Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 072 – Gennaio 2005 - Anno SESTO

1. Misurare la Paura

Ottantotto è numero naturalmente pieno. Nella forma grafica lo è a causa della rotonda simmetria della cifra otto, che già in forma singola sembra una duplicazione del simmetricissimo zero. Gli assi orizzontali e verticali di simmetria si moltiplicano poi quando l'otto diventa ottantotto, e per sovrappiù la simmetria grafica contamina anche quella fonetica, perché anche la parola stessa 'ottantotto' sembra un palindromo mancato di poco. Per non parlare del numero a cifra doppia, che si può leggere sì come duplicazione orizzontale dell'otto, ma anche come duplicazione riflessa, in senso verticale, del simbolo dell'infinito. Quasi troppe cose, troppe immaginifiche implicazioni, per un numero così piccolo, ancora inferiore a cento, generato com'è dal prodotto tra il più piccolo cubo propriamente detto[1] e dal primo numero primo[2] a due cifre.

[1] 'Propriamente detto' è affermazione quanto mai impropria. Anche dando per scontato (e scontato non è) che stia parlando solo di numeri naturali e non di interi, razionali, reali, complessi o quant'altro, resta il fatto che il 'cubo di uno' è un cubo altrettanto proprio del cubo di due. Se però avete capito al volo cosa intendevo con la frase 'propriamente detto', potreste interrogarvi sul vostro immaginario matematico istintuale (supposto che una simile cosa esista).

[2] 'Primo numero primo' è una delle rare frasi che fa invidiare gli anglofoni, visto che hanno la fortuna di distinguere tra 'first' e 'prime'. Un caso analogo d'invidia d'Albione lo sperimentano i fisici, quando si accorgono che nei laboratori di Manchester e di Minneapolis usano 'speed' per la velocità in senso scalare e 'velocity' per quella vettoriale.

Del resto, la magia dell'ottantotto si ritrova soprattutto sulla tastiera di un pianoforte. Trentadue tasti neri rigorosamente uguali fra loro si alternano a cinquantasei tasti bianchi, in un ritmo regolare che è giocoforza definire 'armonico'. I tasti bianchi, a differenza dei neri identici e arrotondati, hanno forme diverse, causate proprio dalla necessità di ospitare gli scuri confratelli. I DO hanno una scanalatura a destra, per ospitare il loro diesis, mentre restano lisci e diritti a sinistra, grazie al fatto che tra SI e DO non esistono semitoni. Come i DO sono i FA, mentre i MI e i SI sono la loro copia speculare. I RE, i SOL e i LA, circondati come sono dai semitoni, hanno incavi ospitali e generosi sia a dritta che a mancina. Alle estremità della tastiera si trovano anche tasti bianchi puramente rettangolari e senza incavi, quasi a ricordare che alle estremità delle rette, abitate usualmente dagli infiniti, è tutt'altro che raro imbattersi nelle singolarità.

Resta il fatto crudele e inevitabile che la descrizione, quand'anche fosse accuratissima, della tastiera d'un pianoforte non rende minimamente conto dello strumento intero, della rivoluzione altamente tecnologica, per l'epoca, che liberò dalla schiavitù del monotono timbro del clavicembalo, aprendo tutte le possibilità dei 'forte' e dei 'piano' per ognuna delle ottantotto note suonabili. Ma anche questa è cosa naturale: i tasti e la tastiera non lasciano immaginare il complesso dei meccanismi di corde e martelletti, di feltri e smorzatori, di tutti gli artifici, insomma, che consentono la produzione di suoni più o meno intensi. Meno ovvio è invece fare una sorta di bilancio totale: e cioè chiedersi se, in ultimissima analisi, l'elenco completo e dettagliato delle forme e delle funzioni di ogni componente d'un pianoforte possa, integrato magari anche della sintassi specifica della notazione musicale, lasciar intrasentire ad un extraterrestre le sensazioni che possono scaturire da un pezzo di Debussy suonato su quello strumento così accuratamente descritto.

È solo uno dei molti esempi possibili che palesano la distanza che sussiste tra 'analisi' e 'sintesi', o, per metterla sotto un altro paio di etichette, tra 'olismo' e 'riduzionismo'. Il riduzionismo afferma che l'intero è perfettamente coincidente con la somma delle sue parti, e quindi, come ovvia conseguenza, perfettamente descrivibile e conoscibile attraverso la conoscenza della totalità dei suoi componenti. L'approccio olistico è invece più rivoluzionario, quasi mistico, perché afferma che l'intero è maggiore della somma delle sue parti, e la sola conoscenza di ogni dettaglio rimane comunque ben lungi dal fornire la conoscenza reale dell'ente che da quei dettagli è costituito. Non è scelta banale: il riduzionismo può vantare una lunghissima serie di trionfi, perché la conoscenza scientifica degli ultimi quattro secoli è, in gran parte, riduzionistica: scomporre, analizzare, capire ogni parte e poi integrare e comprendere le relazioni logiche di ogni componente con le altre. In fondo, è proprio così che procede la scienza. E con la pazienza e la determinazione di chi non si pone limiti di tempo né di attenzione, è riuscita a raggiungere una conoscenza dettagliata e completa di eventi a prima vista inspiegabili; non solo, ma anche a porre in relazione oggetti e accadimenti che a prima vista non sembrano affatto collegati. Anche gli olistici hanno comunque un buon numero di frecce al loro arco: molti eventi complessi sembrano ancora, se non del tutto refrattari, quantomeno ancora molto distanti dall'essere spiegati con la pura analisi riduzionistica. Da sempre i biologi più legati alla pura meccanica fisiologica devono sopportare le frasi dei colleghi dell'altra scuola di pensiero, che li canzonano dicendogli: 'Eccoti qua mezzo quintale d'acqua, il giusto quantitativo di carbonio, d'ossigeno e di tutti gli altri elementi che ti servono. Adesso costruiscimi un uomo, e per favore cerca di spiegarmi con abbondanza di dettagli come si giunga alla dimostrazione del sorriso di Monna Lisa e all'impronta di Neil Armstrong sulla Luna a partire da questi settanta chili di robaccia…'.

Da un punto di vista strettamente biologico, la questione può anche assumere aspetti particolarmente intriganti, forse riassumibili nel semplice concetto di 'individuo'. Poche idee sembrano più naturali del riconoscimento dell'individualità propria e altrui: guardare dritto negli occhi una zebra significa anche stabilire un preciso contatto 'uno a uno'; non possiamo dire molto su cosa ne pensi la zebra, ma un uomo difficilmente può rifiutarsi di riconoscere alla zebra il concetto di 'individuo'. Gli occhi che sono bene incastrati nel muso equino sono evidentemente simili agli occhi dell'uomo che guarda, e come loro sono riconoscibili anche bocca, naso, arti, tronco. È indubbiamente un animale, cosa certamente diversa dal boscimano che sta cercando di trasformarla in un arrosto, ma è indubbio che il boscimano stesso la riconosca come 'un' essere vivente, come qualcosa di ragionevolmente più simile a sé stesso di quanto possa esserlo una foresta. Più ancora che le corrispondenze esteriori, è il comportamento della zebra a denunciarne l'affinità individuale: nasce, cresce, si nutre, si riproduce, cerca di sopravvivere, muore. Tutte cose che fa anche l'uomo: ci vuole forse un ulteriore passo culturale per rendersi conto che tutte queste azioni vengono compiute anche da un baobab, ma in genere quasi tutte le culture, anche le più primitive, riescono a riconoscere la vita anche nelle piante, ed anche ad attribuire 'individualità' agli alberi. Questo non è però sempre evidente e naturale come nel caso della zebra e del baobab: esistono animali che vivono in simbiosi così stretta che può essere difficile riconoscere dove finisca un individuo e dove cominci l'altro.

Nelle simbiosi molto esasperate è evidente la scarsissima probabilità di sopravvivenza che avrebbe uno dei due animali simbiotici qualora dovesse affrontare la lotta per la sopravvivenza senza il partner; ciononostante, l'individualità di ogni simbionte è riconosciuta e definita, almeno dal punto di vista dei biologici, fin quando ognuno dei due partner provvede alla riproduzione in maniera geneticamente indipendente dall'altro. È una soglia forse arbitrariamente scelta dagli scienziati, ma appare ragionevole: e lo sembra tanto più quando si scende ad esaminare organismi molto semplici. Se un'attinia è pur sempre ben distinguibile da un paguro bernardo, la distinzione diventa in pratica assai più complessa quando un organismo unicellulare molto abile a trasformare in energia le prede ma con scarsa capacità di movimento decide si associarsi ad un partner ciliato assai efficiente nella motilità ma manchevole dal punto di vista dell'efficienza energetica. Due organismi unicellulari che mettono in comune parti di loro stessi assomigliano moltissimo ad un solo 'individuo' dotato di due organi specializzati principali. Non stupirà troppo vedere uno dei partner morire in caso di decesso dell'altro; e quando, durante il percorso evolutivo, riusciranno a mettere in comune anche il meccanismo riproduttivo, allora il confine sarà davvero superato, e sarà ragionevole parlare di 'un' solo individuo bicellulare. Non è uno scenario fantascientifico: è un'ipotesi possibile, probabilmente già accaduta, durante i meandri dell'evoluzione delle specie. Da questo punto di vista, guardare ai costituenti di un organismo evoluto come l'uomo non può non portare ad un fortissimo senso di stupore; è evidente l'elevatissimo grado di specializzazione raggiunto dalle sue cellule: ognuna è dedita ad un compito ben preciso[3], e le differenze che corrono tra un neurone o una cellula di tessuto osseo sono maggiori di quelle che corrono tra un motoscafo e un termosifone. Eppure, tutte concorrono alla costituzione di un unico individuo complesso. Ha certo poco senso leggere un organismo come composto da milioni e milioni di 'individui', eppure alcune cose riescono ancora a colpire l'immaginazione. Ad esempio, solo di recente degli studiosi hanno compreso come sia possibile per gli organismi superiori produrre degli organi trasparenti come il cristallino dell'occhio: ottenere la trasparenza perfetta è impresa davvero ardua anche trattando materia inerte, e lo è assai di più avendo a disposizione soltanto cellule viventi, che mal coniugano la loro struttura con il concetto di trasparenza. Per ottenere un cristallino, gli esseri viventi portano infatti alcune cellule in uno stato prossimo alla morte biologica o, forse più propriamente,

[3] A parte quelle giovincelle delle staminali, che hanno proprio nell'ancora aperta possibilità di 'imparare' la caratteristica che le rende così preziose ed importanti, nella moderna ricerca biologica

sono le cellule stesse che compongono il cristallino che quasi 'si suicidano' al fine di dotare l'organismo di un elemento così prezioso e indispensabile per la visione del mondo esterno.

Ha ovviamente poco senso continuare a spostare il concetto di individualità dalle singole cellule all'organismo e viceversa, al solo fine di rendere più o meno stupefacente questo o quell'aspetto biologico: in fondo, gran parte del pathos indotto da un 'suicidio' cellulare decade istantaneamente quando pensiamo alla quantità di nostre cellule che uccidiamo solo radendoci o grattandoci le gambe: siamo soliti pensare a noi stessi come individui, e a riconoscere ad altri animali sufficientemente simili lo stesso grado di individualità, mentre non facciamo lo stesso con le nostre stesse singole cellule. Eppure, un'ape o una formica sono usualmente riconosciute da noi come individui, anche se gli insetti sociali hanno spesso dei comportamenti non troppo dissimili da quelli delle cellule del cristallino. La singola formica operaia o soldato non sembra tenere troppo in conto il principio di autoconservazione: si sacrifica regolarmente e con serena abnegazione anche per scopi che possono sembrare non particolarmente nobili o fondamentali. Esistono formiche che si uniscono per formare 'ponti' sui quali passerà l'intera colonia in transito, consentendo così a tutto il formicaio di scavalcare un ostacolo, anche se poi inevitabilmente tutte o quasi le formiche che hanno costituito il 'ponte' sono destinate a perire; altre vengono riempite di cibo fino ad essere totalmente deformate, gonfie e dilatate, lasciate appese per le ganasce come fossero otri pieni di cibo: e proprio come tali vengono usate, perché in seguito le altre formiche (che in genere stanno svolgendo un lavoro importante e che non possono allontanarsi alla ricerca di cibo) si limitano a forar loro l'addome facendo fuoriuscire il cibo dall'otre vivente formato dalle loro compagne appese come insaccati. Per non parlare poi degli eventi più 'naturali', quali il manto di api destinato a proteggere il nido dal freddo delle notti autunnali, freddo che ne uccide ogni volta un numero elevatissimo, o dei normali combattimenti che vedono soccombere nugoli di insetti che si votano alla morte con estrema naturalezza.

Il comportamento denso di abnegazione degli insetti sociali è sempre stato un problema cardine per biologi ed etologi: la scuola che fa capo all'idea della 'salvaguardia dei geni'[4] si lancia in calcoli complessi del grado di 'parentela' (e quindi di comunanza genetica) tra le formiche stesse, tenendo anche conto dell'impossibilità che hanno le normali formiche operaie o soldato di procreare, e giunge alla conclusione che, dal punto di vista del puro 'vantaggio genetico', alle formiche-individuo 'conviene' morire al fine di salvaguardare il maggior numero possibile di compagne, che condividono con loro un numero di geni superiore a quello che condividono due normali fratelli umani. Un altro approccio, invece, consiste proprio nel considerare come 'individuo' non la formica, ma l'intero formicaio: in quest'ottica, la regina è ridotta al ruolo di 'organo riproduttore' dell'individuo formicaio, e mantiene la sua cruciale importanza ai fini della salvaguardia dell'individuo e della specie, ma è comunque al formicaio nel suo insieme che bisognerebbe riconoscere il concetto di individuo[5], non alle singole formiche. In questo senso, anche se le cellule che compongono un mammifero sono in numero enormemente superiore al numero delle formiche che compongono un formicaio, si può effettivamente trovare un parallelo tra il 'suicidio' delle cellule che vanno a costruire il cristallino e le operaie disposte a trasformarsi in prosciutti per il bene della comunità.

[4] Quella di Richard Dawkins, detta anche 'del gene egoista'.

[5] In questi termini 'gioca' anche Douglas Hofstadter nel suo 'Gödel, Escher, Bach: an Eternal Golden Braid', che mette proprio il Formicaio tra i protagonisti dei suoi dialoghi, specie quelli centrati sulla dicotomia olismo-riduzionismo.

Per analizzare le cause dei suicidi rituali degli uomini, la biologia e l'etologia non bastano, e occorre inevitabilmente considerare una miriade di aspetti culturali. L'istinto di sopravvivenza è forte negli esseri umani non meno di quanto lo sia negli altri animali superiori, eppure vi sono numerosi esempi di rinuncia volontaria alla vita. Il solo fatto di riunirsi in eserciti è un primo passo verso la rinuncia alla pura salvaguardia individuale: è però anche vero che tale azione è ben giustificata nel momento stesso in cui ci si rende conto che un singolo individuo non ha alcuna possibilità di salvezza se viene attaccato da un gruppo numeroso di guerrieri avversari. L'aggregazione è insomma una buona strategia anche dal punto di vista individuale: è molto più probabile che l'individuo sopravviva se combatte in gruppo, specialmente se il nemico è già organizzato a sua volta in gruppo. Poi, però, quasi inevitabilmente, subentrano elementi culturali che modificano il mero conteggio delle probabilità di sopravvivenza: innanzitutto, il gruppo stesso, la tribù, comincia ad esercitare pressioni culturali forti nei confronti degli individui, onorando in sommo grado coloro che sono disposti a sacrificarsi per la comunità e disprezzando oltre ogni possibile infamia coloro che, al contrario, sono restii a farlo. Successivamente, il disprezzo comunitario è spesso rafforzato anche da premi e punizioni che trascendono la vita terrena: laddove la religione è strettamente intrecciata con lo stato sociale, essa inevitabilmente amplifica i premi per gli 'eroi' (santificando i martiri, e promettendo loro ogni bene nell'esistenza ultraterrena) e disprezzando i 'vili' e soprattutto i traditori, condannandoli a sofferenze che dovranno perpetuarsi anche oltre la morte. Anche in questi casi, comunque, il conto torna ad essere un semplice bilancio da quadrare: il martire che si immola nella certezza della stima perpetua dei suoi simili e con la sicurezza del paradiso attua una sorta di 'investimento', ragionevolmente redditizio una volta che si accettino come veri i postulati che lui suppone validi. Non che l'esaltazione religiosa sia indispensabile o anche solo necessaria, al fine di superare l'istinto di conservazione: il maggior numero di suicidi, in fondo, è attuato da anziani sofferenti, per i quali il 'bilancio' è tristemente diretto e immediato: il mettere fine alle sofferenze quotidiane può apparir loro semplicemente più conveniente che il continuare a sopportarle. Certo è però che per arrivare a vincere l'istinto di conservazione e per giungere alla decisione di auto-terminarsi da parte di soggetti savi e in buona salute, occorre di solito un 'salto di livello': occorre vedersi non più come individuo, ma come parte di qualcosa di maggiore importanza o spessore. O, peggio, occorre riconoscersi come elemento estraneo a questo livello di aggregazione superiore, e in questo caso il suicidio arriva come forma estrema di protesta. Non più un sacrificio a vantaggio dei 'simili', ma un'autodistruzione elitaria decisa per marcare il senso di non-appartenenza.

Anche gli ottantotto tasti che formano la tastiera del pianoforte, splendido esempio di convivenza e cooperazione multirazziale[6], possono assumere ruoli diversi e perfino contraddittori. Possono innalzarsi improvvisamente come strumento eloquente e liberatorio anche in un momento in cui l'armonia della musica romantica sembra essere lontanissima dall'urgenza del momento: ad esempio, quando si sale sul palco di un teatro gremito di gente per esortare alla pace, e si intuisce invece, senza alcun preavviso, che è meglio sedersi allo sgabello di quel pianoforte inaspettatamente dimenticato sul palco anziché argomentare al microfono. Si può cominciare a suonare Brahms, Debussy, Beethoven e altra musica ancora, lasciando il pubblico stupito dalla presenza delle note e dall'assenza del comizio; si possono lasciare gli organizzatori del dibattito politico irritati, disorientati, confusi, e ciononostante continuare a suonare note di pace, una dopo l'altra, lanciandole nell'aria come

[6] 'Ebony and ivory, live together in perfect harmony, side by side on my piano keyboard; oh, Lord, why don't we?' (Paul McCartney & Stevie Wonder). Nella frenetica caccia al 'politically correct', non è comunque mancato chi si è peritato di notare che il parallelo fra tasti del pianoforte e persone di razze diverse è poco equa, essendo i tasti neri in numero minore, di forma più piccola e 'posti dietro' i tasti bianchi.

perfette sostitute delle programmate parole di pace. Ma gli stessi ottantotto tasti possono essere usati anche in modo ribelle e libertario, per intonare un canto rivoluzionario straniero contro la presenza di un guerrafondaio straniero: possono essere pigiati forte in una piazza di Napoli al solo scopo d'accompagnare la voce arrochita dalle sigarette che urla 'Allons enfants de la Patrie, le jour de Gloire est arrivé – contre nous, de la tyrannie, l'étendard sanglant est levé '. Allo scopo di far rimbombare, in un giorno di maggio del 1938, nelle orecchie di coloro che avevano innalzato festoni e addobbato le vie partenopee per la visita di Adolf Hitler il vecchio trinomio 'Liberté Egalité Fraternité'. Tasti e note di pace, tasti e note di guerra.

Alcuni suicidi sembrano chiari ed evidenti, con cause palesi e quasi giustificatrici, mentre altri sembrano del tutto inspiegabili; su questi ultimi si accaniscono le ipotesi, le supposizioni, si accalcano misteri, si ipotizzano le cause. Eppure, quel che appare davvero inspiegabile è come si possa supporre che esistano davvero suicidi 'chiari ed evidenti', quando l'unica cosa davvero chiara ed evidente è che nessuno può conoscere davvero quale sia l'ultimo pensiero di un uomo che sta per uccidersi. Nessuna ipotesi potrà ricevere conferma: ciononostante, ai vivi piace indagare, e porsi domande.

Mikhail Bakunin

Mikhail Bakunin, padre fondatore dell'anarchismo, appartenente alla Prima Internazionale al pari di Karl Marx, decise un giorno che la rivoluzione anarchica doveva scoppiare a Napoli. A Napoli l'anarchico si trasferì e da Napoli si accapigliava con Mazzini ed Engels, e mentre immaginava tempi e modi della sollevazione del popolo partenopeo contro i Borboni, trovò il tempo di sposarsi e di generare due figlie. Maria Bakunin, primogenita, divenne una delle prime docenti donna dell'Università di Napoli, nella facoltà di Chimica; Sofia Bakunin, secondogenita, sposò un rinomato e celebre chirurgo napoletano, Giuseppe Caccioppoli. Nonno Mikhail era morto ormai da più di ventisette anni, ma il chirurgo e Sofia gli generarono comunque un nipote, all'alba del ventesimo secolo, che non sarebbe dispiaciuto affatto al nonno rivoluzionario.

Renato Caccioppoli nacque a Napoli il 20 Gennaio 1904[7], e visse tutta la sua vita in uno strano equilibrio tra ribellione anarchica e democrazia popolare, tra elitarismo intellettuale e rifiuto delle istituzioni, tra romanticismo e aggressività dialettica. Visse di politica, di musica, e soprattutto di matematica. Senza alcuna speranza di definirlo pienamente, è curioso notare come ognuna di queste tre arti fossero vissute da Caccioppoli in maniera diversa e caratteristica, eppure senza contraddizione con il personaggio stesso. Forse dipende dal fatto che un uomo non è mai solo matematico, solo musicista, solo attivista

[7] …e tutta la comunità matematica italiana ne ha celebrato l'anno scorso il centenario della nascita. A noi di RM piacciono più i primi delle potenze di dieci, quindi abbiamo pazientemente atteso il 101° anniversario.

politico: è sempre qualcosa di più complesso, non definibile soltanto dalla somma delle sue azioni. Forse perché l'umana natura rifugge il riduzionismo, o forse solo perché non siamo ancora capaci di conoscere nessun uomo fino in fondo, completamente, fino ad elencare tutte le sue più piccole componenti. Certo è che il Caccioppoli politico era tale soprattutto come ribelle all'ordine costituito: non deve essere facile essere il nipote di Bakunin e vivere sotto il regime fascista. L'impulso alla ribellione era automatico, inevitabile, esca fin troppo facile per qualsiasi tentativo non retorico di narrazione. E diventa allora difficile non cadere nell'aneddotico, non narrare di come portasse a spasso il gallo per ironizzare sul divieto fascista di portare i cani al guinzaglio[8], o di come fosse impossibile vederlo senza l'Unità nella tasca del suo inseparabile impermeabile. E però il gallo portato a passeggio era protesta compiuta senza la paura di esser inevitabilmente considerato matto dai concittadini, e l'Unità in tasca, anche se veniva mostrato solo dopo la caduta del fascismo, era sfida condotta senza neanche il beneficio della protezione del partito di cui quel giornale era organo, perché Caccioppoli condusse le sue battaglie politiche sempre nell'ambiente del PCI, ma sempre senza prenderne la tessera. Politico 'contro', mai a favore: quando nel 1938 convince un'orchestrina di piazza a suonare la Marsigliese in occasione della visita del Fuhrer a Napoli, paga la sfida con l'arresto, con la messa in gioco della sua carriera accademica, e quasi con la prigione: e il 'quasi' è dovuto solo agli sforzi spasmodici della zia accademica, Maria, che riesce a muovere tutte le leve di potere al fine di trasformare la rivolta di ribelle in un'apparente pazzia di psicopatico. Caccioppoli evita prigione e confino, e si salva entrando in manicomio: e confesserà poi di non essersi trovato male, in mezzo all'umanità autentica dei matti del manicomio, rispetto alla falsità retorica dell'umanità savia di regime. Ma da allora sarà al tempo stesso 'o' matto', oltre che 'o' genio', per i napoletani delle case popolari che lo ammirano e lo salutano. O' matto, o' genio, o' professore, o' matematico. Tutti appellativi giustificatissimi. Dopo la guerra, combatte la sua battaglia politica soprattutto come 'partigiano della pace', e gira l'Italia per convincere la gente dell'assurdità della guerra. I partigiani della pace temono la guerra fredda, temono l'escalation degli armamenti nucleari, e lottano per denunciare l'evidente follia che attanaglia il mondo. E ad un comizio programmato in un teatro di Bari che Caccioppoli deve intervenire come partigiano della pace, e invece di parlare decide di suonare per un'ora al pianoforte che era rimasto in un angolo di palco. Contro le parole programmate e le convenzioni, oltre che contro le sciocchezze.

Sono soprattutto queste caratteristiche a rendere la figura di Caccioppoli interessante anche per i non-matematici: la ribellione, la napoletanità, il genio riconosciuto anche se inevitabilmente creduto, non certo pienamente compreso dalla gente comune. Caccioppoli girava per i quartieri popolari con il suo Aquascutum, impermeabile chiaro e di pregevole fattura inglese, e sotto quell'impermeabile spesso portava solo la canottiera o una maglietta intima di lana. Ad un tempo snob e trascurato, come certo gli piaceva essere. Su questa marcata caratterizzazione si fonda la leggenda Caccioppoli: diventa personaggio di un bel romanzo-verità di Ermanno Rea, 'Mistero Napoletano', romanzo che indaga sulla vita e sulla morte di Francesca Spada: anche la Spada è napoletana, ribelle, pianista e attivista di sinistra in un periodo in cui non era facile esserlo. Anche la Spada morirà suicida, e nel libro Caccioppoli è presente come amico, matematico, e come compagno di sonate al pianoforte. Diventa protagonista d'un bel film di Mario Martone, 'Morte di un

[8] Sempre di quel periodo tra le due guerre è anche il tentativo di imporre il 'passeggio' per le vie centrali della città in maniera ben ordinata: un senso di marcia nel marciapiede di destra, il senso opposto nel marciapiede di sinistra. Non si capisce come si potesse sperare di realizzare una tale bestialità in una città come Napoli, dove nella celeberrima Via Toledo tale attività ha il nome programmatico e intrigante di 'struscio'.

matematico napoletano', in cui viene narrata solo l'ultima settimana di vita di Caccioppoli. Un personaggio forte, a prescindere dalla matematica.

Ma Caccioppoli è soprattutto matematico: non un matematico facile, non un professore accondiscendente, ma profondamente matematico. Forse anche per qualche somiglianza fisica, ma soprattutto per la forte concomitanza nella ricerca dell'estetica in matematica, Caccioppoli può ricordare Godfrey Harold Hardy, di qualche anno più vecchio del napoletano, ma sostanzialmente quasi contemporaneo. Renato si laureò in matematica a Napoli a soli ventun anni, alla corte di Mario Picone, e questo nonostante avesse inizialmente intrapreso gli studi di Ingegneria. Nello stesso anno della laurea (1925), divenne assistente di Picone, e soltanto sei anni dopo vinse la cattedra di Analisi Algebrica all'Università di Padova: non aveva ancora ventisette anni, ed era già diventato uno dei più giovani docenti universitari d'Italia. Pubblicò in totale circa ottanta lavori: la sua prima memoria è del 1926 ('Sulla teoria generale dei sistemi pfaffiani'), l'ultima ('L'integrazione e la ricerca delle primitive rispetto ad una funzione continua qualunque') è del 1955. Tra questi due estremi, la produzione di Caccioppoli spazia dall'Analisi Funzionale alla Teoria della Misura, con gioielli di fattura matematica preziosa, anche se spesso fin troppo concisi e sintetici: Renato Caccioppoli era probabilmente un altro 'cacciatore di bellezza', e odiava dettagliare passo dopo passo le equazioni che costellavano le sue memorie: gli sembrava quasi di togliere forza estetica alle composizioni matematiche, che invece lui voleva nette, decise, leggibili solo da chi aveva gli occhi per leggerle. Tanto era democratico e antiaristocratico in politica, tanto era elitario in matematica. Questo gli costò (e probabilmente gli costa ancora), perché non tutte le sue pubblicazioni furono immediatamente comprese e valutate nella pienezza della loro importanza. Nel 1934 pubblicò 'Sui teoremi di esistenza di Riemann', ivi dimostrando il teorema sull'armonicità delle funzioni ortogonali a tutti i laplaciani; è quello che poi passerà alla storia come 'Lemma di Weyl', che però Weyl pubblicò soltanto nel 1940. Questa sua mania per l'estetica caratterizza fortemente anche il suo lavoro di docente: schiere di studenti si accalcavano alle sue lezioni, perché è indubbiamente affascinante essere annoverati tra i discepoli di un genio. Nonostante questo, Renato Caccioppoli non era probabilmente il professore che uno studente sogna di avere ad ogni esame: teneva le lezioni in napoletano, e questo era presumibilmente un aspetto positivo, volto a rimuovere la distanza che a quei tempi era ben marcata tra docente e discenti: ma la distanza veniva poi amplificata dalla matematica. Teneva lezioni brevissime, arrivando sempre in ritardo e lasciando l'aula spesso in anticipo: giustificava la cosa spiegando che un quarto d'ora delle 'sue' lezioni contenevano più scienza e informazione di due ore di lezione normale. E forse era vero: gli studenti erano affascinantissimi dal suo carisma, anche se non si vergognavano affatto di seguire le sue lezioni per poi andare a sostenere l'esame con il professor Miranda[9], che teneva gli stessi corsi di Caccioppoli ad anni alterni. Superare un esame con

[9] Carlo Miranda, che non vorremmo fosse per questo frainteso e considerato come un professorino di second'ordine: anche se un po' meno brillante di Caccioppoli, Miranda è comunque stato uno delle maggiori figure matematiche del Novecento italiano, altro nobilissimo rappresentante della scuola napoletana fondata da Mario Picone.

Caccioppoli era motivo di grande orgoglio, e solo pochi ardimentosi osavano cimentarsi in cotanta sfida[10].

Il genio matematico di Caccioppoli fu riconosciuto anche durante la sua vita: vinse numerosi premi (esiste una sua celebre foto con sigaro e cornice: si fece fotografare 'incorniciato' proprio per celebrare la sua vittoria ad un premio matematico), venne presto eletto all'Accademia dei Lincei, e anche il suo barbiere sapeva di tagliare i capelli al proprietario d'una mente eccezionale. Quando, nella mattina dell'otto Maggio 1959, Renato Caccioppoli organizza con accuratezza balistica il colpo di pistola che deve porre fine alla sua vita, sono molti i napoletani a chiedersi la ragione del suicidio. Ci fu chi vide nell'abbandono della moglie[11] la causa del gesto; altri videro lo sconforto politico, determinato in parte dall'evolversi della politica italiana del dopoguerra, non certo affascinante per un nipote di Bakunin, e in parte dalla profonda delusione patita per l'invasione dell'Ungheria nel 1956 da parte dell'Unione Sovietica. Altri ancora, come Roberto Gramiccia nel suo bel libro[12] su Caccioppoli, immaginano che sia invece un più generico senso di rifiuto per 'l'ordine' che andava in quei tempi sedimentandosi, e che poteva risultare intollerabile ad un animo inquieto come quello del napoletano, generando un inarrestabile desiderio di distruzione, un 'cupio dissolvi' proprio dei rivoluzionari che sono pronti a distruggere anche sé stessi.

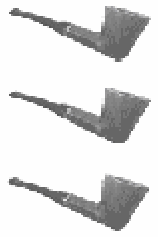
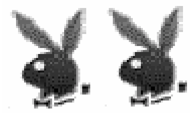
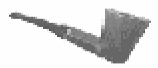
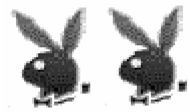
Noi, ovviamente, non abbiamo la più pallida idea di quale sia la verità, nè ci affanniamo a cercarla. Dall'alto dei suoi cinquantacinque anni, Renato Caccioppoli trovò più conveniente lasciare le sue funzioni e le sue misure, le sue battaglie politiche, gli ottantotto tasti del suo pianoforte e avventurarsi là dove poteva portarlo una pallottola in testa. Possiamo misurare forse quel gesto con le sue due citazioni più famose; la prima recita *'Non ho certezze, al massimo probabilità'*, e forse in quella mattina di maggio Caccioppoli aveva intravisto qualche maggiore probabilità di serenità nella pressione d'un grilletto. O forse, rammentando il suo splendido suggerimento: *'Se hai paura di qualcosa, misurala; scoprirai che si tratta di un'inezia'*, si è lasciato andare a misurare la sua paura di morire, scoprendo che era davvero poca cosa.

[10] Tra questi eroi, anche un Rmer della prima ora, che fu gratificato da Caccioppoli con l'affettuoso epiteto 'Venditore Ambulante di Molle per Mutande'. Al punto che, nei primi tempi, ci riferivamo a lui con l'allonimo/acronimo VAMM.

[11] Sara Mancuso, di molti anni più giovane di Caccioppoli, lo aveva lasciato per un dirigente del Partito Comunista napoletano. Era insieme a lei che Caccioppoli aveva intonato la 'Marsigliese' contro Hitler, nel 1938.

[12] Roberto Gramiccia, 'La Regola del Disordine – Renato Caccioppoli un matematico ribelle', editori Riuniti 2004, Euro 12,00.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
È da quattro anni che va avanti...			
Un cocktail disgustoso			

2.1 È da quattro anni che va avanti...

Nel senso che sono quattro anni che cerchiamo di capire cosa succede.

Trattasi di riforma fiscale: abbiamo inventato (quattro anni fa) un metodo piuttosto divertente per pagare le tasse *[a parte il fatto che non può essere divertente pagare le tasse, anche questo è un metodo tipico del Capo, vedrete... (AR)].*

Per prima cosa, mettetevi tutti in riga; e ricordatevi in che ordine siete, perché gli anni prossimi dovrete mettervi nello stesso modo.

Al primo gennaio, ciascuno di voi guarda nelle tasche e controlla quanti soldi ha il vicino nella posizione precedente; quando si tratta di pagare, ognuno di voi pagherà un'importo pari a quello che ha visto il primo gennaio. *[Stiamo parlando di un numero intero di euro, per capirci (PRS)]*

Piccolo esempio, che viene meglio: Se Alberto è in posizione ***15*** e Fred in posizione ***16***, il primo gennaio Fred guarda quanto ha in tasca Alberto (supponiamo ***20*** euro); questo significa che Fred pagherà ***20*** euro di tasse.

'...e se non ho abbastanza soldi?'

'Vai in deficit: lo fanno tutti'

'E se il mio vicino ha un deficit il primo gennaio?'

'In questo caso paghi un importo negativo, ossia lo Stato ti dà dei soldi'.

'...ma io non ho un vicino! Sono lo Zero!'

'Tu non paghi le tasse. Semplicissimo'

Bene, sono passati quattro anni, e noi sappiamo alcune cose:

1. Non si sono svolte transazioni finanziarie diverse dal pagamento delle tasse
2. Il nostro 'Numero Zero' aveva un Euro all'inizio e ha un Euro adesso; gli altri partivano con cifre varie, qualcuno iniziava senza soldi (in particolare quei quattro tizi al fondo della fila); qualcuno potrebbe addirittura partire con un deficit.

3. Adesso (dopo quattro anni) sono rimaste solo quattro persone con dei soldi ('positivi'), nelle posizioni q, r, s, t ($q<r<s<t$), non necessariamente consecutive.

Ora, quello che ci interesserebbe sapere (o meglio, ci sarebbe interessato quattro anni fa per fare un po' di pianificazione, ma era un problema talmente complicato che...) è: quanto ha guadagnato lo Stato in questi quattro anni?

Nota: per 'guadagno' si intende quello che resta in tasca allo Stato: ricordatevi di togliere i soldi dei vicini con deficit.

Quello che ci aspettiamo, è una risposta in funzione di q, r, s, t.

2.2 Un cocktail disgustoso

Quando si dice la sfortuna...

Avete presente quelle feste nelle quali la noia è tale che, per disperazione, l'unica cosa che potete fare è bere qualcosa? Già è brutto così, ma...

Ad una festa del genere, venite avvicinati dal padrone di casa che vi propone il suo 'Cocktail Segreto', e vi presenta un bicchiere[13] pieno fino all'orlo di un intruglio indefinibile.

Già l'odore vi informa sul fatto che l'oggetto rasenta la tossicità, ma dovete fare buon viso a cattivo gioco e quindi affrontate il padrone di casa (con la segreta speranza di offenderlo) con un 'Buono, ma verrebbe meglio con dentro una 'palla' (perfettamente sferica, è chiaro) di gelato al pistacchio...'

E l'infame risponde: '...OK, ma quanto grande?'

Ora tocca a voi: quanto deve essere grande la palla di gelato, per minimizzare il contenuto di schifezza nel bicchiere[14]?

3. Bungee Jumpers

Problema non usato alla XXXV I.M.O. (Hong Kong).

Strano, a me è piaciuto più di quelli usati...[RdA].

Un semicerchio G è tracciato con centro su una retta l. C e D sono punti di G. Le tangenti a G in C e D incontrano l rispettivamente in B e A, con il centro del semicerchio tra di loro. Sia E il punto di intersezione tra AC e BD, e F sia il punto di l tale che EF sia perpendicolare a l.

Provate che EF biseca[15] $\angle CFD$

La soluzione, a 'Pagina 46'

4. Soluzioni e Note

Che dirvi, tra la posta di questo mese si trovavano principalmente auguri di Natale in varie forme, tra cui foto, canzoni, documenti e programmi. Ringraziamo tutti di cuore e vi promettiamo ripercussioni sulla rivista (suona lievemente minaccioso?). Un ringraziamento speciale a ***PierCarlo***, che ci manda matematici per i 'buchi' del Calendario. Di certo il prossimo anno sarà più completo.

[13] Avete presente come sono fatti i bicchieri da cocktail? Stelo, cono rovesciato piuttosto largo. Giusto per parlare tutti la stessa lingua, supponiamo l'angolo tra l'altezza e il bordo del cono sia α e l'altezza del cono sia h.

[14] Il gelato al pistacchio ***non*** è considerato tossico; anzi, è il mio gusto preferito [RdA]

[15] Ne approfittiamo per introdurre un segno (brutto) per indicare decentemente l'angolo.

Il nostro appello del mese scorso su RM per i piccoli non è caduto nel vuoto: ***GaS*** ci offre come cavie i suoi tre fratellini e ancora di più:

> Un giornalino di giochi matematici per ragazzi (in età liceale) viene pubblicato dall'istituto ITIS 'Leonardo da Vinci' di Carpi, lo potete trovare al sito http://www.itisvinci.com/leonardo/20040520/index.php non so se già lo conoscete, in caso contrario dategli un'occhiata mi sembra molto ben fatto, a mio fratello di 15 anni piace molto.

L'unico misunderstanding è che noi non volevamo testare dei problemi, volevamo qualcuno che scrivesse la rivista! Comunque, adesso sappiamo che almeno tre lettori li avremo. Anche RM è cominciato così.

GaS si chiede anche come mai segnaliamo soprattutto eventi padani, ma ormai lo sapete tutti: la città madre di RM è Torino. Tutti e tre i redattori ci hanno fatto l'Università (Doc e Rudy la stessa), due redattori (Rudy e Alice) ci sono nati, uno ci vive tuttora, uno ci ha vissuto vent'anni, l'altra i suoi primi venticinque. Di qui, il fatto che siamo un po' più direttamente informati delle attività matematico-ludiche del NordOvest. Però la capitale ospita 50 Rmers tondi tondi, e ne contiamo parecchi nel Sud Italia, e se voi voleste pubblicizzare qualche evento saremmo orgogliosi di parlarne in rivista o in Newsletter.

Una disquisizione sulla giocoleria ci giunge da un nostro nuovo lettore, ***Andrea***, caldamente invitato a cercarsi un allonimo:

> (...) Ma bando ai convenevoli. Vi scrivo anche in proposito al n.27 (giusto per rompere il ghiaccio), che trattava anche di giocoleria. Essendo un appassionato e discreto giocoliere, vi volevo consigliare un programma che è veramente fantastico: Joe pass. Lo potete trovare in questo sito: http://www.koelnvention.de/jp/ ve lo segnalo perché un programma di una potenza straordinaria, in cui si può anche usare il linguaggio numerico che avete illustrato (ha un nome, ma non lo ricordo). Riguardo quello, io l'avevo imparato in modo differente.
>
> In pratica era così: Il giocoliere gioca in uno spazio che si può approssimare ad un piano: infatti le palline viaggiano in quel piano parallelo alla linea delle spalle del giocolaio, senza avere (in teoria) profondità, in modo che si possa giocare senza dover muovere i piedi.
>
> Questo 'piano di gioco' viene indi suddiviso in varie altezze, cioè rette parallele appartenenti al piano. Ad ogni altezza (chiamiamola pure y) corrisponde un numero. Ma il numero corrisponde anche al tipo di lancio.
>
> Si parte da y=1, cioè la retta individuata dalle mani nella posizione di partenza (schiena dritta, braccia aderenti al corpo che formano un angolo retto nel gomito, palme delle mani rivolte verso l'alto, ortogonali alla giacitura del piano di gioco, sguardo dritto e fiero avanti a sè (a fissare il punto improprio)).
>
> Si parte con la mano destra (per i destri. Ovvio l'analogo procedimento per i sinistrorsi, all'incontrario). La pallina in posizione 0 è ferma nella mano destra, giacente sulla retta y=1.
>
> Posizione 1 è il lancio corto, parallelo al terreno, da una mano all'altra. Sempre y=1.
>
> Posizione 2 è il lancio diritto, ortogonale al terreno, dalla mano in sè stessa.La pallina tocca nel punto più alto della sua traiettoria (verticale), la retta (altezza) y=2.
>
> Posizione 3 è il lancio normale, ad arco, da un mano all'altra. Nella sua traiettoria, la pallina tocca nel vertice la retta y=3.
>
> Posizione 4, sempre lancio dalla mano in sè stessa, a toccare altezza 4.

> ...e così via. Come si può banalmente notare, i lanci pari sono da un mano in sè stessa, quelli dispari passano la pallina da una mano all'altra. (...)

Molto interessante, vedremo cosa ne farà il Capo. *[Il Capo dice che è Alice a sapere il tedesco... (RdA)].*

Da qualche mese troviamo sempre più lettori interessati all'aspetto mistico della matematica, e alla sua relazione con la religione. Anche se non siamo in grado di contribuire molto al discorso, abbiamo già messo in comunicazione diversi tra loro, e speriamo che la nostra impronta laica e a volte perfino un po' blasfema non scoraggi nessuno ad avvicinarsi alla matematica nei suoi aspetti più diversi.

Infine, per tutti quelli che hanno avuto problemi con le dimensioni di RM, sappiate che il formato è un continuo work-in-progress. Vi abbiamo consigliato l'uso di Open Office, ma riceviamo ogni genere di file, alcuni in LaTex, atri in formato testo, e ci proviamo, a mettere tutto insieme in un formato che sembri più o meno uniforme... e ciò significa che, indipendentemente dalla forma in cui riceviamo i contributi, questi finiranno in word, parte delle formule saranno riscritte, e infine il tutto verrà trasformato in questo pdf che avete davanti. Ma per l'anno nuovo ci stiamo attrezzando, e forse riusciremo a ridurre parzialmente le dimensioni.

Bene, anzi male. Da gente come voi, che un po' di matematica la legge tutti i mesi su una nota e rinomata rivista di matematica, almeno una divisione per dodici ce l'aspettavamo... Che ne dite di questo numero settantadue? Va beh, passiamo alle soluzioni, va.

4.1 [071]

4.1.1 'Tu vo' fà l'Ammericano...'

Qui dobbiamo fare un annuncio, e sapete bene quanto non ci piace dire che avevamo sbagliato, così vi diremo la verità: l'abbiamo fatto apposta per avere più soluzioni allo stesso problema, due problemi in uno, siamo orgogliosissimi di avervi fatto questo scherzetto proprio a Natale. Vi ricordate che avevamo detto saremmo stati buoni, quest'anno? Beh, scherzavamo.

In ogni caso, per tutti quelli che non hanno ricevuto la Newsletter *[...e cosa aspettate ad abbonarvi? (RdA)]*, la spiegazione del vero problema del nostro Postino:

> (...) tutta colpa del Craps. Attenti RMers ci hanno colto in flagranza di reato grammaticale, e questo sarebbe niente se non fosse che la grammatica ha avuto, inevitabilmente, conseguenze sulla matematica (e poi dite che facciamo male, noi, a sollecitare un po' di sana cultura interdisciplinare?). Fatto sta che nel numero 71, pagina 18, dopo la voce 'Tiri Successivi', abbiamo imprudentemente scritto: 'Se esce un POINT, vince il Giocatore e finisce il Giro'. Ecco, se fra voi ci fosse qualche professore di Lettere, lo esortiamo a prendere questa frase come esempio dei danni che può provocare la confusione tra articolo determinativo e articolo indeterminativo. Alcuni buoni solutori hanno infatti risolto il problema così come da noi esposto, e si sono peritati di farci sapere che questo gioco 'reale' da casinò sembrava mica tanto reale, una volta calcolate le probabilità di vittoria (vergognosamente a favore del Giocatore contro il Banco). E allora ci tocca coprirci il capo con la canonica cenere di Canossa, e spiegare che sarebbe stato assai meglio se la frase riportata poco sopra avesse suonato così: 'Se esce **IL** point, vince il Giocatore e finisce il Giro'. Per dirla in altri termini (così magari riusciamo a confondervi per bene una volta per tutte), il Craps consiste sostanzialmente in un tizio che lancia un paio di dadi per definire un ben determinato 'punto', poi continua a tirarli finché non ripete proprio quel 'punto' (e allora vince) o finché non esce un 'sette' (e allora perde). A questo semplicissimo approccio vanno aggiunte le regole supplementari del 'primo lancio', quelle cioè correttamente esposte nel testo del problema qualora il primo lancio di dadi desse i risultati 2, 3, 7, 11 o 12. (...)

Visto che questo è il posto in cui incensiamo e/o copriamo di ridicolo i lettori, ci teniamo a farvi sapere che tra gli 'attenti lettori' c'erano ***GaS***, ***Mistral***, ***Nord***, ***Zar***, ***PMP***, ***Caronte*** (*'dov'è quel casinò dove si gioca a Craps con le regole date da voi? Se me lo fai sapere smetto subito di lavorare e mi trasferisco in sala giochi dadi'*), alcuni dei quali ci hanno mandato una soluzione per versione. ***FraPao***, a cui diamo il benvenuto tra gli iscritti e i solutori, ha cercato le regole su internet, e ha promosso la schifezza (*crap*) in buon crostaceo (*crab*)... buon appetito. ***JL Picard*** *[benvenuto!]* come ***Ridley***, nuovissimi iscritti, ci hanno mandato soluzioni alla prima versione molto simili tra loro, vi proponiamo quella di ***JL Picard***:

> Per prima cosa ricordiamo la probabilità di uscita dei punteggi del lancio di due dadi:

Punteggio	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilità	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

> Per cui al primo tiro si ha:
>
> Probabilità di vittoria Giocatore = P(7) + P (11) = 6/36 + 2/36 = 8/36 = 2/9
>
> Probabilità di vittoria Banco = P(2) + P(3) + P (12) = 1/36 + 2/36 + 1/36 = 4/36 = 1/9
>
> Probabilità di patta (il gioco prosegue) = 1 – (Pvg + Pvb) = 1 – (1/9 +2/9) = 6/9 = 2/3
>
> (si noti che è anche la probabilità di uscita di un POINT)
>
> A ciascuno dei tiri successivi si ha:
>
> Probabilità di vincita Giocatore = P (Point) = 2/3
>
> Probabilità di vincita Banco = P (7) = 6/36 = 1/6
>
> Probabilità di patta (il gioco prosegue)= 1 – (Pvg + Pvb) = 1 – (2/3+ 1/6) = 1/6
>
> Per calcolare la probabilità di vittoria del giocatore, occorre sommare la probabilità di vittoria a ciascun tiro di dadi.
>
> Pvg= Pvg1 + Pvg2 + …. + Pvgn
>
> Pvg1 è stata già determinata: Pvg1= 2/9
>
> Pvg2 è pari al prodotto della probabilità di patta al 1° lancio, per la probabilità di successo al 2° lancio. Pvg2 = 2/3 · 2/3 = 4/9
>
> Pvgn è pari al prodotto della probabilità di patta agli (n-1) lanci per la probabilità di patta all'n-esimo lancio: Pvgn = 2/3 · $(1/6)^{n-1}$ · 2/3
>
> Sommando e raccogliendo 4/9 a fattor comune si ottiene
>
> Pvg = $2/9+4/9\sum_{k=1}^{n-1}(1/6)^k$
>
> Il limite per n tendente all'infinito della sommatoria evidenziata è ben noto e pari a
>
> $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1/6)^k = 1/(1-1/6)=6/5$$
>
> Per cui si può scrivere:
>
> Pvg = 2/9 + 4/9 · 6/5 = 2/9 + 24/45 = (10+24) /45. Pvg = 34/45
>
> Analogamente si può procedere per la probabilità di vittoria del banco
>
> Pvb= Pvb1 + Pvb2 + …. + Pvbn
>
> Pvb1 è stata già determinata: Pvb1= 1/9

Pvg2 è pari al prodotto della probabilità di patta al 1° lancio, per la probabilità di successo al 2° lancio: Pvb2 = 2/3 · 1/6 = 1/9

Pvgn è pari al prodotto della probabilità di patta agli (n-1) lanci per la probabilità di patta all'n-esimo lancio: Pvbn = 2/3 · $(1/6)^{n-1}$ · 1/6

Sommando e raccogliendo 1/9 a fattor comune si ottiene

$$\text{Pvb} = 1/9 + 2/18\sum_{k=1}^{n-1}(1/6)^k$$

Il limite per n tendente all'infinito della sommatoria evidenziata è ben noto e pari a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}(1/6)^k = 1/(1-1/6) = 6/5$$

Per cui si può scrivere:

Pvb = 1/9 + 1/9 · 6/5 = 1/9 + 6/45 = (5+6) /45. Pvb = 11/45

Per una volta tanto, conviene fare il giocatore e non il banco… (mi sa che questa è un'altra delle offerte di Natale)… Ma siccome Timeo danaos dona ferentes[16]… mi sa che i dadi sono truccati…

No, per il momento il Capo usa trucchi matematici, per vincere sempre lui. A quasi tutti quelli che ci hanno provato con il primo enunciato è venuto un 75% di probabilità di vittoria, con diversi metodi, incluso ***Qfwfq***, che salutiamo.

Una volta chiarite le regole, ecco un altro fiume di soluzioni, ***Nord***, ***Mistral***, ***Zar***, ***u_toki***, ***Caronte***, e non siamo sicuri di nominare tutti.

Cominciamo da Nord, che ha trovato per primo le regole del gioco e ci ha mandato un paio di errata corrige, speriamo di aver interpretato bene la versione finale:

Ora sia

G := {'il giocatore fa 7 oppure 11'}

B := {'il giocatore fa 2 o 3 o 12'}

E_1 := {'il giocatore fa il point 4'}

E_2 := {'il giocatore fa il point 5'}

E_3 := {'il giocatore fa il point 6'}

E_4 := {'il giocatore fa il point 8'}

E_5 := {'il giocatore fa il point 9'}

E_6 := {'il giocatore fa il point 10'}

Ovviamente

P(G) = P(7)+P(11) = 8/36 = 2/9

P(B) = P(2)+P(3)+P(12) = 1/9

Per la probabilità condizionata, posto

A := {'vince il giocatore'} e

[16] Quella lagna di Doc, pur commosso dalla citazione, non ha rinunciato ad evidenziare che un ET (congiunzione, non extraterrestre) è rimasto nella penna di JL Picard:"Timeo Danaos ET dona ferentes"! Bisogna aver pazienza, ma lui sostiene che quell'et è proprio il miglior esempio letterario in cui la congiunzione veicola il significato di "anche se": "Temo i Greci anche se portano doni". Lo sappiamo, lo sappiamo, è ben noioso, quando ci si mette...

A' := {'vince il banco'} si ha immediatamente:

P(A | G) = 1 P(A | B) = 0

P(A' | G) = 0 P(A' | B) = 1

Qualora invece il primo lancio dia point (il che è molto probabile come si è visto) definisco (per i intero tra 1 e 6):

E'_i := {'il giocatore fa 2 o 3 o 4 o 5 o 6 o 8 o 9 o 10 o 11 o 12'} \ E_i

e lo spazio di probabilità si riduce a $(E_i)U(E'_i)U(7)$.

A questo punto con una probabilità P(7) = 1/6 vince il banco, con $P(E_i)$ vince il giocatore, mentre con una probabilità $P(E'_i)$ non vince nessuno e si ritirano i dadi. Dunque:

$P(A \mid E_i) = P(E_i) + P(E_i)P(E'_i) + P(E_i)P(E'_i)^2 + P(E_i)P(E'_i)^3 + ... = P(E_i) \cdot S(P(E'_i)^i)$

$P(A' \mid E_i) = P(7) + P(7)P(E'_i) + P(7)P(E'_i)^2 + P(7)P(E'_i)^3 + ... = P(7) * S(P(E'_i)^i)$

intendendo con $S(P(E')^i)$ la somma della serie geometrica di ragione $P(E'_i)$.

$P(E'_i) < 1 \rightarrow$ la serie converge: $S(P(E'_i)^i) = 1/[1-P(E'_i)]$.

Si ha dunque

$$S(P(E'_1)^i) = 4$$
$$P(A \mid E_1) = 4 P(4) = 1/3$$
$$P(A' \mid E_1) = 4 P(7) = 2/3$$
$$S(P(E'_2)^i) = 18/5$$
$$P(A \mid E_2) = 18/5 P(5) = 2/5$$
$$P(A' \mid E_2) = 18/5 P(7) = 3/5$$
$$S(P(E'_3)^i) = 36/11$$
$$P(A \mid E_3) = 36/11 P(6) = 5/11$$
$$P(A' \mid E_3) = 36/11 P(7) = 6/11$$
$$S(P(E'_4)^i) = 36/11$$
$$P(A \mid E_4) = 36/11 P(8) = 5/11$$
$$P(A' \mid E_4) = 36/11 P(7) = 6/11$$
$$S(P(E'_5)^i) = 18/5$$
$$P(A \mid E_5) = 18/5 P(9) = 2/5$$
$$P(A' \mid E_5) = 18/5 P(7) = 3/5$$
$$S(P(E'_6)^i) = 4$$
$$P(A \mid E_6) = 4 P(10) = 1/3$$
$$P(A' \mid E_6) = 4 P(7) = 2/3$$

Perciò

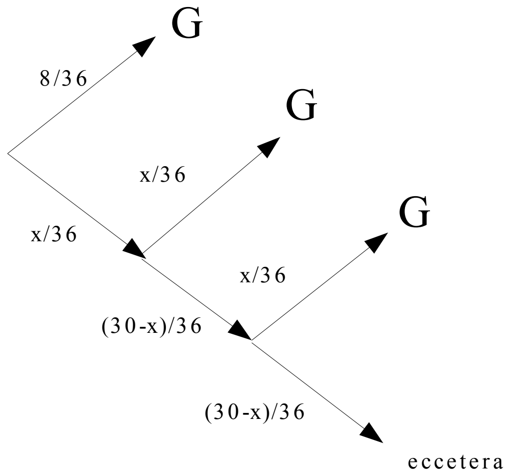
$$P(A) = P(G) + P(A \mid E_1) P(E_1) + P(A \mid E_2) P(E_2) + P(A \mid E_3) P(E_3) + P(A \mid E_4) P(E_4) + P(A \mid E_5) P(E_5) \approx 49,2 \%$$

$$P(A') = P(B) + P(A' \mid E_1) P(E_1) + P(A' \mid E_2) P(E_2) + P(A' \mid E_3) P(E_3) + P(A' \mid E_4) P(E_4) + P(A' \mid E_5) P(E_5) \approx 50,8 \%$$

E ora capisco anche quello che intendeva il GC con 'il gioco è uno dei più 'pari' tra quelli giocati ai Casinò'.

Non ci vogliano male quelli che hanno inviato soluzioni che non pubblichiamo, cerchiamo sempre di dare la precedenza ai nuovi lettori e agli approcci più originali. Date un'occhiata alla versione di ***Zar***, per esempio, che allega disegni chiarificatori:

Dopo aver chiarito le regole del gioco, sono passato ad analizzarlo. Ho disegnato (molto male, ero tentato di allegare un disegnino fatto a mano...) un albero delle possibilità che mi ha aiutato a fare i conti, e che allego a questo messaggio.



Facciamo i conti per vedere quando vince il giocatore, indicato con G nel grafico.

Se esce 7 o 11 vince il giocatore: il 7 ha 6 probabilità su 36 di uscire, l'11 ne ha 2, in totale la probabilità di vincere al primo lancio è di 8/36, come indicato dalla freccia che va verso l'alto e termina con una bella G.

Se esce 2, 3 o 12 vince il banco e per il momento la cosa non ci interessa.

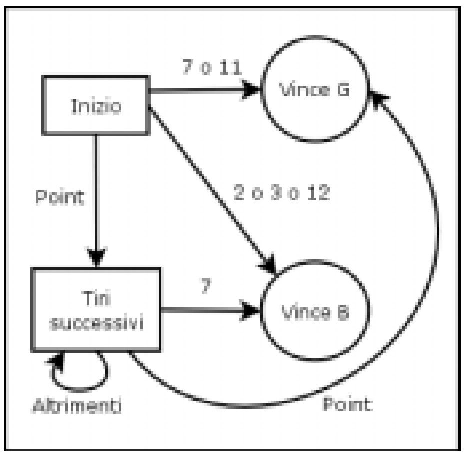
Ogni altro punteggio si chiama Point. Ogni diverso Point ha una sua probabilità di uscita: fissiamo un particolare Point e indichiamo con x/36 la sua probabilità (per esempio, per il 4 si ha che x=3).

Ci troviamo ora nello stato 'tiri successivi', è uscito un particolare Point, le regole cambiano. Se esce di nuovo quel Point (ancora con probabilità x/36), vince il giocatore, se esce 7 (con probabilità 6/36) vince il banco, e questo non ci interessa, altrimenti (probabilità (36-6-x)/36 = (30-x)/36) si continua a tirare.

E si può andare avanti così per sempre, e quindi l'albero delle possibilità è potenzialmente infinito. Il disegno che ho fatto tiene conto dell'uscita di un solo Point, ma dobbiamo ricordarci che i valori che può assumere il Point possono essere 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Supponiamo che il Point sia 4 oppure 10, che hanno probabilità di uscita 3/36. Il giocatore vince con probabilità pari a

$2\ [(3/36)^2 + (3/36)^2\ (27/36) + (3/36)^2\ (27/36)^2 + \ldots\ ] = 2\ (3/36)^2\ \cdot$ (serie geometrica di ragione 27/36) $= 2\ (3/36)^2\ \cdot 1/(1-27/36) = 1/18$



Se il Point è 5 oppure 9, allora x vale 4 e la somma precedente si modifica in

$2\ (4/36)^2\ \cdot$ (serie geometrica di ragione 26/36) $= 4/45$

Se poi il Point è 6 oppure 8, abbiamo x=5 e la somma diventa (saltando i soliti noiosi passaggi) 25/198.

A questi tre valori appena calcolati dobbiamo sommare la probabilità iniziale di vincere al primo colpo con un 7 o un 11, pari a 8/36. In totale quindi le probabilità di vittoria sono

8/36 + 1/18 + 4/45 + 25/198 = 244/495,

pari a 0.49(29), con un leggerissimo vantaggio, quindi, per il banco, che vince 251 volte su 495. Non oso pensare al pazzo che ha inventato il gioco...

Allego anche un diagramma di stato del gioco.

Diagramma di stato che ci è piaciuto moltissimo. Vi state ricredendo sulla cattiveria del Capo?

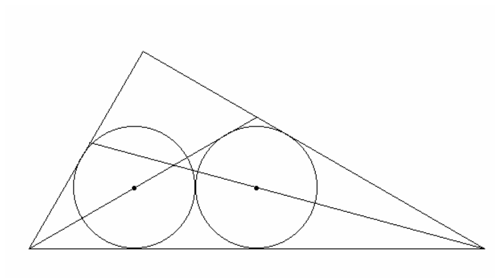
4.1.2 L'infinito triangolato

Tantissimi si sono cimentati nel triangolamento dell'infinito, soluzioni sono arrivate da ***Zar***, ***Nord***, ***GaS***, ***u_toki***, ***MaMo*** *[benvenuto!]*, ***Stokastik***, ***Caronte*** e ***JL Picard***. Cominciamo con ***Zar***:

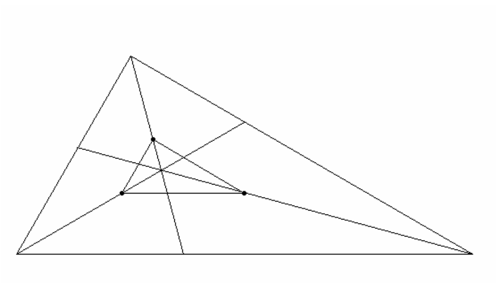
Questo problema mi è piaciuto molto a causa del risultato inaspettato: immaginavo di dover trovare una formulaccia con un sacco di funzioni goniometriche inverse, e invece ho trovato una bella formulina tutta razionale. E mi sono anche divertito a simulare il problema in xeukleides, quel programma per linux di cui vi avevo parlato tempo fa.

Per poter costruire l'infinito più grande possibile, è necessario che le due circonferenze di cui esso è composto siano tangenti ai lati del triangolo e tra loro: esse saranno dunque entrambe tangenti a uno stesso lato. E il loro centri dovranno stare sulle bisettrici degli angoli del triangolo rettangolo. Allego un primo disegnino per fare capire il problema.

Prima domanda: a quale lato devono essere tangenti entrambe le circonferenze?



Congiungo i centri delle due circonferenze e traccio i segmenti paralleli agli altri due lati passanti per essi, ottenendo la figura seguente.



Il triangolino interno è simile a quello esterno, il lato maggiore è quello parallelo all'ipotenusa, che è anche il doppio del raggio dei cerchi dell'infinito. Insomma, i due cerchi bisogna farli appoggiare sull'ipotenusa affinché i loro raggi siano massimi.

Se indico con a il cateto minore, b quello maggiore, con c l'ipotenusa, con (alfa) l'angolo opposto ad a e con (beta) l'angolo opposto a b, ottengo la relazione

$$\frac{R}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + 2R + \frac{R}{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)} = C$$

Ricordandosi delle formule di bisezione:

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

e delle relazioni tra lati e triangoli di un triangolo rettangolo:

$$\cos\beta = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

sostituendo, razionalizzando e applicando il teorema di Pitagora si ottiene:

$$R\left(\frac{a}{c-b} + \frac{b}{c-a} + 2\right) = C$$

e dopo un altro paio di passaggi si arriva alla relazione finale:

$$R = \frac{c(c-b)(c-a)}{(a+b)(a+b-c)}$$

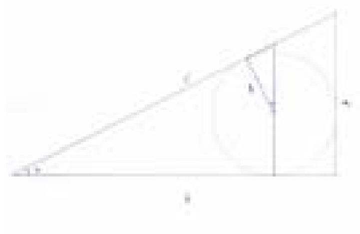
E questo è quanto, e la soluzione è molto bella perché nonostante tutte quelle tangenti, quei coseni e quelle radici, siamo arrivati a un risultato facile facile. Forse si potevano evitare tutte quelle funzioni goniometriche? Mah...

Devo dire che se una nota rivista di matematica ricreativa si degnasse di usare il formato TeX (e guai a chi dice Willer *['freddo ai piedi, pard?' (RdA)]*) come le note riviste di matematica non ricreativa, io non sarei diventato matto ad usare openoffice e il suo formula editor (che non mette nemmeno in corsivo i nomi delle funzioni e le lettere) *[anche se il Capo fa tanta pubblicità a OO, le formule che scrivi ci tocca riscriverle tutte, per cui a questo punto tex, txt, o word vanno benissimo, scrivi come più ti fa piacere! (AR)]*.

Per quanto riguarda la generalizzazione a un infinito con due cerchi diversi, mi sembra che sia più semplice, perché uno dei due cerchi è quello inscritto nel rettangolo, cioé quello con il centro nell'incrocio delle bisettrici (incrocio che si chiama, appunto, incentro). E l'altro cerchio dovrà stare dalla parte dell'angolo minore, dove c'è più spazio – ma qui non ho ancora fatto calcoli.

Nord sostanzialmente segue lo stesso percorso (pur non ottenendo identico risultato), ma alla fine decide di procedere all'espansione del problema:

Se si volesse costruire un simbolo di infinito mediante due circonferenze (di raggi diversi $r<R$) tangenti, contenute in un triangolo rettangolo (di cateti $a<b$) in modo da occupare più spazio possibile si potrebbe procedere in questo modo:

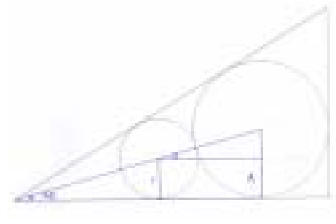


Come circonferenza maggiore si prende la più grande possibile (tangente a entrambi i cateti e all'ipotenusa).

Costruendo i soliti 'triangolini' simili (in realtà qui ne basta uno) si trova il rapporto tra il raggio e uno dei cateti:

$$a = R + R/\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R = a/[1+(c/b)]$$

A questo punto si aggiunge la seconda circonferenza che, ovviamente, per essere il più grande possibile dovrà essere tangente all'ipotenusa e ad uno dei cateti (il maggiore).



Costruita anche questa circonferenza, è facile (dopo aver osservato che la retta congiungente i centri biseca l'angolo α) trovare la relazione che lega i raggi:

$$r\cot(\alpha/2)+(r+R)\cos(\alpha/2)=R\cot(\alpha/2)$$
$$r[\cot(\alpha/2)+\cos(\alpha/2)]=R[\cot(\alpha/2)-\cos(\alpha/2)]$$
$$\cos(\alpha/2)=\sqrt{(1+\cos\alpha)/2}=\sqrt{(1+b/c)/2}$$

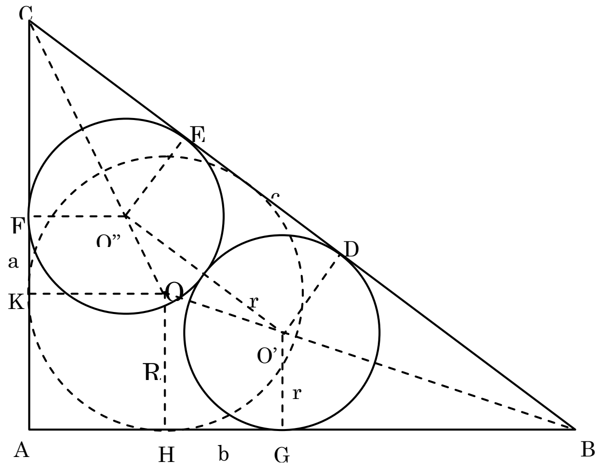
Da cui:

$$r=\frac{1/\sqrt{(1-b/c)}-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{(1-b/c)}+1/\sqrt{2}}R$$

Che lui dichiara scritta ignobilmente e noi siamo d'accordo, anche dopo riformattazione. ***GaS*** dal canto suo è partito per una strada molto complicata e non ha portato a casa una soluzione, mentre ***u_toki***, partendo dallo stesso metodo di ***Zar*** e ***Nord***, ci ha fornito un terzo risultato e pochi passaggi intermedi.

JL Picard confronta i diversi valori che si ottengono avendo i due cerchi tangenti entrambi ai cateti invece che all'ipotenusa e dimostra che quest'ultima è la soluzione ottimale, e la sua espressione è equivalente a quella di ***Nord***. Procedimento molto simile a quello di Stokastik, che fornisce un grafico e verifica che l'infinito massimo si ha per un triangolo isoscele... Probabilmente le differenze nelle varie versioni si possono ricondurre a scambi di variabili, ecco qui di seguito la versione di ***MaMo***, un nuovo iscritto:

Disegniamo il triangolo rettangolo e il cerchio inscritto in esso. I due cerchi uguali interni al triangolo hanno raggio massimo quando ognuno di essi è tangente ad un cateto e all'ipotenusa del triangolo (vedi figura).



Indichiamo con r il raggio dei due cerchi e con R il raggio del cerchio inscritto nel triangolo.

Notiamo che i segmenti OO' e $O'B$ sono adiacenti perché appartengono entrambi alla bisettrice dell'angolo ABC. Analoghe conclusioni si possono trarre per i segmenti OO'' e $O''C$.

Consideriamo i triangoli rettangoli OHB e $O'GB$. Essi sono simili in quanto hanno i tre angoli uguali. Per questo possiamo scrivere la seguente proporzione:

$$OH : O'G = BH : BG$$

I segmenti OH e OK corrispondono al raggio del cerchio inscritto nel triangolo. Si ha perciò $OH = OK = R$.

Il quadrilatero $AHOK$ è un quadrato quindi possiamo scrivere:

$$BH = AB - AH = b - R$$

Inserendo i valori trovati nella proporzione precedente si ottiene:

$$BG=\frac{r}{R}(b-R)$$

Con analoghi ragionamenti riferiti ai triangoli rettangoli *OKC* e *O"FC* possiamo scrivere la proporzione:

$$OK : O''F = CK : CF$$

Essendo $CK = a - R$, da essa si ricava facilmente:

$$CF = \frac{r}{R}(a - R).$$

Applichiamo ora il teorema delle tangenti condotte da un punto esterno ad una circonferenza. Per questo teorema, riferito al vertice B del triangolo, si ha $BD = BG$. Analogamente, per il vertice C, si ricava $CE = CF$.

Dal rettangolo *O'DEO"* si ottiene inoltre $ED = O'O'' = 2r$. Da queste considerazioni possiamo scrivere l'uguaglianza:

$$BC = CE + ED + DB\,.$$

Inserendo le relazioni precedentemente trovate si ottiene:

$$c = 2r + \frac{r}{R}(a - R) + \frac{r}{R}(b - R) = \frac{r}{R}(a + b).$$

Il raggio dei due cerchi è perciò:

$$r = \frac{cR}{a + b}\,.$$

Il raggio del cerchio inscritto in un triangolo rettangolo è:

$$R = \frac{2A}{p} = \frac{ab}{a + b + c}\,.$$

Il raggio dei due cerchi inscritti diventa quindi:

$$r = \frac{abc}{(a + b)(a + b + c)}\,.$$

Risultato che aveva trovato anche il nostro ***Caronte***, del quale però abbiamo ben altro da pubblicare! Date un'occhiata a quello che ci ha scritto: una poesia!

Voglio grosso l'infinito,
dice a tutti il gran capò,
bello tondo ed inserito
in un retto trigonò;

da due cerchi costituito,
stesso raggio questi avran
e in un punto definito
tra di lor si toccheran.

Al lettore che è scaltrito
passa ora a domandar
'ai due cerchi di infinito
quale raggio debbo dar?'

È un po' stanco Carontino,
non gli va di lavorar,
e si siede a tavolino
e si mette a scribacchiar;

scrive seni e poi coseni
e tangenti e poi cotan
e fa tanti bei disegni
che capir meglio faran.

E, seguendo il suo destino,
dopo un lungo vagolar,
è riuscito Carontino
la risposta a formular.

Il tuo raggio è una frazione
e il prodotto dei tre lati
del rettangol triangolone
metterai senz'altri fiati

nel suo bel numerator;
sotto questo tu porrai,
come denominator,
un prodotto che farai

con la somma dei cateti
e con quella dei tre lati.
E con questo -siam faceti?-
ci siam forse addormentati?

La risposta certo è no!
Più grossino l'infinito
disegnare lo si può
se il bicerchio ch'è inserito

nel ben noto triangolone
non un solo raggio avrà,
ma terrà a disposizione
di due raggi varietà.

Ora dunque qui si pone
al più saggio a al più coglione
la grandissima questione
di trovar la dimensione

del raggino e del raggione
e di fare il paragone
dei due casi in discussione.

Dato il triangolo ABC, retto in C, indicati, come d'uso, con α e β gli angoli in A e B, con a e b i cateti loro opposti (con, per fissare le idee, $a<b$) e con c l'ipotenusa, si disegnino due cerchi di raggio ρ, tangenti tra loro, entrambi a c e l'uno ad a e l'altro a b. Nel loro insieme essi rappresentano l' 'infinito', costruito con due cerchi uguali, di massime dimensioni contenibile in ABC. Considerando l'ipotenusa come somma dei tre segmenti in cui essa viene divisa dai due punti di tangenza coi due cerchi, è immediato verificare che vale l'identità

$$c = \rho\left[\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + 2\right] \qquad \textbf{[004.001]}$$

Ma si ha

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+b/c}{a/c} = \frac{c+b}{a}$$

e, analogamente,

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{c+a}{b}.$$

Sostituendo queste espressioni nella **[001]**, con due passaggi banali si ottiene:

$$\rho = \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)} \qquad \textbf{[004.002]}$$

E con ciò si è risposto al quesito posto dal gran capo.

Se vogliamo poi considerare una coppia di cerchi interni al triangolo, tangenti esternamente tra loro, lasciando cadere l'ipotesi che essi abbiano gli stessi raggi, che formino complessivamente una figura più grande della precedente, possiamo tentare di disegnare, in primo luogo, il massimo cerchio tutto interno al triangolo, che è, ovviamente, il cerchio in esso inscritto, avente il centro nel punto O di incontro delle tre bisettrici (il cosiddetto '*incentro*') e raggio R, dato da

$$R = \frac{ab}{a+b+c}. \qquad \textbf{[004.003]}$$

Questa relazione si verifica facilmente in vari modi; per esempio, osservando che per l'area S del triangolo, da un lato si ha

$$S = \frac{1}{2} ab ,$$

mentre, se si tiene conto che S è anche la somma delle aree dei tre triangoli aventi vertici comuni in O, come basi rispettivamente i tre lati del triangolo dato e tutti uguale altezza R, dall'altro è

$$S = \frac{1}{2} R(a + b + c).$$

A vista si ha poi che il più grande cerchio che possiamo ancora disegnare, tangente esternamente a quello appena disegnato e tutto interno al triangolo dato, sembra essere quello che risulta anche tangente all'ipotenusa e al cateto maggiore b (in due punti che indicheremo rispettivamente con H' e K'), avente centro O' compreso tra O ed A. Per ottenere il raggio r di tale cerchio, detti rispettivamente H e K i punti di tangenza del cerchio di raggio R con c e b, possiamo osservare che si ha $AK = AK' + K'K$ (ovvero, equivalentemente, $AH = AH' + H'H$) e che

$$AK = R \cot(\alpha/2), \quad AK' = r \cot(\alpha/2), \quad K'K = (r + R)\cos(\alpha/2),$$

e che quindi vale l'uguaglianza

$$R \cot(\alpha/2) = r \cot(\alpha/2) + (r + R)\cos(\alpha/2)$$

di qui segue che

$$R[\cot(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)] = r[\cot(\alpha/2) + \cos(\alpha/2)]$$

e quindi

$$r = R \frac{\cot(\alpha/2) - \cos(\alpha/2)}{\cot(\alpha/2) + \cos(\alpha/2)} = R \frac{1 - \sin(\alpha/2)}{1 + \sin(\alpha/2)}. \qquad \textbf{[004.004]}$$

Dalla **[004]**, ricordando che

$$\sin(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} = \sqrt{(1 - b/c)/2},$$
$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} = \sqrt{(1 + b/c)/2},$$

si ricava

$$r = \frac{(1 - \sin(\alpha/2))^2}{\cos^2(\alpha/2)} R = \frac{\left(\sqrt{c} - \sqrt{c - b}\right)^2}{b + c} R , \qquad \textbf{[004.005]}$$

ottenendo così un'espressione che fornisce r in termini dei lati del triangolo.

Per paragonare le *dimensioni* dei due 'infiniti', quello costruito con due cerchi di ugual raggio ρ e quello formato dai cerchi di raggio R ed r, consideriamo le loro lunghezze totali, che sono, rispettivamente,

$$L_{ug} = 2 \cdot 2\pi\rho \quad \text{e} \quad L_{div} = 2\pi(r + R).$$

Osservando che, grazie alle **[002]** e **[003]**, si ha

$$\rho \equiv \frac{abc}{(a+b)(a+b+c)} = R\frac{c}{a+b} = R\frac{1}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

e quindi

$$L_{ug} = \frac{4\pi R}{\cos\alpha + \sin\alpha}$$

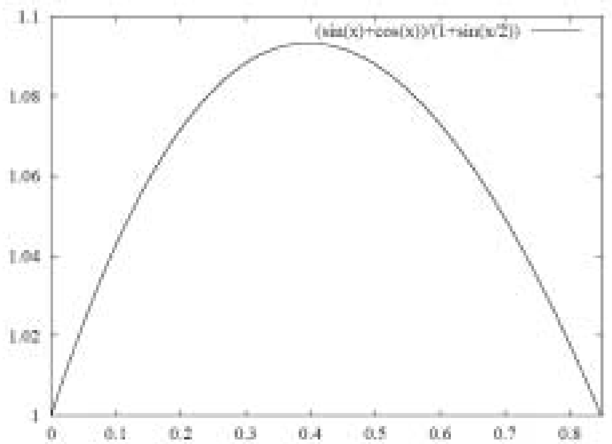
e che, tenendo conto della **[004]**, si ha poi

$$L_{div} = 2\pi\left(1 + \frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}\right) = \frac{4\pi R}{1+\sin(\alpha/2)},$$

il rapporto tra tali lunghezze risulta

$$\frac{L_{div}}{L_{ug}} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{1+\sin(\alpha/2)}. \qquad \textbf{[004.006]}$$

Poiché α è, per ipotesi, l'angolo opposto al minore dei due cateti, e quindi costretto a variare tra 0 e $\pi/4$, è facile verificare che tale rapporto è sempre maggiore di uno, ma di ben poco, come mostra il grafico qui riportato.



Si può notare che, per $\alpha=\pi/4$ (triangolo rettangolo isoscele), il rapporto L_{div}/L_{ug} è ancora maggiore di 1 e che tale rimane anche se lasciamo che α superi il valore $\pi/4\approx0.785$, fino ad $\alpha\approx0.85$. In realtà, dunque, è possibile disegnare un 'infinito disuguale' di lunghezza maggiore di quella dell' 'infinito uguale' anche disegnando, accanto al cerchio inscritto, un cerchiolino esterno ad esso e situato dalla parte dell'angolo opposto al cateto maggiore, in parziale contraddizione con quanto suggerito intuitivamente all'inizio. A giustificazione dell'intuito, tuttavia, rimane il fatto che questo succede solamente se la differenza tra i due cateti è piuttosto piccola (fino a circa $b \approx 1.138a$). Se la differenza tra i due cateti è sensibile, allora l'affermazione istintiva è l'unica che corrisponda alla realtà.

Ve l'avevamo detto che lasciavamo il meglio per il fondo. Guardate cosa ha scritto il Capo:

Ci siam chiesti, in Redazione,
(quasi sobri, si suppone)
'Disfemismo neccessario?
O mantiene il suo binario
tutta la dimostrazione
anche senza quel 'c...one'?

Siamo già quasi in un guaio
la scadenza è il tre gennaio!
Discussioni a tutto spiano
che trascriver non possiamo;
ma, tagliando per i campi,
passi il termine e si stampi.

Che ne dite? Aveva detto 'vi proibisco di pubblicarla', ma poi ha cambiato idea perché, testuali parole, *se non scriviamo una poesia, Caronte dovrebbe fregiarsi del titolo di*

'Peggior Poeta di RM', e la cosa non mi pare giusta. L'esistenza di un altro poeta(stro) lo fa restare al primo posto, che però non è più l'ultimo.

5. Quick & Dirty

Manovra finanziaria.

In questo numero uno dei problemi tratta un collegato (alla finanziaria), ma si tratta di un problema decisamente complesso, almeno secondo noi; siccome non vorremmo che pensaste 'Ecco! non potrò mai fare il Presidente del Consiglio!', vi passiamo un problema trovato su un sito 'amico[17]'; qui, si tratta di ridistribuire la ricchezza.

La popolazione è stata divisa in cinque classi di ricchezza; ogni classe ha lo stesso numero di appartenenti e ogni appartenenete ha gli stessi soldi di un altro (della medesima classe).

La vostra riforma per incrementare gl investimenti prevede una procedura del genere:

1. Si prendono due classi contigue
2. Si ammucchiano tutti i soldi che hanno
3. Si ridistribuiscono in parti uguali ai membri delle due classi

...e avanti così.

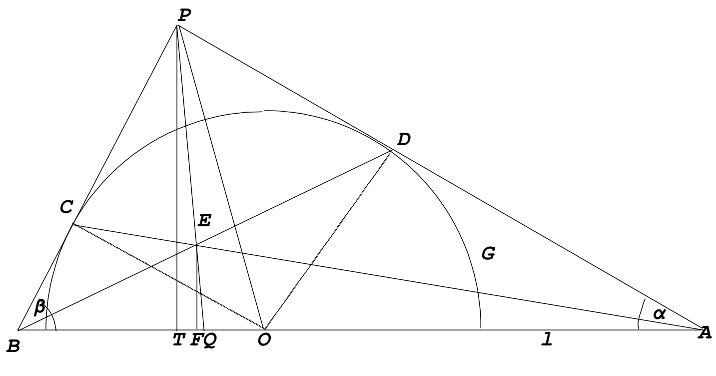
Per ragioni di semplicità, vi si prospettano due modi di operare:

1. Agire sulla classe 1 (la più povera) e sulla classe 2, poi agire sulla classe 2 (nella sua condizione attuale) e sulla classe 3, poi 3 e 4, poi 4 e 5.
2. Agire sulla classe 5 (la più ricca) e sulla classe 4, poi agire sulla classe 4 (nella sua condizione attuale) e sulla classe 3, poi 3 e 2, poi 2 e 1.

Fermo restando che supporremo tutti convinti che tutto ciò 'va fatto', secondo voi, saranno tutti d'accordo, sul metodo da utilizzare? In fondo, i soldi sono sempre quelli e le operazioni sono tutte commutative...

6. Pagina 46

La situazione è riassunta nel disegno:



Sia ***P*** l'intersezione di ***AD*** con ***BC***. Allora, $\angle PCO = \angle PDO = 90^\circ$, $\angle CPO = \angle DPO$ e $PC = PD$. Sia ***Q*** l'intersezione di ***PE*** con ***AB***; allora, dal *Teorema di Ceva*, abbiamo

$$\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{AD}{BP}\cdot\frac{PC}{CB}=\frac{BQ}{QA}\cdot\frac{AD}{CB}=1.$$

E quindi si ha

[17] nel senso che è in italiano e parla anche *un pochino* di matematica

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{BC}{AD}.$$ **[006.001]**

E noto che $\angle BPO = \angle APO$, otteniamo

$$\frac{PB}{PA} = \frac{BO}{AO}.$$ **[006.002]**

Poniamo ora, come in figura, $\angle PAB = \alpha$, $\angle PBA = \beta$.

Sia ***T*** la perpendicolare da ***P*** su ***AB***. dalla **[001]** otteniamo:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BO\cos\beta}{AO\cos\alpha} = \frac{PB\cos\beta}{PA\cos\alpha} = \frac{PT}{TA}.$$ **[006.003]**

E quindi dalla **[001]** e dalla **[003]** si ha:

$$\frac{BQ}{QA} = \frac{PT}{TA}.$$

E quindi ***Q*** coincide con ***T*** e i punti ***P***, ***E***, ***F*** sono *collineari*.

Dal fatto che $\angle PCO = \angle PDO = \angle PFO = 90^\circ$, si ha che ***P***, ***C***, ***F***, ***O***, ***D*** sono conciclici. Quindi $\angle CFE = \angle CFP = \angle CDP = \angle DCP = \angle DFP = \angle DFE$.

E quindi ***EF*** biseca $\angle CFD$

7. Paraphernalia Mathematica

Interrompiamo la trasmissione per una notizia urgente: Pare ci sia gente che legge questa rubrica. In particolare, **Zar** *ci informa che* **'glide reflection'** *in italiano si dice* **'glissosimmetria'**.

Siamo felici di aver imparato una parola nuova (soprattutto perché è lunga e difficile), ma una volta tanto ci pareva più carino l'anglicismo. Grazie, comunque! Provvediamo alle varie sostituzioni, sicuri che lo scriveremo sbagliato almeno una volta prima della fine.

7.1 (Non Troppo) Evidenti Ragioni di Simmetria - [002] - I battiscopa

Ammettiamolo, argomento non molto elevato. Ma siccome abbiamo intenzione di utilizzare questi pezzi per ristrutturare la Redazione virtuale, la cosa che gli somiglia di più sono i battiscopa, almeno sin quando non avremo gli uffici nel centro storico. Prima della fine cercheremo di cambiargli nome.

Questa volta ci occupiamo del sottogruppo B di D_{E2}, costruito sotto l'ipotesi che la sua parte (sottogruppo) di traslazionale sia generata da *una sola traslazione*. Quindi, il nostro sottogruppo sarà descritto da una parte *traslazionale* T_B e da un'altra parte (rotazione, riflessione, glissosimmetria) indicata da O_B.

Se T_B è generato da un vettore a, allora è abbastanza chiaro che il reticolo sarà l'insieme dei punti $R = \{na \mid n \in Z\}$; i vettori che generano questi gruppi possiamo, per semplicità, considerarli come collineari con l'asse x; quindi tutti i punti del reticolo saranno sull'asse x, e potremo dire che, per qualsiasi vettore a, il nostro gruppo *conserva l'asse* **x**.

Questo, tra l'altro, significa che *le uniche trasformazioni possibili all'interno di* O_B sono:

$$O_B \in \left\{ I, -I, S_0, S_{\frac{\pi}{2}} \right\} \quad \textbf{[007.001]}$$

Poco chiaro? Andiamo avanti, che quando saltano fuori le figure tutto diventa piuttosto più chiaro.

Una cosa molto simpatica di questi oggetti è che sono *catalogabili*; sapete che è mia convinzione che quando non si sa che pesci pigliare ci si inventano delle categorie; di converso, quando si riesce a generare una tassonomia dell'argomento, è molto probabile che le cose siano chiare. Qui, la notazione è su due lettere

Per prima cosa, verifichiamo se il nostro gruppo ha una ***riflessione verticale***; se sì, indichiamo con ***m*** in prima posizione questo fatto, altrimenti inseriamo un ***1***; e qui abbiamo trovato la prima lettera.

Per la seconda lettera, verifichiamo se ha una ***riflessione orizzontale***; in questo caso inseriamo una ***m***; nel caso invece abbia una ***glissosimmetria***, ma nessuna riflessione orizzontale, inseriamo una ***g***; se non ha la glissosimmetria ma c'è un 'mezzo giro', inseriamo un ***2***.

Data per fissa la traslazione T_B, chiediamoci cosa possiamo utilizzare come O_B, possibilmente aiutandoci con dei disegni; la cosa tra l'altro potrebbe anche chiarire il funzionamento di tutti gli operatori.

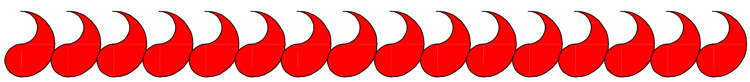


Figura 1 - Il gruppo **11**

Il ***primo caso*** è ragionevolmente semplice, infatti prendiamo $O_B = \{I\}$; in questo caso il nostro gruppo è composto dalla sola traslazione, quindi $B = T_B$; possiamo rappresentare il nostro sottogruppo come indicato in ***Figura 1***; in sostanza, il nostro virgolino viene 'spostato' (grazie alla T_B) e le sue copie sono identiche in quanto non applichiamo nessun'altra trasformazione. Il gruppo normale di questo oggetto è isomorfo al gruppo triviale formato dal solo elemento identità. È anche abbastanza chiaro come indicare il gruppo, visto che non ha riflessioni verticali (da cui primo simbolo pari a ***1***) e non ha riflessioni orizzontali, rotazioni o glissosimmetrie: quindi, anche il secondo simbolo diventa pari a ***1***.

Proviamo, con il ***secondo caso***, a complicarci un po' la vita, inserendo un mezzo giro, oltre a spostarlo; in questo caso, indichiamo

$$O_B = < I > \{I, -I\}; \qquad \textbf{[007.002]}$$

non avendo riflessione verticale ma avendo un mezzo giro, il nostro gruppo sarà indicato da ***12***, e il tutto sarà rappresentato come

$$B = T_B \cup T_B(0, -I). \qquad \textbf{[007.003]}$$

Complicato? Forse il disegno in ***Figura 2*** chiarisce il concetto; il primo termine T_B è il responsabile dei virgolini per dritto, riprodotti tali e quali lungo l'asse ***x***; il secondo termine, grazie al ***-I***, ci fornisce quelli rigirati che dovremo però 'spostare' (e quindi moltiplichiamo per T_B). Questo aggeggio ha un gruppo normale isomorfo un po' più simpatico, il nostro vecchio amico Gruppo Ciclico C_2. Non pretendiamo che riusciate a ricavarveli da soli, ma capire cosa succede non dovrebbe essere troppo complicato, almeno sino al prossimo esempio.

Figura 2 - Il gruppo **12**

Quello che vorremmo fare, adesso, è inserire qualcuno dei termini complicati, ad esempio S_0; questo significa che

$$O_B = < S_0 > \{I, S_0\},\ S_0 = (\alpha a, S_0), \qquad \textbf{[007.004]}$$

e la complicazione è nel fatto che esistono diverse scelte per quanto riguarda S_0.

Infatti (e siamo al ***terzo caso***) potrebbe essere una *riflessione*; in questo caso avremmo

$$B = T_B \cup T_B(0, S_0) \qquad \textbf{[007.005]}$$

e questo gruppo viene indicato con ***1m***.

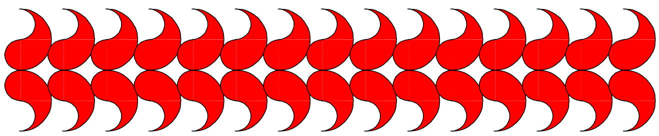


Figura 3 - Il gruppo **1m**

Credo riusciate a ritrovarvi nel disegno di ***Figura 3***; come nel caso precedente, il primo termine dell'espressione di ***B*** è il responsabile della 'fila sopra' dei virgolini (pura traslazione); il secondo termine, invece, ci permette di avere la serie riflessa (grazie al termine S_0). Adesso tutto è più chiaro, speriamo.

Perché il ***quarto caso***, che possiamo considerare come un sottocaso della **[004]**, non è semplicissimo; qui, supponiamo che $(0, S_0) \notin B$, ossia il parametro ***a*** della trasformazione ***non*** è un intero.

Comunque, una doppia applicazione della nostra trasformazione deve riportarci (eventualmente traslati) alla stessa rappresentazione che avevamo inizialmente; quindi potremo scrivere:

$$\begin{aligned}(\alpha a, S_0)^2 &= (2\alpha a, I) \\ &\Rightarrow \alpha = n + \frac{1}{2}, n \in Z\end{aligned} \qquad \textbf{[007.006]}$$

ossia S_0 è una ***glissosimmetria***, e avremo

$$B = T_B \cup T_B\left(\frac{1}{2}a, S_0\right) \qquad \textbf{[007.007]}$$

e questo gruppo viene indicato con ***1g*** (dove la seconda lettera indica, come abbiamo detto, la glissosimmetria) e lo vediamo rappresentato in ***Figura 4***: sempre tagliando molto per i campi, si comincia a capire il significato di quell"un mezzo': i virgolini di sotto sono a metà strada tra due di quelli di sopra, e inoltre devo anche rigirarli, quindi mi serve una riflessione. Adesso tra l'altro dovrebbe essere anche più chiaro cosa sia una glissosimmetria: una riflessione (generata dal termine S_0) traslata di 'un pochino', dove il 'pochino' è responsabile del termine 1/2.

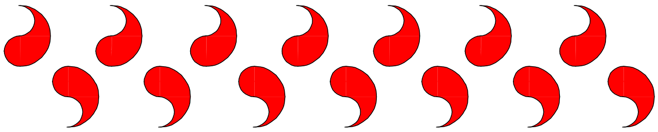


***Figura 4 - Il gruppo* 1g**

'Non ci avete detto i gruppi normali!'. Vero; questi due hanno lo stesso gruppo normale, il Gruppo Diedrico D_1.

Siete convinti che ormai non vi ferma nessuno? Allora possiamo affrontare il ***quinto caso***, generato dal mostro di seguito:

$$O_B = \left\langle S_{\frac{\pi}{2}} \right\rangle \left\{ I, S_{\frac{\pi}{2}} \right\}, \qquad \textbf{[007.008]}$$

Dove la ***S*** viene realizzata come riflessione e non abbiamo traslazioni normali all'asse ***x***; allora potremo esprimere il nostro gruppo come

$$B = T_B \cup T_B\left(0, S_{\frac{\pi}{2}}\right) \qquad \textbf{[007.009]}$$

Che, dando un'occhiata alla ***Figura 5***, potete capire abbastanza facilmente come sia fatto; da parte nostra, ci limitiamo a dire che viene indicato come ***m1*** ed ha anche lui come gruppo normale il Gruppo Diedrico D_1.

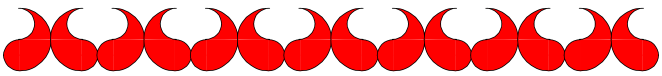


***Figura 5 - Il gruppo* m1**

Siccome tanto i disegnini li ho già preparati tutti, non sperate di scamparla. Ormai, i pezzi che avevamo presentato nella **[001]** li abbiamo usati quasi tutti; potermmo provare a metterne qualcuno assieme, ad esempio come nell'espressione qui di seguito:

$$O_B = \left\langle S_0, S_{\frac{\pi}{2}} \right\rangle \left\{ I, -I, S_0, S_{\frac{\pi}{2}} \right\} \qquad \textbf{[007.010]}$$

...la buona notizia è che questo è l'ultimo, la cattiva notizia è che ha due sottocasi.

Nel ***sesto caso***, S_0 è realizzato attraverso una *riflessione*; questo ci porta alla definizione

$$B = T_B \cup T_B(0,-I) \cup T_B(0,S_0) \cup T_B\left(0, S_{\frac{\pi}{2}}\right), \qquad \textbf{[007.011]}$$

che rappresenta il gruppo ***mm***; non dovrebbe essere troppo difficile, visto che la **[011]** è formata da quattro 'pezzi', capire nella ***Figura 6*** a quale tipo di virgolino corrisponde ogni pezzo dell'espressione, e diventa interessante fare il confronto con le altre che abbiamo visto prima e che mostrano una certa rassomigianza con questa.

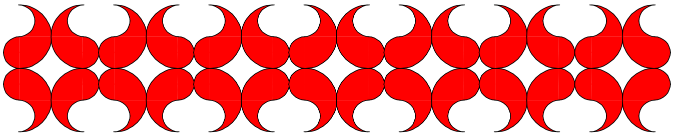


***Figura 6 - Il gruppo* mm**

Ultimo sforzo: nel ***settimo caso*, abbiamo** S_0 che non è rappresentato da una riflessione; con un ragionamento perfettamente identico a quello del quarto caso, si vede che è una glissosimmetria, per la quale la realizzazione di ***-I*** è

$$\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha, S_0\right)\left(0, S_{\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha, -I\right). \qquad \textbf{[007.012]}$$

Forse vi interessa di più la rappresentazione del gruppo:

$$B = T_B \cup T_B(0,-I) \cup T_B\left(\frac{1}{2}\alpha, S_0\right) \cup T_B\left(0, S_{\frac{\pi}{2}}\right). \qquad \textbf{[007.013]}$$

E anche questa è formata da quattro pezzi, quindi non dovrebbe essere difficile capire come si forma la ***Figura 7***, che rappresenta il gruppo noto come ***mg***.

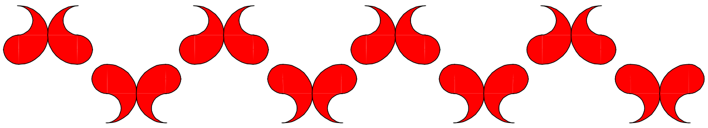


***Figura 7 - Il gruppo* mg**

Liberi di non crederci ancora per un po', ma è finito!

'Sicuro?' Sì, soprattutto se considerate che esiste un teorema che a questo punto potremmo esprimere come '*Tutto qui*' o, più formalmente,

I gruppi dei fregi sono 7.

Infatti, consideriamo due classi dei nostri gruppi: ***{11***, ***12***, ***1m***, ***1g***, ***m1}*** e ***{mm***, ***mg}***. Tra i gruppi ***11***, ***12***, ***1m***, ***1g***, ***m1*** solo ***12*** contiene la rotazione, quindi non è isomorfo a nessuno degli altri; ***1g*** non contiene riflessioni, quindi non è isomorfo a ***1m*** o a ***m1***. ***m1*** e ***1m*** non possono essere isomorfi, in quanto ***1m*** contiene una glissosimmetria, cosa che non avviene per ***m1***. La stessa cosa si può dimostrare per ***mm*** e ***mg***. Non solo, ma non ne abbiamo dimenticato nessuno in quanto abbiamo applicato tutte le tipologie di trasformazioni applicabili.

Tranquilli, il mese prossimo è l'ultima. Ma è anche la più dura.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms