Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 062 - Marzo- Anno Sesto

1. Consecutio Temporum

Nessuna religione ha abusato di espressioni

metafisiche quanto la matematica

(Ludwig J. Wittgenstein)

È del tutto stupefacente come i giornali che periodicamente indagano e si interrogano sul basso tasso di natalità del nostro paese non prendano mai in considerazione una delle cause principali: i compiti a casa. Chiunque si sia incautamente riprodotto e si trovi a convivere con prole in età scolare, sa quanto può essere terribile un sabato pomeriggio passato di fronte ad un sussidiario di quinta elementare. In circa trecentoventi pagine sono riepilogati i punti essenziali dello scibile umano: il livello di analisi di ogni argomento non è profondissimo, ma il ritmo è assolutamente incalzante. Se pagina 180 parla dello scheletro (permettendosi di citare cose astruse come gli osteoblasti[1]), già a pagina 172 ci si imbatte nella classificazione dei mammiferi: senza dimenticare che a pagina 27 si racconta come Garibaldi risultasse tutto sommato antipatico a Cavour, mentre dalle parti di pagina 300 abbondano equivalenze (che fine ha fatto il miriagrammo?) e il concetto di equiestensione.

È un'esperienza inenarrabile, puro prodotto di quella che Freud chiamava "ambivalenza emotiva": quel sovrapporsi di sentimenti apparentemente inconciliabili come l'amore e l'odio, che si ritrovano incongruentemente diretti verso la stessa persona o cosa. Del resto Catullo era riuscito a definire il medesimo effetto con due soli versi (*Odi et amo: quare id faciam, fortasse requiris, nescio, sed fieri sentio et excrucior*)[2], e senza bisogno di fondare la psicanalisi. L'amore è dato dal fatto che è bello ricordare l'infanzia e tutto ciò che è ad essa connesso; inoltre, le informazioni di quinta elementare sembrano a prima vista maneggevoli: gratificano la propria autostima culturale quasi quanto un quiz televisivo e consentono di porsi in cattedra di fronte alla perfida progenie (che peraltro è prontissima a rifarsi sfidando il genitore ad un qualsiasi videogame, non appena finiti i compiti). L'odio scaturisce invece dal constatare quante siano le nozioni "elementari" che ormai non si posseggono più, dalla rivelazione che i ragazzini di dieci anni si ricordano le cose dopo averle lette solo una o due volte e non cinquantaquattro come sembra essere necessario ai quarantacinquenni e, last but not least, dalla scoperta che alcune cose che ancora venivano gelosamente ricordate dalle proprie scuole elementari non sono più vere. "I regni della natura?" - "Facilissimo: Animale, Vegetale e Minerale", ci dicono le nostre stanche sinapsi. Ma sbagliano: in meno di mezzo secolo i regni della natura si sono moltiplicati[3], e la ferale notizia è sfuggita nonostante regolare e attenta lettura dei quotidiani. Un triangolo con area uguale ad un cerchio? Bestemmia terminologica, ormai: le aree per essere uguali devono essere davvero uguali, anche nella forma: non basta più che la loro misura sia esprimibile con lo stesso numero di metri quadrati.

A parziale consolazione, qualche punto fermo ancora rimane: a parziale disperazione, i punti fermi sono inevitabilmente quegli stessi che risultavano particolarmente astiosi già nel 1968. Da pagina 112 a pagina 124 il "testo di lingua" si trasforma in una serie decisa e ineluttabile di tabelle con le coniugazioni dei verbi. Prima, seconda, terza coniugazione; forma attiva e passiva, ausiliari con coniugazione propria, indicativi, gerundi e condizionali. Tutto da imparare a memoria, non si scappa. Basta guardare per un istante quelle pagine, per ritrovarsi percorsi dai gelidi brividi dell'ignoranza di ritorno. Uno sguardo in tralice al decenne consola solo in parte: si intuisce che il virgulto ha elaborato un certo metodo mnemonico, visto che non è troppo spaventato da domande parentali come: "Terza persona singolare passato remoto di amare?". In qualche modo le tabelle sono state incastonate a forza in qualche parte del cervello. E in effetti, tornando indietro con la memoria, vaghi artifici vengono rammentati: stralci di meccanismi di passaggio da "modo semplice" a

---

[1] Cellule delle ossa, secondo il sussidiario. Non si capisce se siano maschili o femminili, dal testo: optiamo per "gli osteoblasti", ma potrebbero benissimo essere "le osteoblasti", per quel che ne sappiamo.

[2] "Odio e amo: forse ti chiedi come possa farlo. Non lo so; ma così sento, e mi tormento" - Pessima traduzione, che non rende per niente il "fieri" e meno ancora il bellissimo "excrucior", ma non ci viene di meglio. Caio Valerio Catullo, Carme LXXXV.

[3] I soli esseri viventi (senza contare quindi l'intonso Regno Minerale) sono adesso non più classificati come Regno Animale e Regno Vegetale, ma come Monere, Protisti, Funghi, Piante e Animali. La nuova classificazione sembra essere stata introdotta nel 1960, e sono quindi ben quarantaquattro gli anni di ritardo, almeno per il sottoscritto, nella scoperta dell'esistenza di cose come le Monere e i Protisti.

"modo composto" riaffiorano, e la cosa a prima vista impossibile perde parte dell'impossibilità: quelle tavole si possono in fondo ricordare, se uno si impegna e s'ingegna a trovare un metodo, e forse anche l'adulto di mezza età può tentare di ricostruire il "sistema" (senza parlare del fatto che adesso è lui a tenere il libro per il manico).

Ritrovare quelle tavole può anche far scattare il meccanismo masochistico di un'indagine appena più approfondita: non essendo più forzatamente costretti a ripeterle alla maestra, ci si può soffermare sulla loro esoterica classificazione. A guardarlo con occhi nuovi, pur senza addentrarsi per i circuiti mistici del congiuntivo e del condizionale, già il caro vecchio modo indicativo è fonte di stupore: otto tempi sono davvero un'enormità: possibile che servano tutti? Quali alchimie misteriose dovrebbero condurci all'utilizzo di un trapassato prossimo? Quali segreti si nascondono nella palese ossimoro del nome "futuro anteriore"? I tentativi di ripescaggio dalla memoria dei metodi usati a suo tempo per esibirsi in una corretta enunciazione di fronte alla cattedra danno come frutto delle misere regole empiriche, come: tempo composto (futuro anteriore): si prende il tempo semplice corrispondente dell'ausiliario (futuro semplice di avere, "io avrò"); ci si attacca il participio passato del verbo richiesto (amare? Allora "amato"): e si arriva alla risposta: "Io avrò amato". Facile.

Sì, facile: ma a cosa diavolo serve il futuro anteriore, che pure qualche volta nella vita avremo usato[4]? Viene allora il desiderio di tentare il metodo costruttivo, al posto di quello deduttivo: anziché provare a capire a posteriori i ruoli dei tempi verbali, ci si può avventurare nell'ipotetica costruzione ex-novo degli stessi. In fondo, l'indicativo si limita ad "indicare" l'azione del verbo, e non ci sono relatività sintattiche o condizioni ipotetiche da rispettare: le uniche variabili sono le "persone" e i "tempi".

Proviamo: scimmiottando un metodo pseudo-scientifico, cominciamo interrogandoci sul numero delle persone. Perché proprio sei, perché tre singolari e tre plurali? I greci antichi, perfezionisti come al solito, oltre a singolare e plurale avevano anche il duale, e ci danno ad intendere che "due uomini" hanno da essere considerati in maniera ben diversa da "molti uomini"; ma l'eccesso di specificazione fa rischiare il tracollo. Volendo restituire dignità al duale greco, già pare di sentire i partigiani del numero tre che rivendicano pari diritti al loro beniamino (con conseguente istituzione del "triale"), ed è immediato prevedere la successiva rivendicazione attuata dai partiti degli altri numeri interi. Altrettanto inevitabilmente, la restrizione ai soli interi sarebbe tosto vista come limitazione: cos'hanno fatto di male i razionali e i reali? Non meritano forse pari riguardo anche i trascendenti? È evidente che, dopo qualche disperato tentativo di coniugazioni adattate anche al settetredicesimale, al radiceditreale e all'immancabile pigrecale, tutto rientrerebbe per immediata carenza di suffissi.

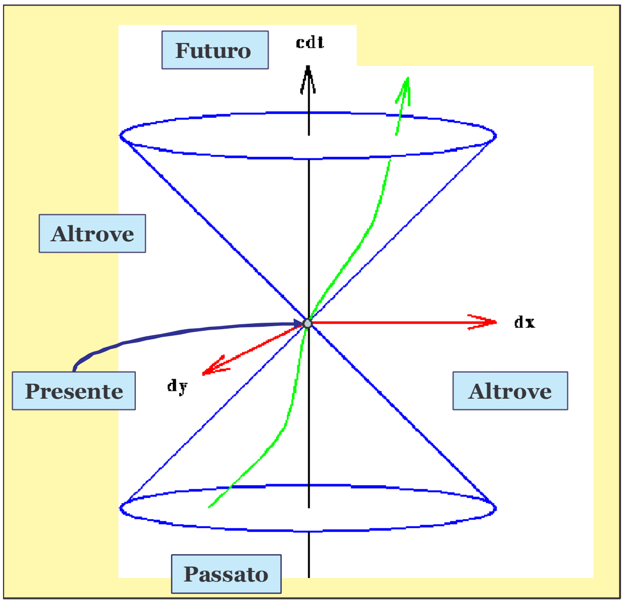
Le sei persone tradizionali sono intoccabili; e con buona pace degli anglofoni, eviteremo anche la tentazione sessista del neutro (he, she, it) definendo una volta per tutte come "verbalmente asessuata" la terza persona singolare. Poi, a voler essere a tutti i costi analitici, forse quel numero "sei" racconta qualcosa di significativo: la parola, il "verbo", è sostanzialmente comunicazione, e quella più semplice è quella tra due entità: mittente e destinatario. Le prime due persone singolari si affermano subito, come i due estremi della freccia comunicativa. La comunicazione può riguardare sia chi parla, sia chi ascolta; ma può anche contenere informazioni riguardo al resto del mondo. La terza persona è "esterna" alla comunicazione, e forse il fatto che i grammatici la numerino con l'ordinale più alto

[4] Speriamo che gli estimatori dell'autoreferenzialità apprezzino questa nota a piè di pagina.

potrebbe davvero discendere dal fatto che assai probabilmente è arrivata per ultima nella genesi comunicativa. È intuitivo attendersi che i primi costrutti fossero ben localizzati all'interno delle persone direttamente coinvolte nel dialogo (*"Io **ho** fame. Mi **dai** il tuo cibo?"*), e forse scoprire che si poteva comunicare anche accadimenti esterni, per quanto vitali (*"**Arriva** la tigre dai denti a sciabola!"*) potrebbe essere stata una scoperta rivoluzionaria, con un connotato già più narrativo, e forse successivo. Il fatto che i tre elementi costitutivi delle persone verbali (mittente, destinatario, esterno) vengano poi duplicati negli omologhi plurali (noi, voi, essi) è una delle più manifeste dimostrazioni che l'uomo è un animale sociale: implica l'identificazione con un gruppo, e per quanto il plurale possa sembrare un'ovvia e naturale estensione del singolare, dubitiamo fortemente che la grammatica dei ragni ne possa mai sentire davvero il bisogno.

E i tempi? Come nascono i tempi verbali, a volerne ricostruire una ipotetica storia? In pieno ventunesimo secolo è quasi inevitabile immaginare la "freccia del tempo" proprio come una freccia: o meglio, come un singolo asse cartesiano orientato. Unidimensionale, orientato da sinistra (passato) verso destra (futuro), molto maneggevole. Il presente è facile figurarselo come un punto (mobile) marcato ad esempio con il simbolo $\mathbf{t_0}$, e il punto divide perfettamente l'asse del tempo in due parti: il passato a sinistra di $\mathbf{t_0}$, il futuro a destra di $\mathbf{t_0}$.

Passato, presente, futuro: tre luoghi distinti sull'asse del tempo, e quindi tre tempi dovrebbero essere più che sufficienti. Persona+Tempo+Verbo, et voila, copriamo tutto l'asse temporale: 2ª persona singolare, passato, amare? "Amasti"; 1ª plurale futuro? "Ameremo"; 3ª plurale presente? "Amano". L'indicativo non dovrebbe davvero aver bisogno d'altro: abbiamo anche evitato di considerare la critica di Sant'Agostino, che diceva non esistere il presente, schiacciato com'è fra passato e futuro.



Dobbiamo anche ammettere che, pur negando alla teoria agostiniana la cassazione del presente, rifiutando così una eccessiva semplificazione dei tempi, per contrappasso non ci siamo neppure lasciati tentare da un approccio più esaustivo, come invece potrebbe richiedere la visone relativistica della simultaneità: siamo sempre rimasti newtonianamente legati al tempo assoluto, rappresentabile come retta, e non, come Einstein e Minkowski vorrebbero, come un bel cono con relativo orizzonte degli eventi.

Adattare i tempi dell'indicativo alla rappresentazione relativistica è opera di gran lunga superiore alle nostre forze. L'unico tentativo che conosciamo in una direzione analoga è quello di Douglas Adams in "The Restaurant at the End of the Universe", dove l'ambientazione fantascientifica consentiva viaggi nel tempo, e una delle attrazioni più rinomate della futura società umana era proprio un ristorante dove si poteva andare a cenare e godersi la vista degli ultimi istanti di vita dell'Universo, salvo poi pagare il conto, uscire, risalire sull'utilitaria temporale e tornarsene serenamente al proprio domicilio e periodo storico. Per qualche breve frase Adams si avventura a spiegare come la sintassi delle amabili conversazioni conviviali a quel ristorante erano rese complesse dalla pluralità dei tempi fisici e sintattici che il viaggio nel tempo metteva a disposizione dei protagonisti, con esiti devastanti per la conversazione e assolutamente esilaranti per il lettore[5].

Il veloce sguardo alla relatività ed alla fantascienza ci consentono però di fare un passo importante nella comprensione di come i tempi possano moltiplicarsi: anche abbandonando il cono del tempo e rifugiandoci nella nostra cara vecchia retta unidirezionale cui siamo abituati, i tre "topoi" classici (presente, passato, futuro) si riproducono istantaneamente. Se il "Sistema di Riferimento Narrativo (SRN)" è il presente, abbiamo già i tre tempi necessari: ma se trasliamo lo SRN nel passato, abbiamo subito bisogno di qualcosa che ci fornisca il "presente visto nel passato", "il passato del passato" e il "futuro del passato"; per ragioni di simmetria, se lo SRN viene traslato nel futuro necessiteremo del "presente visto nel futuro", del "passato del futuro" e del "futuro del futuro". Senza troppi sforzi, i tempi da tre sono già diventati nove: ma la nota idiosincrasia dell'autore di questo pezzo con la frase "per ragioni di simmetria" dovrebbe aver già indicato agli affezionati lettori di RM che l'utilizzo della aborrita sentenza era soffuso di velata ironia. Già l'esistenza del "futuro semplice" è indicativa d'una forte coscienza del tempo che scorre, e della convinzione che continuerà a farlo: non giureremmo che il ragno citato qualche riga più su abbia reale coscienza del "futuro", per quanto il suo alacre lavoro attorno ad una ragnatela potrebbe stare a indicare che sa che qualche mosca si "*invischierà*" in essa. Ma spostare una narrazione nel futuro è ancora al di fuori della portata delle lingue umane del ventunesimo secolo.

Restano invece importanti i tre tempi aggiuntivi che ci vengono regalati dallo spostamento del SRN nel passato. Le narrazioni, specie se scritte, sono quasi sempre con un SRN centrato nel passato, e allora i tempi aggiuntivi si rendono subito necessari: *"Nel mezzo del cammin di nostra vita mi* **ritrovai** *per una selva oscura … Ma poi che* **fui** *al piè d'un colle* **giunto***"*[6]; *"Musa, quell'uom di multiforme ingegno dimmi, che molto* **errò***, poi ch'***ebbe** *a terra* **gittate** *d'Ilion le sacre torri"*[7]. L'ipotesi sembra confermata: a "io amo" (presente del SRN-presente) può corrispondere un "io ho amato" (passato del SRN-presente), così come a "io amai" (presente del SRN-passato) può corrispondere "io ebbi amato" (passato del SRN-passato). E la sensazione d'essere nel giusto arriva addirittura dal vituperato futuro anteriore, che proprio nel nome sembra essere "il futuro del SRN-passato".

Ma qualcosa non funziona, in questo metodo costruttivo a posteriori; pur tralasciando il fatto che potrebbero esserci dei collassi verso un'unica forma dei tempi molto imparentati quali il "passato dello SRN-presente" e il "presente dello SRN-passato", sono i futuri a rappresentare la vera tragedia. Come diceva il grande Niels Bohr, *"la predizione è sempre difficile, specialmente riguardo al futuro"*, e

---

[5] Nella speranza che "Urania" non venga mai a saperlo, o che al più consideri questa nota più come una pubblicità gratuita, riportiamo un breve passo nella bella traduzione di Laura Serra: "*… Il problema fondamentale del viaggio del tempo è, molto semplicemente, un problema di grammatica, e l'opera principale da consultare a questo riguardo è il* Manuale dei milleuno tempi grammaticali utili al viaggiatore del tempo*, del dottor Dan Streetmentioner. Leggendo questo libro si impara per esempio a descrivere un avvenimento che stava per accaderci nel passato, prima che riuscissimo ad evitarlo saltando avanti nel tempo di due giorni. L'evento si può descrivere in modo diverso a seconda che se ne parli dal punto di vista del tempo in cui ci si trova oppure di un altro tempo (passato o futuro), ed è ancora più difficile da descrivere se uno sta conversando durante il viaggio che lo porterà a diventare padre o madre di sé stesso. La maggior parte dei lettori riescono ad arrivare fino all'aoristo plagale – il passato indeterminato armonico – del congiuntivo futuro intenzionale invertito in condizionale multiplo imperativo, poi gettano la spugna: e in effetti nelle ultime edizioni del libro le pagine successive a questo punto sono state lasciate bianche per risparmiare sui costi di stampa…*"

[6] La Redazione tutta si rifiuta di fornire i riferimenti bibliografici del libello da cui sono stati tratti questi versi d'esempio.

[7] Cfr. nota precedente. Al massimo, possiamo ricordare il traduttore: Ippolito Pindemonte.

sembra proprio che la sintassi, almeno quella della lingua italiana, ne abbia perfetta coscienza. Provate a costruire una frase nel SRN-passato che parli del futuro. Dovrebbe venirvi fuori qualcosa del tipo *"***Fondammo** *una e-zine di matematica ricreativa, e parlavamo di come la* **avremmo fatta** *crescere"*. "Avremmo fatta", non "avremo fatta": mai duplicazione di consonante fu più devastante: il futuro anteriore, che sembrava perfetto candidato a svolgere il ruolo di futuro dello SRN-passato, cede il passo e introduce sulla scena un insinuante condizionale! La cosa sorprende, e disorienta: e disorienta ancora di più quando ci si rende conto che, talvolta, è lo stesso futuro semplice ad essere invece usato, per contrappasso, come una specie di condizionale: *"Le presento questa giovane donna, ma non faccia gaffe: guardi che non è né mia figlia né la mia amante."* – *"***Sarà** *sua moglie, allora."*[8].

Il fatto che il futuro sia ben lungi dall'essere sicuro e garantito introduce in definitiva un'incertezza che viene rimarcata, in maniera più o meno consapevole, dalla sintassi e relativa consecutio temporum[9]; è la stessa lingua italiana a mescolare sapientemente la previsione d'una azione più o meno certa con l'incertezza data dal "tutto può ancora succedere". La stessa voce "**sarà**" dell'esempio precedente ha una valenza ben diversa nella frase *"Se stai addizionando gli addendi tre e cinque, sappi che il risultato* **sarà** *otto"*, e questo non è dato dalla verità matematica dell'addizione, ma dal fatto che chi parla sta esprimendo una certezza. Anche qualora la certezza fosse erronea (*"…sappi che il risultato* **sarà** *trentacinque"*) il senso di quel "sarà" non cambia d'una virgola, e resta ben diverso da quello dell'esempio del paragrafo precedente.

Il tentativo di ricostruzione per via scientifica dell'indicativo si sta palesemente arenando in una secca dalla quale sembra impossibile riprendere il mare, ma l'ottimismo del ricercatore dovrebbe cogliere una serie di buone notizie dal tentativo: anche la cruda tavola delle coniugazioni dei verbi contiene informazioni a prima vista inaspettate: ne abbiamo estratto alcune ipotesi sulla nascita della comunicazione, sull'evidenza della coscienza del tempo assoluto newtoniano celato nella sintassi italiana, sulla connotazione dell'uomo come animale sociale, sul mistero della coppia in quella Grecia antica che sentiva necessario il duale, e infine sul senso di impotenza dato dall'incertezza dell'avvenire, come testimonia la commistione di funzioni e di ruoli tra i "futuri" dell'indicativo e i tempi del condizionale. Non v'è dubbio che qualcuna di queste deduzioni sia forzata, ma l'esercizio sembra comunque gettare un po' di luce intrigante sulle apparentemente aride tabelle del testo elementare di lingua. Considerazioni che potrebbero tornare utile nel tentativo di rendere le coniugazioni interessanti alla prole decenne, forse.

---

[8] Dialogo rubato al film "Rivincita di Natale", di Pupi Avati, sugli schermi di questi tempi. Il futuro con uso ipotetico è pronunciato da Diego Abantantuono.

[9] Forse è giunto il momento di inserire un disclaimer: siamo ben lungi dall'essere retori o grammatici, e temiamo che i professionisti del settore abbiano più d'una ragione di farsi rizzare i capelli in testa, nel leggere tante arroganti affermazioni sulla loro materia. L'esercizio di "ipotetica ricostruzione del modo indicativo" vuole solo essere un gioco analitico senza alcuna pretesa di validità nell'arduo territorio sintattico-grammaticale. I veri grammatici (se mai ce ne fossero, tra i lettori d'una rivista di matematica ricreativa e farneticante) siano indulgenti e ci scusino. A parziale tentativo di discolpa, confesseremo che in realtà conosciamo quale sia il compito "canonico" del futuro anteriore: continuando il parallelo con il presente visto come tempo $\mathbf{t_0}$, se il narratore deve esprimere un evento futuro ($\mathbf{t_2}$) che avverrà soltanto dopo il precedente (ma comunque sempre futuro) evento $\mathbf{t_1}$, comporrà la sua frase usando il futuro semplice per l'azione del tempo $\mathbf{t_2}$ e il futuro anteriore per l'azione del tempo $\mathbf{t_1}$. Tutto perso nella travolgente scoperta del "significato condizionale" del futuro anteriore, l'autore di queste righe faceva fatica a trovare un esempio decente del caso ortodosso, e ha chiesto aiuto ai colleghi della Redazione. I puntuali suggerimenti arrivati dicono molto sul carattere dei personaggi: il GC si è esibito con un "Quando avrò sedotto Megan Gale, la smetterò di correre dietro alle gonnelle"; Alice ha messo invece su l'aria modesta e ha confessato: "Non lo so proprio, ma ci penserò meglio quando avrò letto il pezzo per intero". Il sottoscritto si è accorto che sotto l'apparente modestia femminile c'era un esempio perfetto di quello che cercava solo con molto ritardo, e solo dopo che glielo si è fatto maternamente notare.

Resta però ancora del tutto aperta la questione degli otto tempi dell'indicativo: anche volendo accettare come valida (anche se di certo non sarà così) la genesi proposta per i primi sei tempi (i tre "naturali" moltiplicati per i due SRN), all'appello del modo indicativo ne mancano ancora due. Sono quelli che introducono il concetto di "continuità dell'azione": l'imperfetto e il trapassato prossimo. "Io amavo", "io avevo amato" compiono una rivoluzione immediata e necessaria: raccontano di una azione che non termina, che continua (o che continuava), che occupa (o che occupava) non solo un puntuale $\mathbf{t_0}$, ma un esteso $\mathbf{\Delta t}$. Quello che in genere colpisce i ragazzi che si confrontano per la prima volta con le tavole dei verbi è proprio questo nome così impegnativo del tempo in esame: "imperfetto" sembra un giudizio negativo, più che il nome d'un tempo con la sua naturale ragione d'essere. Perché "imperfetto"? Gli manca qualcuna delle sei persone? È un indizio che consiglia di usarlo il meno possibile nelle composizioni? Si rischia forse un brutto voto a farne uso? Il mistero si scioglie grazie all'incontro con il latino (talvolta la cura è peggiore del male, osserverà qualcuno…), che spietatamente affianca all'imperfetto anche il perfetto[10] e il piuccheperfetto: la prolificazione di tempi dal nome simile spiega subito allo studente che "l'imperfezione" dell'imperfetto sta solo nel fatto di non essere "concluso": se si impara a leggere correttamente il significato di "perfetto" come "passato, concluso, terminato, finito"; se il piuccheperfetto si limita a drammatizzare lo stesso scorrere del tempo e sposta ancora più indietro la chiusura dell'azione verbale, l'imperfetto diventa allora immediatamente ciò che effettivamente rappresenta: il "non ancora passato, l'inconcluso, l'interminato, il non-finito"; e il non-finito altri non è che l'infinito.

Ah, l'infinito! Drammaticamente sfuggente e terrorizzante, nonché presente in quasi ogni aspetto della cultura umana. La religione, innanzitutto: dove la semantica delle parole sembra quasi accartocciarsi e autogiustificarsi, se all'Onnipotente sembrano addirsi senza contraddizione aggettivi come "infinito" e "perfettissimo", che dovrebbero etimologicamente essere uno il contrario dell'altro; e poi la matematica, che con l'infinito si è confrontata per tutta la sua lunghissima storia, al punto che si parla ormai di "infinito matematico" per distinguerlo dagli altri tipi di infinito. Le nostre tavole di coniugazione hanno anche un'altra scorciatoia verso l'infinito: in fin dei conti, non esiste solo l'infinito etimologicamente nascosto nell'imperfetto, ma esiste anche il "modo Infinito" vero e proprio, e lo studente sembra precipitarvi dentro proprio con una regressione matematica dettata da Zenone di Elea: tempi dell'Indicativo: otto; tempi del Congiuntivo: quattro; tempi del Condizionale: due; tempi dell'Imperativo: uno; poi la frammentazione di participi, gerundi, che possiamo pure immaginarci come frazioni sempre più piccole, vista la scarsezza degli elementi che le compongono, e infine l'Infinito. Anche se, se solo la grammatica si decidesse una buona volta ad essere coerente, sarebbe stato forse meglio chiamarlo "infinitesimo". Il modo Infinito è il "nome" stesso del verbo: l'infinito di amare è amare, quasi a voler sancire che i nomi sono destinati a durare per sempre, più dei loro stessi latori. Ci pare però che, almeno per un aspetto, l'imperfetto racconti meglio del modo Infinito una caratteristica dell'infinito matematico: la parentela strettissima tra infinito e continuità.

In matematica, l'infinito compare immediatamente: il bambino che impara a contare forse acquisisce prima solo i nomi dei primi dieci numeri, e soltanto in seguito un vero concetto di "numero". Impara una filastrocca che inizia con uno, prosegue con due, tre, quattro, e arriva fino al dieci. Poi comincia ad associare quei dieci vocaboli al corrispondente numero delle dita, di due mele, di sei sedie. Rapidamente si accorge che le mele possono essere anche più di dieci, e che gli mancano i nomi per

[10] Se il latino vi è davvero antipatico, ripiegate sull'inglese: il "past perfect" e il "perfect tense" prendono il nome dallo stesso principio.

esprimere quella quantità di oggetti: ma è un attimo, perché qualcuno comincia allora a dargli le regole per esprimere i numeri maggiori di dieci, e gli mostra come arrivare a cento, a mille, e ancora oltre. Forse è proprio con i numeri che si apprendono i primi meta-nomi: inizialmente c'è una quasi rigorosa corrispondenza tra la "cosa" e il "nome della cosa"[11], e non c'è altro modo di possedere una cosa se non imparandone a memoria il nome[12]: con i numeri, invece, si impara subito a "costruire i nomi". Conosciamo i nomi di tutti i numeri, anche di quelli che non nomineremo mai. Il bambino recepisce, capisce, e coglie subito il senso importante nascosto nella "regola per chiamare i numeri": la regola serve perché i numeri non finiscono mai. Non si possono imparare a memoria, quei nomi: si deve imparare un trucco per far finta di possederli tutti, ma in realtà possiamo chiamarne solo uno alla volta, applicando una regola. Possiamo certo scrivere una lunga serie di cifre e poi leggere a voce alta "diciotto miliardi di miliardi di miliardi di miliardi e settecentomila ventitre", ma non c'è essere umano al mondo che abbia mai detto tutti i nomi precedenti: quasi come se un calcolatore magico potesse fornirci il valore di una qualsiasi cifra decimale di pi greco, per quanto pazzesco sia il numero d'ordine della cifra che gli chiediamo, ma senza alcuna possibilità di stamparla insieme tutte le precedenti[13].

È così che il bambino incontra l'infinito. I numeri continuano sempre, compaiono sempre. Il cielo sembra ancora una solida tavola blu, quasi raggiungibile e magari tale da poterci disegnare sopra, se solo si avesse a disposizione una scala abbastanza alta per arrivarci: ma i numeri interi sono già infinito. E questo primo incontro con l'infinito marchia per la vita: il primo pensiero che si ha quando si pensa alla parola "infinito" è inevitabilmente quello di una "successione infinita di elementi", un procedere inarrestabile, un punto che si allontana sempre più, che si rende sempre più irraggiungibile. È una visione dinamica: qualcosa che va, va, va, scompare il lontananza, fino a giungere – appunto – all'infinito.

Ma questo è solo un tipo di infinito. Quello più semplice, in fondo. Di infinito ne esiste almeno un altro, che per contrappasso potremmo definire "statico". È quello che si incontra semplicemente osservando qualcosa, una qualsiasi cosa, con sempre maggiore attenzione. Una mela, ad esempio. Avvicinatela agli occhi, guardatela bene. Vedrete solo un pezzo di mela: concentratevi su quello, e guardate ancora meglio: ritagliatene un pezzo più piccolo, poi ancora più piccolo, sempre più piccolo, e così via ad oltranza. Purtroppo viviamo nel ventunesimo secolo, e l'analogia non può reggere fino in fondo: la fisica moderna è più pietosa della matematica, e la polpa apparentemente continua della mela si frammenta presto in molecole, atomi, particelle subatomiche, quark. E si può essere distratti dal vuoto tra atomo e atomo, tra quark e quark, magari giungendo a pensare (probabilmente sbagliando) che quel "vuoto" tra particella e particella non sia più "mela", ma sia qualcosa altro. La stessa pietà è invece negata se si guarda sempre più da vicino la retta dei numeri reali. Guardate adesso il piccolo segmento compreso tra gli interi 1 e 2, e scendete in dettaglio, sempre più in dettaglio, sempre più a fondo: gli interi che all'inizio vedevamo stagliati come torri spariscono quasi subito, uno a destra e l'altro a sinistra: e ci si immerge nella folla sempre densa, sempre infinitamente densa, dei razionali che abitano tra 1 e 2. I razionali che ad ogni successiva zoomata sembrano

---

[11] Inizialmente volevamo scrivere "… tra la "rosa" e il "nome della rosa"…", ma sembra che l'idea l'abbia già avuta qualcun altro.

[12] *"Stat rosa pristina nomine. Nuda nomina tenemus"*: anche questa, sembra l'abbia già scritta qualcun altro.

[13] E i lettori più informati probabilmente sanno che, passando attraverso la notazione esadecimale e svariate apparenti magie, l'algoritmo di Bailey-Borwein-Plouffe sembra riuscire a fare proprio quello che fa "il calcolatore magico" del nostro debole esempio.

fare da limite destro e sinistro continuano a scomparire anch'essi, velocissimamente, bevuti dall'orizzonte di destra e dall'orizzonte di sinistra; ma il loro numero non cambia, la loro densità non decresce, non muta. Eppure i razionali non sono altro che l'analogo di paracarri sempre presenti, sempre densi e sempre infiniti certo, ma in fondo ben posizionati sulla strada: ma questa strada verso la quale stiamo continuando a zoomare non è fatta solo dai paracarri. È composta da un'altra spaventosa miriade di numeri, cosi sottili e invasivi da non far mai, neanche per un instante, comparire quello "spazio tra elementi" che invece vedevamo tra una particella e l'altra della mela. I razionali non si diradano, ma la nebbia perfetta dei reali, melange assoluto di algebrici e di trascendenti, toglie semplicemente il significato alla parola "diradare". È sempre compatta, invincibile, impenetrabile. Sempre rinnovata, e rinnovata in maniera così violenta e assoluta che, in realtà, si limita ad apparire perfettamente immobile, per quanto la nostra fantasia possa provare ad amplificare e a magnificare il dettaglio. Compatta, impenetrabile. Continua, e innumerabile.

È un altro tipo di infinito, assai più spaventoso di quello monotono di una successione infinita di interi che continuano a comparire, ritmicamente, uno dopo l'altro. In fondo, è comprensibile: per quanto ne possiamo vedere l'ineluttabile infinità, di quegli interi pedanti che continuano a comparire e che ci impediscono di terminare la conta conosciamo perfettamente il nome. Lo conosciamo da quando avevamo sei anni, da quando ci hanno insegnato la regola per chiamare i numeri: sappiamo certamente che dopo "unmilioneetre" verrà inevitabilmente un altro numero, ma sappiamo anche che a quel numero possiamo dare un nome: "unmilioneequattro". Non possiamo fermarli, ma possiamo chiamarli. Li possediamo, insomma.

Quella nebbia spaventosa che tappezza la retta dei reali, invece, è assolutamente innominabile. Innominabile e indistinguibile, tanto è vero che non esiste al mondo neanche un solo nome proprio per un solo numero reale, o per un solo trascendente. Se si dice "radice di tre" si descrive un metodo, non si nomina un nome. Se si dice "pi greco", si rinuncia persino alla descrizione del metodo: e se questa rinuncia rappresenta in fondo proprio il ritorno al "nome" vero e proprio, all'appellativo non descrittivo, questo discende dal fatto che pi greco è apparso subito tanto strano agli uomini da meritarsi un identificativo, come lo si concede ad un personaggio del tutto singolare: quando il trascendente per eccellenza ha cominciato a mostrarsi, tutto si supponeva meno che i trascendenti fossero addirittura più "numerosi" degli algebrici: gli fu concesso un nome proprio per la sua eccezionalità, e, in quanto tale, più che un nome gli fu concesso un marchio d'allarme. Una delle maggiori scoperte della matematica della fine dell'Ottocento fu quella che asseriva che i numeri razionali, nonostante sembrassero assai "più numerosi" degli interi, erano in un certo senso "ugualmente numerosi", visto che ogni intero si poteva mettere in relazione biunivoca con un razionale. La successiva scoperta che questa relazione biunivoca non era invece in alcun modo instaurabile tra interi e reali, fu altrettanto importante e rivelatrice. Col senno di poi, con la sfacciataggine che consente la possibilità di scrivere evitando accuratamente qualsiasi rispetto per la correttezza formale ed il rigore, si può anche affermare che, per arrivarci, bastava notare che anche i numeri razionali hanno un nome, una regola per essere nominati, come gli interi; e i reali invece no.

Colui che scoprì che ci sono infiniti infiniti, e non un solo misero infinito, fu Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor. Figlio di padre tedesco (seppur nato in Danimarca) e di madre russa, Cantor nacque a San Pietroburgo il 3 marzo 1845. Sembra che, pervaso da un profondo senso del trascendente e attratto dall'assoluto religioso, fosse fin da piccolo ipnotizzato dall'infinito, e continuasse ad interrogarsi sul suo significato. E poiché era anche molto attratto dalla matematica e dalla teoria dei numeri, fu quasi inevitabile che finisse per scatenare la rivoluzione dell'infinito matematico.

Non sono molti i libri che si possono definire "Storia dei Matematici": è assai più frequente incontrare delle "Storie della Matematica": la nostra amata scienza è quella che più sembra distante, o quantomeno indipendente, dai suoi creatori-scopritori. Tra le rare "storie di matematici", una delle più celebri è quella scritta da Eric Temple Bell[14] nel 1937: le biografie che la compongono sono belle e dettagliate, e centrate assai più sugli uomini che sulla loro matematica. Poiché è un libro che parla di storia e di uomini, è vincolato a parlare solo di uomini la cui vita e opera sia almeno un po' documentata: per questa ragione il primo matematico considerato non è Pitagora, le cui notizie sono quasi tutte di origine mitologica, ma Zenone di Elea. Essendo stato scritto nel 1937, non può far altro che nominare velocemente i matematici del Novecento, perché ancora non avevano superato l'esame della storia: per questa ragione, l'ultima biografia è quella di Cantor. E Bell gioca a sorprendersi, nel constatare come il primo e l'ultimo dei suoi matematici siano così idealmente vicini e interessati ai medesimi argomenti, quasi come se fra di loro non giacessero millenni di matematica, ma solo lo spazio d'una mezza generazione.

Zenone è talmente filosofo da sembrare matematico ai filosofi: Cantor è talmente matematico da sembrare filosofo ai matematici. La sua carriera fu pienamente matematica, a voler leggere il suo curriculum vitae et studiorum, ma per quanto si legga dei suoi lavori sulle "equazioni indeterminate di secondo grado", il suo nome resta indissolubilmente legato alla teoria degli insiemi e alle sue indagini verso l'infinito. E oltre. Per secoli la matematica sembra quasi non prendere partito di fronte a paradossi talmente semplici da essere perfettamente comprensibili anche ai bambini. Sono di più i numeri interi o i numeri pari? Da una parte è innegabile che i pari siano solo "la metà" dei numeri interi: dall'altra è altrettanto innegabile che i numeri pari e i numeri interi possono essere messi in relazione biunivoca, visto che ad ogni intero si può sempre accoppiare i suo doppio. E questo "porre in relazione biunivoca" significa esattamente "contare": e salvaguardare questo principio è assai più fondamentale che abituarsi all'idea che, quando entra in campo l'infinito, la metà di un insieme possa essere non minore dell'insieme stesso.

Cantor lascia la matematica più "tecnica", e indaga sulla sottile linea di confine tra matematica e filosofia, tra filosofia e logica. Mentre gran parte dei suoi contemporanei non accettano neanche questa "pari numerabilità" tra interi e pari, lui mette in relazione biunivoca con gli interi addirittura i razionali: è celebre la

[14] Men of Mathematics". In Italia, Sansoni lo ha pubblicato con il titolo "I Grandi Matematici".

rappresentazione della matrice che genera tutti i numeri razionali, e il percorso a serpentone che si snoda nella matrice, allineando tutti i razionali in una linea: associarli poi agli interi sarà un gioco da ragazzi, contando semplicemente il numero d’ordine che ogni razionale ha nel percorso. Ma per quanto intrigante sia questa rivelazione, è la “prova diagonale” di Cantor che lascia un segno indelebile nella storia della matematica: con un metodo che, almeno dal punto di vista grafico, non sembra troppo diverso da quello appena raccontato, Cantor dimostra che non v’è possibilità di “contare” i reali. E da qui nascono i transfiniti, da qui nasce la ancora irrisolta “ipotesi del continuo”.

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	...
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	...
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	...
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	...
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	...
...	...	...	...	...	...	...

Non è il caso di entrare in questa sede in troppi dettagli sulla CH (Continuum Hypothesis)[15], come non è il caso di entrare troppo nel dettaglio della vita di Cantor: essa è, come sempre per i grandi, interessantissima e drammatica. Ma dal punto di vista dei “compleanni di RM” ha un difetto essenziale: quello di essere per molti versi simile a quella di Ludwig Boltzmann, il protagonista del compleanno precedente. Come Boltzmann, Cantor condusse per tutta la vita una battaglia intellettuale contro un forte avversario: quello che Mach fu per Boltzmann, Kronecker fu per Cantor. Come Boltzmann, anche Cantor terminò la sua vita terrena con un dramma: non finì suicida, ma morì quasi dimenticato da tutti in un sanatorio a Le Halle, all’inizio del 1918. Come quelle di Boltzmann, le sue idee rivoluzionarie fecero fatica ad imporsi tra i contemporanei, anche se personaggi del calibro di Hilbert asserirono subito che *“Nessuno ci allontanerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi”*. Ancora più curiosamente, anche il centro della querelle tra Cantor e Kronecker[16] era simile a quello tra Boltzmann e Mach: la sempiterna lotta tra discreto e continuo. Almeno in questo, però si può riscontrare una differenza: Boltzmann era per la fisica il paladino del “discreto”, dell’ipotesi atomica; Cantor era per la matematica il cavaliere della continuità, lo scopritore del “continuum”. Ma in fondo è differenza solo apparente: la visione più immediata e ingenua della materia sembra deporre a favore della sua continuità, e il ritmo cantilenante del succedersi dei naturali suggerisce all’inizio l’idea del discreto per i numeri: su fronti diversi, Cantor e Boltzmann lottavano entrambi per il partito che aveva meno consensi.

Cantor era forse in realtà un metafisico: la sua scoperta che esistono diversi “ordini di infinito” lo preoccupa al punto di chiedere consiglio ad un religioso, un cardinale, per sapere se la sua intuizione di “più infiniti” avrebbe potuto in qualche modo essere vista come blasfema dalla chiesa. La leggenda vuole che il cardinale lo tranquillizzasse (dopo essersi opportunamente informato con i superiori) e che comunque gli consigliasse di usare un termine diverso da “infinito”: è da qui che sembra nascere il concetto di “transfinito”, che è usato come una sorta di pudico sinonimo della più evocativa parola “infinito”. Non è invece appurato se fu proprio a causa di quel cardinale che gli ordini cantoriani di infinito fossero poi chiamati “cardinali”: siamo pronti a scommettere sul no, ma è divertente notare l’interferenza di un cardinale in rosso nei cardinali matematici.

---

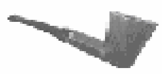
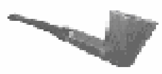
[15] “Non è il caso” è ovviamente un esercizio retorico della classe degli “eufemismi”. La triste verità è che Doc, nonostante la proverbiale sfacciataggine che lo porta a pontificare anche su argomenti di cui non sa niente, per una volta riconosce di non avere la capacità per farlo.

[16] Leopold Kronecker, quello della celeberrima “Dio ha creato gli Interi, tutto il resto è opera dell’uomo”. Letta nell’ambito della discussione tra “continuo cantoriano” e “discreto kroneckeriano”, la frase assume l’aspetto di un manifesto di battaglia.

A dire il vero, la diatriba tra Cantor e Kronecker non è ancora conclusa (terminata, finita, perfetta), perché è comunque da quella lotta che ritornò sulla scena della matematica la dicotomia tra "costruttori" e "scopritori", che poi ha invaso e continua a pervadere gran parte delle teorie matematiche moderne. Kronecker diceva che la matematica è costruzione, Cantor che la matematica è scoperta.

Costruzione ardita della mente dell'uomo, e quindi specchio dei meccanismi stessi che sono alla base del nostro pensiero; oppure realtà preesistente delle regole profonde dell'Universo stesso. Quale che sia la verità vera, ci sembra che siano entrambe molto nobili, e degne della nostra massima attenzione.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
La saliera di RM			
Yazzi!			

Se siete confusi sulle difficoltà espresse da questa tabella, è normale.

2.1 La saliera di RM

A me piace la paprika (in dosi industriali), a Doc il pepe (nelle stesse dosi) e tenete conto del fatto che, anche se io metto poco sale, Doc e Alice salano normalmente.

A questo aggiungete il fatto che l'idea delle magliette ha avuto un notevole successo (siamo stati copiati dall'Università di Torino, che ha aperto un gadget shop rispondente all'indubbiamente fantasioso nome di UniTo).

Se a questo punto vi sembra che la frizione della logica stia slittando, tranquilli. La connessione tra questi due concetti è che abbiamo deciso di progettare "La saliera di RM", comodissima durante i Comitati di Redazione: sua caratteristica principale è di avere ***tre*** spazi (sale, pepe e paprika) delle stesse dimensioni. Ora, un rapido calcolo *["rapido"... si fa per dire. L'unico modo che ho per ricordarmi il volume del cono è passare per l'integrale di rotazione. Cosa ci fa, lì, un terzo??? (RdA)]* ci ha permesso di stabilire che la forma ottimale di ogni contenitore è quella conica e che dimensioni ragionevoli dovrebbero essere raggio di base pari a ***1*** e altezza pari a ***2*** (unità pepisalopaprike, non stiamo a sottilizzare), piazzati in modo da stare appoggiati sui vertici con le altezze perpendicolari al piano del tavolo e mutuamente tangenti per i cerchi di base.

Ora, un aggeggio del genere, anche se esteticamente molto valido, secondo me pecca di rovesciabilità (e se avete visto anche solo una volta le mani di Doc quando parla, capite cosa intendo dire). La mia idea, quindi, era quella di aggiungere un po' di peso da qualche parte, e mi era sembrata una buona idea piazzare una sfera al centro, lì sotto.

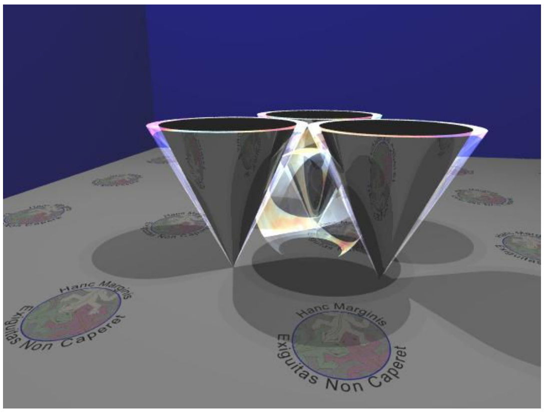
Poco chiaro? Sì, vero. Tant'è che (probabilmente per scoraggiarmi nell'opera), i due esimi colleghi se ne sono usciti con un "non ho capito, mi fai un disegno?".

Ma questa volta li frego.

Quello che non sanno è che ho installato POV-Ray.

In soli venti minuti di programmazione (e tre ore di calcolo... trattasi della macchina di Alberto) sono riuscito quindi a fare un bellissimo disegno di cosa intendo, e ve lo rifilo qui sotto *[La tovaglia la vendiamo il mese prossimo (RdA)]*.

Carina, vero? Adesso dovrebbe esservi tutto più chiaro, *a parte un piccolo problema.*



Se guardate bene nel disegno, vedete che la sfera mi è venuta amputata di una calotta (sotto), mentre la tangenza ai coni è venuta bene... Io volevo una sfera intera! Evidentemente, ho sbagliato il calcolo del raggio.

Mi date una mano, prima che quei due mi boccino il progetto? Quanto vale il raggio della sfera, per essere tangente sia tre coni che al tavolo?

2.2 Yazzi!

Gli americani lo chiamano "Yahtzee", ma il nome è registrato; qualche genio dell'italica creatività ha modificato un po' il nome e le regole e ha cominciato a venderlo in costosissime confezioni "purolegnoeavorio" con scarsissimo successo: da queste parti, i giochi di dadi hanno successo solo nelle riviste di matematica ricreativa.

Comunque, tempo fa avevo un foglietto che spiegava tutte le bislacche configurazioni che bisogna fare *["tempo fa avevo un foglietto" significa che l'ho perso: se qualcuno nelle risposte mi ripassa velocemente le regole e mi dà le configurazioni, grazie in anticipo (RdA)].* Tutto quello che mi ricordo è che prima si tirano cinque dadi a sei facce, poi si decide cosa si vuole fare, si raccolgono i dadi "inutili", si ritirano, e (se è il caso) si tira ancora una volta (sempre scegliendo i dadi che considerate "inutili"); l'unica configurazione che mi ricordo è lo "Yahtzee", ossia arrivare alla fine del giro con i cinque dadi uguali.

Bene, quali sono le probabilità di fare uno Yahtzee?

3. Bungee Jumpers

Dato un cerchio e un triangolo equilatero inscritto, quali sono le probabilità che una corda a caso del cerchio sia più lunga del lato?

> *Questa è una delle principali ragioni per cui Doc va in bestia quando si parla di "evidenti motivi di simmetria".*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

2004-01-22 15:58	Zar - [060] - 2	
2004-01-22 22:01	L.A.Bachevskij - [016] - 2	
2004-02-02 12:43	PMP - [061] – 1	
2004-02-02 13:57	Zar - [061] – 1	
2004-02-02 14:36	Mirtillo - [061] – 1	
2004-02-02 14:58	L.A.Bachevskij - [061] – 1	
2004-02-02 17:09	Mistral - [061] – 1	
2004-02-02 18:08	Mistral - [061] – 2	...uno...
2004-02-02 19:49	Frassa - [061] – 1	Una mirabile parabola
2004-02-02 21:07	Mistral - [061] – 2	...e due...

2004-02-03 00:14	Filippo - [061] – 1	
2004-02-03 07:08	Mistral - [061] – 2	...e tre!
2004-02-03 17:12	Mirtillo - [061] – 2	
2004-02-03 19:19	L.A.Bachevskij - [061] – 1	
2004-02-03 23:40	Stetson - [061] – 1	
2004-02-04 09:44	Andrea - [061] – 1	
2004-02-04 17:49	L.A.Bachevskij & Stetson - [061] – 2	
2004-02-04 21:16	jvanbie - [061] – 1	
2004-02-04 22:00	Desmatron - [061] – 2	
2004-02-04 23:04	Stetson & L.A.Bachevskij - [061] – 2	
2004-02-05 10:43	GaS - [061] – 1	
2004-02-07 00:02	Flo - [061] – 1	
2004-02-08 18:58	Flo - [061] – 2	
2004-02-09 18:17	jvanbie - [061] – 1	
2004-02-09 21:20	jvanbie - [061] – 2	
2004-02-10 01:11	Pasquale jr - [061] – 1	
2004-02-11 02:33	Pasquale jr - [061] – 2	
2004-02-12 19:17	Andrea - [061] – 1	Andrea l'ingegnere
2004-02-12 23:01	Filippo - [061] – 2	
2004-02-13 16:06	Filippo - [061] – 2	...con un aiuto per orientarsi nella nebbia
2004-02-16 16:00	PMP - [061] – 1	
2004-02-18 16:52	kshawk - [061] – 1	
2004-02-19 17:02	Flo - [061] – 2	...in dialogo con il maestro Zen
2004-02-21 15:54	Grifo - [061] – 1	
2004-02-21 23:45	Guido - [061] – 1&2	

E di sicuro ne abbiamo persa qualcuna verso la fine, ma non temete, se la cattivissima Redazione lo riterrà necessario, sarete menzionati il mese prossimo. Vediamo di raccontarvi cosa è successo questo mese.

4.1 [016]

4.1.1 Bilance

Beh, si può dire che è un po' che nessuno ci manda soluzioni a problemi tanto antichi, ma qui è arrivata una generalizzazione, e di queste noi andiamo pazzi... per di più il nostro **L.A.Bachevskij** ci manda la soluzione del numero 16 quando ci aspettiamo il 61 e:

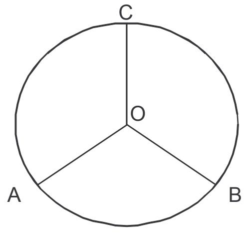
> Se poi a questo aggiungiamo che io sono una Bilancia, zodiacalmente parlando, le coincidenze diventano tante… Cito testualmente una citazione (è a tutti gli effetti la citazione di una citazione, citazione2) dalla mia rivista preferita (n.ro 2): "Una volta è caso, due è coincidenza, tre è premeditazione" (Ian Fleming, "Goldfinger")".

Ed è stato in assoluto il primo a farci gli auguri di compleanno negli ultimi cinque anni, per cui gli siamo doppiamente grati. Ed ecco la generalizzazione, corredata con un ottimo disegno.

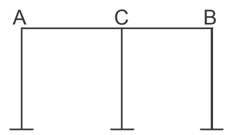
> Bilancia a tre piatti, posso trovare quella falsa in due pesate con 16 monete: divido le monete in quattro mucchi da quattro monete ciascuno, confronto sulla bilancia tre di questi quattro mucchi, ottenendo due possibili risultati a) uno dei mucchi pesa meno degli altri b) tutti i mucchi pesano uguale; nel caso a) prendo il gruppo "incriminato", confronto tra loro sulla bilancia tre monete, mettendo in disparte la quarta e posso aspettarmi aa) una moneta pesa meno delle altre ed è quella falsa ab) le monete pesano uguale e la moneta falsa è dunque quella in disparte; nel caso b) proseguo allo stesso modo, avendo cura di prendere in considerazione il mucchio messo in disparte all'inizio.
>
> Questo caso mi mostra che per una bilancia a n piatti posso trovare una moneta falsa in due pesate se parto da $(n+1)^2$ monete. Infatti peso al primo giro n mucchi di n+1 monete, lasciandone fuori uno, potendo così identificare univocamente il mucchio contenente la moneta falsa; al secondo giro peso n monete, lasciandone fuori una, potendo ora individuare la moneta falsa o come quella più leggera o come quella esclusa.
>
> Bilancia a n piatti in k pesate: posso trovare la moneta falsa in un mucchio di $(n+1)^k$:

No pesata	Mon/mucchio	Aumento mon app. vere	Monete appurate vere
1	$(n+1)^{k-1}$	$n(n+1)^{k-1}$	$n(n+1)^{k-1}$
2	$(n+1)^{k-2}$	$n(n+1)^{k-2}$	$n(n+2)(n+1)^{k-2}$
3	$(n+1)^{k-3}$	$n(n+1)^{k-3}$	$n(n^2+3n+3)(n+1)^{k-3}$
...			
$k-1$	$n+1$	$n(n+1)$	$(n+1)^k-(n+1)$
k	1	n	$(n+1)^k-1$

> Ad ogni pesata scopro essere validi n mucchi su n+1. Il procedimento segue quello dei casi precedenti, generalizzando la consistenza dei mucchi in base al numero di piatti della bilancia, al numero di pesate massimo fissato e al numero di pesate già effettuato: all's-esima pesata di k ($s \leq k$) gli n+1 mucchi (di cui n saranno pesati) saranno composti ciascuno di $(n+1)^{k-s}$ monete.
>
> Come costruire una bilancia a n piatti, $n \geq 3$.



vista dall'alto



vista frontale

In questo bellissimo *[beh... (RdA)]* disegno in A, B, C ci sono tre (n) carrucole cui sono appesi tre (n) piattini uguali, i piatti della bilancia. I fili (inestensibili, di peso uniforme trascurabile) uguali cui sono attaccati sono uniti tra loro in O, centro del cerchio (è un cerchio, anche se non lo sembra). Per pesare degli oggetti basta metterli sui piattini e poi controllare gli spostamenti del punto di giunzione rispetto al centro del cerchio. N.B. $A\hat{O}B$ e tutti gli altri angoli sono uguali in una bilancia a n piatti a 1/n di angolo giro.

Funziona solo in parte, però, se le mie nozioni di fisica (pari, in un sistema da 0 a 1000, a 0+ε) non mi ingannano: con n=4 abbiamo un assurdo se due pesi a, b uguali tra loro e maggiori degli altri due pesi c, d uguali tra loro, si trovano sullo stesso diametro e così con tutti gli n pari.

Con n=3 la bilancia funziona: infatti poniamo il peso in A uguale a k; vogliamo che B (h) e C (l) equilibrino la bilancia, quindi $\begin{cases} l\cos 60 + h\cos 60 = k \\ k\cos 60 + l\cos 60 = h \\ h\cos 60 + k\cos 60 = l \end{cases}$ che equivale a dire h=l=k.

Quello che dicevo della bilancia a quattro bracci forse è spiegabile con il fatto che il coseno, e quindi l'influenza che i pesi hanno su un equilibrio, si annulla a 90°. Per generalizzarlo ai pari, basta ipotizzare che tutti i pesi opposti rispetto al centro siano uguali; in questo modo gli influssi si annullano perché sono in effetti delle bilance a due piatti, in equilibrio, essendo i pesi uguali. Con i dispari invece sembra una cosa possibile, ma, *temporis exiguitatis causa* non riesco a fare i conti, almeno per oggi.

A qualcuno interessa proseguire il discorso?

4.2 [059]

4.2.1 Tre Dadi Duri

Ancora nessuno che abbia voluto provare con la seconda parte e la strategia del GC...

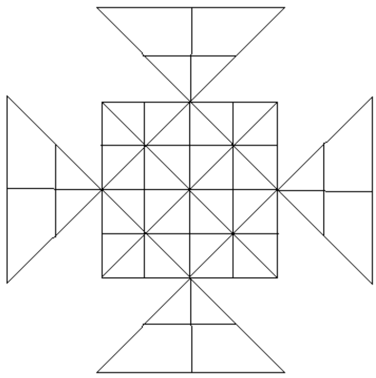
4.3 [060]

4.3.1 Zugzwang!

GaS ha indagato sul nostro ultimo Zugzwang e ci invia altre informazioni...

Anche se in ritardo vorrei fornirvi un minimo di notizie sul gioco presentato sullo Zugzwang del numero 60, dite di non saperne il nome e cosi ho dato un'occhiata al bellissimo libro "Board and tables games from many civilizations" di R.C.Bell ed ho trovato un gioco molto simile.

La scacchiera e quella che vedi in figura, il gioco si chiama Cows and Leopard e le istruzioni recitano:



"It is the best of a group of related games which are widely played through southern Asia and appear to be quite independent of Scandinavia. One player has two leopards, and the other has 24 cows, which try to imprison the leopards. The leopards can kill a cow by jumping over her on to a vacant point beyond. Cows and leopards move from one point to the next orthogonally or diagonally.

The leopard player begins the game by placing a leopard on any point, usually the centre one. A cow is next put down, and then the second leopard on any other chosen point. Another cow follows, and then a cow is added to the board after each move of a leopard, until they are all in play. Only then can the cows on the board be moved. While the cows are being introduced some will be killed and if the leopards can kill eight cows they should win, but with careful play the cows always succeed in trapping the leopards."[17]

Il gioco che avete proposto deve essere una variante di questo (o forse il contrario). Mi sembrava carino e cosi vi ho reso partecipi di questa "scoperta".

4.3.2 Alle cinque, finita la guerra

Tra le risposte arrivate fuori dal tempo utile per inserirle, c'è quella di Zar a "Alle cinque, finita la guerra": è interessante perché sembra partire con la quantizzazione (che porterebbe alle soluzioni sbagliate), ma poi arriva al risultato giusto, considerando l'integrale. Eccola:

Dati 2 punti presi a caso su un segmento unitario, qual è la probabilità che la loro distanza sia minore di 1/6? Risposta: il primo punto può essere scelto liberamente all'interno del segmento. Se si trova tra i punti 1/6 e 5/6, allora la probabilità che il secondo punto stia distante dal primo per meno di 1/6 è pari a 1/3 (1/6 per la sinistra e 1/6 per la destra). Se il punto si trova in una posizione x che sta tra il punto 0 e il punto 1/6, allora ho calcolato la probabilità con la seguente formula:

$$\frac{1}{1/6}\int_0^{1/6}\left(1/6 + x\right)dx$$

ovvero ho fatto una "media" facendo variare la posizione del punto x da 0 a 1/6: alla destra del punto c'è abbastanza spazio per farci cadere il secondo punto, alla sinistra no. L'integrale in questione risulta ¼.

Quindi, riassumendo: se x cade tra 0 e 1/6 (e, analogamente, tra 5/6 e 1) la probabilità è ¼, se x cade tra 1/6 e 5/6 la probabilità è 1/3. La probabilità totale si calcola con una media pesata:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$$

che coincide col risultato fornitomi dal programmino.

4.4 [061]

4.4.1 Vendesi magliette

Su questo problema abbiamo ricevuto una montagna di proteste per dirci che era troppo semplice, ma anche un sacco di soluzioni, da parte di ***PMP*** (criptico come sempre), ***Zar***, ***Mirtillo***, ***L.A.Bachevskij***, ***Mistral***, ***Frassa***, ***Filippo***, ***Stetson***, ***Andrea***, ***jvanbie***,

---

[17] *"È il migliore di una serie di giochi che sono molto giocati nel sud dell'Asia e sembrano essere indipendenti dalla Scandinavia. Un giocatore ha due leopardi e l'altro 24 mucche che cercano di imprigionare il leopardo. Il leopardo può eliminare una mucca saltandola per raggiungere uno spazio vuoto. Mucche e leopardi si muovono da un punto all'altro ortogonalmente o diagonalmente. Il giocatore del leopardo comincia il gioco piazzando un leopardo in un qualsiasi punto, normalmente quello centrale. Poi si mette una mucca ed un leopardo in una qualsiasi altra posizione. Segue un'altra mucca, e in seguito viene aggiunta una mucca sulla scacchiera dopo ogni mossa dei lepoardi, finché non sono tutte in gioco. Solo a quel punto le mucche sulla scacchiera possono essere spostate. Mentre le mucche sono messe in gioco, normalmente il leopardo riesce a mangiarne qualcuna, e se ne mangia otto vince, ma con un'attenta strategia le mucche riescono sempre ad intrappolare i leopardi." [libera traduzione (AR)]*

Desmatron, ***GaS***, ***Flo***, ***Pasquale jr***., ***Andrea l'ingegnere*** (New Entry! Benvenuto! Finché non si trova un allonimo lo chiamiamo così), ***kshawk***, ***Grifo*** (New Entry! Benvenuto!) e ***Guido.***

Va bene, lo ammettiamo, il problema era facile. Inseriamo qui la soluzione di ***Flo***, che, anche se ci arriva con qualche passaggio in più, ci pare comprenda tutte le considerazioni fatte e una certa dose di senso dell'umorismo:

> Ordunque:
>
> Spesa per una maglietta: S_1=5 €
>
> Spesa per n magliette: S_n=n(k)*S_1
>
> Numero di magliette vendute in funzione del parametro k: n(k)=n_0+Δn*k
>
> dove, ovviamente, n_0=500, Δn=20
>
> Ricavo per una maglietta in funzione di k: R_1(k)=R_0+Δr*k
>
> dove R_0=15 €, Δr= -15/100 € (sì, lo so che magari non è la notazione migliore, ma per convinzioni mie personali preferisco considerare un "delta" negativo che mettere il segno negativo nell'equazione… non prendetevela, sono fatta così)
>
> Ricavo per n magliette in funzione di k: R_n(k)=R_1(k)*n(k)
>
> Guadagno=Ricavo-Spesa (il tutto per n magliette)
>
> G_n(k)=R_n(k)-S_n(k)=[R_1(k)-S_1]*n(k)=(R_0+Δr*k-S_1)*(n_0+Δn*k)=
>
> =(ΔrΔn) k^2+((R_0-S_1)*Δn+n_0*Δr) k+(R_0-S_1)*n_0
>
> Per trovare il valore massimo possiamo trovare la derivata dG_n(k)/dk ed eguagliarla a 0, andando poi a controllare che si tratti effettivamte di un massimo e non di un minimo. In realtà possiamo evitare la fase del controllo, basta notare che questa è una parabola aperta verso il basso (si ricordi che Δr è negativo) e che quindi avrà sicuramente un massimo. Anzi, potremmo tranquillamente avanzarci la fase del calcolo della derivata e trovare il vertice della parabola[18], ma sinceramente non mi ricordo la formula e per ricavarmela dovrei comunque fare la derivata, quindi tanto vale tagliare la testa al mulo (lo so, era il toro, ma il mulo mi sta più antipatico e la testa preferisco tagliarla a lui) e fare direttamente la derivata.
>
> dG_n(k)/dk= (2 ΔrΔn) k+((R_0-S_1)*Δn+n_0*Δr)
>
> dG_n(k)/dk=0 se k= -[(R_0-S_1)*Δn+n_0*Δr]/ (2 ΔrΔn)
>
> Sostituendo troviamo che nel punto di max della curva guadagno il valore di k è:
>
> k=-[(15 -5)*20+500*(-15/100)]/ (-2*20*15/100)=125/6
>
> A questo punto notiamo che il valore di k non è un intero. Se non ho sbagliato i conti o interpretato male il testo, cosa che sospetto fortemente, ho due alternative per affrontare la questione:
>
> 1. E chi se ne frega? (ovvero: approccio matematico). Considerando questo valore di k=125/6 risulta che si venderebbero n(125/6)=916,(6) magliette

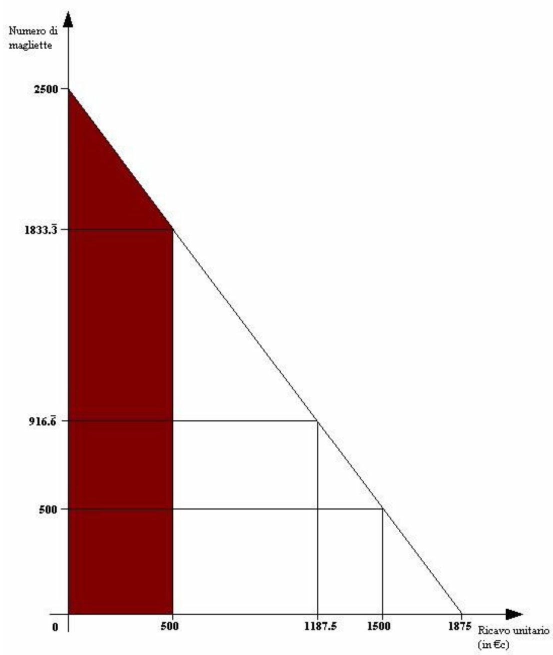
[18] Approfittiamone per citare ***GaS***, che invece la formula se la ricorda: *"Come si dovrebbe notare questa curva altro non è che una parabola con concavità verso il basso; per trovare il massimo basta trovare le coordinate del vertice. Detta x_V la soluzione ottima si ha x_V = -b/2a. (…) Aneddoto personale: corso di economia ad Ingegneria, faccio un esercizio con un amico e trovo il massimo con la formula del vertice. Al che il mio amico ribatte: ma non dobbiamo derivare e porre uguale a 0? Povera Italia, come stiamo messi…"*. Hai tutta la nostra comprensione, GaS. Mi aspetto che se invece di una parabola avesse avuto sotto mani una equazione di tipo y=5x avrebbe comunque derivato e annullato, magari stupendosi della nuova scoperta matematica 5=0 (PRS).

al prezzo di $R_1(125/6)=11{,}875$ € l'una, con un guadagno G_n di $G_n(125/6)=6302{,}08(3)$ €. Ok, non chiedetemi come si fa a vendere quei 2/3 di maglietta in più… diciamo che se siete fortunati ne venderete 916, se siete sfortunati 917. Anche sul prezzo c'è qualche problemino: purtroppo non sono ancora stati inventati i millesimi di Euro. Quindi potete fare così: vendete la metà delle magliette a 11.87 € e l'altra metà a 11.88 (se preferite fare i galanti e supponete una popolazione di acquirenti egualmente distribuita tra maschi e femmine potete far pagare 11.87 € le donne e 11.88 agli uomini… *[a questo poteva pensare solo una donna, veramente! (AR)]* in ogni caso sono problemi vostri, l'approccio matematico si ferma qui, almeno per quanto mi riguarda).

2. k è quantizzata, e quindi approssimiamo! (ovvero: approccio fisico). In questo modo, cioè, interpretiamo la frase "per ogni 15 Cent in meno di costo, riusciremmo a vendere 20 magliette in più" come un'impossibilità intrinseca di prevedere le reazioni del mercato con uno scarto di più di 0.15 € per il ricavo o di più di 20 persone per volta per il valore di n. Che dite, sono malata??? Devo farmi ricoverare? Comunque secondo questa impostazione (che ha comunque il netto vantaggio di non creare troppi problemi con gli spiccioli) Δn e Δr vengono interpretati come "errore" sulle previsioni, e non avrebbe senso quindi considerare un valore di k non intero. Poiché $125/6=20+5/6=21-1/6$ possiamo scegliere se attribuire a k il valore di 20 o 21, ma notiamo subito che 125/6 è molto più vicino a 21 che a 20, quindi io approssimerei con k=21. In questo modo si venderebbero n(21)=920 magliette al prezzo di $R_1(k)=11{,}85$ € l'una, con un guadagno netto di $G_n(21)=6302$ € (tasse escluse).

Morale della favola: a fare il matematico ci guadagni (anche se poco: appena poco più di 8 centesimi di Euro), ma hai molti più casini con gli spiccioli.

Siamo d'accordo. ***Stetson*** ci presenta un grafico alternativo, che vi riportiamo qui:



r = ricavo unitario.

p = profitto unitario = r – 500 €c.

n = numero di magliette.

R = $r \cdot n$.

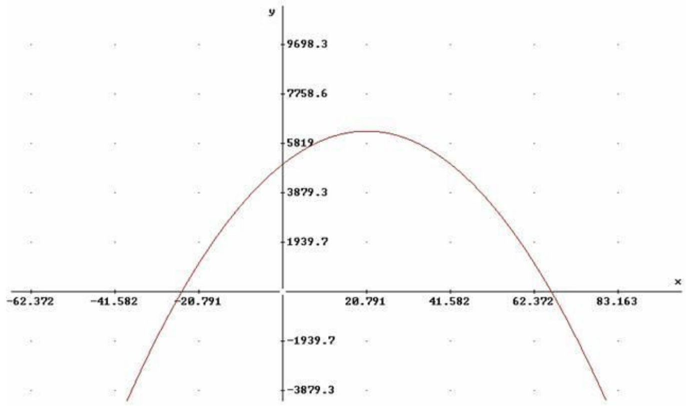
P $= p \cdot n$: è il profitto totale che vogliamo massimizzare.

L'andamento di *n(r)* è questo: $n = -\frac{4}{3} r + 2500$ (o anche $20r + 15n = 37500$). Dove $r < 500$€c, si va "in rosso"; dunque consideriamo solo i valori di r per cui $p>0$. L'altro valore in cui P si annulla è $p = 1375$ €c ($n = 0$).

Il massimo prodotto di due numeri vincolati alla somma [cioè in relazione lineare ($20p + 15n = 27500$)] si ha per il valore medio (è medio per entrambi, nei rispettivi intervalli). Allora p ottimale $= \dfrac{0+1375}{2} = 687.5$ €c; r ottimale = 1187.5 €c; n ottimale = $916.\overline{6}$ (e

$P_{\max} = 6302.08\overline{3}$ €). I valori vanno approssimati ai 20 (n) ed ai 15 (r) e si ha: 920 magliette ad € 11.85. P = 6302 €, che è il valore più prossimo a $P_{\max}$.

Oppure (con la parabola *P(p) [la parabola la prendiamo da* ***Frassa****, che ne ha fatta una bellissima (AR)]*, da cui segue la proprietà usata sopra) $P = p \cdot (ap + b)$, quindi *P(p)* ha per grafico una parabola. La concavità è verso il basso e P ha un massimo $y_V = -\Delta/4a = 6302.08\overline{3}$. Ma ancora prima: non ho voglia di disegnare né di calcolare?



r ottimale è x_V. P si annulla per r = 5 € e r = 18.75€ e x_V sta proprio lì in mezzo [ne seguono i valori trovati prima].

L.A.Bachevskij ci dice ancora che:

> Questa è la soluzione economica del problema, per una soluzione pratica consiglierei 900 magliette al prezzo di 12€ cadauna per un profitto di 6300€, perdereste solo 2€, risparmiando la fatica di dare il resto e ordinandone un numero bello tondo…

Se la fatica si potesse misurare (e compensare) in euro saremmo senz'altro tutti più ricchi... ma c'è anche chi prova a guadagnarci, con noi. ***GaS*** ci ricorda che:

> Naturalmente all'università mi hanno insegnato anche un'altra cosa: i consulenti finanziari guadagnano una marea di soldi; dal vostro profitto va quindi tolto il mio onorario di 1000€ e quindi vi ritrovate un bel guadagno di 5302 €, niente male!

Jvanbie, invece, ha fatto i conti con Excel, e ha concluso:

> Per il massimo profitto dovreste vendere la maglietta a 11.85€, ma sacrificando 4€ fareste 20 lettori più contenti, quindi consiglierei di venderle a 11.70€!!

Per non parlare di ***Grifo***:

> una variabile interessante del problema potrebbe anche essere quella di aggiungere uno sconto sulla merce acquistata all'ingrosso…

...a quanto pare questo mese volete proprio vederci in mutande... ma lo sapete, vero, che RM è un'attività no-profit? Un ottimo lavoro anche da ***Andrea l'ingegnere***, in Excel, che ci mostra come lo strumento può essere usato in modo efficiente *[anche se al Capo non piace...(AR)]*.

4.4.2 Quasi impossibile

Qui il titolo si è rivelato realistico. Quando Alice ha finito di leggere tutte le soluzioni, ha concluso che il calcolo delle probabilità è una disciplina fumosa e poco precisa, e ha speso un'oretta buona a ricavare tutte le frasi nelle risposte che la supportavano. Eccovi quella più rappresentativa al momento (e se non ci credete, fate un giro a p. 46; il Capo ha trovato ispirazione per un meraviglioso BJ):

> ...volevo manifestare a Alice tutta la mia solidarietà riguardo ai problemi di probabilità: sono un paio di giorni che cerco di risolvere il secondo, ho trovato già un paio di procedimenti che mi sembrano tutti egualmente validi; l'unico problema

è che i risultati vengono tutti diversi, il che mi fa (vagamente) sospettare che devo aver sbagliato qualcosa... (***Flo***)

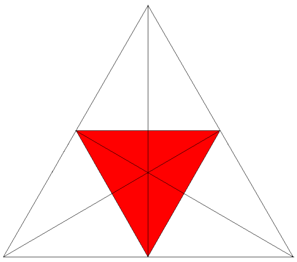
Non per niente ***Mistral*** ci ha fornito tre versioni, e tutte e tre con risultati diversi. Partendo da un buon 50% è arrivato ad un sesto; ***Mirtillo*** e ***jvanbie*** concordano sulla versione 50%, almeno per il momento...

Il più significativo di tutti è stato ***Filippo***, che, quando si è reso conto di quanto fumoso fosse il metodo risolutivo, ci ha fornito un meraviglioso *Corno da Nebbia*, che alleghiamo qui a lato.

Tornando seri, dobbiamo ammettere che sì, si trattava di un problema noto, ma in tutti i casi non esiste sempre un solo metodo di soluzione, e ci si può sbizzarrire con nuove impostazioni e nuovi metodi. Ed è proprio quello che è successo in questo caso.

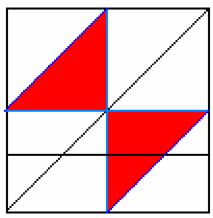
Ottimi risultati si sono visti dalle penne congiunte di ***L.A.Bachevskij*** e ***Stetson***, che riportiamo qui di seguito:

Nel primo caso, rottura in due punti casuali, ho probabilità di ottenere un triangolo pari a ¼. Infatti (la figura fa meno schifo del solito) le condizioni per ottenere un triangolo sono che (a, b, c essendo i tre frammenti):



$$\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

cioè a,b,c devono essere strettamente compresi tra 0 e ½. Nella figura le tre altezze rappresentano i tre segmenti e la parte evidenziata in rosso è quando sono comprese tra 0 e ½. Il triangolo vorrebbe essere equilatero con di conseguenza mediane e bisettrici coincidenti e proprietà varie annesse tra cui il fatto che il triangolo rosso sia uguale a quelli bianchi, per una probabilità dell'avvenimento di ¼. Bisogna notare che se una delle altezze è uguale a ½ diventa impossibile costruire un triangolo, però questo avviene solo in tre casi su infiniti, quindi possiamo ragionevolmente trascurarlo.



Ora invece prima rompo in due e poi uno dei due frammenti a caso ancora in due. Dopo il primo passo si possono presentare due casi: per x si intende un frammento

a) x=1-x cioè x=½ ovvero l'ho rotto esattamente a metà, non posso costruire triangoli non degeneri, ciò avviene in un caso su infiniti

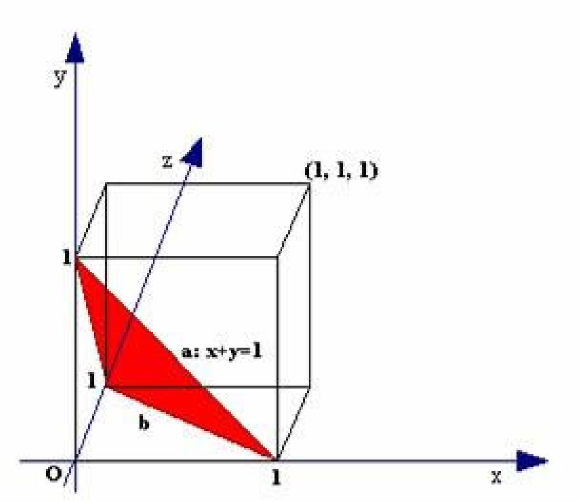
b) x<1-x in questa figura ogni retta parallela alle ascisse è secata in un punto variabile tra 0 e 1, ciò rappresenta il primo taglio. Considero la figura a lato, che rappresenta il bastone dopo il primo taglio, la parte verde è x. Affinchè si formi un triangolo bisogna dividere l'altro segmento x-1 in modo che nessuna delle due parti sia maggiore o uguale a ½, cioè in uno di quei punti la cui distanza dall'origine (sinistra) sia <½ e al contempo la distanza dal segmento x sia <½, cioè quei punti di coordinate interne all'intervallo [1-x-½ , ½] ovvero [½-x, ½], che è di ampiezza x.

Tornando all prima figura in essa sono evidenziati in rosso gli intervalli "favorevoli" a seconda del primo punto di rottura. Infatti essi sono delimitati dalla retta x=½ e dalle parallele alla retta dei primi tagli. Infatti esse distano x da una parallela all'asse y, così come la retta dei primi tagli dista x dall'asse y stesso. La probabilità di poter costruire un triangolo è dunque ancora di ¼, non cambia a seconda dei metodi di suddivisione.

Non sono sicuro che si capisca bene questa parte, provo a rispiegarla in altro modo: dopo la prima rottura ho due segmenti, uno lungo x e uno lungo 1-x; di cui x sia il segmento di sinistra affinchè possa formare un triangolo è necessario che non vi siano segmenti maggiori o uguali di ½, quindi devo pescare il secondo punto di rottura tra quelli del segmento più lungo che distino meno di ½ dai due estremi, 1-x, e 1 cioè i punti dell'intervallo [½ , ½+x], per x<½; l'ampiezza di questo intervallo cresce al crescere di x, fino a x=½, caso limite che escludo; per x>½ l'intervallo è [x-½ , ½] perché ora deve essere equidistante da 0 e da x ed essendo x il segmento più lungo ½+x uscirebbe dal segmento; questo intervallo decresce al crescere di x fino al limite x=1; ora posso tornare alla figura e vedere come gli intervalli rossi, quelli per cui posso costruire il triangolo, rappresentino ¼ dei casi possibili.

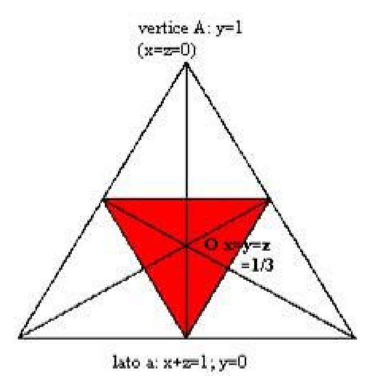
E la seconda parte, multidimensionale:

Avevo (in qualità di Stetson) progetti per un grandioso sistema che avrebbe contemplato una soluzione in tre dimensioni, una in due, la terza nella sola dimensione della lunghezza. Beh, diciamo che per poco pensarci o senso pratico avevo all'inizio trascinato in gioco un **cubo**.



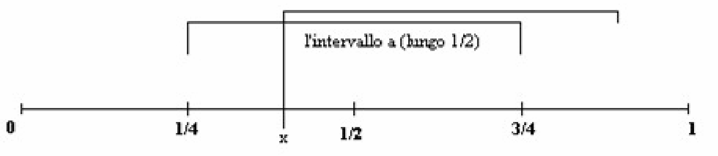
3) Rappresentando nello spazio cartesiano le lunghezze delle tre parti del bastone di un metro ($x+y+z=1$) col vincolo che ciascuna sia positiva e minore di 1, si ottiene un piano dall'equazione di prima, ristretto dal cubo di lato unitario descritto dal vincolo. Insomma, l'intersezione è un triangolo equilatero (quel triangolo non era un'immacolata concezione della fantasia perversa) di lato $\sqrt{2}$; esso ha le altezze che, per qualche oscuro carosello di proiezioni dagli assi cartesiani, riproducono i valori delle tre variabili, tra 0 e 1, e grazie alla proprietà (mi sono innamorato di questa proprietà *[tra un po' ne parleremo, di questa proprietà (RdA)]*! Non sarà la Megan Gale euleriana, ma mi piace) per cui ogni punto interno ad un triangolo equilatero dista in tutto dai lati quanto è lunga l'altezza, ecco soddisfatte tutte le richieste. (Così si ha, per esempio, che nel centro del triangolo le distanze *x*, *y*, *z* dai lati sono uguali tra loro ed a $1/3$: è il caso in cui risulta l'unico triangolo equilatero).

Qui intervenne L.A.B. ed il risultato è come lo vedete.



2) Basandosi sul punto B della richiesta, rappresentare la variabile indipendente x (posizione del primo taglio) e la dipendente y (posizione del secondo) studiandone i valori validi in funzione del primo. In qualche arcano avvilupparsi di neuroni avevo inserito una parabola, pure qui. Intanto L.A.B. elaborava la sua diversa soluzione, giusta e sensata, quindi quest'altra la butto ai pesci.

Infine (beh, per una volta ha il vantaggio della quasi brevità!)



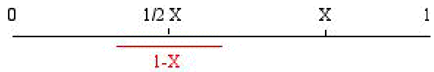
1) Sul bastone di un metro ha un ruolo rilevante il punto di mezzo. Infatti non posso tagliare lì, pena ottenere uno dei tre pezzi uguale (non minore, come è richiesto) ad ½. E per non avere nemmeno una parte più lunga di ½, quel punto deve essere interno alla parte centrale. Allora le posizioni di taglio (gli estremi di questo pezzo) devono trovarsi da bande opposte rispetto a M; non possono distare entrambi più di ¼ dal centro (sarebbe $|x-y| > \frac{1}{2}$), quindi almeno x deve stare nell'intervallo a. Questo riduce a ½ i casi favorevoli; l'altra limitazione è ora alla posizione di *y*, che dev'essere nell'altra metà del bastone, ed a non più di ½ di distanza. Il prodotto di questi due eventi dà 1 caso favorevole ogni 4 totali.

0) Per giustificare l'identità di risultato tra il punto A (spezzare in due punti a caso) ed il B (spezzare in un punto a caso, poi in un altro a caso), si può confrontare le due probabilità ottenute; oppure affermare, per logica, che se nel primo caso i due eventi sono indipendenti, lo sono anche nel secondo, perché preso a caso il primo punto non posso scegliere il secondo se non ancora casualmente. I due problemi allora sono lo stesso.

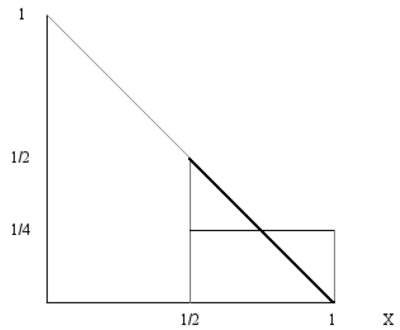
$0-\varepsilon$) Ma come si esprime una probabilità di $(1-\varepsilon)/4$? Beh, la dimensione di un punto e lo spessore di una retta sono abbastanza zero da poter scrivere un quarto senza troppi scrupoli, sì?

Su questo ci sentiamo di concordare. Viene ¼ anche a ***Pasquale jr.*** e a ***Guido***, come pure a ***Filippo***, di cui riportiamo il ragionamento:

Per comodità indico con X il segmento più lungo dopo la prima rottura (½<=X<=1). Ho quindi due segmenti, lunghi X e 1-X.



Affinché sia possibile costruire un triangolo con la seconda rottura, occorre che il segmento più lungo non superi la somma degli altri due. Questo può avvenire solo se la seconda sezione cade in un punto dell'intervallo lungo 1-X, il cui punto medio coincide col punto medio di X (figura 1, sopra).



La probabilità che la seconda sezione cada in quell'intervallo è appunto 1-X; tenderà a zero quando X tende a 1, tenderà ad ½ quando X tende a ½ (figura 2 qui a destra). *[Secondo lui le figure dovrebbero rendere meno fumoso il procedimento. No comment. (AR)]*

> Seconda parte: vale il ragionamento precedente, solo che quando scelgo di tagliare il pezzo più lungo (la scelta col più corto è al 50%), devo calcolare su un segmento lungo X, per cui la funzione che mi darà l'andamento della probabilità è (1-X)/X. "Mediamente" la probabilità sarà ¼.
>
> Qui devo usare il calcolo con integrali (lo faccio fare al computer), integrando tra ½ e 1. Ottengo ½(2log2-1) che vale 0,193147. La probabilità di tagliare in modo adeguato il segmento più lungo è circa 38,63% (giustamente più alta del 25% sull'intero segmento), ma nella metà dei casi ho scelto il segmento corto, per cui la probabilità di poter costruire un triangolo col secondo sistema si dimezza ed è circa 19,31%, più bassa del 25% (come intuitivamente mi aspettavo).
>
> Aspetto lo schianto contro il molo!

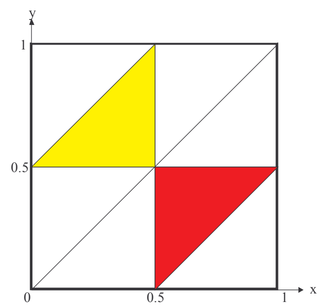
Anche noi, malgrado il corno. Più o meno allo stesso risultato è pervenuta anche ***Flo***, che si è poi lasciata prendere da considerazioni filosofiche:

> Dialogo quasi zen tra una sfortunata RMer in cerca di una soluzione (A) e il sommo maesto Inconcludoshi del Monastero di Probabilitaki (B)
>
> A: Tu sei un maestro nella probabilità. Ebbene: qual è la probabilità dell'evento "formazione di un triangolo", scelti a caso due punti in cui spezzare un bastoncino?
>
> B: Dipende dal significato di "a caso". Che procedura vuoi seguire per scegliere a caso i due punti?
>
> A: Ok, diciamo che (ad esempio) scegliamo a caso un primo punto, spezziamo lì, e poi prendiamo uno dei due pezzi così formati e, nuovamente a caso, spezziamo di nuovo. Ebbene, qual è la probabilità?
>
> B: Non ci crederai, ma dipende nuovamente dal significato di "a caso": come intendi scegliere il primo punto? Scruterai forse con i tuoi occhi gli infiniti numeri reali, e ne sceglierai uno? Oppure prenderai per i due estremi il bastoncino, e lo curverai fino a quando un punto qualunque di esso non cederà? O in quale altro modo? È tutta una questione di metodo... Quale sarà il tuo?
>
> A: ....(nessuna risposta. Nella migliore tradizione delle storie zen si dovrebbe dire "in quel momento A si illuminò", ma non in questo caso; anzi, il soggetto è stato preso da crisi isterica, e se ne è andato per non dare sfogo al raptus di follia omicida che lo ha colto all'inconcludente risposta di B)
>
> Ovvero: a conti fatti, quanto è casuale il caso???

A noi è piaciuta l'idea di scrutare gli infiniti numeri reali, ma Alice è ancora immersa nella nebbia. Giusto per completezza, vi alleghiamo ancora la soluzione del Capo:

Parte 1

Siano ***X*** e ***Y*** le ascisse del primo e secondo punto scelti a caso sul bastoncino. ***X*** e ***Y*** sono allora due variabili indipendenti distribuite uniformemente nel quadrato cartesiano ***[0,1]***.



Se ***X>Y***, allora le dimensioni dei tre pezzi sono $Y, X-Y, 1-X$ e questi pezzi possono formare un triangolo se appartengono all'area ***gialla*** del diagramma.

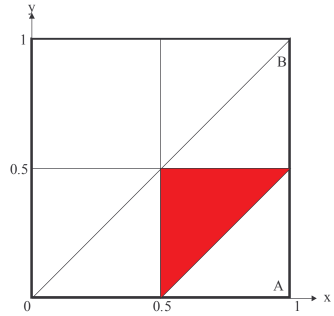
Se invece ***X<Y***, allora le dimensioni dei tre pezzi sono $X, Y-X, 1-Y$ e questi pezzi possono formare un triangolo se appartengono all'area ***rossa*** del diagramma.

Quindi, la probabilità di ottenere un triangolo è pari al rapporto tra le aree colorate e tutto il quadrato; da cui, il risultato è ¼.

Vorremmo attrarre la vostra attenzione sul fatto che ascisse e ordinate ***non*** sono la lunghezza dei pezzi, ma le coordinate in cui decidete di rompere; in caso contrario, si sarebbe dovuto lavorare su un ***triangolo*** avente vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$, essendo il terzo pezzo determinato per differenza. In questo modo si sarebbe dimezzata l'area del quadrato ma si sarebbero dimezzate anche le aree dei due triangoli, mantenendo il risultato invariato.

Parte 2

In questo caso, il secondo punto è scelto a caso sul pezzo X o sul pezzo $1-X$; Siccome il pezzo da spezzare la seconda volta è scelto a caso (con probabilità ½ per ciascuno di loro) ed essendo le distribuzioni di probabilità le stesse per i due pezzi, possiamo limitare l'analisi al pezzo ***X***.



Y è uniformemente distribuita su $[0,x]$, e quindi la probabilità di un punto (X,Y) è definita da $f(x,y)=\frac{1}{x}$ all'interno del triangolo isoscele ***0AB***.

Come nel caso precedente, i tre pezzi formano un triangolo se ***X*** e ***Y*** appartengono al triangolo ***rosso***; quindi, le probabilità che i tre pezzi formino un triangolo sono:

$$\iint_{triangolo\,0AB} \frac{dxdy}{x} = \ln 2 - 0.5 \approx 0.193147\ldots \qquad \texttt{[004.001]}$$

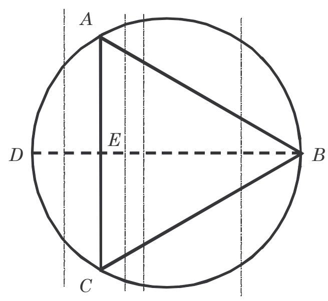
5. Quick & Dirty

Considerate le seguenti affermazioni:

1. Esattamente 1 di queste affermazioni è falsa.
2. Esattamente 2 di queste affermazioni sono false
3. Esattamente 3 di queste affermazioni sono false
4. Esattamente 4 di queste affermazioni sono false
5. Esattamente 5 di queste affermazioni sono false
6. Esattamente 6 di queste affermazioni sono false
7. Esattamente 7 di queste affermazioni sono false
8. Esattamente 8 di queste affermazioni sono false
9. Esattamente 9 di queste affermazioni sono false
10. Esattamente 10 di queste affermazioni sono false

Quali sono vere?

6. Pagina 46



Per simmetria, come da disegno qui a fianco, possiamo considerare unicamente le corde perpendicolari al diametro ***DB***.

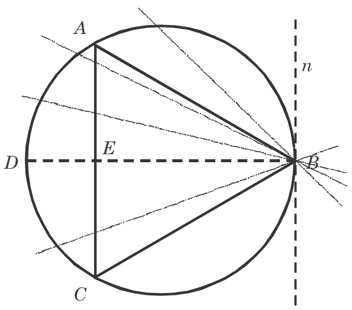
Quindi, solo le corde che non intersecano il diametro nel tratto ***DE*** soddisfano le richieste del problema.

Identica costruzione è possibile invertendo specularmente il triangolo, definendo quindi il punto simmetrico ***E'*** di ***E*** rispetto al centro dalla parte di ***B***. Il punto ***E*** dista da ***D*** $\frac{1}{2}r$, come il punto ***E'*** da ***B***; quindi, il numero delle corde soddisfacenti la richiesta sarà pari al rapporto tra la distanza ***EE'*** e la lunghezza del diametro ***BD***; quindi, si ha che è:

$$P = \frac{2r - 2 * \left(\frac{r}{2}\right)}{2r} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \qquad \texttt{[006.001]}$$

Da cui, $P = \frac{1}{2}$.

7. Pagina 46



Per simmetria, come da disegno qui a fianco, possiamo considerare unicamente le corde passanti per ***B***.

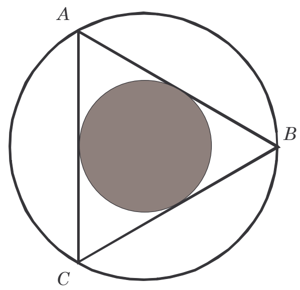
Considerando la normale ***N*** al diametro passante per ***B***, si ha che il vertice ***B*** del triangolo divide l'angolo piatto su ***n*** in tre parti uguali.

Solo le corde passanti per il settore ***ABC*** dell'angolo piatto soddisfano le condizioni del problema; essendo però gli angoli ***nBA***, ***ABC***, ***CBn*** uguali tra di loro, si ha che un terzo delle corde per ***B*** soddisfa le condizioni date.

Quindi, $P = \frac{1}{3}$.

8. Pagina 46

Come si evince dalla figura qui a fianco, solo le corde il cui centro è all'interno del cerchio grigio soddisfano le condizioni del problema.



Per simmetria il cerchio grigio ha centro coincidente con il cerchio dato e, essendo inscritto nel triangolo equilatero dato, ha raggio pari alla metà del cerchio dato.

Possiamo quindi considerare la probabilità che una corda soddisfi le condizioni date come pari al rapporto tra l'area del cerchio grigio e l'area del cerchio dato; da cui si ha che è:

$$P = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$$

Da cui, $P = \frac{1}{4}$.

Insomma, come diceva Groucho Marx: "Questi sono i miei principi; se non vi piacciono, ne ho degli altri".

9. Paraphernalia Mathematica

9.1 Hensel & Gretel

No, non è un typo. Scopo del gioco è perdersi in una foresta.

Non arrivo a chiamarla *suspence*, ma molti di voi probabilmente si sono chiesti cosa se ne faccia, una persona normale, delle algebre p-adiche viste nella puntata precedente; una persona normale non lo so, ma ad alcune persone risulta decisamente utile. Prima, però, qualche definizione.

> Il ***Codice di Hensel*** $H(p,r,\alpha)$ è la rappresentazione in algebra ***p***-adica limitata alle prime ***r*** cifre del numero $\boldsymbol{\alpha}$.

Quindi, sempre restando negli esempi che ormai dovrebbero esserci familiari,

$$H\left(5,4,\frac{2}{3}\right) = .4131 \qquad \text{[009.001]}$$

e si ferma lì.

Utilità? Beh, dipende dai conti che dovete fare. Non so voi, ma quando io e altri scrittori su questa rivista eravamo giovani, uno dei giochini preferiti era scoprire se le calcolatrici lavoravano con cifre nascoste o no:

1. Scrivete ***10*** sulla vostra calcolatrice
2. Dividete per ***3*** e guardate il risultato
3. Moltiplicate per ***3***.

Se la caffettiera da conto che state utilizzando vi visualizza una sfilza di nove, allora la sua precisione è pari al numero di cifre visualizzate; in caso contrario, vuol dire che si tiene qualche cifra nascosta per effettuare le opportune approssimazioni. E, in questo caso, vi è andata bene.

Capite però che (ad esempio nel caso di calcoli iterativi) farebbe comodo portarsi dietro la precisione infinita, anche perché queste “cifre nascoste” possono, anche loro, introdurre degli errori esattamente come quelle visibili.

Se usiamo i codici di Hensel, il nostro calcolo diventa:

$$\begin{aligned}
\frac{10}{3} * 3 &= \frac{H(5,4,10)}{H(5,4,3)} * H(5,4,3) \\
&= \frac{.0200}{.3000} * .3000 \\
&= .0413 * .3000 \\
&= .0200 \\
&= H(5,4,10)
\end{aligned}$$

Che è il risultato esatto, senza approssimazioni.

Siccome però viviamo in una valle di lacrime, questa "precisione" che ci danno i Codici di Hensel è limitata ad ambiti piuttosto ristretti: infatti, il teorema fondamentale in questo campo recita:

> *Siano* **p** *un numero primo e* **r** *un intero positivo. Se* **N** *è il più grande intero positivo che soddisfa la disuguaglianza*

$$N \leq \sqrt{\frac{p^r - 1}{2}}$$ **[009.002]**

allora qualsiasi **Frazione di Farey α** *può essere rappresentata in modo univoco dal proprio codice di Hensel* $H(p,r,\alpha)$.

Adesso che l'abbiamo enunciato, cerchiamo di capirlo.

Tanto per cominciare, le Frazioni di Farey; si definisce ***Sequenza*** (delle Frazioni) ***di Farey*** di ordine ***N*** la sequenza (crescente) di tutte le frazioni ridotte in $[0,1]$ il cui denominatore è minore o uguale a ***N***. Ad esempio, per quanto riguarda l'ordine ***5***, si ha:

$$F_5 = \frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}$$ **[009.003]**

E il modo più semplice per ottenerla è quello indicato nella tabella qui da qualche parte.

F_1	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{1}$
F_2	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{1}$
F_3	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$
F_4	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
F_5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

Se a qualcuno di voi questa struttura "ricorda qualcosa", complimenti; è stato uno degli argomenti più noiosi mai trattati in questa rivista (presenti esclusi, naturalmente); infatti, la costruzione avviene prendendo il ***mediante*** delle due frazioni al piano di sopra, esattamente come negli ***Alberi di Stern-Brocot*** (e qui dovrebbe esservi ormai completamente chiaro il pietoso gioco di parole del titolo), con la sola regola aggiuntiva che *vengono ignorate le frazioni per cui il denominatore è maggiore dell'ordine della sequenza*; se fate il confronto con quanto pubblicato su RM049, vedete che ne manca qualcuna, ad esempio quella responsabile della spiacevole asimmetria costruttiva tra $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$ (in quanto $4+3=7>5$ e quindi va escluso).

Insomma, il nostro teorema sostiene che, se usate i codici di Hensel, avete delle rappresentazioni *univoche e* ***finite*** di qualsiasi frazione in una opportuna sequenza di Farey; quindi se vi aspettate che tutti i calcoli diano dei risultati in questo insieme, potete effettuare operazioni lunghe e noiose senza inserire errori e trattando sempre con numeri ragionevolmente piccoli.

Nel nostro esempio, essendo ***p=5*** e ***r=4***, ci aspettiamo di ottenere risultati precisi per gli elementi della sequenza di Farey F_{17}, come verificabile dalla **[002]**; siccome so che voi non la calcolereste mai, vi passo la tabellina per il calcolo. La trovate, in un formato un po' balordo, da qualche parte; spiacenti, ma è una tabellazza che non finisce più e non ci piace costringervi ad inclinare il monitor per vederla per dritto.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
1	.10 00	.32 22	.23 13	.43 33	1.0 00	.14 04	.33 02	.24 14	.42 01	3.2 22	.13 32	.34 24	.20 34	.41 01	2.3 13	.12 34	.30 43
2	.20 00	.10 00	.41 31	.32 22	2.0 00	.23 13	.12 14	.43 33	.30 12	1.0 00	.21 20	.14 04	.40 14	.33 02	4.1 31	.24 14	.11 32
3	.30 00	.42 22	.10 00	.21 11	3.0 00	.32 22	.40 21	.13 03	.23 13	4.2 22	.34 03	.43 33	.11 43	.20 13	1.0 00	.31 04	.41 21
4	.40 00	.20 00	.33 13	.10 00	4.0 00	.41 31	.24 23	.32 22	.11 24	2.0 00	.42 40	.23 13	.31 23	.12 14	3.3 13	.43 33	.22 10
5	.01 00	.03 22	.02 31	.04 33	.10 00	.01 40	.03 30	.02 41	.04 20	.32 22	.01 33	.03 42	.02 03	.04 10	.23 13	.01 23	.03 04
6	.11 00	.30 00	.20 00	.42 22	1.1 00	.10 00	.31 42	.21 11	.41 31	3.0 00	.14 11	.32 22	.22 32	.40 21	2.0 00	.13 03	.33 42
7	.21 00	.13 22	.43 13	.31 11	2.1 00	.24 04	.10 00	.40 30	.34 32	1.3 22	.22 04	.12 02	.42 12	.32 22	4.3 13	.20 42	.14 31
8	.31 00	.40 00	.12 31	.20 00	3.1 00	.33 13	.43 02	.10 00	.22 43	4.0 00	.30 41	.41 31	.13 41	.24 23	1.2 31	.32 22	.44 20
9	.41 00	.23 22	.30 00	.14 33	4.1 00	.42 22	.22 14	.34 14	.10 00	2.3 22	.43 24	.21 11	.33 21	.11 34	3.0 00	.44 02	.20 24
10	.02 00	.01 00	.04 13	.03 22	.20 00	.02 31	.01 21	.04 33	.03 01	.10 00	.02 12	.01 40	.04 01	.03 30	.41 31	.02 41	.01 13
11	.12 00	.33 22	.22 31	.41 11	1.2 00	.11 40	.34 23	.23 03	.40 12	3.3 22	.10 00	.30 20	.24 30	.44 31	2.2 31	.14 21	.31 02
12	.22 00	.11 00	.40 00	.30 00	2.2 00	.20 00	.13 30	.42 22	.33 13	1.1 00	.23 32	.10 00	.44 10	.31 42	4.0 00	.21 11	.12 40
13	.32 00	.43 22	.14 13	.24 33	3.2 00	.34 04	.41 42	.12 41	.21 24	4.3 22	.31 20	.44 24	.10 00	.23 43	1.4 13	.33 40	.42 34
14	.42 00	.21 00	.32 31	.13 22	4.2 00	.43 13	.20 00	.31 11	.14 20	2.1 00	.44 03	.24 04	.30 34	.10 00	3.2 31	.40 30	.23 23
15	.03 00	.04 22	.01 00	.02 11	.30 00	.03 22	.04 02	.01 30	.02 31	.42 22	.03 40	.04 33	.01 14	.02 01	.10 00	.03 10	.04 12
16	.13 00	.31 00	.24 13	.40 00	1.3 00	.12 31	.32 14	.20 00	.44 32	3.1 00	.11 33	.33 13	.21 43	.43 02	2.4 13	.10 00	.34 01
17	.23 00	.14 22	.42 31	.34 33	2.3 00	.21 40	.11 21	.44 14	.32 43	1.4 22	.24 11	.13 42	.41 23	.30 13	4.2 31	.22 34	.10 00

Il funzionamento è piuttosto semplice; nella prima riga avete il *denominatore* della frazione di Farey, mentre nella prima colonna trovate il *numeratore*; all'incrocio, la rappresentazione in Codice di Hensel della frazione data, con il punto (p-adico!) evidenziato.

Adesso possiamo cominciare a giocarci; ad esempio, si vede che è (*da **sinistra** verso **destra!*** Quante volte devo dirvelo?):

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= .4131 \\ \frac{3}{4} &= .2111 \\ &= .1342 \end{aligned} \qquad \text{[009.004]}$$

che trovate nella tavola e scoprite essere pari a $\frac{17}{12}$ che è il risultato esatto.

Probabimente state pensando che io sia completamente rimbecillito; può anche darsi abbiate ragione, ma non in questo campo; lo so anch'io che sapete fare le operazioni con le frazioni, ma qui stiamo parlando di usare i *valori effettivi;* se cacciate in Excel la divisione di cui sopra, il risultato è $0,\overline{7058823529411764}$, ossia vi serve una macchina in grado di lavorare con una precisione di ***16*** cifre dopo la virgola (anzi, di più, per accorgervi della periodicità); qui sopra, una semplice macchinetta in grado di trattare in un modo un po' "creativo" quattro cifre vi ha fatto ottenere il risultato esatto. Se volete un'altra interessante ragione, con ***p=11*** e ***r=8*** (posto che esista ancora una macchina a otto bit...), potete rappresentare ***10352*** valori, anzichè i soliti 256 interi. E la matematica è semplicissima

Ora, prima di lanciarvi nella costruzione di un Cray IV basato sui codici di Hensel, calmate un attimo i bollenti spiriti. Che c'è un guaio. O meglio, due.

Se ad esempio il risultato è compreso tra due valori della serie ma non compare nella serie, ottenete un risultato che non trovate in tabella; ad esempio,

$$\begin{aligned} \frac{3}{13} &= .1143 \\ \frac{1}{12} &= .3434 \\ &= .4023 \end{aligned} \qquad [009.005]$$

trovate un valore che non è nella tavola, semplicemente perché $\frac{49}{156}$ (che sarebbe il risultato corretto) non appartiene alla sequenza di Farey F_{17}, anche se minore di uno.

Attenzione, che può succedere di peggio; se il vostro risultato "sfora" (ossia se il numeratore o il denominatore sono maggiori dell'ordine della sequenza di Farey), possono succedere dei guai notevoli; ad esempio, se sommate:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} &= .0322 \\ \frac{5}{7} &= .0330 \\ &= .0113 \end{aligned} \qquad [009.006]$$

che *trovate in tabella*, ma ***è sbagliato***; infatti, corrisponde a $\frac{10}{17}$, mentre ci aspettiamo il valore $\frac{45}{14}$. Tutto perché abbiamo sforato sul numeratore[19].

Esiste, per fortuna, una "specie" di soluzione a questo modo di sbagliare i conti; consiste (esattamente come si fa per i calcolatori) nell'introdurre i ***Codici di Hensel in Virgola Mobile***; forse è meglio se partiamo dalla definizione, sì?

> *Sia* $\alpha = \frac{a}{b} = p^n * \frac{c}{d}$*; allora il* **Codice di Hensel Normalizzato a Virgola Mobile** *è definito come:* $\hat{H}\left(p, r, \frac{a}{b}\right) = (m, e)$*, dove* $m = H\left(p, r, \frac{c}{d}\right)$ *e* $e = n$.

[19] "Sbagliato", in certi casi, è una parola grossa; infatti, la differenza tra i due valori $\frac{10}{17} - \frac{45}{14} = -\frac{625}{238}$ è (in senso 5-adico) divisibile per 5^4; insomma, è corretta in norma, secondo la definizione di norma che abbiamo dato l'altra volta.

C'è in realtà una condizione aggiuntiva, abbastanza logica: si richiede che ***MCD(c,d)=MCD(c,p)=MCD(d,p)=1***, ossia che siano tutti primi tra loro; quello che serve a noi però è che ***non*** è richiesto che $\frac{c}{d}$ sia una frazione di Farey.

Il metodo non è propriamente una meraviglia, perché comunque richiede di "allineare" il punto p-adico; ad esempio,

$$\hat{H}\left(5,4,\frac{2}{3}\right) = (.4131,0)$$
$$\hat{H}\left(5,4,\frac{1}{5}\right) = (.1000,-1) \qquad [009.007]$$

La somma si trasforma in un qualcosa simile a quanto indicato qui a fianco: si noti che abbiamo spostato a sinistra l'uno (per avere ugual esponente ***e***); quando poi otteniamo il risultato, siccome in ogni caso siamo interessati a solo quattro cifre del numero, terremo solo ***tre*** cifre dopo la virgola; trovate il valore del risultato nella tavola, e si ha il valore cercato $(1.413,0) = (.1413,-1) = \frac{13}{15}$.

$$\begin{array}{cccccc} & . & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & . & 0 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & . & 4 & 1 & 3 & \end{array}$$

È comunque interessante notare che, anche con questi spostamenti in qua e in là (che ricordano sostanzialmente la notazione in virgola mobile utilizzata su qualsiasi calcolatore), *tenete sempre quattro cifre*; se qualcosa "sfora", semplicemente lo buttate via, perché non vi serve, grazie al fatto che in pratica state lavorando in modulo. Come dice Schroeder, è incredibile che proprio il buttare via delle cifre rappresenti la base del calcolo esatto.

Va detto che proprio da questo nasce il fatto che gli errori in modulo si sprecano; ad esempio, anche se sembra una regola piuttosto balorda, bisogna essere molto attenti se la prima cifra dopo il punto è uno zero; in questo caso, è necessaria una "normalizzazione" del numero che, logicamente, è abbastanza complessa; comunque, con due come ***Gregory*** e ***Khrishnamurty*** che si danno da fare in merito, qualche speranza c'è.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms