Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 070 – Novembre 2004- Anno Sesto

1. Una Reale Cooperazione

Abbiamo tutti bisogno d'una mano, nei momenti difficili. È consolatorio sapere di avere al proprio fianco sempre qualcuno a cui rivolgersi: magari un esperto, per potere avere quantomeno una valutazione esatta del problema che ci angoscia; ma meglio ancora qualcuno in grado di ascoltarci e di condividere la pena, perché è già passato per le stesse ambasce che stanno tormentando noi in questo momento. È probabile che una parte del successo che ha avuto la psicanalisi dipenda anche da questo semplice atto del condividere, anche se solo con un professionista che pretende poi un onorario, ed è incontrovertibile che uno dei compiti essenziali degli amici sia proprio quello di garantire una spalla consolatoria e di porgere orecchio al compagno preoccupato o depresso. Su un piano diverso, ma sostanzialmente con gli stessi obiettivi, la chiesa cattolica fornisce ai suoi fedeli il concetto di "Santo Patrono". Ne esistono di tipi diversi, essendoci patroni virtualmente per ogni cosa: ogni paesino di campagna, al pari delle grandi metropoli, celebra sontuosamente la ricorrenza del patrono cittadino, che è spesso la festa più importante dell'abitato. Quasi ogni chiesa è dedicata ad un santo, che ne diviene di conseguenza al tempo stesso beneficiario e protettore; e anche le nazioni intere, gli Stati, eleggono spesso dei santi a salvaguardia della loro esistenza. Ci sembrano comunque particolarmente intriganti i patroni che potremmo definire i "protettori di categoria": ogni associazione, ogni comunità, ogni mestiere ne ha uno, e il patrono prescelto deve avere inevitabilmente qualche caratteristica in comune con il gruppo che lo elegge. Si è parlato di recente della probabile nomina a "patrono di Internet" di Sant'Isidoro di Siviglia, perché si ritiene che sia stato il primo ad aver scritto, tra il sesto e il settimo secolo dopo Cristo, un'enciclopedia del sapere, e il Web è visto (tra le altre cose) come una grande Enciclopedia[1]. Non abbiamo notizie certe di quale sia il patrono dei matematici: circola qualche battuta scherzosa su San Tommaso d'Aquino, candidato essenzialmente a causa della sua "Summa" Teologica, ed è stata da alcuni ventilata una candidatura più seria per Francesco Faà di Bruno, che è stato ad un tempo professore di matematica all'Università di Torino e sacerdote, decisosi a prendere i voti in seguito alla frequentazione con Giovanni Bosco, nonostante fosse ormai cinquantunenne[2].

Più certa è invece l'attribuzione del patronato degli studenti, anche perché sono almeno tre i santi che lo condividono. Con tutto il dovuto rispetto per San Girolamo e San Luigi Gonzaga, chiamati al patronato in quanto eccelsi studiosi, confessiamo apertamente che la nostra personale predilezione va, per questo ambitissimo ruolo, a San Giuseppe da Copertino. Mettetevi nei panni d'un ragazzo che ha passato l'intera giornata e mezza nottata in discoteca, dimenticandosi totalmente di dover, l'indomani, sottoporsi alla crudele verifica scolastica riguardante gli effetti della Pace di Utrecht. Non avendo studiato alcunché, al fanciullo risulterà difficilissimo ricordare anche solo a quale guerra tale pace abbia messo fine; figuriamoci cosa significhi allora per lui doverne riassumere le conseguenze politiche e territoriali. Se poi, per buon peso, aggiungiamo che in un sussulto di coerenza interdisciplinare lo studente si rifiuta anche ostinatamente di ricordare in quale nazione Utrecht si trovi, risulta palese che affidarsi alle cure, per quanto amorevoli, di una coppia di santi studiosi e diligentissimi sembra quantomeno fuori luogo. Quello di cui ha bisogno il nostro eroe non è l'esempio spirituale o la guida mistica; ha piuttosto bisogno d'un miracolo (e di qui la necessità di rivolgersi ai santi), ma che sia un miracolo complice e un po' canaglia: insomma, necessita di un clamoroso colpo di fortuna (per non dire di peggio), che lo salvi in extremis dal disastro, e senza nessuna paternale d'accompagnamento.

Ecco perché San Giuseppe da Copertino è il candidato ideale. Giuseppe Maria Desa nacque a Copertino, vicino Lecce, nel 1603. Già all'età di otto anni si annoiava tanto, sui banchi di scuola, da raggiungere il record di ben tre visioni mistiche. Lento, distratto, incapace di raccontare compiutamente una storia anche breve, si impuntava continuamente per mancanza di parole. Totalmente refrattario all'istruzione, si tentò di farlo diventare calzolaio: non riuscì neanche ad imparare il mestiere. A diciassette anni cerca di diventare frate francescano, ma venne respinto perché troppo ignorante; lo presero allora come novizio dei cappuccini, ma lo espulsero dopo poco tempo, a causa della sua distrazione. Diventò infine semplice servitore in un monastero (e solo grazie alle intercessioni materne) e in seguito

[1] Amanti come al solito dei giochi, sia matematici che di parole, confessiamo che noi tifavamo spudoratamente per Santa Tecla, e questo perché la motivazione "ufficiosa" ci intrigava moltissimo. La motivazione "ufficiale" alla candidatura argomenta infatti che Santa Tecla sia particolarmente efficace contro i virus (ai suoi tempi, riuscì a domare una pestilenza) ma la motivazione ufficiosa (che poi sembra essere quella per la quale sia stata realmente avanzata la candidatura da alcuni net-surfers spagnoli) è che in spagnolo "tecla" significa "tasto".

[2] "Non avere notizie certe" non significa non averne per niente, come dimostrano i candidati sopra citati: la vasta biblioteca del GC ci ha inoltre proposto come patroni "dei matematici e delle matematiche" anche Sant'Uberto da Liegi (di cui non sappiamo proprio niente) e Santa Barbara, che quantomeno rivela implicitamente il potere esplosivo della matematica, visto che notoriamente protegge anche i pompieri, i minatori, e gli artiglieri.

riprovò a prendere gli ordini; ma bisognava studiare, per ottenerli. Qui comincia a rivelarsi il suo potere stupefacente, che lo innalza come candidato perfetto a patrono degli studenti. In un vastissimo programma di studio, Giuseppe ha la sfacciata fortuna di sentirsi chiedere dall'esaminatore l'unica cosa che era riuscito ad imparare bene (un episodio della vita d'un beato), e grazie a questa improbabilissima performance riuscì a diventare diacono. L'anno dopo, agli esami per diventare sacerdote, i candidati erano molti e la sua propria preparazione (come al solito) nulla: il Vescovo esaminatore rimase però così benignamente impressionato dalla preparazione mostrata dai primi candidati esaminati, che si risolse a promuovere tutti gli aspiranti sacerdoti a pieni voti, senza completare gli esami. Giuseppe, che era ovviamente tra i candidati non sottoposti alla disamina episcopale, divenne pertanto prete senza sostanzialmente studiare alcunché. Ad onor del vero, oltre ad una totalità incapacità di applicazione e ad una fortuna spudorata negli esami, anche altre doti non trascurabili, quali la capacità di condurre vita santissima e, soprattutto, di levitare.

Fu sorpreso a galleggiare nell'aria una settantina di volte: questa sua caratteristica non può certo modificare il suo curriculum studiorum, ma ha senz'altro contribuito a renderlo patrono anche degli aviatori e di chi viaggia in aereo. Ciò che lo reso "patrono degli studenti" è invece esattamente la sua capacità di realizzare il sogno segreto di ogni scolaro: scamparla alla grande e senza fatica. Per questo non abbiamo dubbi: il nostro studente alla prese con la Pace di Utrecht non indugerà neanche un secondo nello scartare quei secchioni di San Luigi e San Girolamo, e correrà di filato, ancora con i postumi della sbornia in testa, ad accendere un cero a Fra' Giuseppe da Copertino.

Non bisogna mai sottovalutare il potere dei santi e la fantasia degli studenti impreparati: a fortiori, è pericolosissimo sottovalutare la miscela esplosiva ottenuta dosando sapientemente entrambe le caratteristiche. Copertino è tuttora una ridente località del Salento, ornata da un bel Castello Angioino e, inutile a dirsi, da un Santuario dedicato al suo figlio più illustre: città storica e antica, certo non immaginava di dover dare il proprio nome ad una vigna, e questo sempre per colpa di quel pasticcione di Giuseppe.

"Westside", bisogna riconoscerlo, non è un gran nome per un villaggio. Significa "zona ovest", ed ha a malapena senso se riferito a qualcos'altro: un nome relativo, da accidente geografico, da variabile dipendente: in breve, un nome brutto e assolutamente effimero. Eppure era così che ci si riferiva alla parte occidentale di Fremont, cittadina non lontana da San Francisco, California. Per quanto dotata di nome poverissimo, la zona ospitava la vigna d'un avvocato appassionato di storia: John Doyle. Questi, tra una causa penale e una vinificazione, trovava il tempo per indagare nei meandri della storia patria e scoprire che una celebre spedizione spagnola del 1770, capitanata da De Anza, era passata proprio da Westside, laddove adesso si trovava la sua vigna. Il luogo era stato considerato assai piacevole anche nella seconda metà del diciottesimo secolo, così com'era pieno di alberi ombrosi che davano ristoro ai viaggiatori e agli esploratori. Il diarista della spedizione De Anza, un religioso chiamato padre Font, nel parlare di quel luogo ameno descrive anche il torrente che, benigno, rinfresca le piante dispensatrici d'ombra e lo battezza "Torrente di San Giuseppe Copertino". Anzi, in spagnolo, "Arroyo de San Joseph Cupertino". Proprio così: il nostro caro fraticello celebre per la somaraggine veniva ricordato, nel 1770, nel nome d'un fiumiciattolo californiano. Ed è solo l'inizio: il nome piace così tanto a Doyle, l'avvocato vignaiolo, che tosto questi decide di chiamare così sia la vigna che la sua fattoria. E il nome passò dalla casa e dalla vigna anche al negozio che venne aperto più tardi. Quando l'insediamento crebbe fino al punto di avere un Ufficio Postale, il guaio era ormai fatto: nella giovane America della Frontiera, un Ufficio Postale equivale ufficialmente ad una città, e ormai l'Ufficio Postale di quell'agglomerato non poteva chiamarsi altro che Cupertino, di modo che il nome si trasmise a tutta la conurbazione della zona. Fra' Giuseppe Desa, zitto zitto, aveva fecondato con un nome salentino un pezzo di Far West, e nel farlo aveva scambiato solo una "o" con una "u": un solo errore d'ortografia, insomma, e da lui c'era d'aspettarsi decisamente di peggio. Dovrebbe essere un monito perenne per gli insegnanti: ricordarsi di mantenere sempre accesa la sacra fiamma del dubbio. Anche il più refrattario, il più pervicacemente asino degli studenti può sempre finire col diventare famoso, e marcare un intero pezzo di territorio con il suo nome. Quando meno ve lo aspettate, ecco che il cognome di quel disastro del terzo banco a sinistra può trasmettersi nella città più grande di Marte, per quanto la cosa appaia impossibile.

Non è ancora finita. Il summenzionato melange tra santi e studenti poco profittevoli non è ancora l'arma finale: manca un terzo elemento fondamentale perché il disastro raggiunga davvero proporzioni planetarie: la tecnologia. Nella nostra storia, per ottenere anche il terzo ingrediente bisogna attendere fino all'ultimo quarto del ventesimo secolo. Chi ha familiarità con la geografia della Bay Area, non avrà avuto difficoltà a riconoscere il nome di Cupertino, piazzata come è nel bel mezzo della Silicon Valley. La cittadina americana conta oggi 52.000 abitanti, ma la sua fama trascende il mero numero dei residenti; il cuore tecnologico del mondo ha battuto i suoi primi forti colpi in queste lande, dove venivano assemblati computer e sistemi hi-tech prima che da ogni altra parte, almeno con un tale e smaccato intento di proliferazione mondiale. La città battezzata da Padre Font sarebbe presto diventata la sede della Apple Computer, ed è difficile non notare nel nome del sacerdote una sorta di nemesi da word-processor[3]. Ciononostante, la longa manus di San Giuseppe da Copertino ancora aleggia sull'ormai celebre cittadina, visto che si trovano ancora in rete fior di articoli che a lungo dissertano sull'esatta maniera di pronunciare il nome della città: "Q-pertino?" "COO-pertino?" "CUP-ertino?"[4].

È però certo che la città è ormai universalmente famosa, almeno se con "universalmente" si intende coprire l'universo di coloro che nell'età dell'oro dell'informatica si occupavano già di computer-science. Quasi si avessero sempre ben in mente le improbe difficoltà di Giuseppe Desa nell'affrontare gli studi, gli specialisti software hanno cominciato prestissimo a produrre programmi che

[3] Font significa "carattere tipografico", in inglese.

[4] Dubbi che si capiscono bene solo pronunciando in inglese le tre versioni enigmaticamente proposte. Traslitterandole nella pronuncia italiana (la cui grafia, per quanto non esente da imbarazzi, è comunque enormemente più potente dell'inglese), suonano più o meno, rispettivamente: "Chiupertino", "Cupertino" e "Capertino".

dovrebbero venire in aiuto agli studenti meno volenterosi. Fogli di calcolo, strumenti per il disegno e per la manipolazioni di immagini e, soprattutto, word-processor. Fogli magici che mettono in bell'ordine le parole, che spaziano bene i margini, vanno a capo da soli, tolgono un sacco di grattacapi nella composizione della pagina. Per non parlare, poi, dell'invenzione suprema: la correzione automatica. È una mano santa, per i protetti di Fra' Giuseppe: possono continuare liberamente a scrivere "accellerazione" con due elle, e non appena il cursore del testo abbandona il vocabolo, una magia correttiva figlia della Silicon Valley elimina la elle di troppo, lasciando sul foglio e sullo schermo il corretto "accelerazione". Questo può essere un bel problema, dal punto di vista della didassi: lo studente colto in castagna sotto la matita rossa e blu della professoressa di italiano, forse impara: forse trova un aggancio, una scusa, una ragione, e nel farlo memorizza… probabilmente riuscirà ad associare il termine "accelerazione" all'aggettivo "celere", e da qui in avanti potrà evitare l'errore, perché difficilmente gli verrà mai in mente di scrivere "cellere", per dire "veloce". Con l'aiuto del PC, l'errore ortografico è rimosso all'origine, e si può continuare ad infinitum a digitare sbagliato pur scrivendo giusto.

Lungi da noi l'intenzione di voler argomentare "contro" i sussidi di questo genere: ne facciamo noi stessi un uso esteso e brutale (anche se, per dirne una, abbiamo dovuto lottare un po' con il word-processor, poco fa, per convincerlo che volevamo davvero scrivere "didassi" e non il "fidassi" che lui continuava ineluttabilmente a opporvi): ci piace però l'idea di raccontare qualcuno degli inevitabili rischi che la pratica comporta. La redattrice di una rivista interna dei traduttori della Commissione Europea ammonisce sulle sventure capitate in un luogo ove le parole e le lingue sono non solo strumento, ma anche oggetto principale del lavoro. Ad esempio, un ragionevole panico sembra essere serpeggiato nei corridoi di Bruxelles quando si è scoperto che diversi documenti erano archiviati sotto server UNADMIN: si può essere fiduciosi nella tecnologia quanto si vuole, ma a nessuno piace l'idea di affidare il proprio lavoro ad una macchina apparentemente priva di amministratore di sistema. Il sospiro di sollievo si è poi sentito sonoramente nei suddetti corridoi quando il tutto si è rivelato un falso allarme: un volenteroso impiegato francese che si occupava del rinnovamento e della nuova denominazione dei Dipartimenti aveva introdotto dei "Cerca/Sostituisci" automatici, per poter cambiare in fretta i vecchi riferimenti nelle nuove codifiche. I nuovi nomi erano come al solito dei neologismi abbreviativi (come "INFO" per Dipartimento dell'Informazione, etc.) che avrebbero dovuto essere più esplicativi della neutra numerazione (in cifre romane) della precedente denominazione. Sfortuna volle che il numero assegnato all'Amministrazione fosse proprio il 9, e allora… allora provate da soli a capire cosa possa essere successo, oppure correte alla nota a piè di pagina, se ve ne manca la pazienza[5].

Per quanto curiosa, la storia appena riportata non calza perfettamente come "argomento a sfavore" della correzione automatica. Si tratta infatti di un'estensiva azione di "Cerca/Sostituisci", anche se presumibilmente eseguita su un sistema dotato di diversi terminali, e registrata nel dizionario interno del word-processor condiviso da innumerevoli macchine "client". Però si tratta indiscutibilmente di una specifica azione attuata dall'utente, non dalla azienda costruttrice. Nulla è imputabile agli autori del codice di programma, perché il programma ha effettivamente fatto esattamente quello che gli era stato richiesto di fare. Ma non sempre è così. Per quanto vasto e accurato possa essere un "dizionario" incluso nel

[5] Il giovanotto impostò a tappeto tutte le sostituzione opportune, ivi compresa quella che imponeva il cambio della stringa "IX" identificante l'Amministrazione con la stringa assegnata come nuovo nome, "ADMIN". Detto questo, non è poi difficile capire cosa sia successo a tutti i documenti che citavano al loro interno dei sistemi UNIX.

word processor, è prevedibile che alcuni lemmi non siano presenti. Occorre tenere conto che le parole che possono teoricamente entrare a far parte di un testo sono ben più numerose di quelle presenti nei dizionari cartacei: questi ultimi possono permettersi il lusso di riportare un verbo usando una sola "voce", mentre i dizionari usati per il controllo ortografico devono avere, per quello stesso verbo, tutte le forme di coniugazione possibili. Non parliamo poi dell'uso inevitabile di nomi propri, tecnicismi, acronimi e sigle specifiche che inevitabilmente abitano i documenti di un'azienda, e che saggiamente restano al di fuori dei dizionari che troneggiano sugli scaffali delle librerie. Per questo la forma più innocente dei controlli ortografici si limita ad evidenziare con una timida sottolineatura in rosso la parola non riconosciuta, lasciando poi all'autore il compito di correggerla o confermarla. La forma più estesa di correzione automatica prevede invece la sostituzione diretta della parola non riconosciuta con quella più "probabile" tra le parole note al dizionario interno.

L'esempio accellerazione/accelerazione è abbastanza semplice e naturale, ma in realtà i criteri che sono scelti per riconoscere quale sia la parola "più probabile" destinata a sostituire la parola "sbagliata" sono verosimilmente complessi. Algoritmi dedicati lanceranno ricerche nel dizionario interno per scovare la parola che differisce solo per una lettera in più o in meno, o prima ancora, forse, per parole che abbiano solo due lettere a posizioni scambiate; la ricerca può essere poi iterata ai casi in cui la differenza riguarda due lettere, e forse anche tre, prima di arrendersi e palesare il messaggio di sconfitta "Nessun Suggerimento". E siamo certi che questo approccio, se giusto, sarà soltanto la cima del proverbiale iceberg. Ciononostante, alcune decisioni del sistema di correzione automatica possono apparire comunque azzardate, anche perché è indubitabile che il suddetto sistema debba trattare tutte le parole in maniera equanime e democratica, senza preoccuparsi troppo del loro significato. Da questo punto di vista, i programmi non potevano immaginare le implicazioni esplosive date dalla sostituzione, nella frase "appareil anti-stress", dello sconosciuto "anti-stress" con il termine politicamente assai impegnativo "anti-arabes". La correzione (anche questo caso è stato riscontrato in un word-processor francese) è stata giustificata dalla casa produttrice come causata dal rapporto 8/11 tra lettere coincidenti e lettere totali, cifra che è giudicata sufficiente per attuare la sostituzione.

Questi esempi sono comunque assai circoscritti, e non è difficile immaginare che quasi ogni operatore di personal computer ne possa raccontare di personali, anche più divertenti e strani di questi. Quello che però è rimasto più celebre è l'episodio che ci ricollega al nostro San Giuseppe Desa e alla Cupertino californiana; è talmente celebre che l'articolo dal quale abbiamo estratto gli esempi sopra citati si intitolava "Cupertino and after[6]". Fino a non troppo tempo fa, Microsoft Word manteneva in scarsissima considerazione la deliziosa parola "cooperation": il dizionario integrato (quello di lingua inglese, naturalmente) si rifiutava di riconoscerla come esistente, e già questo rappresenta un bel mistero. La cooperazione è una delle attività fondamentali dell'essere umano, è alla base di ogni attività sociale, è la fonte del vero progresso: come diavolo si fa a considerarla parola trascurabile? In senso neanche troppo esteso, è richiesta cooperazione anche solo per riprodursi e mantenere in vita la razza umana, quindi è davvero misteriosa l'assenza di cotanto vocabolo dal dizionario del word processor più diffuso del mondo. È possibile che fosse presente nella forma "co-operation", ma ne dubitiamo: il dubbio nasce proprio dal fatto che, se l'ingenuo utente digitava "cooperation", il sistema non provvedeva a proporre "co-operation" in sostituzione, ma assai fantasiosamente recuperava un'altra diversissima parola, e quella usava in sostituzione. Certo non vi sarà difficile

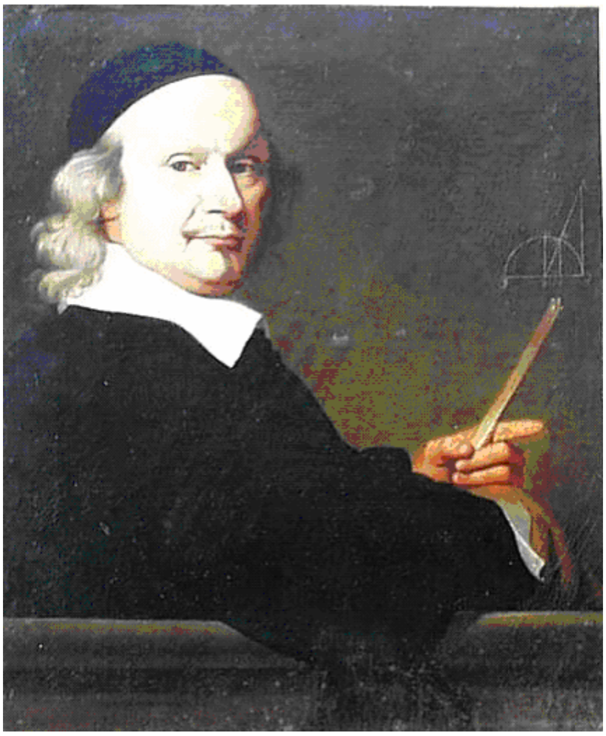
[6] La cui autrice è Elizabeth Anne Muller.

indovinare quale fosse la parola in questione, arrivati come siamo a questo punto della storia. Esatto: la povera "cooperation" veniva brutalmente sostituita dall'imprevedibile "Cupertino".

È una dimostrazione del fatto che gli algoritmi alla base della sostituzione automatica non possono essere banali. "Cooperation" ha 11 lettere, "Cupertino" solo 9; se si considera la loro posizione, sono tutte sfasate, a parte la "c" iniziale, e bisognerebbe considerare anche il fatto che l'iniziale di "cooperation" è perlopiù minuscola, mentre quella di "Cupertino" è sempre maiuscola. Mettendoci virtualmente nei panni dell'algoritmo, possiamo giungere ad una sorta di giustificazione solo ammettendo che esista una prima regola che consideri "oo" assimilabile a "u" (regola comprensibile per un anglofono); una seconda che abbia ipotizzato erronea l'introduzione della "a"; infine, una terza che abbia interpretato la "on" finale di "cooperation" come un typo per il gruppo "no". Tre grossi errori e mezzo, contando per mezzo il cambiamento tra maiuscolo e minuscolo. Sembra impossibile che siano considerati accettabili da un programma, anche ammettendo che il programma abbia il diritto di ignorare che "cooperation" è parola infinitamente più diffusa di "Cupertino". Per quel che ci riguarda, non abbiamo dubbi: si tratta di intervento soprannaturale architettato da San Giuseppe da Cupertino, che s'è armato di alta tecnologia per vendicare in maniera eclatante i suoi protetti adusi ad errori ortografici.

Anche perché l'impatto dell' "affaire Cupertino" è stato tutt'altro che trascurabile. Migliaia di documenti redatti con la correzione automatica hanno sfornato il nome della città californiana senza che gli autori si rendessero conto dell'implicito nonsense. Poi, come spesso succede, è stata l'abitudine e la familiarità a finire il lavoro. Quando ad inizio pezzo abbiamo citato la "Pace di Utrecht", lo abbiamo fatto anche nella speranza che la frase in sé risultasse vagamente familiare, ma anche ragionevolmente immersa nelle nebbie della memoria da causare l'effetto esprimibile come "Mmm… sì, mi ricordo che esiste, ma non saprei adesso dire esattamente di cosa si tratti". È proprio quello che ci serviva per chiudere il discorso su Cupertino. Considerate che, nei documenti ufficiali, si parla spesso di cooperazione quando si prendono "accordi" proprio per iniziarne una. Esiste insomma una sorta di attrazione fatale tra la "cooperazione" e gli "accordi" che la istituiscono, in modo che la frase "cooperation agreements" diventa quasi una frase fatta. Se adesso applichiamo il perverso marchingegno di San Giuseppe, otterremo istantaneamente i famigerati "Cupertino agreements", che non saltano agli occhi come errori del tutto evidenti. Diamine, ci possono ben essere stati dei "Patti di Cupertino", così come a suo tempo c'e stata la Dieta di Ratisbona (o la Pace di Utrecht). E chi legge il documento, a maggior ragione, può ben presupporre che lo scritto si riferisca ad intese realmente esistenti, anche se da lui mai sentite prima. E, siccome non suona male, entro breve si è creato l'humus necessario a far sì che un sacco di professionisti sapessero bene dell'esistenza degli Accordi di Cupertino, anche se in realtà non si ricordavano esattamente di cosa trattassero. Così, i Patti di Cupertino hanno proliferato a lungo nella rete, e se ne ritrovano ancora innumerevoli tracce. Non mancano neanche frasi quali "in Cupertino with …", ma sono assai meno intriganti: lanciare invece una ricerca sul web con la chiave "Cupertino agreements" è ancora motivo di sano divertimento. Soprattutto per Fra' Giuseppe.

La cooperazione, tradita dalla new technology, ha spesso avuto vita difficile anche tra scienziati e filosofi. A voler tirare la logica per i capelli, si potrebbe tentare si spacciare per "cooperazione" anche le feroci litigate che hanno lastricato la storia della scienza: basterebbe decidere che, come i numeri, anche la cooperazione può essere positiva o negativa, e assumere le frequenti dispute in cui si confrontavano (e si confrontano tuttora) i filosofi naturali come "cooperazioni negative". In fondo sono talvolta risultate anche esse costruttive e, soprattutto, anche esse per poter decollare abbisognano di almeno due persone, proprietà questa che è quella basilare della cooperazione tout court.



Un campione della cooperazione (sia negativa che positiva) è stato probabilmente John Wallis. Nato il 23 Novembre 1616 ad Ashford (Kent, Inghilterra), Wallis occupò la celebre Savilian Chair[7] di Geometria ad Oxford a partire dal 1649. Di ventisei anni più vecchio di Newton, dovrebbe rientrare nella celebre categoria dei "giganti" che precedettero il sommo inglese nell'esplorazione dei misteri matematici[8] in terra d'Albione; e, per quanto sia arduo considerare chiunque un gigante se comparato a Newton, va riconosciuto a Wallis di aver onorevolmente percorso la sua carriera accademica. Cominciò i suoi studi universitari alla tenera età di tredici anni, ottenne il primo grado di laurea nel 1637 a Cambridge, e si fregiò del "Master's Degree" tre anni dopo. È però bene precisare che l'oggetto dei suoi studi universitari non fu la matematica: studiò etica, metafisica, geografia, astronomia, medicina e anatomia: latino, greco, ebraico e un po' di logica li aveva studiati già in precedenza. Nello stesso anno (1640) in cui fu insignito del master, prese gli ordini sacerdotali della Chiesa Anglicana. Il suo amore per la matematica fu una scoperta tardiva e casuale, ma assolutamente dirompente, ed è datato 1647: John aveva già compiuto i trent'anni quando rimase folgorato dal libro di Oughtred "Clavis Mathematicae", che realmente gli dischiuse siccome chiave la porta e il fascino della scienza di Euclide. Si dedicò quindi alla sua nuova passione con l'ardore del convertito, fece il possibile per promuovere lo studio universitario della matematica (e sta a dimostrarlo la costituzione stessa della Cattedra di Geometria) e si premurò di trasmetterla attraverso i suoi libri anche alle generazioni future. È lo stesso Newton che esplicitamente riporta, nelle sue memorie: *"…per quel che riguarda i miei studi matematici, (tutto cominciò) quando giunsero nelle miei mani i lavori del nostro stimato connazionale, il dottor Wallis, che trattavano di serie e del loro uso per il calcolo dell'area del cerchio e dell'iperbole…"*.

[7] La cattedra "Saviliana" di geometria ad Oxford fu istituita (e prese il nome) da Henri Savile. Nata per essere la cattedra più prestigiosa del suo genere, fu occupata per primo da Henry Briggs nel 1619, seguito da Peter Turner e poi proprio da Wallis. Il successore di Wallis su cotanto scranno sarà lo scopritore della periodicità delle comete, Halley, e nei secoli altri nomi celebri si assoceranno alla cattedra: Sylvester, Hardy e altri. Esiste anche una cattedra "Saviliana" di astronomia, ma il contraltare naturale della "Saviliana di geometria a Oxford" è senza dubbio la cattedra "Lucasiana di matematica a Cambridge" (sponsor: Henry Lucas) che fu inizialmente occupata da Barrow nel 1664, e ospitò le augustissime terga di Newton a partire da 1669. Dopo cotanto nome, sulla sedia più ambita di Cambridge si sono seduti anche personaggi come Babbage e Paul Dirac, fino ad ospitare oggi Stephen Hawking.

[8] *"Se ho potuto vedere più lontano degli altri, è solo perché sono salito sulle spalle dei giganti che mi hanno preceduto"*. Frase assai generosa (probabilmente fin troppo) e celeberrima; seconda, tra quelle celebri di Newton, forse soltanto a quella in cui si paragona ad un fanciullo sulla riva del mare.

La prima metà del diciassettesimo secolo è un'epoca ancora pionieristica, per la matematica moderna: e Wallis ben rappresenta questi tempi confusi e battaglieri (soprattutto per la storia di Inghilterra). Il calcolo attendeva ancora i lavori di Leibniz e di Newton, e la teoria matematica era ancora soffusa di concetti assai poco definiti e spesso erroneamente intuitivi. Pur essendo senza dubbio uno dei maggiori matematici inglesi dei suoi tempi, stupisce ad esempio scoprire come il nostro potesse ad un tempo raggiungere risultati significativi e mantenere delle visioni, al giorno d'oggi quantomeno considerate insolite, sulla natura dei numeri. Con gli strumenti ancora primitivi del calcolo, riuscì ad aver ragione degli integrali di tipo $(1-x^2)^n$ per tutti i valori di n, che gli consentì di ottenere risultati geometrici notevoli, ma d'altra parte rifiutò categoricamente di considerare i numeri negativi come "quantità minori di zero". Paradossalmente, li considerava invece più probabilmente come qualcosa "più grande dell'infinito": e il paradosso sta in realtà nel constatare che la matematica contemporanea considera le due caratteristiche come non contraddittorie fra loro, anche se verosimilmente l'opinione di Wallis in merito era abbastanza diversa e lontana da quella attuale, e sarebbe fantasioso attribuirgli una tale lungimiranza. La terminologia matematica gli è debitrice della parola "interpolazione", che introdusse proprio per tentare di applicare il metodo degli "indivisibili" di Cavalieri senza avere però la capacità di manipolare le potenze frazionarie: ma, assai più che a questo termine, la matematica e la logica gli sono debitrici del simbolo dell'infinito, ∞, che lui poeticamente introdusse motivando la scelta "…perché è una curva che si può tracciare continuamente infinite volte", ripassando sempre su sé stessa. L'argomentazione dovrebbe rimanere valida per qualsiasi curva chiusa, secondo noi, ma la scelta di quella specifica curva ci sembra rispondere anche ad un buon senso estetico, e siamo grati a Wallis per la scelta.

Anche se ci sono molte altre opere e contributi di Wallis alla matematica, ci sembra più interessante ricordare la feroce disputa che ebbe con il filosofo Thomas Hobbes. A prima vista sembra una semplice disputa accademica, in cui il matematico professionista (Wallis) bacchetta ferocemente un velleitario tentativo d'un filosofo (Hobbes) di ottenere la quadratura del cerchio: messa in questi termini, sembra davvero un caso, tanto per restare nelle stesse latitudini spazio-temporali, di "molto rumore per nulla"[9]. Uno sguardo appena un po' più approfondito rivela invece qualche curioso ed istruttivo aspetto. Ad esempio, è sorprendente che anche Hobbes, come Wallis, fosse tardivamente folgorato dal fascino della matematica: pur senza arrivare a farne la sua professione, il metodo matematico di procedere per assiomi, dimostrazioni e teoremi lo affascinò a tal punto da voler costruire la sua filosofia seguendo esattamente lo stesso principio costruttivo. Questo avrebbe dovuto farne un compagno d'avventure dei matematici, e specialmente di Wallis, che come lui aveva assaporato solo in età matura il fascino della geometria. Inoltre, per quanto Wallis possa aver avuto vita relativamente facile nel mostrarsi superiore dal punto di vista matematico a Hobbes, scoprendo e palesando gli errori nei quali cadeva la dimostrazione della quadratura del cerchio proposta dal filosofo, occorre anche ricordare quale fosse il grado di purezza matematica delle dimostrazioni a quel tempo. Tanto per dire, uno dei punti essenziali contestati da Wallis al ragionamento di Hobbes verteva sulla confusione tra "stigma" e "stigme", laddove il primo era il termine che indicava il "punto dotato di dimensioni", e veniva usato in maniera impropria laddove doveva invece essere usato il secondo, lo stigme, che è il punto matematico adimensionale. Non è certo una differenza trascurabile, specialmente se vista con gli occhi di oggi, ma nel XVII secolo si sentivano bestialità ben più grosse espresse anche da autorevoli professionisti.

[9] "Much ado about nothing", Shakespeare William, 1598-1599.

Perché allora tanto astio e tanta ferocia nello scontro intellettuale[10]? Perché lo scontro era ben lungi dall'essere solo uno scontro accademico. Wallis, ecclesiastico, monarchico e rappresentante del "partito del Parlamento" era il campione messo in campo dalla sua parte politica per rintuzzare i tentativi "scientifici" di Thomas Hobbes, che invece era visto come seguace della politica di Oliver Cromwell. Il metodo "matematico" di Hobbes lo aveva portato a comporre il suo capolavoro di filosofia politica, il "Leviathan", in cui prefigura uno Stato determinato solo dalle "necessità" e governato da un potere assoluto, aprendo la strada alla giustificazione dell'assolutismo che a Cromwell tornava utile nei periodi burrascosi della rivoluzione inglese. Questo gli attirò inevitabilmente gli strali e le accuse infamanti di tradimento da parte del partito di Wallis.

La "cooperazione" è davvero difficile, quando tutte le parti tendono principalmente a fare della scienza solo un'altra arma da mettere a disposizione nella battaglia politica. A dimostrazione di ciò c'è infatti anche l'esempio di "cooperazione di segno positivo" per la quale John Wallis dovrebbe essere ricordato assai più che per la sua controversia con Hobbes: insieme ad altri amici e studiosi come Robert Moray, Robert Boyle, John Wilkins, John Evelyn, Cristopher Wren e William Petty, fondò una società che goliardicamente chiamarono "il Collegio Invisibile". Era un'associazione di "dotti", che aveva l'intenzione di discutere di meccanica e di filosofia naturale. Il Collegio Invisibile crebbe, cambiò nome passando alla più austera denominazione di "Società Filosofica", e definì via via meglio i suoi obiettivi, che Wallis descrive, in una sua lettera del 1645, come orientati prevalentemente verso la "Nuova Filosofia, o Filosofia Sperimentale".

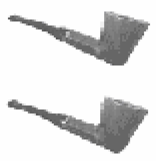
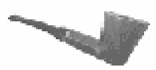
Con il passare del tempo, la società crebbe e si ramificò, dividendosi in due gruppi; uno con sede ad Oxford e l'altro a Londra. Il gruppo londinese risentì più del confratello della tormentata storia politica inglese, e solo nel 1660, con la piena restaurazione della monarchia che si ebbe al momento della salita al trono di Carlo Secondo, ricominciò a tenere incontri regolari. Durante la seduta londinese del 5 Dicembre 1660 i partecipanti, che avevamo assunto il titolo di "Fellows" della società,

[10] Se siete pazienti e la cosa vi incuriosisce, provate a leggervi "Squaring the Circle - The War Between Hobbes and Wallis" di Douglas M. Jesseph. *[Se invece vi basta sfoggiare un po' di latino, andate a riprendervi RM032, dove si parla di trisezione dell'angolo (RdA)]*

erano già trentacinque, e tra essi si contavano diciannove scienziati, sedici uomini di varia cultura e due letterati. La loro fede monarchica era dimostrata con evidenza dal loro riprendere le attività proprio in occasione del ritorno in carica del monarca (e anche, lateralmente, da piccoli fatti quali il rifiuto opposto alla candidatura di Hobbes); nel giro di poco tempo, il re stesso fu posto a conoscenza dell'esistenza dell'istituzione, e nel settembre del 1661 Carlo Secondo espresse il desiderio di diventare egli stesso "Fellow" della società.

Meno di un anno dopo, il 15 Luglio 1662, tutte le ufficializzazioni ebbero finalmente termine, e in onore alla benevolenza mostrata dal monarca, la società che era nata come "il Collegio Invisibile" prese il visibilissimo nome di "Royal Society". Un reale/Reale tempio della "cooperation".

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
L'Amuleto di Yendor			
L'ultima partita della stagione			

2.1 L'Amuleto di Yendor

Qualcuno si ricorda ancora di 10Rogue? Era lì, ad un Livello maggiore di 45 e minore di 256; gran bei tempi quelli, quando... Beh, lasciamo perdere.

Tutto nasce dal fatto che Alberto e Fred si stanno appassionando a Dungeons & Dragons, e ogni tanto chiedono al sottoscritto (che rinnega - non troppo ad alta voce - un passsato da Aiutante Dungeon Master[11]) un aiuto per le ambientazioni. Bene, questa ***non*** ho avuto il coraggio di proporla a loro, ma voi siete tutto un altro paio di maniche...

> "Più anni fa di quanti non voglia ricordare, gli abitanti di Yendor tenevano, appeso alla porta del Tempio Sacro, l'Amuleto: un disco di legno perfettamente rotondo e liscio che si narra venisse usato come ornamento dai Non Umani che avevano fondato la città."
>
> "Un giorno, durante una scorreria di popoli barbari confinanti, un colpo di spada tagliò accidentalmente l'Amuleto, dividendolo in due parti disuguali con un taglio netto e perfettamente rettilineo; i combattenti, spaventati dal sacrilegio, interruppero immediatamente la battaglia e i barbari firmarono un accordo di non belligeranza con la città di Yendor; per suggellare il patto, i due pezzi dell'Amuleto vennero placcati in oro e bordati (sia sulla parte di circonferenza che lungo il taglio) d'argento: i barbari tennero la parte più piccola, la città di Yendor l'altra."
>
> "Molti anni sono passati da quei giorni, e il ricordo di Yendor e dei barbari si è perso nelle nelle nebbie del tempo; il vostro compito è di recuperare i due pezzi dell'Amuleto, che vi verranno pagati a prezzo di mercato dai Sacerdoti del Nuovo Tempio Sacro; la gloria, come sempre, è gratuita."

Bene, durante la partita vi siete comportati ragionevolmente bene, tant'è che avete recuperato il pezzo piccolo; di meglio ha fatto un altro giocatore, riuscendo a trovare quello grande, ma non si può avere tutto... Contiamo i soldi, sì?

[11] E se vi chiedete cosa fa un ADM: tiene i conti, controlla la correttezza delle operazioni, sposta le pedine, va a prendere i beveraggi, guarda di chi è il turno... Ma allora checcribbiofa il DM? Cambia idea durante il gioco, che altro?

Allora, prima chi ha vinto di più: la "Parte della città di Yendor" ha il bordo (in argento) che vale ***10000*** Monete d'Oro, mentre la placcatura in oro vale ***100000*** Monete d'Oro.

Per quanto riguarda la vostra parte, il bordo (in argento) vale ***5000*** Monete d'Oro, mentre la placcatura vale...

Nah. Quella ve la calcolate da soli.

2.2 L'ultima partita della stagione

Con l'inizio dell'orario scolastico definitivo, Alberto si ritrova il sabato occupato, quindi sono finiti anche i fine settimana al Paesello... Triste, ma almeno ci resta il pensiero dell'ultima volta che siamo andati.

Presente la solita masnada di Piccole Grandi Pesti, un loro rappresentante (Alberto: scelgono sempre lui, per le missioni a rischio) mi ha chiesto in prestito il *frisbee* che tengo sempre in macchina[12]. E hanno cominciato uno strano gioco.

All'inizio erano in quattro, ***A***lberto, ***B***eatrice, ***C***onsuelo e ***D***avide; la regola era che chi prendeva il *frisbee* lo tirava ad un'altra persona di sua scelta, con la condizione che, nell'intero gioco, nessuno poteva tirare due volte alla stessa persona; scopo del gioco era "giocare il più a lungo possibile".

OK, sono stato poco chiaro... Vi faccio un esempio. Con la Banda dei Quattro qui sopra, una giocata potrebbe essere, ad esempio:

A-B-C-D-A-D-C-B-A-C-A.

Si noti che, in rispetto della regola, nessuna coppia di lettere consecutive è ripetuta (e quindi sin qui il gioco è valido), e che giunti al punto indicato qualsiasi tiro di ***A***lberto non sarebbe valido, in quanto ***A-B***, ***A-C*** e ***A-D*** compaiono già lungo la sequenza; quindi, il gioco si ferma qui.

Li osservavo perplesso (pensando che probabilmente avrebbero potuto fare di meglio e generare una sequenza più lunga), quando si è aggiunta ***E***nrica e all'orizzonte si sono profilati ***F***red, ***G***igi, ***H***ymen[13],...

Ora, con quattro ci riesco ancora, ma qualcuno può darmi una mano a tenere buone le Pesti?

Al massimo, quanti passaggi possono fare? E riuscite a trovare un modo per "costruire" la sequenza dei passaggi?

3. Bungee Jumpers

VII Nordic Mathematical Contest - 1995

Un esagono è inscritto in un cerchio di raggio r. Due lati dell'esagono hanno lughezza ***1***, due hanno lunghezza ***2*** e i due restanti hanno lunghezza ***3***.

Dimostrare che r è soluzione dell'equazione

$$2r^3 - 7r - 3 = 0$$

La soluzione, a "Pagina 46"

[12] Tengo *sempre, tutto* in macchina. A Luglio, ad esempio, avevo le catene da neve e il materassino gonfiabile. E li avrò entrambi anche a Dicembre.

[13] Come accennato un paio di anni fa, tutti veri: la prima che ci manca è la ***K***, ma abbiamo già comprato i regali di Natale per ***X***avier e ***Y***vette.

4. Soluzioni e Note

Al solito prima le note, poi le soluzioni *[tanto per essere coerenti con il titolo, insomma (PRS)]*. Con questo numero noterete qualche cambiamento, ed il primo proprio in questo punto: Alice, che si occupava di stilare la lista di mail con data e ora, ha deciso di entrare in sciopero e non ne vuole più sapere. Cercheremo lo stesso di farvi sapere chi ha scritto, perché ogni mese ci arriva sempre più corrispondenza non necessariamente legata ai problemi che ci piacerebbe condividere con tutti i nostri lettori. Infatti tanti ci scrivono anche se non devono commentare i problemi, ma per raccontarci un po' di tutto, più o meno inerente al mondo della matematica in genere, e in qualche modo vogliamo trovare posto anche per queste notizie.

Sfortunatamente non ci siamo ancora messi d'accordo su chi *[questo è quello che credi tu (RdA & PRS)]* prenderà in mano la nuova rubrica *[leggasi "patata bollente" (RdA)]*, nè sulla forma da darle, e RM è un regime assoluto di fagnani[14]: se il GC non prende le decisioni, gli altri due fischiettano facendo finta di niente *[In realtà ho proposto un titolo per la rubrica, ma quei due ghiri sono troppo pigri per dire che fa schifo, come nome (RdA)]*. Allora non temete, delle più divertenti mail arrivate in Redazione vi parla qui Alice da questo angolo dedicato alle note, prima che il GranCapo se ne accorga.

Chiunque di voi si sia iscritto ad RM tramite il form di iscrizione sul sito sa che c'è spazio per inserire un nome, un indirizzo mail (l'unica cosa veramente utile, se volete ricevere la Newsletter e/o la rivista), la città di residenza e qualche commento. Beh, se avete letto qualche numero o avete provato a scriverci sapete che siamo enormemente vanitosi ed adoriamo i complimenti *[...e abbiamo la fortuna di un Grande Postino che cerca di rispondere a tutti... (Il Postino)]*, e grazie al cielo la maggioranza di quelli che inseriscono un commento vanno in quella direzione; la città è un altro elemento della nostra vanità, e teniamo ragionevolmente aggiornata la statistica della diffusione di RM in Italia e nel mondo. Ebbene, tutta questa lunga premessa per dirvi che finalmente abbiamo trovato un abbonato in Valle d'Aosta (benvenuto, ***Emile***!), che era la regione che ancora ci mancava. Le urla di giubilo in Redazione non si erano ancora calmate quando abbiamo scoperto che tutta una famiglia valdostana con lunga tradizione di amore per la matematica ci legge da tempo, scaricando i numeri dal sito. I festeggiamenti proseguiranno per il resto dell'anno (almeno per quello celtico, che comincia quando riceverete questo numero): adesso possiamo orgogliosamente dire che RM raggiunge Australia, Asia, Nord e SudAmerica, ma anche e soprattutto tutte e venti le regioni italiane!

Il Capo ci fa sapere che il prossimo convegno del CICAP[15] *[Centro Italiano per il Controllo sulle Affermazioni nel Paranormale: un protagonista dei Problemi di RM si chiama uguale al figlio del Boss di questa benemerita organizzazione (RdA)]* sarà a Torino, il 6 e 7 novembre, gratis (se uno non passeggia e non mangia). Lui probabilmente ci andrà (un abbonamento gratuito ad una prestigiosa Rivista di Matematica a chi riesce ad individuarlo), più informazioni si possono trovare seguendo il link: http://www.cicap.org/piemonte/convegno/informazioni.php. Richiede l'iscrizione, ma è gratuita.

Abbiamo inoltre saputo, tramite Pier Carlo, della vendita all'asta della casa natale di Giuseppe Peano, a Tetto Galant. Il compratore (che evidentemente spera che il genio del matematico piemontese si trasmetta ai suoi figli) ha offerto all'asta 76543,210 euro entro

---

[14] Se siete nati a più di 50 Km di distanza da Torino e il Devoto-Oli fallisce nella spiegazione, provate a sostituire "fagnani" con "pigri" e/o "indolenti" *[PRS]*.

[15] Come sarebbe a dire che non sapete cosa sia il CICAP? Ma è il Centro Italiano per il Controllo delle Attività Paranormali! Le sole persone in Italia che, se gli dite di essere in grado di levitare non cominciano né ad adorarvi né vi scoppiano a ridere in faccia: prima vi chiedono chiarimenti di massima ("Intende dire che sa fare il lievito di birra oppure che riesce a svincolarsi dalla forza di gravità?"), poi prendono una sedia, un lapis, un notes e una macchina fotografica e vi pregano di procedere alla librazione nell'aere *[PRS]*.

la scadenza delle ore dodici del dodici ottobre; somma sufficiente per aggiudicarsi il lotto numero cinque, come i cinque assiomi di Peano. Triste non aver mantenuto il luogo della memoria come museo, ma almeno il nuovo proprietario pare dotato di humor matematico.

Ci sono anche arrivate proposte su come far spazio a problemi più facili sulla rivista, e lettere da chi legge praticamente solo l'editoriale... beh, speriamo che comincerà a leggere anche questa parte di pettegolezzi. In tanti ci chiedono di far posto a sezioni con problemi più accessibili, e allo stesso tempo alcuni dei nostri lettori sono molto più bravi dei Redattori. Il fatto che stiamo pensando a come risolvere la situazione è testimoniato da due pagine del sito che hanno il record assoluto di "minor aggiornamento" del mondo. Sono i "Getting Started" e i "Duri da Cuocere", che dovevano ospitare rispettivamente i problemi "facili" e quelli "difficili". Ormai i "Duri da Cuocere" sono stati risolti da tempo, e ancora ci arrivano possibili soluzioni (questo mese una nuova versione di messaggio per gli alieni da parte di ***Alberto***, che ha scovato nuovi inaspettati errori compiuti dagli Alieni, cioè dai radioastronomi di Evpatoria). Per i "facili", invece, avevamo anche inizialmente pensato ad una pubblicazioncella piccola e parallela, qualcosa del tipo "Rudi Mathematici per Iuniores", ma il fatto è ... è che ogni volta che riusciamo a chiudere un numero di RM facciamo un mezzo miracolo. Ma non si sa mai, cosa può succedere[16]...

Tra le altre novità, abbiamo ricevuto un bellissimo regalo da ***Stokastik***, una casella di posta G-Mail. Non vi mandiamo l'indirizzo, o il postino ci si dissocia *[nel senso chimico, metabolico e psichiatrico del termine, mica in quello banale di "dimissioni" – PRS]*, ma vi faremo sapere al più presto per quale progetto la possiamo usare. Qui in Redazione c'è sempre qualcosa di nuovo che bolle in pentola, stiamo anche finalmente per sistemare alcune delle sezioni più antiche e mai riviste sul sito, e grandi novità sono in arrivo in Bookshelf.

E adesso passiamo alle cose serie, o meglio alle soluzioni di questo mese. Ancora un commento: non dimenticate mai con chi avete a che fare. Noi siamo amatori, non professionisti seri, o dovreste pagare per leggerci. Quindi non vi offendete se non vi pubblichiamo, se facciamo degli errori nel pubblicarvi o se non vi diamo abbastanza spazio. Noi si fa quello che si vuole, che principalmente vuol dire quello che si può: se non vi piace, lamentatevi e, eventualmente, se ne riparla dopo un mese. Buona lettura.

4.1 [068]

4.1.1 Ufficio Complicazione Giochi Semplici

Per questo problema abbiamo ricevuto una valanga di commenti, per diversi motivi. Il mese scorso ci erano pervenute quattro soluzioni, le avevamo menzionate tutte, e poi pubblicate tutte tranne una. Ben sapete che siamo dei tiranni e decidiamo noi cosa pubblicare, ma ci scusiamo in ogni caso con ***u_toki***, la cui soluzione era simile - e arrivava alla stessa conclusione - di quella di ***GaS***. Di Enrico ci siamo dimenticati di usare l'allonimo, ***Qfwfq***, e non abbiamo detto che raggiungeva lo stesso risultato di ***Floyd***. Quest'ultimo trova una probabilità pari a 2.89, che era talmente evidentemente un typo, che non ci siamo neanche peritati di correggerlo noi e così hanno fatto anche i lettori, come ***BraMo logicar*** (bentornato!), che ci ha mandato una lunga dissertazione su questo problema. All'inizio il suo risultato tendeva alla versione ***u_toki-GaS***, ma alla fine è arrivato alla stessa conclusione di ***Qfwfq*** e ***Floyd***: vi diamo solo le conclusioni.

> (...) Ora non resta che capire perché la nostra soluzione è sbagliata. È incredibile come si può smontare velocemente un'ipotesi che si riteneva sicura quando si hanno dei controesempi, e dunque ho scoperto l'errore.

[16] Nota del Capo: se qualcuno vuole farla (e si paga l'indirizzo web, possibilmente dal Nostro Grande WebMaster), forniamo titolo, template, link & commenti sarcastici. Tutto gratis, soprattutto l'ultimo. Target: la media inferiore e (parzialmente) il biennio superiore; costo dell'abbonamento, lo stesso di questa.

È anche piuttosto semplice: il mio ragionamento e in quello di GaS cadono nel caso 3x3, e successivi, perché si considerano più volte gli stessi elementi della matrice. Nella somma primaria infatti, quella in cui si sommano i prodotti degli elementi di una riga con i rispettivi complementi algebrici, i termini NON sono indipendenti tra loro: i complementi algebrici hanno elementi in comune, e dunque la probabilità che un complemento algebrico sia pari o dispari dipende dalla probabilità di un altro complemento algebrico. Dunque complimenti a Floyd ed Enrico.

Ma c'è un'ultima questione aperta che secondo me è interessante, e forse non abbastanza sviscerata oppure non notata. La soluzione del problema è la funzione

$$Q(n) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^i}\right),$$

dove *Q(n)* è la probabilità che il determinante di una matrice intera non sia dispari. Che questa soluzione sia identica alla soluzione di Enrico è molto semplice dimostrarlo: è sufficiente sostituirla nell'espressione ricorsiva. Ovviamente questa è sicuramente preferibile, essendo in forma chiusa e non ricorsiva, ma che succede al crescere di *n*?

Floyd dice che tende a stabilizzarsi attorno a 0.289 (in realtà nell'originale è scritto "2.89", ma è ovviamente un refuso). Ma che valore è 0.289? È quasi certamente un'approssimazione, ma di che? Che razza di espressione ha insomma il limite di *Q(n)* al tendere di *n* all'infinito?

E voi che ne dite? La frase infelice "non vi vengono due risultati uguali" ha suscitato molte mail di protesta, ne siamo contentissimi. Continuate così.

4.1.2 Cerentoliadi

Ragazzi, non vi immaginerete mai chi ci ha mandato un commento su questo problema. No, non ve lo diciamo, ma non è difficile scoprirlo già dall'*incipit*:

> Ciao a tutti e complimenti per la bellissima e prestigiosa Rivista di Matematica; si vede subito che avete un grande Grande Capo. Visto che nessuno si interessa alla soluzione della seconda parte del problema sulle Cenerentoliadi, provvedo con alcune noterelle.
>
> È intuitivo che, per far durare il più possibile il gioco, si debba partire da una "catena" (ogni partecipante influenza al più due persone e due ne influenzano una sola) e da una posizione di massima variabilità; però, la catena del tipo C_T_C_T_C_T_C_..._T è già "stabile" (quasi: schizofrenicamente, prendono tutti una volta il the e una volta il caffè: periodo 2). L'idea potrebbe essere di inserire un "seme" che rompa la simmetria e diffonda l'abitudine ad una sola bevanda lungo la catena (l'immagine che mi è venuta è quella del drogaggio dei semiconduttori... saranno alcaloidi, ma non mi sembra il caso di esagerare); per fare in modo che si propaghi il più lentamente possibile, la mettiamo ad un'estremità.
>
> Ad esempio, la prima settimana i Nostri sono: T_T_C_T_C_T_C_..._T. La seconda settimana, i primi due graniticamente reggono le loro posizioni, mentre il terzo si converte, così come il quarto, il quinto e tutto il resto della catena: T_T_T_C_T_C_T_..._C. La terza settimana sono in tre a bersi quella che mia nonna definiva "acqua sporca" (era più da caffelatte, lei), mentre il resto della catena cambia idea: T_T_T_T_C_T_C_..._T.
>
> ...e avanti così, sino al raggiungimento (all'(n-1)-esima settimana, per "n" partecipanti) dell'unanimità di bevitori di the. In questo modo, si "blocca" una persona alla volta: di meno non è possibile, altrimenti cadremmo in un periodo e

sarebbe finito il gioco. Per mille partecipanti fa qualcosa dalle parti dei diciannove anni.

4.2 [069]

Dal fatto che c'erano tante note all'inizio si è capito che non sono arrivate tante soluzioni. Non siamo preoccupati, finché tenete impegnato il nostro Postino...

4.2.1 Organizziamo lo spennamento...

Le soluzioni qui sono arrivate solo da ***Qfwfq***, che commenta:

> L'esile vantaggio del banco in questo gioco mi ha suggerito il seguente quesito psicologico: Consideriamo un gioco nel quale il banco può scegliere come vuole tra Testa e Croce, se il giocatore indovina vince, per esempio, 0.9 centesimi, altrimenti il banco vince 1 euro. Sembrerebbe un significativo vantaggio, però il banco non ha alcun mezzo, nè meccanico (moneta per esempio) nè elettronico per generare la sequenza, mentre il giocatore ha a disposizione tutti i mezzi di calcolo che desidera: alla lunga chi è avvantaggiato?
>
> Insomma: quanto è bravo un essere umano a parlare a casaccio? *[Ne conosco alcuni che ti lancerebbero un pietoso risolino di sufficienza... (RdA)]* Ovviamente ogni deviazione della sequenza di T e C dalla casualità puo essere usata dal giocatore per avere un vantaggio... Se qualcuno ha la pazienza di scrivere a mano su un file qualche centinaio di T e C il piu casuale che può, mi riprometto di analizzarle[17]...

Una sfida che non raccoglieremo. Ed ecco la sua soluzione:

> Il banco gioca ad una specie di testa e croce un euro alla volta, col piccolo vantaggio di vincere con probabilità 0.501 e di perdere con probabilità 0.499.
>
> Però ha solo *k* euro in cassa (mentre i giocatori ne hanno una riserva illimitata) e quindi rischia di andare in bancarotta: quale è il minimo valore di *k* tale che la probabilità di sbancare è inferiore ad 1/2?
>
> Indicando con *p* la probabilità di perdere al singolo turno (*p*=0.499 nel nostro caso) e con *P(n,k)* la probabilità di sbancare dopo esattamente *n* turni, partendo con *k* euro in cassa, si può facilmente scrivere la seguente ricorrenza,
>
> $$\begin{array}{ll} k>1 & P(n,k)=(1-p)P(n-1,k+1)+pP(n-1,k-1) \\ k=1 & P(n,1)=(1-p)P(n-1,2) \end{array} \qquad \texttt{[004.001]}$$
>
> distinguendo a seconda del risultato del primo turno.
>
> A queste vanno aggiunte le condizioni al bordo, abbastanza ovvie
>
> $$\begin{array}{ll} P(n,k)=0 & \forall n<k \vee (n-k) dispari \\ P(k,k)=p^k & \end{array} \qquad \texttt{[004.002]}$$
>
> Per risolvere questa ricorrenza uso il seguente ansatz *[a occhio e croce, il Nostro sta facendo il filo ad Alice, che è l'unica che sa il crucchico... Oppure è lui, il quarto ad aver comprato lo Schroeder (RdA)]* per la soluzione
>
> $$P(n,k)=C(n,k)(1-p)^{n-\frac{k}{2}}p^{n+\frac{k}{2}} \qquad \texttt{[004.003]}$$

[17] Il Grande Capo di Tutti Noi (Martin Gardner, per intenderci), una volta chiese cosa genera un perfetto *random generator* tra 0 e 9 dopo la sequenza "019284765". *[RdA]*

Inserendo questa formula nella ricorrenza `[001]`, si ottiene la seguente ricorrenza per le C (si noti che è sparita la dipendenza da p).

$$\begin{aligned} &C(n,k) = C(n-1,k+1) + C(n-1,k-1) \\ &C(k,k) = 1 \\ &C(n,0) = 0 \end{aligned} \qquad \texttt{[004.004]}$$

Il caso particolare per k=1 è automaticamente verificato aggiungendo la seconda condizione al bordo. Per risolvere questa ricorrenza ho penato un pochino, per bontà riporto solo il risultato *[Ringraziamo sentitamente: ci eviti un sempre spiacevole taglio redazionale. Se qualche masochista è interessato, Alice sarà* felice *di tradurglielo dal todeschio...(RdA)]*:

$$C(n,k) = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}} \qquad \texttt{[004.005]}$$

Insomma un coefficente binomiale con un fattorello davanti.

Abbiamo così quasi risolto il problema, avendo a disposizione la *P(n,k)*:

$$P(n,k) = \frac{k}{n}\binom{n}{\frac{n-k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}} \qquad \texttt{[004.006]}$$

Per trovare la probabilità $\pi(k)$ di andare prima o poi in bancarotta, basta sommare su tutti gli n:

$$\pi(k) = \sum_{n=k(2)}^{\infty} P(n,k) \qquad \texttt{[004.007]}$$

dove il (2) tra parentesi in basso mi ricorda che devo andare a passi di 2, perché se n e k non hanno la stessa parità, *P(n,k)*=0.

Il caso k=1 l'ho fatto esplicitamente

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \frac{1-\sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)} \\ \pi(1) &= \frac{p}{1-p} \qquad se \quad p < \frac{1}{2} \\ \pi(1) &= 1 \qquad se \quad p \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \texttt{[004.008]}$$

Dopodiché osservo che sommando su n tra k e infinito la ricorrenza `[001]`, si ottiene la seguente ricorrenza per $\pi(k)$

$$\pi(k) = (1-p)\pi(k-1) + p\pi(k-1) \qquad \texttt{[004.009]}$$

che risolta fornisce la formula

$$\begin{aligned} \pi(k) &= \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \qquad p < \frac{1}{2} \\ \pi(k) &= 1 \qquad p \geq \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad \texttt{[004.010]}$$

Siamo finalmente arrivati, usando p=0.499 il più piccolo valore di k tale che $\pi(k) < 1/2$ è k=174. In particolare $\pi(173) = 0.500573$ e $\pi(174) = 0.498575$.

Adesso c'è anche una seconda domanda: nei casi in cui avviene la bancarotta, quando avviene? Ovviamente il momento in cui avviene la bancarotta è una variabile aleatoria, distribuita tra 174 e infinito. Indico con *B(k)* il numero medio di turni per andare in bancarotta

$$B(k) = \frac{\sum_{n=k(2)}^{\infty} nP(n,k)}{\sum_{n=k(2)}^{\infty} P(n,k)} \qquad \texttt{[004.011]}$$

Comincio ad accusare un po' di fatica: ho fatto i casi particolari k=1,2,3 dopo i quali ho deciso che vale la formula

$$B(k) = \frac{k}{|1-2p|} \qquad \texttt{[004.012]}$$

Anche se questa formula è simmetrica rispetto a p=1/2, (e quindi il numero medio di lanci per andare in bancarotta è uguale per p=0.1 e p=0.9) la cosa non deve sorprendere, perché la media è fatta sui casi in cui la bancarotta avviene. Ovviamente se p=0.1 la probabilità di bancarotta è molto inferiore rispetto a p=0.9, ma selezionando i casi di bancarotta il valore medio del numero di lanci è uguale.

La morale è che se p è grande la bancarotta avviene subito (poco più di k lanci) , se p è piccolo o la bancarotta capita subito (anche se poco probabile) o non capita più.

Numericamente abbiamo B(174)=87000. Noto anche che il valore medio è abbastanza più alto del valore dove c'è il massimo di $P(n,174)$ (che capita attorno a n=10000). Questo perchè $P(n,174)$ ha una lunga coda che decade lentamente al crescere di n.

Come al solito il Capo se la cava alla grande quando le regole le inventa lui *[...e stavolta sono pure stato onesto! Ne ho trovata una... ma la tengo per Natale (RdA). Quando tutti sono più buoni il GC è più cattivo...(AR)]*.

4.2.2 Preparatevi per Halloween!

Ricevute per questo problema solo le soluzioni di ***u_toki*** e ***Caronte***. Cominciamo con ***u_tok***i:

Posso procedere per tentativi, aumentando di volta in volta il numero degli amici fino a quando si verifica la condizione che Fred prende un numero più di dieci volte maggiore di cioccolatini rispetto ad Alberto. In questo modo, si arriva a un primo risultato già al terzo caso, cioè 4 amici.

Siano x_1, x_2, x_3 e x_4 il numero di cioccolatini per il primo, secondo, terzo e quarto amico rispettivamente. Si hanno le relazioni:

1. $x_1 + \frac{x_2+x_3+x_4}{2} = x_2 + \frac{x_1+x_3+x_4}{3}$
2. $x_1 + \frac{x_2+x_3+x_4}{2} = x_3 + \frac{x_1+x_2+x_4}{4}$

$$3.\ x_1 + \frac{x_2 + x_3 + x_4}{2} = x_4 + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{5}$$

da cui si ricavano, rispettivamente:

$$4.\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$5.\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$$

$$6.\ 8x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite. Ponendo x_1 come parametro si trovano le seguenti relazioni:

$$x_2 = 19x_1$$

$$x_3 = 25x_1$$

$$x_4 = 28x_1$$

Quindi Fred (x_4) prende 28 (>10) volte il numero (x_1) di cioccolatini che prende Alberto. Supponendo che il numero detto da Fred (e omesso volontariamente nell'enunciato) fosse $x_1 = 1$ (per comodità e per dare prova di dieta ferrea… ma avrebbe potuto essere un numero qualunque), preparerò quattro sacchetti con rispettivamente 1, 19, 25 e 28 cioccolatini.

Ecco cosa ci scrive ***Caronte***:

Cari amici, mi sono divertito a pensare un po' ai cioccolatini per Halloween. Vi confesso che una strada rapida per arrivare al risultato non l'ho vista subito, ma l'ho imboccata solo dopo aver tentato un paio di cammini alternativi, piuttosto accidentati; una volta trovata la (o una? *["una". Sempre. Altrimenti non è divertente (RdA)]*) strada giusta, il problema diventa di soluzione piuttosto semplice, ma il numero di cioccolatini da distribuire, rispettando le regole imposte per la divisione, risulta in larga maniera arbitrario: purché sia multiplo di 73 la scelta dipende solo dalla generosità del donatore (e dalla capacità dei sacchetti, alla faccia degli etti!). Lo scherzetto del Gran Capo di non rivelare che al povero Alberto, a dieta, è stato dato un solo misero cioccolatino consolatorio, ha cancellato la possibilità di dare una risposta univoca al quesito relativo al numero totale di cioccolatini.

Dunque, detta P_n la parte del totale dei cioccolatini spettante all'ennesimo componente il gruppo degli *N* bussatori, la regola che deve essere rispettata nella distribuzione è

$$P_n + \frac{1}{n+1}\sum_{k \neq n} P_k = C, \qquad \texttt{[004.013]}$$

essendo *C* una costante ignota, cone ignoto è il numero *N*.

Detto

$$T = \sum_{n=1}^{N} P_n \qquad \texttt{[004.014]}$$

il totale dei cioccolatini distribuiti, il modo probabilmente più utile di scrivere la **[013]** è

$$nP_n + T = (n+l)C, \qquad n = 1,\ldots,N.. \qquad \textbf{[004.015]}$$

Sottraendo dalla **[015]** la relazione stessa scritta per un diverso indice *l*, si ha

$$nP_n - lP_l = (n-l)C \qquad \textbf{[004.016]}$$

Considerando, per esempio, *l* fisso ed *n* variabile, la **[016]** permette di esprimere tutte le P_n in funzione di una prefissata di esse, diciamo appunto la ellesima, come

$$P_n = \frac{1}{n}\left[lP_l + (n-l)C\right]. \qquad \textbf{[004.017]}$$

In particolare, scegliendo *l*=1, abbiamo

$$P_n = \frac{1}{n}\left[P_1 + (n-1)C\right] \qquad \textbf{[004.018]}$$

e tutte le P_n, nota la costante *C*, sono così determinate dalla conoscenza di P_1. Per determinare questa, possiamo utilizzare la **[015]** che, scritta per *n*=1, si legge come

$$P_1 + T = 2C, \qquad \textbf{[004.019]}$$

osservando preliminarmente che il totale *T*, dato dalla **[014]**, tenuto conto della **[018]**, risulta dato da

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\left[P_1 + (n-1)C\right]$$

e quindi, posto

$$R_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \qquad \textbf{[004.020]}$$

da

$$T = P_1 R_n + (N - R_n)C \qquad \textbf{[004.021]}$$

Sostituendo questa espressione nella **[019]** si ricava

$$P_1 = \frac{R_n - N + 2}{1 + R_n} C \equiv \left(1 - \frac{N-1}{1+R_n}\right)C. \qquad \textbf{[004.022]}$$

La **[022]**, inserita nella **[018]**, fornisce tutte le P_n in funzione di *C*, come

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{n}\frac{N-1}{1+R_n}\right)C \qquad n = 1,\ldots,N. \qquad \textbf{[004.023]}$$

La **[023]** mostra, in particolare, che la minore delle parti è la prima (P_1) e la maggiore è l'ultima (P_N).

Occorre ora tenere conto del fatto che le quantità P_n, data la loro definizione, devono essere tutte positive e quindi, in particolare, deve essere positiva la minore di esse che è P_1; perché ciò sia deve risultare $N-1<1+R_n$, cioè

$$R_n > N-2. \qquad \texttt{[004.024]}$$

Ora, per i primi valori di *N* che si possono prendere in considerazione, si ha

$$\begin{aligned} N=2: &\qquad R_2=\frac{3}{2}>0,\\ N=3: &\qquad R_3=\frac{11}{6}>1,\\ N=4: &\qquad R_4=\frac{25}{12}>2,\\ N=5: &\qquad R_5=\frac{137}{60}<3 \end{aligned}$$

ed è facile poi rendersi conto che per ogni $N \geq 5$ la condizione **[024]** risulta violata; pertanto il numero *N* di componenti del gruppo di bussatori non può superare il numero 4:

$$N \leq 4. \qquad \texttt{[004.025]}$$

Si tratta ora, quindi, di vedere per quali valori di *N* si verifichi il fatto che la parte maggiore sia più del decuplo della parte minore. Utilizzando la **[023]** per i vari valori di *N* ammissibili, calcoli banali mostrano che:

per *N*=2 si ha $P_1=\frac{3}{5}C$, $P_2=\frac{4}{5}C$;

per *N*=3 si ha $P_1=\frac{5}{17}C$, $P_2=\frac{11}{17}C$, $P_3=\frac{13}{17}C$;

per *N*=4 si ha $P_1=\frac{1}{37}C$, $P_2=\frac{19}{37}C$, $P_3=\frac{25}{37}C$, $P_4=\frac{28}{37}C$.

Solo nell'ultimo caso il rapporto $P_N/P_1 \equiv P_4/P_1$ è maggiore di 10 e quindi, necessariamente, il gruppo è formato da 4 elementi.

Rimane ancora da determinare il numero di cioccolatini spettanti a ciascuno dei bussatori e quindi quale ne sia il totale.. Poiché, ovviamente, tutte le parti devono essere date da numeri interi, *C* deve essere un multilpo intero di 37:

$$C = m\cdot 37,\ m= \text{intero arbitrario}. \qquad \texttt{[004.026]}$$

Il numero totale di cioccolatini da distribuire è allora

$$T = P_1+P_2+P_3+P_4 = \frac{1+19+25+28}{37}C = 73m \qquad \texttt{[004.027]}$$

e la sua definizione è lasciata all'arbitrio del donatore, che può scegliere *m* a suo piacimento.

Come verifica si può osservare che, utilzzando la **[023]** nella **[014]** per esprimere *T* in termini di *C*, si ha

$$T = \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{1}{n}\frac{N-1}{1+R_n}\right)C = \left(N - \frac{N-1}{1+R_n}R_n\right)C = \frac{N+R_n}{1+R_n}C. \qquad \texttt{[004.028]}$$

e che questa formula fornisce, per N=4,

$$T = \frac{73}{37}C\ ,$$

in accordo con le `[026]` e `[027]`.

Che a noi sembra al solito molto illuminante.

5. Quick & Dirty

Doc dice che non ce la farete mai...

Allora, avete una stanza con pareti, pavimento e soffitto perfettamente isolanti; appesa al soffitto (con un cavo perfettamente isolante) c'è una sfera metallica; posata sul pavimento (idem) c'è una sfera esattamente identica; entrambe le sfere sono esattamente alla stessa temperatura e in equilibrio termico (ignoriamo l'aria della stanza).

Alle due sfere viene fornita esattamente la stessa quantità di calore e in breve raggiungono l'equilibrio termico.

Quale delle due è più calda?

6. Pagina 46

Corde uguali sottendono angoli al centro uguali; se ogni lato di lunghezza ***i*** sottende un angolo al centro α_i $(i = 1,2,3)$, allora:

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 360^\circ\ ,$$

ossia

$$\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha_3}{2}\ ,$$

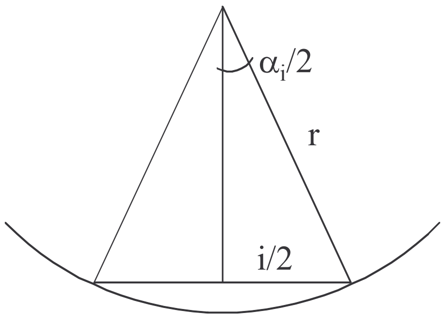
e

$$\cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2}\right) = \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha_3}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right).$$

applicando la formula di addizione per il coseno:

$$\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right), \qquad \texttt{[006.001]}$$

E, come si vede dalla figura, nei tre casi,



$$\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{1/2}{r} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) = \frac{\sqrt{4r^2-1}}{2r};$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{1}{r} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) = \frac{\sqrt{r^2-1}}{r};$$

$$\sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) = \frac{3/2}{r}.$$

Sostituendo questi tre valori in `[001]` e moltiplicando entrambi i membri per $2r^2$, si ha:

$$\sqrt{4r^2-1} * \sqrt{r^2-1} - 1 = 3r.$$

Riscrivendo quest'ultima nella forma

$$\sqrt{(4r^2-1)(r^2-1)} = 3r+1$$

e quadrando, otteniamo

$$(4r^2-1)(r^2-1) = 9r^2+6r+1,$$

che è equivalente alla

$$r(2r^3-7r-3) = 0.$$

Dovendo essere $r \neq 0$, abbiamo:

$$2r^3-7r-3=0,$$

che è la tesi.

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 A che punto è la notte – [003] – Laudi

Questa volta andiamo a parlare di tutt'altro: Equazioni. Algebriche.

Ve lo ricordate il ***Teorema Fondamentale dell'Algebra***, sì? In sostanza, dice che:

> Ogni equazione
>
> $$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_{1,\ldots,n} \in C \qquad \texttt{[007.001]}$$
>
> ha almeno una radice appartenente a ***C***.

Ingannevolmente semplice, a mio parere; vi risparmiamo la dimostrazione, è noiosa e speriamo ci crediate, visto che è un mucchio di tempo che lo usate.

Il primo che ci ha messo le mani con ordine è stato il buon ***Viète*** che ha fatto le seguenti considerazioni.

Se ha almeno una radice, si può scomporre in un prodotto di queste radici (ciascuna considerata con l'opportuna molteplicità), e quindi deve essere:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \qquad \texttt{[007.002]}$$

dove i vari $x_1, \ldots, x_n$ sono le radici, eventualmente ripetute l'opportuno numero di volte.

Se svolgiamo il prodotto e confrontiamo i diversi termini di pari grado in ***x***, otteniamo le espressioni:

$$\begin{cases} -a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \\ \;\; a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ -a_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ \quad \vdots \\ \pm a_n = x_1x_2x_3\ldots x_n \end{cases} \qquad \texttt{[007.003]}$$

Dove le $\boldsymbol{a_i}$ hanno segno meno se l'indice è dispari, segno piú se l'indice è pari; da cui, il doppio segno sull'ultima.

Complicato? beh, sì, un po'; forse, se facciamo un esempio la cosa torna un filino piú chiara.

Prendiamo ad esempio l'equazione di secondo grado; il nostro calcoletto risulta:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + a_1x + a_2 \\ &= (x - x_1)(x - x_2) \\ &= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} -a_1 = x_1 + x_2 \overset{\dots}{=} S \\ \;\; a_2 = x_1x_2 \overset{\dots}{=} P \end{cases} \end{aligned} \qquad \texttt{[007.004]}$$

Ossia potete riscrivere l'equazione originaria sotto la forma:

$$f(x) = x^2 - Sx + P, \qquad \texttt{[007.005]}$$

che è l'ampiamente sottostimata[18] ***Formula di Viète*** (per l'equazione di secondo grado: le altre si chiamano nello stesso modo, per il grado n).

Ora, noi non abbiamo fatto richieste particolari ai vari x_i presenti nelle formule; quindi, *possiamo tranquillamente scambiarli tra di loro* con la certezza che il risultato non cambierá; da questo, si vede che quelli di cui stiamo parlando non sono altro che ***polinomi simmetrici*** e quel naso fino nel campo della matematica di ***Lagrange*** sosteneva che, per quanto riguarda la risolubilità delle equazioni, i polinomi simmetrici fossero "...la vera filosofia di tutta la questione". Partendo da questa convinzione, vediamo dove è riuscito ad andare a parare.

Prendiamo, tanto per fissare le idee, l'equazione di ***quarto*** grado:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad \texttt{[007.006]}$$

Supponiamo inoltre che questo aggeggio abbia radici (uguali o distinte, genericamente complesse) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

La grande idea di Lagrange consiste nel considerare il ***risolvente***[19]

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 . \qquad \texttt{[007.007]}$$

A questo punto, possiamo ***permutare*** $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ottenendo $4! = 24$ casi; però, se fate i conti, vedete che *solo sei casi sono distinti*:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_1 + x_4 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_4 - x_1 - x_3 \\ x_3 + x_4 - x_1 - x_2 \\ x_3 + x_2 - x_1 - x_4 \end{array} \qquad \texttt{[007.008]}$$

Ora, un'equazione di ***sesto*** grado[20] le cui radici siano queste espressioni, avrà dei coefficienti che ***non variano*** per le ***24*** permutazioni; questo significa che i *coefficienti* sono ***polinomi simmetrici in*** $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$; inoltre, essendo nella `[008]` i valori a *due a due di segno contrario*, la nostra equazione di sesto grado conterrà ***solo le potenze pari*** dell'incognita. E questo significa che, attraverso una sostituzione del tipo $x^2 = y$, potete trasformare l'equazione di ***sesto grado*** in un'equazione di ***terzo grado***, risolubile attraverso il metodo di Del Ferro, Tartaglia e Cardano; a questo punto, avete un sistema di equazioni che rappresenta la combinazione delle soluzioni ed è risolvibile facilmente.

Se (checché ne dicano i nostri amici nei compleanni), come a me, non vi piace la sopratrinominata formula, allora con lo stesso metodo dei risolventi di Lagrange potete

[18] "sottostimata" in quanto non se la ricorda nessuno.

[19] In realtà Lagrange calcola il risolvente in un modo molto più generale, considerando l'espressione

$$x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^2 x_3 + \varepsilon^3 x_4 ,$$

dove le ε sono le radici dell'unità; nel nostro caso, abbiamo posto $\varepsilon = -1$.

[20] Con testardaggine tutta piemontese, Lagrange (partito da un'equazione di *quarto* grado) a questo punto non molla. E fa bene.

trasformare il terzo grado in secondo e il secondo in primo; a questo punto, voglio sperare non abbiate soverchi problemi, a risolvere il tutto.

Non solo, ma ***Gauss***[21] aveva dimostrato che le ***equazioni ciclotomiche*** della forma

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + 1 = 0 \qquad \texttt{[007.009]}$$

nel caso di ***p** primo* sono sempre riducibili ad un grado inferiore.

E, per adesso, ci fermiamo al quarto grado.

7.2 A che punto è la notte – [004] – Mattutino

Per il quinto grado ci ha provato Galois, ma gli è andata decisamente male.

Per capire cosa sia successo, semplifichiamo i casi; supponiamo che i coefficienti dell'equazione siano ***razionali***, e che tutte le radici siano ***distinte*** tra loro.

In sostanza, l'equazione è:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad \texttt{[007.010]}$$

avente soluzioni razionali

$$x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n \qquad \texttt{[007.011]}$$

Seguendo la strada di Lagrange, Galois considera le espressioni (lineari) in x_i della forma:

$$V = X_1 x_1 + X_2 x_2 + \ldots X_n x_n \qquad \texttt{[007.012]}$$

con i valori X_i tali che, permutando gli x_i in V, si ottengano dei valori $V, V_1, V_2, \ldots, V_{(n!-1)}$ *tutti distinti tra loro*[22].

A questo punto, Galois introduce il concetto di ***polinomio irriducibile***, ossia un polinomio che non possa essere espresso come prodotto di due polinomi (razionali) di grado inferiore.

Allora, costruiamo il polinomio $\Phi(x)$ di grado ***n!*** avente[23] come *radici* $V, V_1, V_2, \ldots, V_{(n!-1)}$; e, con Galois, ci chiediamo se $\Phi(x)$ sia *scomponibile* (nei razionali[24]). Supponiamo di avercela fatta e di aver trovato un fattore $F(x)$ di grado M non ulteriormente riducibile; allora, ***F(x)*** sará il prodotto di M tra gli ***n!*** fattori di primo grado di $\Phi(x)$.

Supponiamo questi siano (riordinando eventualmente i fattori):

$$F(x) = (x - V)(x - V_1)\ldots(x - V_{(M-1)}) \qquad \texttt{[007.013]}$$

[21] Non quello di cinque anni, quello piú vecchio; se i nostri amici della sezione storica ci procurano la data della scoperta apprezzeremo, per dimenticare subito dopo.

[22] La cosa si può sempre fare, ma Kolmogorov dice che la dimostrazione utilizza "metodi francamente tediosi". E se lo dice Kolmogorov ci crediamo e non li guardiamo neanche.

[23] Non spaventatevi; ricordatevi che, come abbiamo visto, Lagrange lavorava con polinomi di grado ***24*** e Viète, con i metodi piuttosto primitivi che aveva a disposizione, trattava anche aggeggi di grado ***45***, come ci spiega il Signore e Padrone delle Cenerentoliadi in un interessante articolo da lui tradotto.

[24] Forse è giunto il momento di fare un attimo di pausa e di chiarire qualche concetto; Galois si chiedeva se un'equazione di qualsiasi grado i cui coefficienti fossero ***radicali*** fosse risolubile attraverso i ***radicali***, ossia se un'equazione con i coefficienti in un determinato *campo* fosse risolubile *in quel campo*. Qui stiamo considerando solo i razionali per semplicità, ma (a parte il citare nuovamente Kolmogorov) la cosa è estendibile.

Essendo peró i V_i polinomi generati dalle permutazioni (in numero di ***n!***) delle radici della nostra equazione di partenza, ***un sottoinsieme delle*** **M** ***soluzioni forma gruppo***. Gruppo ***normale***, in quanto deve essere commutativo rispetto alle Classi Laterali.

7.3 A che punto è la notte – [005] – Prima

Il gruppo di dimensione ***n!*** è sempre ***riducibile*** solo se ha un Sottogruppo Normale.

Se la nostra equazione ha grado ***5*** allora $\Phi(x)$ ha grado $5! = 120$.

Il suo sottogruppo deve avere ordine ***60***.

Ma questo è il ***Gruppo Icosaedrico***.

Che ***non*** ha Sottogruppi Normali.

E quindi non è sempre riducibile.
…ma ormai sta sorgendo il sole, e "non ne ho il tempo.... Non ne ho il tempo....."

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms