Una versione decisamente semplice compare sul Kordemskij ("Giochi matematici sovietici"): coinvolge il gatto Purrer, otto topolini neri e uno bianco posti in cerchio; il nostro buongustaio vorrebbe, mangiando un topo si e uno no, tenersi quello bianco come digestivo... da dove comincia?

Sapete come si fa? Supponiamo di avere un mazzo da 52 carte (numeriamole che viene più comodo); lo dividiamo esattamente a metà e poi cominciamo ad alternarle, con lo "shuffle" vero e proprio; supponiamo riusciate ad effettuare uno "shuffle" perfetto:

Prima	01	02	03	04	05	06	07	..	46	47	48	49	50	51	52
Dopo	01	27	02	28	03	29	04	..	49	24	50	25	51	26	52

...spero di non avere sbagliato, comunque mi avete capito: notate che la prima resta prima e l'ultima resta ultima.

Ora, fieri del risultato ottenuto (e sadicamente felici che io mi stia rodendo d'invidia per la vostra *performance*) lo rifate tale e quale con il mazzo mescolato, con un sorrisino di sufficienza sulle labbra.

La domanda che sorge spontanea è: "*Quando la finite di prendermi in giro?*" O, in termini più matematici: Dopo quanti "shuffle" ritornate all'ordine iniziale?

Giusto per toglervi il sorrisino dalle labbra: ...e per un mazzo di $\boldsymbol{n}$ carte?

3. Bungee Jumpers

Proposto ma non usato alla 35° IMO di Hong Kong

> *Tranquilli, è l'ultimo. Quello che mi piace, di questo, è che le condizioni sono così negative...*

Una retta ℓ non incontra un cerchio ω con centro $\boldsymbol{O}$. $\boldsymbol{E}$ è il punto di ℓ tale che $\boldsymbol{OE}$ sia perpendicolare a ℓ. $\boldsymbol{M}$ è un qualsiasi punto di ℓ diverso da $\boldsymbol{E}$. Le tangenti per $\boldsymbol{M}$ a ω incrociano ω in $\boldsymbol{A}$ e in $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{C}$ è il punto su $\boldsymbol{MA}$ tale che $\boldsymbol{EC}$ sia perpendicolare a $\boldsymbol{MA}$. $\boldsymbol{D}$ è il punto su $\boldsymbol{MB}$ tale che $\boldsymbol{ED}$ è perpendicolare a $\boldsymbol{MB}$. La linea $\boldsymbol{CD}$ incrocia $\boldsymbol{OE}$ in $\boldsymbol{F}$.

Provate che la posizione di $\boldsymbol{F}$ è indipendente da quella di $\boldsymbol{M}$.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Questo mese la frase più ricorrente è "promette bene", ed effettivamente è di buon augurio, anche perché continua ad apparire nelle mail di iscrizione (ma lo sapete che "promettiamo" dal '99?), e nei giudizi del Capo, ogni volta che un nuovo accolito comincia ad inviarci soluzioni. Per fortuna che quest'Anno della Fisica promette bene anche per noi, visto che abbiamo attirato l'attenzione di un sito non propriamente interessato alla matematica, che pubblicherà le parti più letterarie dei nostri numeri in archivio, e siamo ancora in attesa di un po' di fortuna per essere pubblicati anche su carta, che come sapete, malgrado l'ecologica Alice, è il mezzo che in Redazione amiamo di più.

E a proposito di Redazione, vi dobbiamo riferire di un evento oltremodo raro, cioè il famoso CdR (Comitato di Redazione) prepasquale o postnatalizio (...ormai il GC ha perso la pazienza di contare quando sarà il prossimo e facciamo un po' quello che possiamo...); il CdR di febbraio è stato formidabile in quanto prevedeva due ospiti eccezionali. Che dirvi, loro sono i protagonisti di un pezzo in bookshelf in arrivo sul sito, ***Caronte*** e ***Sam***, che hanno fatto fuoco e fiamme di fronte all'ottima cena consumata nel nostro pub preferito di Torino (certo che gli facciamo pubblicità, bu.net, internetcafè con un prezioso menù di specialità piemontesi). No, non vi diciamo di più.

Tra chi ci ha scritto, ***Artifex*** ci manda la storia dell'Oscillococcinum, che conoscevamo ma ci ha enormemente rallegrato. Grazie.

Il GC, ha trovato riferimento vicino alla culla di Doc a quello per cui lui aveva scomodato gli indiani d'America, a proposito della Supernova del 1181 (nel suo messaggio SN):

> Riferimento Compleanno di Ostrogradskij, la discussione sull'immutabilità dei cieli: esiste una testimonianza europea della SN1181: l'affresco dell'adorazione dei magi nell'abbazia di S.Pietro in Valle a Ferentillo (UMBRIA! com'è che non te ne sei accorto, Doc???). L'articolo in merito (su "l'Astronomia" di questo mese) tra l'altro esamina i riferimenti storici a SN (non Bayeux, però...) e (cito) "...il pittogramma di Chaco Canyon in Arizona. Testimonianza figurativa, recentemente messa in discussione, dell'esplosione della supernova del 1054." Tutto questo, come diceva il comico, per la precisione...

Aubrey, invece, è andato alla mostra sugli specchi e simmetrie di Modena, e vi passiamo qui parte dei suoi commenti:

> ti scrivo per confermarti il fatto che la mostra sugli specchie e simmetrie si è svolta a Modena. Era proprio nel dipartimento di Matematica, e c'erano anche interessanti modelli di simmetrie in geometrie non-euclidee. Per intenderci:
>
> - prendi un "triangolo" su di una superficie sferica,
> - congiungi i lati del triangolo con il centro della sfera,
> - ora avrai una strana piramide, a base curva,
> - le facce interne della piramide sono a specchio.
>
> Ora, nella mostra c'erano tre modelli diversi, con tre triangoli diversi (ora non ricordo le ampiezze degli angoli). Inoltre c'era la possibilità di inserire costruzioni di cartone dentro queste piramidi (che per comodità erano state "spuntate", come se all'intero della sfera di prima si formasse un 'buco' e si mangiasse la parte superiore della piramide. in questa maniera le figurine di cartone si infilavano perfettamente, e in base alla loro conformazione, negli specchi si vedeva un poliedro! la cosa era veramente impressionante, perché il poliedro era molto chiaro, come sospeso e spostandosi si riusciva a vedere in più parti.
>
> Ti chiedevano anche in che modo dovevi infilare la cannuccia perché si formasse un cubo. Non so se ci siano informazione in internet, sicuramente sul catalogo di Matemilano, che il GC avrà sicuramente[18]. c'era anche un programma che analizzava e formava tutti i tipi di simmetrie descritte. (...)
>
> Il dip. di Matematica di Modena è l'unico al mondo a riprodurre macchine matematiche, e se cerchi su internet il sito delle Macchine Matematiche, è fatto veramente bene, con animazioni Java per ognuna.

Zar ci manda il link al sito (permanente?) della mostra sulle simmetrie e i giochi di specchi da cui ha tratto il disegno che abbiamo pubblicato sul numero 073: specchi.mat.unimi.it. Ultimamente ***Zar*** è il miglior amico del GC.

GaS ci ha fatto conoscere il Journal of Recreational Mathetematics, e gli siamo molto grati (soprattutto per il corposo pdf), anche perché non ci possiamo permettere l'abbonamento.

Una cosa che diciamo spesso, ma non ci stanchiamo di ripetere, è che le soluzioni che scegliamo di pubblicare non sono scelte perché "giuste" o "sbagliate", ma solo perché sì, a nostro insindacabile giudizio. Se ce ne mandate di nuove su qualche numero passato, e con qualche commento particolarmente interessante, siamo sempre pronti a pubblicare, non c'è mai niente di definitivo in RM. Proprio perché le Regole le fa la Redazione proprio per infrangerle e inventarne di nuove. Date un'occhiata a che soluzioni ci sono arrivate...

[18] No, il GC non ha "Matemilano". L'unica cosa con scritto "Milano" sopra che il GC ha è, per il minor tempo possibile, un biglietto del treno. [RdA]

4.1 [039]

4.1.1 Dall'editoriale...

Siamo stati tentati di non darvi nessuna indicazione sul titolo del problema, perché l'editoriale del Doc sulla dematematizzazione è molto divertente, e vi consigliamo ugualmente di andare a rileggerlo. Lo stesso, ecco il testo del problema allora proposto: "*Nel golf basta imparare due tiri: il colpo lungo (drive) e il colpo di avvicinamento (approach), ciascuno di una lunghezza ben precisa. Quale deve essere la lunghezza di questi due tiri per effettuare il percorso minimo in un campo da nove buche della lunghezza di 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400, 425 yarde?*"

Il nostro Doc si lasciava andare in otto pagine di dissertazioni sulla bellezza dei problemi matematici, e lo risolveva (e adesso basta, andatevelo a leggere...). ***Marco*** *[Benvenuto!]* lo ha scovato ed ha proposto (in due mail successive, delle quali facciamo un compendio) una soluzione alternativa:

> Vi scrivo per il problemetto sul Gioco del Golf nell'Editoriale del numero 039. (...)
>
> La questione è presto detta: nello spirito dell'editoriale di dematematizzare il problema, che cosa vieta di giocare il golf su un piano, (come di solito i golfisti sono soliti fare…) e non già su una retta? Intendo dire: perché un drive di (425+150)/2 e un approach di (425-150)/2 iarde non vi piacciono?
>
> In fin dei conti, è sempre possibile costruire un triangolo con lati lunghi un approach, un drive e la lunghezza di una delle buche del percorso. In questo caso addirittura 18 colpi sono sufficienti: un approach e un drive opportunamente angolati. (...)
>
> (...) Un buon matematico, infatti, dovrebbe sapere che per trovare il percorso minimo, non basta mostrare che un certo percorso con 18 colpi si può effettuare, ma che con 17 colpi non si può. Peccato che sia falso.
>
> **Teorema del Golfista:** Dato il problema in editoriale del numero 039 dell'ottima rivista RM, dimostrare che:
>
> - esiste una soluzione per l'approach e per il drive con 16 colpi;
> - non esiste una soluzione con 15 colpi o meno.
>
> Dopodiché correte ad iscrivervi al country club più prossimo a voi: al prossimo torneo di golf straccerete tutti!!
>
> **Dim.:**
>
> Fissiamo A e D, le lunghezze dell'approach e del drive. Diciamo che A<D.
>
> Una buca è realizzabile in-one solo se è lunga D oppure A.
>
> Una buca è realizzabile con due colpi solo se è lunga non più di 2D. Infatti, basta costruire un triangolo isoscele con base la buca e lati lunghi D. La base può avere qualunque lunghezza <= 2D.
>
> Perciò, scegliendo A e D nell'insieme delle lunghezze delle buche, ma D in modo tale che sia almeno la metà della buca massima, esiste un percorso di 16 colpi. Le due buche lunghe D e A sono da fare in-one, mentre le altre sette buche sono in due. Totale: 16 colpi.
>
> Del resto, se fosse possibile completare il percorso in 15 colpi o meno, dovrebbero esistere almeno tre buche da fare in-one, ma dato che le buche hanno tutte lunghezza diversa, ciò non è possibile

Magari vi è venuta voglia di provare a risolverlo diversamente?

4.2 [073]

Dopo il cazziatone del mese scorso sulle poche soluzioni, si sono fatti risentire quasi tutti i nostri grandi solutori, e i nuovi arrivati hanno affilato gli artigli...

4.2.1 Con i dolci della Befana

Soluzioni a questo problema da parte di ***PMP***, ***Zar***, ***GaS***, ***Floyd***, ***Loba***, ***jvanbie***, ***Marco*** *[lo stesso di poco sopra, ancora benvenuto!]*, ***u_toki***. Cominciamo con ***PMP*** che, al solito, ha mandato una serie di mail criptiche, di cui vi diamo qualche accenno:

> Direi che avete deciso di avere qualche soluzione in più stavolta :-) Fred ha detto ad Alberto "Inizia pure tu". Alberto ha dovuto obbligatoriamente "rompere il cerchio", e a questo punto Fred ha preso una o due caramelle al centro in modo da ottenere due file con lo stesso numero di caramelle. A questo punto il gioco diventa banale, basta che Fred copi le mosse di Alberto. Il trucco non funziona se le caramelle sono una o due, ma visto che occorrono tre punti per definire un cerchio il problema sarebbe stato malposto :-)
>
> Leggermente più interessante sembra essere il caso in cui chi è costretto a prendere l'ultima caramella perde. Se i due giocatori sono (P)rimo e (S)econdo, il "perdente" è
>
> 1. P
> 2. S (P piglia una caramella)
> 3. S (P piglia due caramelle)
> 4. P (P prende k caramelle, S ne prende 3-k, P deve prendere l'ultima)
> 5. S (P piglia una caramella; se S divide le 4 in 1+2, P prende le 2; se le divide in 1+1, P ne prende una; se ne lascia 2 o 3, P ne lascia 1)
> 6. S (P piglia due caramelle, poi come sopra)
>
> Però al volo non sono certo della strategia per 7 caramelle.
>
> (...) Posso dire qualcosa in più sulla versione "chi prende l'ultima caramella perde". Naturalmente non sono andato a vedere i miei tomi. La notazione che uso è della forma $n \cdot a + m \cdot b + \ldots$, dove a, b, ... indicano quante caramelle ci sono nel mucchietto, e n, m,... quanti mucchietti ci sono. Insomma, $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ è una situazione del tipo X X X XX XX. I giocatori sono A e B.
>
> Ora ho risolto questi casi:
>
> - $(2n) \cdot 1$: vince A
> - $(2n+1) \cdot 1$: vince B. Questi sono facili.
> - $n \cdot 1 + 1 \cdot 2$: vince A, che prende dal mucchietto con 2 una o due caramelle per lasciarne un numero totale dispari.
> - $(2n) \cdot 1 + 2 \cdot 2$: vince B. Se n=0 e A piglia k caramelle da un mucchietto, B ne prende $3-k$ dall'altro; altrimenti A può portare a $(2n-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2$ oppure $(2n+1) \cdot 1 + 1 \cdot 2$ oppure $(2n) \cdot 1 + 1 \cdot 2$, e B vince nel primo caso scendendo per induzione a $(2n-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2$ e negli altri a $(2n+1) \cdot 1$.
> - $(2n+1) \cdot 1 + 2 \cdot 2$: vince A: toglie un mucchietto da 1 e finisce nel caso sopra.
> - $1 \cdot 3$: vince A (va a $1 \cdot 1$)
> - $1 \cdot 1 + 1 \cdot 3$: vince A (prende la caramella in mezzo al gruppo di 3)
> - $1 \cdot 2 + 1 \cdot 3$: vince A (va a $2 \cdot 2$)
>
> poi mi sono scocciato perché non riesco a trovare una legge.

Beh, ***Zar*** affronta la faccenda in modo molto elegante:

> Veniamo ai dolci della Befana. Fred può vincere tutte le partite che vuole semplicemente dicendo ad Alberto: "ti lascio il vantaggio, comincia pure tu".
>
> Il gioco è una versione del NIM, che di solito si fa con tanti mucchi di oggetti. Nel NIM ogni giocatore può prendere un numero qualunque di oggetti da un mucchio qualsiasi, e chi non ne può più prendere perde. Di questo gioco esiste una strategia vincente per il primo giocatore, di cui però non ho mai letto la dimostrazione (a questo proposito, se il GC vuole prendere questa mia lacuna come spunto per un nuovo PM, può farlo tranquillamente... Non ho idea del grado di difficoltà della cosa).
>
> La strategia vincente può essere spiegata in vari modi, a me piace quello che segue. Il numero di ogni gruppo di oggetti viene trasformato in una somma di potenze di due, poi tutti i numeri così trasformati vengono sommati, con l'accortezza di semplificare prima le potenze uguali. Esempio: ci sono tre gruppi composti da 5-3-7 oggetti. Allora
>
> - 5=4+1
> - 3=2+1
> - 7=4+2+1
>
> Semplificando i due "4", i due "2" e due dei tre "1", rimane 1. Se il risultato (che si chiama numero di Sprague-Grundy) è 0, allora la situazione è "sicura", e si può vincere. Per essere più precisi: il giocatore che, con la sua mossa, porta a 0 il numero suddetto può vincere. Dunque il primo giocatore può vincere se la situazione iniziale non ha già il numero di Sprague-Grundy a 0. Ogni volta che il secondo giocatore fa una mossa, necessariamente porta il numero di SG ad un valore diverso da 0. Il primo non deve far altro che riportare la situazione a 0.
>
> Veniamo al gioco di Fred. A parte la prima mossa (e qui sta il trucco) è una specie di NIM in cui, togliendo una o due caramelle, si possono generare altri mucchi. Ma questo non cambia la strategia: il calcolo del numero di SG si può sempre fare, e il giocatore che ha la strategia vincente non deve far altro che riportare quel numero a 0.
>
> La prima mossa, però, è diversa dalle altre, perché trasforma il cerchio di caramelle in una configurazione topologicamente equivalente (ehm) a un segmento. In pratica la prima mossa è inutile, e permette al secondo giocatore di avere la strategia vincente. La quale strategia, inoltre, in questo tipo di gioco è molto semplice, visto che le mosse sono limitate rispetto alla versione più generale del NIM. Infatti una partita tipo funziona così: il povero Alberto prende una o due caramelle a caso, creando un segmento di C caramelle. Se C è dispari, Fred prende la caramella centrale, creando così due segmenti di lunghezza uguale. Se C è pari, Fred prende le due caramelle centrali, creando due segmenti di lunghezza uguale. Perché è importante che i due segmenti siano di lunghezza uguale? Perché il loro numero di Sprague-Grundy è 0, e quindi Fred può vincere. Poi, qualunque mossa faccia Alberto in uno dei due segmenti, Fred la replica simmetricamente sull'altro, riportando il numero di SG a 0. Possono generarsi tanti segmenti, ma questo non ha importanza, Fred deve sempre copiare in una delle due "metà" la mossa di Alberto. E così vince.

Il ragionamento di ***GaS***, nella versione che intendeva il GC:

> Il primo muove e ce ne freghiamo di cosa faccia (1 o 2 caramelle), quello che interessa il secondo (Fred?) è che ora esiste una catena di P caramelle, se P è pari Fred prende le due caramelle centrali, se P è dispari prende la caramella centrale. A questo punto rimangono due catene con lo stesso numero di caramelle e Fred,

> nelle mosse successive, copia sempre quelle di Alberto nell'altra fila, finché Alberto avrà una mossa anche Fred ne avrà una e quindi quest'ultimo risulterà il vincitore. Naturalmente questo non accade se N=1 oppure 2, in questo caso vince il primo giocatore ma, se questo fosse stato il caso, Fred non ci avrebbe pensato tanto...

E ***Floyd*** la mette sul geometrico, con un procedimento analogo:

> A parte il caso banale in cui le caramelle disponibili sono una o due, chi inizia per secondo è in grado di vincere sempre.
>
> Consideriamo il caso in cui le caramelle siano pari e disposte ai vertici di un poligono regolare.
>
> Ora, qualsiasi scelta faccia il primo giocatore (Alberto), il secondo (Fred) scelga sempre la/e caramella/e simmetrica/e rispetto al centro del poligono. In questo modo Fred vince sicuramente. Infatti è impossibile che Alberto prenda la/e ultima/e caramella/e in quanto Fred ha sempre a disposizione quella/e opposta/e.
>
> Se invece le caramelle sono dispari, queste non sono più simmetriche a due a due rispetto al centro del poligono regolare. Si può comunque rimediare in questo modo:
>
> Se Alberto inizia prendendo una sola caramella Fred scelga quelle due più lontane.
>
> Se invece Alberto inizia prendendo due caramelle Fred scelga quella più lontana.
>
> A questo punto è rimasto un numero pari di caramelle ed immaginandole ai vertici di un nuovo poligono regolare, come nel caso precedente, Fred può scegliere sempre le caramelle opposte a quelle prese da Alberto.
>
> Quindi, in ogni caso, se Fred inizia per secondo è in grado di vincere con certezza.

Jvanbie non è arrivato ad una conclusione, e la soluzione di ***Loba*** può essere considerata un miscuglio di ***PMP*** e seguenti, di ***Marco*** riportiamo solo l'incipit che ci è piaciuto:

> Beh, la regola aurea dei problemi sui giochi a due recita: fatti i casi piccoli. Se in trenta secondi non congetturi nulla, hai inventato un gioco da brevettare. E allora facciamoci i casi piccoli: con una e due caramelle il gioco è fin troppo facile e chi parte (Fred) prende tutto senza tanti complimenti.
>
> Con tre caramelle si comincia già a vedere qualcosina in più. Anche qui, tuttavia, c'è poca storia: parte Alberto e Fred, che gioca per secondo, piglia tutto il restante e buona notte al secchio. (...)

Infine a ***u_toki*** il nostro ufficiale "in bocca al lupo" per la laurea e non pubblichiamo il ragionamento di cui lui stesso aveva trovato un baco.

4.2.2 La torta di mele di mia suocera

Soluzioni a questo problema da parte di ***Zar***, ***Frapao***, ***PMP***, ***Michele*** *[Benvenuto!]*, ***Marco***. Tendenzalmente molto simili, ma tutte da lodare: ***Zar*** fornisce numerosi disegni esplicatori e esplicita un dubbio:

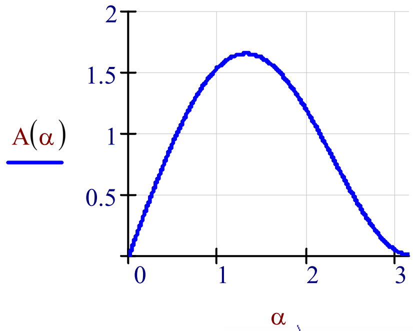
> Ho lavorato sul problema della fetta di torta. La risposta alla prima domanda potrebbe essere "360 gradi"? In effetti, è una fetta pure quella, di angolo al centro pari all'angolo giro.

Il Capo ha detto di no, ci spiace. Il resto della soluzione é comunque valida e convincente, così come quella di ***Frapao***. Quasi tutti (Alice compresa, a dire tutta la verità) hanno sollevato dei dubbi sulla seconda parte del problema, perché la risposta più logica pare "il raggio della torta". A quanto pare il GC ha proposto ancora una volta un trabocchetto, perché ha fatto prima trovare la fetta più grande e poi ha voluto che si facessero calcoli anche per fette non ottime. Mai fidarsi del Capo. La soluzione di ***PMP*** ci ha lasciato a bocca aperta, incredibilmente correlata da figura, ma lo stesso abbiamo scelto per la pubblicazione il nuovo iscritto, ***Michele***:

1. La torta (decido io) ha raggio 1 e area π. L'area della fetta di Fred, in funzione di α compreso tra 0 e π, è

$$A(\alpha) \equiv 2\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

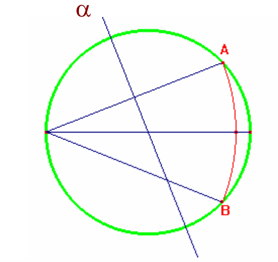
A è massima in α*, soluzione dell'equazione



$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\alpha},$$

cioè

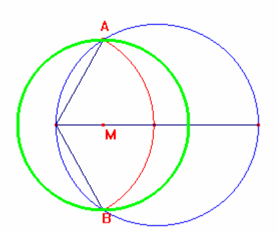
$\alpha^* \approx 1.307$ rad $\approx 74.9°$.



Fred si mangia così un po' più di metà della torta (52.5%).

2. Il piatto di raggio minimo che contiene la fetta è:

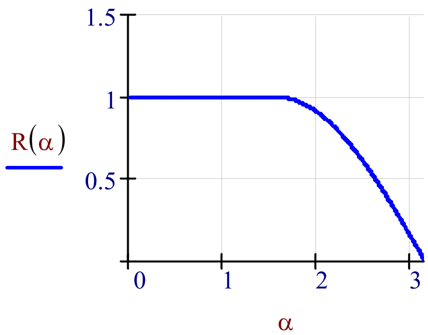
- il piatto della suocera, se $0 < \alpha \le \pi/2$;
- il piatto di centro M e raggio AM, se $\pi/2 < \alpha < \pi$.



In funzione di α il raggio minimo è

$$R(\alpha) \equiv \begin{cases} 1 & 0 < \alpha \le \pi/2 \\ \sin\alpha & \pi/2 < \alpha < \pi \end{cases}$$

E ci sono piaciuti moltissimo tutti i disegni, che hanno commosso il GC. I nostri complimenti comunque anche a ***Marco***, che ha formulato per l'occasione un certo numero di teoremi e lemmi, tutti dimostrati e puntellati. Dato che ci ha molto divertito ve la passiamo per intero.



Soluzione alla Bud Spencer: taglio una fetta sottilissima (una fetta sacrosanta, come la tagliereste voi ed io, non Fred) e poi tengo il complementare della torta.

Seconda soluzione: ok. Mettiamo almeno il vincolo che l'angolo α sia convesso. Bof, quasi altrettanto semplice: fisso tre punti molto vicini sulla circonferenza, che chiamo A, V e B nell'ordine e taglio la fetta AVB, con arco AB. Prendo tutta la torta, meno briciole del bordo.

A questo punto i più brillanti avranno dedotto che faccio parte della schiera dei pignoli, che sono abituati a precisare le cose più ovvie ed evidenti. (salvo poi dimenticarsi sul più bello di qualche minuzia e di sbagliare clamorosamente, ma questa è un'altra storia...)

Ok. Allora diciamo che la fetta sia un settore circolare (e quindi V sia il centro dell'arco AB lungo il bordo della fetta. Cerchiamo la fetta di area massima.

Intanto, è meglio che V stia sul bordo. Altrimenti posso allargare la fetta prendendo V' alle spalle di V (e adesso, definitemi che vuol dire "alle spalle" di un punto, se siete capaci!!). Ok. Supponendo che quello che ho appena scritto abbia un qualsivoglia senso e che il lemma sia vero, possiamo senz'altro supporre che V sia sulla circonferenza. [ve l'avevo detto che sono pignolo: ho fatto in tempo a scrivere solo altre due righe, che la mia coscienza mi ha rimorso ad un punto tale che sono stato costretto a definirmi "alle spalle" e a dimostrarmi il lemmozzo]. Se ho tempo, e se me lo chiederete per favore, ve lo scrivo in appendice. Per intanto, beccatevi l'enunciato:

Lemma Verticale: La fetta massima ha il vertice sul bordo.

Beh, intanto abbiamo ristretto uno dei tre punti ad una linea, stiamo facendo progressi...

Vediamo gli altri punti:

Lemma d'Ampliamento: Gli altri due punti A e B stanno sulla circonferenza.

Questo è fin troppo facile! Se A e B fossero entrambi interni anche Fred (che nel mio immaginario collettivo [sic!], è un fanciullo cinquenne o giù di lì...) vede immediatamente che spostando A e B lungo le semirette di competenza uscenti da V fino a scontrarsi con il limitare della torta capisce che la fetta si allarga. Perciò almeno uno dei due (diciamo A? Massì, diciamolo...) sta sul bordo.

Se ora B stesse all'interno, traccio il cerchio contrato in V e passante per A. Esso è secante la torta e quindi ha un'altra intersezione, che chiamerò B'. Attenzione: allora VAB' è una fetta più grande di VAB. []

Oh, bene. Fin qui abbiamo scritto quattro pagine di dimostrazione per arrivare a provare fatti assolutamente ovvi e sui quali nessuno aveva il mimimo dubbio....

Però intanto, sapendo che AV = BV, allora V è il punto medio dell'arco AB. (sì, non fate tanto gli spiritosi, che tanto vi ho sentito: il punto medio dell'arco giusto dei due), e tutte quelle cose graziose che forse serviranno: AB è ortognale alla bisettrice della fetta, che a sua volta contiene il centro della torta e tutte quelle altre belle proprietà che vi possono venire in mente e, forse, ci serviranno.

Bah, allora mettendo un'incognita da qualche parte (come dite? ce n'è già una? ok, prendiamo quella...), ad esempio, chiamando α l'angolo AVB, si trova con un po' di trigonometria che $AB = 2R\cos(\alpha/2)$. [va da sé che R è il raggio della torta]. L'area della fetta è $AB^2 \cdot \alpha / 2$.

A questo punto ci sono dei conti e della trigonometria. Non amo molto questo tipo di calcoli (perché (a) non ricordo le formule e (b) sbaglio sempre i conti), perciò da qui in poi (beh, via, anche da qui in prima), le formule sono da intendersi coperte da disclaimer; dovrebbe risultare che la fetta misura $R^2 \alpha (\cos\alpha + 1)$.

Bleah, quella robaccia si può anche derivare, ma salta fuori un'equazione che è una schifezza. E allora, diamo in pasto al buon Goal Seek di Excel e vediamo che cosa salta fuori... <mumble mumble>... Il massimo dovrebbe essere per un angolo attorno ai 75° (non fate i puristi a dirlo in radianti, che tanto non ci crede nessuno che pensate veramente in radianti; è un po' come la gente che all'inizio del 2002 parlava in euro; gli angoli si misurano in gradi e basta.)

Lasciando da parte l'invettiva, e tornando ai dolci, questo fa circa il 52% di tutta la torta, che è una dose sufficientemente ingorda.

Questo sistema la fetta massima. Passiamo al piatto minimo.

Bah, per prima cosa, un piatto del raggio della torta chiaramente è sufficiente. Ok. Iniziamo con una fetta triangolare.

Lemma per i Triangoli:

Sia dato un triangolo. Il piatto di raggio minimo che lo copre è

- il circocerchio, se il triangolo è acutangolo
- il cerchio con diametro il lato maggiore, se il triangolo è ottusangolo

Dim.: [la dimostrazione è brutta, quindi vi consiglio caldamente di saltarla] Sia ABC il triangolo e A l'angolo ottuso. A è interno al cerchio con diametro BC, dato che vede un diametro sotto un angolo ottuso. Quindi quel cerchio copre il triangolo. Del resto, un cerchio non può contenere un segmento più lungo del suo diametro, quindi nessun cerchio più piccolo può coprire il triangolo.

Se invece ABC è acutangolo, sia O il suo circocentro. Considero le rette perpendicolari a OA, OB e OC, che chiamo a b e c rispettivamente. Tali rette individuano tre semipiani (il semipiano tagliato da a e contenente A e gli anologhi). Tale sempiano contiene l'insieme dei punti che distano meno di OA da A. Dico che i tre semipiani hanno intersezione nel solo punto O. Infatti: l'angolo formato dalle rette a e b è 2C (rette ortogonali a segmenti che tagliano un angolo al centro che insiste su AB). L'angolo formato dalle rette a e c è 2B. L'intersezione è il solo O se $2(B+C) > 180°$, ma questo è vero, dato che $A < 90°$. []

Dico che il piatto minimo del triangolo ABV, copre anche la fetta ABV. Infatti: ABV è un triangolo isoscele, quindi se è ottusangolo, l'angolo ottuso è in V. Il diametro del piatto è $AB < AV+BV = 2AV$.

Se invece è acuto, sia O il centro del piatto. L'angolo VOA è ottuso, quindi $VA>OV\sqrt{2}>OV$.

In entrambi i casi, il raggio del piatto è minore del raggio della torta (VA). Ma questo significa che il segmento circolare AB della fetta è contenuto nel segmento circolare AB del piatto.

In conclusione, il piatto contiene sia il triangolo ABV, che il segmento circolare AB centrato in V, quindi contiene tutta la fetta.

E per finire, diciamo quanto vale tale misura in funzione di α. Per $\alpha \leq 90°$, ci vuole un piatto grande quanto la torta. Se invece $\alpha > 90°$, allora basta un piatto più piccolo, del diametro di $2R \sin \alpha$.

(...) Per caso, mi sono scordato di dirvi che sono pignolo? Mi devo fare un'auto-postilla. Il problema del piatto minimo è formulato (suppongo volutamente) in maniera ambigua e quindi ci possono essere un po' di interpretazioni differenti.

La mia interpretazione di ieri è stata: data una fetta di angolo α e con punti estremi sul bordo di una torta data, trovare il minimo piatto che la contiene.

Problema senz'altro lodevole ed interessante. Tuttavia, mentre guidavo[19] verso casa, mi è sovvenuta la seguente diversa interpretazione: data una fetta di angolo α, contenuto in una data torta e scelto in modo tale che la sua misura sia massima, trovare il minimo piatto che la contiene.

Nonostante io mi sia buttato a pesce sulla prima interpretazione, devo dire che la seconda è decisamente migliore e quindi ho decretato che fosse quella che intendevate anche voi. Perché migliore? Perché è molto più Fred-iana, ha una soluzione molto elegante e, incidentalmente, molto facile.

E quindi, bando agl'indugi, vediamo la soluzione:

Un piatto grande quanto la torta ovviamente contiene la fetta. Supponiamo che esista un piatto minore che la contiene. Chiamo r il suo raggio e R il raggio della torta. Applicando un'opportuna omotetia che dilati le lunghezze di un fattore R/r,

[19] ecco perché si tratta di un'auto-postilla… [che battutona, eh? dite la verità che avete ancora i brividi di freddo lungo la schiena…]

trasformo la fetta in un'altra, maggiore, di angolo α e contenuta in un cerchio di raggio R (dato che la fetta originaria è contenuta in un piatto di raggio r). Come tale, essa è una fetta che possiamo ritagliare nella torta, quindi la fetta iniziale non era massimale. In buona sostanza, il piatto deve avere la stessa misura della torta.

Comunque il lavoro di ieri non è stato del tutto sprecato, perché ci permette di stabilire come è fatta una fetta massimale:

Teorema di Classificazione delle α-Fette Massimali:

Un fetta massimale di angolo α, ha i tre estremi sul bordo, se α è acuto; altrimenti ha i due estremi dell'arco in punti diametralmente opposti.

Non contento, il Nostro ci manda una correzione:

…sarà anche un luogo comune, ma non c'è niente da fare: quando ci sono di 1/2 le suocere, è meglio cominciare a scappare. Niente, la mia wonderful dimostrazione non regge, anche se il risultato finale è giusto. Il baco sta nel Lemma Verticale. Infatti ci sono casi in cui spostare il vertice sul perimetro della torta non allarga la fetta. Questo non succede mai se $\alpha < 90°$, ma quando la fetta è un semicerchio, le cose vanno male (i.e. la fetta si rimpicciolisce allontanando il vertice V dalla corda AB.) (...)[20] Ok. Ora che ho espiato i miei peccati, risistemo le cose. La dimostrazione va squadernata e rimontata nell'ordine giusto. Riporto solo i capisaldi della dimostrazione, per i dettagli vi rinvio alle mails precedenti.

1. Lemma per i Triangoli + TC α FM [così sappiamo come deve essere fatta una fetta inscritta per bene in un cerchio]. Vi faccio notare che nell'enunciato del teo, mi è rimasta nella penna l'ipotesi che α deve essere convesso.
2. Problema del piatto minimo (v.1.1): quattro righe eleganti, così provo che torta e piatto sono grandi uguali e non mi devo più preoccupare di distinguere.
3. Due casi:
    a. Ora sappiamo come è disposta le fatta nella torta nei due casi α acuto/ottuso. Manca la trigonometria. Per il caso acuto, i conti sono svolti nel primo mail e salta fuori il massimo attorno a 75° (che a posteriori sarà massimo globale, anche se di un'inezia).
    b. Per il caso ottuso, la trigonometria è anche più facile. Salta fuori che l'area è proporzionale a $\alpha \sin^2(\alpha/2)$. Altro studiolo di funzione e si vede che essa funzione ha un MINIMO nell'intervallo 90°-180° [che Goal Seek sostiene essere attorno a 134°]. I massimi sono invece negli estremi, sono uguali e corrispondono a mezza torta esatta.

E con questo chiudiamo e lasciamo a qualche purista dei radianti i commenti più feroci.

5. Quick & Dirty

Due numeri $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ di cui non conoscete tutte le cifre sono tali che conoscete tutte le cifre di a^b. Quanto valgono $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ (minimi)?

6. Pagina 46

Se ***MA*** e ***MB*** sono tangenti a ω in ***A*** e in ***B***, è:

[20] Tagliamo un pezzo di "mea culpa" [AR]

$$\angle OAM = \angle OBM = 90^\circ,$$
$$OM \perp AB.$$

Siano ***N***, ***P*** le intersezioni rispettivamente di ***AB*** con ***OM*** e ***OE***.

Poiché ***M***, ***E***, ***P***, ***N*** giacciono su un cerchio di diametro ***MP*** otteniamo:

$$ON = OM = OB^2 = r^2$$

dove ***r*** è il raggio di ω, e quindi ***P*** è un punto fisso (in particolare, è il polo di ℓ.

Sia ***G*** il piede della perpendicolare per ***E*** ad ***AB***. Essendo

$$\angle OAM = \angle OBM = \angle OEM = 90^\circ,$$

si ha che ***O***, ***B***, ***M***, ***E***, ***A*** giacciono sullo stesso cerchio e quindi ***C***, ***D***, ***G*** sono collineari.

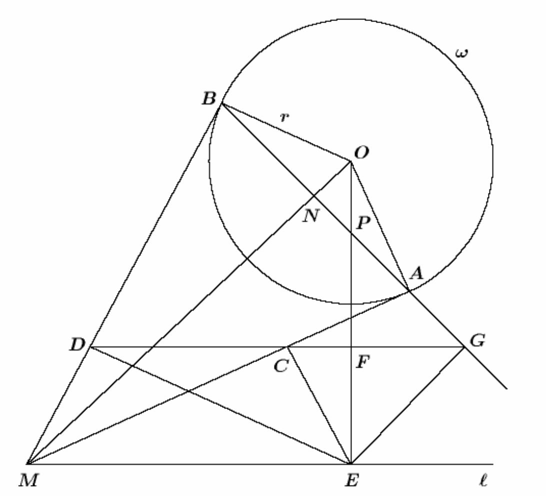


Figura 1

Giacendo ***A***, ***C***, ***E***, ***G*** tutti sul cerchio di diametro ***AE***, otteniamo:

$$\angle EGF = \angle EGC = \angle EAC = \angle EAM. \quad \textbf{[006.001]}$$

Essendo ***O***, ***M***, ***E***, ***A*** conciclici ed essendo ***OM*** parallelo a ***EG*** otteniamo:

$$\angle EAM = \angle EDM = \angle DEG = \angle FEG. \quad \textbf{[006.002]}$$

Da **[001]** e **[002]** otteniamo:

$$\angle EGF = \angle FEG. \quad \textbf{[006.003]}$$

Essendo $\angle EGP = 90^\circ$,

$$\angle FGP = \angle FPG. \quad \textbf{[006.004]}$$

Da **[003]** e **[004]** otteniamo $EF = FG = FP$, e quindi ***F*** è il punto medio di ***EP***, e quindi ***F*** è un punto fisso.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 (Non Troppo) Evidenti Ragioni di Simmetria - [004] - I Pavimenti

Questo pezzo ha una serie di motivazioni, una volta tanto:

1. Alcuni Ingegneri (categoria che si salva dall'usuale battuta di Doc[21] solo per l'appartenenza di Alice alla categoria) ci hanno fatto notare che una casa con finestre, tappezzeria e battiscope sarà carina, ma i pavimenti presentano una certa qual funzionalità cui non si vorrebbe rinunciare.
2. Doc nella Newsletter di RM_073 ha sottolineato il fatto che quel pezzo era l'ultimo della serie sulle simmetrie, e non resistiamo alla tentazione di smentirlo.
3. Esistono anche altri metodi per verificare le simmetrie, e volevamo parlarne.
4. Uno di noi ha visto una bellissima scritta sul furgoncino di un idraulico/piastrellista/elettricista, e cercava una scusa per raccontarvela.

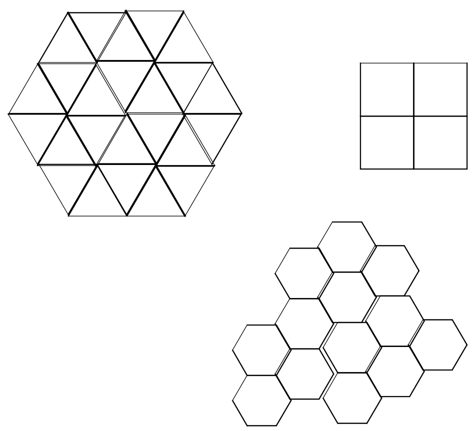


Figura 1: Le tassellature regolari

Bene, quello che vogliamo fare è riuscire a stabilire se esista una qualche restrizione ai disegni dei pavimenti cercando di mantenere una certa simmetria o, se preferite, vorremmo esaminare le *tassellature regolari e semiregolari del piano*, trattandole *more geometrico* e non dal punto di vista algebrico; se qualcuno di voi, poi, vuole riportare la trattazione nell'Algebra[22], pubblicheremo: con il nome che preferite.

Cominciamo da qualcosa di semplice: limitiamoci alle tassellature ***regolari***, ossia a quelle generate da un solo tipo di poligono; è abbastanza semplice vedere che non sono moltissime, infatti:

1. In un vertice devono convergere almeno tre figure
2. L'angolo sul vertice di ogni figura deve essere un divisore di 360°

Siccome una piastrella è formata da almeno tre lati (o siete finiti a casa di Peano), cominciamo con calma ad esaminarle e, in breve tempo, ci accorgiamo che solo il ***triangolo***, il ***quadrato*** e l'***esagono*** passano l'esame, generando angoli trattabili[23]: posto che abbiate necessità del supporto visivo, li trovate in Figura 1.

Sì, però come pavimenti sono un filino monotoni...

[21] I/Gli [*questo spazio affittasi*] bisognerebbe ammazzarli da piccoli. (*Doc, ~~comunicazione personale~~ tormentone urbi et orbi)*

[22] ...e qui ci riferiamo specificatamente a quei tre lettori che questo pezzo lo conoscono per averlo già visto in un certo libro... Zar, sappiamo che sei nel numero, non nasconderti!

[23] Se questo ragionamento "vi ricorda qualcosa", siete nel giusto: quasi nello stesso modo (imponendo che la somma dei vertici sia minore di 360°) si dimostra che i solidi regolari sono solo cinque.

Si può effettivamente fare qualcosa di meglio, se allentiamo la richiesta che i poligoni siano tutti dello stesso tipo, pur restando regolari[24], ma prima dobbiamo definire un po' di termini, come al solito.

Si dicono ***isosceli*** quelle tassellature in cui nello stesso vertice convergono sempre gli stessi angoli delle figure, ossia quelle in cui potete sovrapporre la figura a se stessa attraverso un capovolgimento e sovrapponendo due poligoni qualunque. Forse un esempio, a questo punto, aiuta: in Figura 1 abbiamo evidentemente tassellature isosceli, mentre in Figura 2 vediamo un esempio di tassellatura non isoscele (prima di fare la faccia stupita, notate che rispetto agli esagoni di Figura 1 sono *sfalsati*).

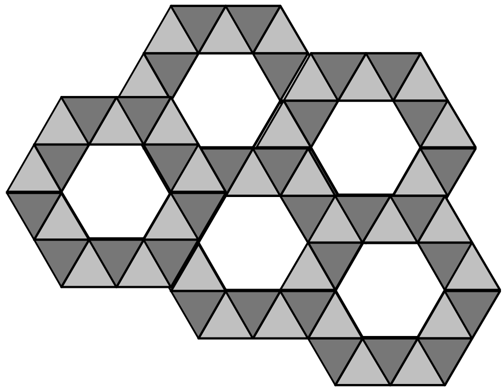


Figura 2: Tassellatura non isoscele

Bene, torniamo seri e cerchiamo di metterci anche un po' di matematica contata.

In un poligono regolare di ***n*** lati, abbiamo che ognuno degli angoli interni vale:

$$\frac{(n-2)\pi}{n}. \qquad \textbf{[007.001]}$$

La seconda condizione vista per la tassellatura regolare si esprime richiedendo che la **[001]** rappresenti una *parte aliquota*[25] dell'angolo giro, ossia:

$$\frac{(n-2)\pi}{n}=\frac{2\pi}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{n-2}{n}=\frac{2}{k}, \qquad \textbf{[007.002]}$$

e la prima condizione ci impone $k \geq 3$; quindi, visto che $k=3 \Rightarrow n=6$ e che $k>3 \Rightarrow n<6$, se ne deduce che con l'ettagono o superiori non c'è nulla da fare.

Nel caso ***n*** sia ***dispari***, allora $MCD((n-2),n)=1$ (due numeri dispari che differiscono di ***2*** sono sempre primi tra loro), e quindi $\frac{n-2}{n}$ è irriducibile, e quindi ***2*** e ***k*** sono multipli dello stesso ordine di $n-2$ e di n; ossia deve essere:

$$n-2=1 \Rightarrow n=3 \text{ e } k=2n \Rightarrow k=6, \qquad \textbf{[007.003]}$$

ossia in questo caso si incontreranno ***6 triangoli*** nel vertice della nostra figura.

Nel caso invece ***n*** sia ***pari***, ponendo $n=2m$ avremo

$$\frac{m-1}{m}=\frac{2}{k} \qquad \textbf{[007.004]}$$

con la prima frazione irriducibile, da cui:

[24] *Penrose* ha affrontato un'altra strada, decisamente più divertente ma un filino più ripida: che i poligoni avessero sempre lo stesso numero di lati, ammettendo che potessero essere irregolari e diversi tra loro e che la tassellatura non fosse periodica: ricordo dalla gioventù un risultato stupendo con l'ettagono, se qulcuno ne ha l'immagine saremmo contentissimi di riceverla.

[25] ...e se vi sembra un modo di esprimersi antiquato, sappiate che il testo originale inizia questa frase con un "...sia possibile riunirne diversi uguali...". Orribile.

$$\begin{aligned} &m-1=1 \Rightarrow m=2 \\ &\Rightarrow n=4, k=2 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.005]}$$

e

$$\begin{aligned} &m-1=2 \Rightarrow m=3 \\ &\Rightarrow n=6, k=3 \end{aligned}, \qquad \textbf{[007.006]}$$

ottenendo anche l'ultima tassellatura di Figura 1.

"...ma l'avevi già detto prima!" Vero, ma visto che il seguito è una complicazione di questo metodo, meglio prima verificare una strada già nota.

Generalizziamo? Generalizziamo.

Supponiamo di far convergere in un vertice ***tre*** poligoni non necessariamente uguali di ***a***, ***b***, e ***c*** lati, con $a < b < c$; i loro angoli interni dovranno coprire l'intero angolo giro, e quindi, per estensione della **[001]** si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{(a-2)\pi}{a}+\frac{(b-2)\pi}{b}+\frac{(c-2)\pi}{c}=2\pi \\ &\frac{(a-2)}{a}+\frac{(b-2)}{b}+\frac{(c-2)}{c}=2 \end{aligned} \qquad \textbf{[007.007]}$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2} \qquad \textbf{[007.008]}$$

e su questa vediamo i vari casi.

Il caso più semplice è quello per ***a=3***, ossia quello in cui uno dei poligoni coinvolti è un ***triangolo***; considerando che l'angolo in questo caso vale ***60°*** e che l'angolo del *c-agono* (figura con il maggior numero di lati) deve valere meno di ***180°***, si ha che il *b-agono* deve avere un angolo maggiore di ***120°***, ossia deve essere ***b>6***. La nostra formula **[008]** diventa:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6} \qquad \textbf{[007.008]}$$

e su questa possiamo fare di conto, ottenendo la Tabella 1, dove abbiamo lasciato in bianco i valori che avrebbero dato un risultato frazionario per il *c-agono*.

B	7	8	9	10	11	12
C	42	24	18	15		12

Tabella 1: a=3

Se guardiamo però oltre il vertice considerato, ossia cerchiamo di inserire anche negli altri vertici le figure considerate, ci accorgiamo che l'unico caso possibile è quello per ***b=12***, ***c=12***, che dà origine alla pavimentazione che (prescindendo dalle ormai usuali imprecisioni di chi si ostina a fare Geometria in PowerPoint) vediamo in Figura 3: in ogni vertice si incontrano due dodecagoni e un triangolo.

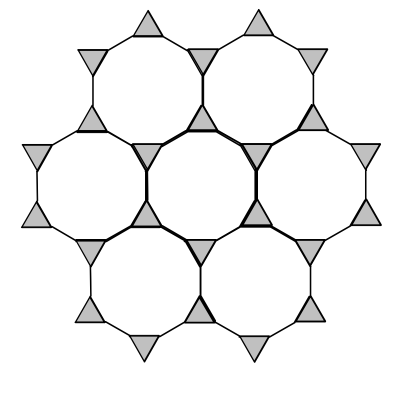


Figura 3: a=3, b=12, c=12

Se ora passiamo ad ***a=4***, ossia imponiamo che il pezzo con meno lati sia un ***quadrato***, otteniamo la nuova versione della **[008]**:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{4} \qquad \textbf{[007.009]}$$

e anche su questa possiamo effettuare gli stessi conti che abbiamo fatto (fare a Excel...) per il caso del triangolo; qui la condizione di minima sui valori di ***b*** e ***c*** diventa però $4 < b \leq 8$, e ci permette di ottenere la Tabella 2: anche qui, ignoriamo i valori frazionari.

b	5	6	7	8
c	20	12		8

Tabella 2: a=4

Sempre considerando i vertici vicini, si vede l'unico valore sensato in questo caso è quello per ***b=8***, ***c=8***, ossia in ogni vertice si incontrano due ottagoni e un quadrato, come mostrato in Figura 4.

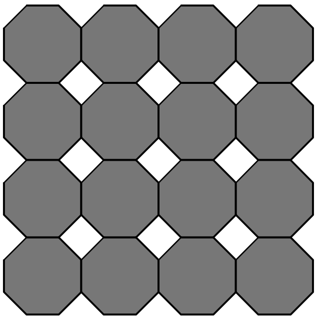


Figura 4: a=4, b=8, c=8

Ora, qualcuno di voi potrà trovare noiosetta questa sequenza di calcoli in cui dopo un mucchio di frazioni si trova una soluzione che per tentativi ci sarebbe arrivato anche Fred in cinque secondi; tranquilli, perchè nel caso successivo la cosa aiuta.

Infatti, se prendiamo ***a=5***, abbiamo sempre con gli stessi calcoli di cui sopra le due condizioni:

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{10} \qquad \textbf{[007.010]}$$
$$5 \leq b \leq 6$$

e queste condizioni ci portano ad esaminare il solo caso ***b=5*** per cui ***c=10*** che risulta impossibile. Contenti? Qui niente disegno e niente tabellina.

Decisamente semplice anche il caso ***a=6***, per il quale l'unica soluzione diventa ***b=6***, ***c=6***, ossia la pavimentazione a esagoni che abbiamo visto in Figura 1.

Vi risparmio i calcoli (perfettamente equivalenti) per il caso di ***quattro*** poligoni, e mi limito a fornirvi i valori con alcune note.

#	***a***	***b***	***c***	***d***	***Note***
1	3	3	4	12	Figura 5
2	3	3	6	6	Due soluzioni: Figura 6
3	3	4	4	6	Tre soluzioni: Figura 7
4	4	4	4	4	Già vista in Figura 1

Tabella 3: Leggi con quattro poligoni

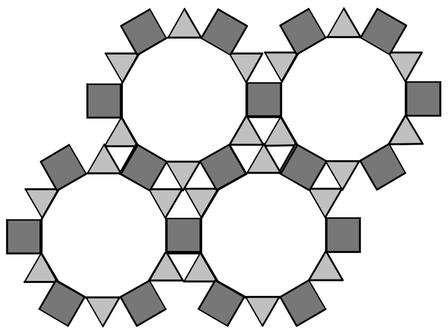


Figura 5: a=3, b=3, c=4, d=12

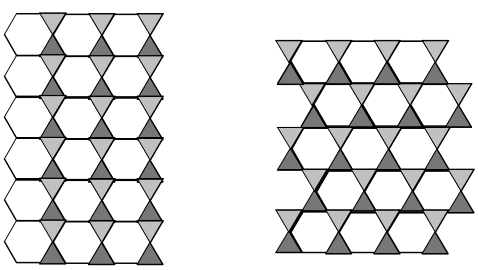


Figura 6: a=3, b=3, c=6, d=6

Particolarmente interessante il primo caso: per i lettori che ormai hanno capito benissimo da che libro stiamo pescando tutto questo, ci limitiamo a far notare (anche per dimostrare che lo abbiamo letto con ragionevole attenzione) che il Nostro si esibisce in un "non è possibile risolvere il problema" quattro pagine dopo aver fornito uno splendido disegno del caso in esame, che noi riportiamo in Figura 5.

Se siete delusi delle note per il secondo e per il terzo caso, siete in buona compagnia; in effetti, contrariamente al metodo algebrico, qui se ci sono più casi dovete cercarveli da soli, e ciò non è bello.

Comunque, in Figura 6 (per il caso 2) e in Figura 7 (per il caso 3) vi forniamo i disegni relativi.

E non lamentatevi che le piastrelle "ballano"; fare il piastrellista in PowerPoint è una complicazione che potete immaginarvi da soli.

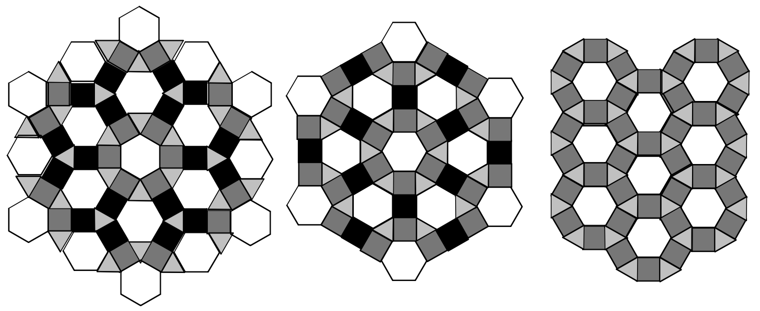


Figura 7: a=3, b=4, c=4, d=6

Coraggio che è quasi finito: con ***cinque*** poligoni si hanno solo due soluzioni; una è tripla e la vedete in Figura 8, mentre quella singola l'abbiamo già vista in Figura 2, e la sua costruzione avviene attraverso i valori ***a=3, b=3, c=3, d=3, e=6***.

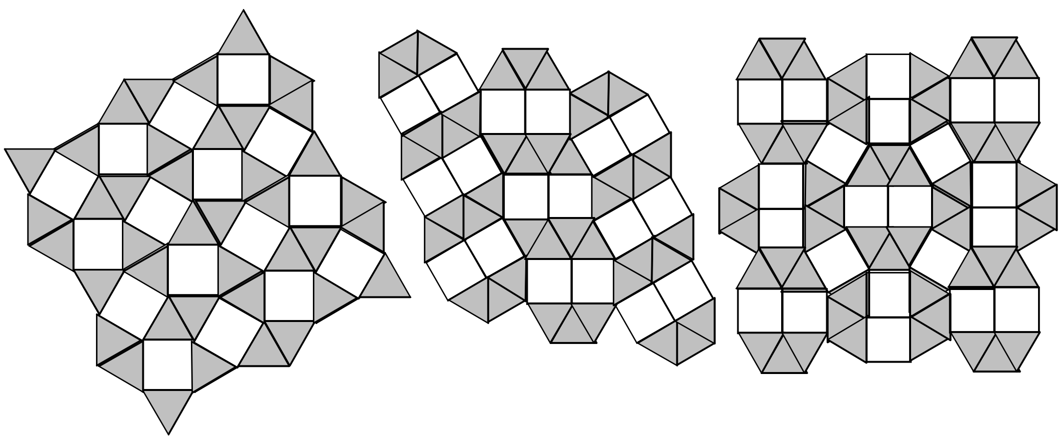


Figura 8: a=3, b=3, c=3, d=4, e=4

Infine, con ***sei*** poligoni, non c'è storia: l'unica soluzione è quella formata tutta da triangoli.

La scritta dell'idraulico? "*Aggiustiamo tutto quello che vostro marito ha riparato*".

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms