Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 060 - Gennaio- Anno Quinto

1. "*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*"

Alto, Bottegaio, Fabbro, Frattaglie, Legno, Miele, Verde.

Non è arduo porre delle domande molto difficili. Anche se in molte persone esiste un lodevole miscuglio di curiosità e di senso della sfida che le portano a voler subito risolvere un problema (e proprio per questo sono tanto più motivate quanto più il problema è complesso), la mera costruzione di un indovinello di difficile soluzione è quasi sempre realizzabile cercando un dettaglio molto specifico di una situazione, e poi nascondendone il contesto. Prendete ad esempio le sette parole che aprono quest'articolo: per quanto sembrino slegate, esse possono comunque essere chiamate a costituire un indovinello di ambito storico matematico; sono infatti in qualche modo associate ad un matematico famoso. Due mestieri (bottegaio e fabbro), due aggettivi (alto e verde), due oggetti naturali (legno e miele) circondano le misteriose "frattaglie", e tutte e sette insieme danno un pallido indizio su quale sia il protagonista del compleanno di questo mese. Come sempre, la soluzione al piccolo mistero arriverà quasi subito, nelle pagine immediatamente seguenti, e se volete cimentarvi con l'arzigogolo, sarebbe opportuno interrompere la lettura: anche se, per correttezza professionale, siamo tenuti a dirvi che, qualora foste così bravi da trovare il sottilissimo filo logico che unisce le sette parole misteriose, il primo nome famoso che dovrebbe venirvi in mente non dovrebbe essere quello di un matematico, bensì quello di un famosissimo filosofo. Dopo di che, certo il luminosissimo nome di un matematico verrebbe giustamente identificato, ma non sarebbe ancora il nome del matematico a cui ci riferiamo[1]: solo dopo un ultimo piccolo passaggio si potrebbe forse arrivare al nostro eroe.

Se vi sentite attratti dalla sfida impossibile, interrompete adesso la lettura, perché cominceremo a spiegare l'arcano: come al solito lo faremo molto lentamente.

Se i misteri intrigano la curiosità della gente, alcuni sembrano intrigarla più di altri: particolari momenti della storia sembrano densi di magiche attrattive, e difficilmente si può considerare casuale che quasi sempre siano i periodi meno luminosi dal punto di vista della razionalità quelli più affascinanti dal punto di vista dei segreti esoterici. Dell'età dell'oro dell'Atene di Pericle parlano quasi soltanto gli storici professionisti: dei Templari, invece, parlano tutti. È palese che la fantasia sembra essere maggiormente stimolata dall'ignoto e dal possibile, piuttosto che dal certo e dal conosciuto: e l'Ordine dei Poveri Cavalieri di Cristo e del Tempio di Salomone ha una quantità di spunti, sia storici sia leggendari, che possono costituire la chiave di volta di almeno una trentina di filoni narrativi. Dal fascino dell'ordine monastico all'ambiente delle Crociate; dal compito divino della custodia del Graal all'eresia più abietta; dalla forza militare allo strapotere economico; dalla cancellazione dalla storia sui roghi voluti dal re di Francia e dal Papa, alla rinascita sotto cento forme diverse in mille società segrete.

Non è davvero possibile neanche solo enumerare gli argomenti e le ipotesi correlati ai Cavalieri del Tempio: sono talmente onnipresenti che hanno anche fagocitato alcune caratteristiche che appartenevano non solo a loro, ma a tutti gli ordini monastico-militari dell'epoca. La prima crociata, l'unica che arrivò alla conquista di Gerusalemme, rivelò un comportamento decisamente poco "cristiano" dei vincitori europei, che si macchiarono di comportamenti barbarici[2] sino al punto di rendere necessaria l'istituzione di strutture nobili che impedissero il ripetersi di tali scempi. Probabilmente fu Bernardo di Chiaravalle il primo a sollecitare la creazione di istituti che coniugassero la forza militare e la pietà cristiana, dando origine al concetto di "cavalleria" così come oggi e inteso.

E di questi ordini cavallereschi se ne crearono diversi: se i famosissimi Templari erano legati alla regola dei cistercensi dello stesso San Bernardo, v'erano anche però anche i Cavalieri del Santo Sepolcro, organizzati dal liberatore della Terrasanta, Goffredo di Buglione, che seguivano la regola di sant'Agostino; e v'erano pure, sempre tra i primissimi ordini fondati a Gerusalemme[3], i Cavalieri Ospitalieri, di stampo benedettino, che, come dice il nome, si preoccupavano soprattutto di fornire rifugio e cure ai bisognosi, quali fossero una sorta di Croce Rossa o di Emergency ante litteram. E ogni ordine ha una storia affascinante, e spesso non ancora conclusa: dall'ordine di San Lazzaro, dedicato alla cura dei lebbrosi, discendono sia la parola "lazzaretto" sia, attraverso alcuni passaggi, la massima onorificenza di casa Savoia. I citati Ospitalieri sono ancora rappresentati dai Cavalieri di Malta, e le vestigia, vere o presunte, di quasi tutti gli ordini cavallereschi dell'epoca rimangono in molte associazioni e onorificenze di molti stati.

---

[1] Anche per l'ottima ragione che di questo primo e famosissimo matematico abbiamo già parlato in uno dei precedenti compleanni di RM.

[2] Oltre ai soliti stupri, scannamenti di bambini e violenze gratuite che andavano di moda in qualsiasi fatto d'arme dell'epoca, la carenza di cibo e di rifornimenti introdusse ai margini degli accampamenti cristiani anche la originale pratica del cannibalismo.

[3] Che per questo sono anche detti collettivamente "gerosolimitani".

Gli entusiasti dei Templari non accettano però facilmente paralleli con gli altri meno celebri ordini: ripetono che, anche senza entrare nell'opinabile campo della leggenda, i Templari diventarono così ricchi e potenti da minare la sicurezza dei maggiori stati europei dell'epoca, e proprio questa fu la causa della loro rovina. Ed è un argomento di sicuro effetto anche nei confronti degli scettici: una potenza economica dello stesso ordine di grandezza degli stati nazionali[4] è indubbiamente impressionante, anche per quello strano periodo che va dall'undicesimo al quattordicesimo secolo. A quel punto, se si vuol continuare la schermaglia dialettica, non resta che rifugiarsi nella constatazione che, seppure i Templari giunsero al punto di far tremare una potenza nazionale, ci fu pur sempre un altro ordine cavalleresco che una nazione, invece, fondò.

Attorno al 1190 venne fondato l' "Ordo Fratrum Domus Hospitalis Sanctae Mariae Teutonicorum in Jerusalem", più semplicemente detto Ordine Teutonico. Aveva molti punti in comune con gli altri ordini gerosolimitani, e specialmente proprio con quello dei Templari: pur avendo tra i canoni di ispirazione l'opera ospedaliera, lo spirito e l'organizzazione militare si rifacevano esplicitamente a quella templare: persino l'uniforme non era troppo diversa. I templari erano caratterizzati da un mantello bianco con una grande croce rossa portata all'altezza del cuore, e i teutonici si limitarono a rimpiazzare il colore rosso della croce con il nero; con il passare del tempo la croce "patente" nera si arricchì di un campo argento, che poi si ridusse fino a diventare solo un bordo sottile. La somiglianza con il celebre simbolo della Wermacht non è casuale: proprio dalla croce teutonica discende la croce dell'esercito tedesco. E come i Templari, furono combattenti estremamente abili e decisi; forse anche più dei famosi colleghi, visto che le cronache raccontano di un loro ossessivo coraggio in combattimento e del palese desiderio di trovare la morte in battaglia[5]. Una abnegazione ossessiva e totale, che ricorda in maniera imbarazzante gli atteggiamenti di altri combattenti di altre religioni che, in tempi a noi decisamente più vicini, sembrano cercare la felicità ultraterrena sacrificando le proprie e altrui vite.

Pur seguendo l'organizzazione militare, la carità ospedaliera e le regole monastiche[6], avevano però già all'epoca della loro fondazione una marcata differenza con gli altri ordini cavallereschi: erano infatti gli unici ad essere legati ad una sola madrepatria: gli altri ordini erano, quantomeno in ambito europeo, assolutamente "multinazionali", ma l'Ordine Teutonico era riservato esclusivamente a cavalieri tedeschi. Fu Federico II di Svevia a volere che l'ordine fosse fortemente caratterizzato dall'appartenenza alla nazione tedesca e orientato prevalentemente ad imprese militari: e infatti già all'inizio del Duecento i Teutonici cominciano ad abbandonare la Terrasanta (e l'Italia meridionale, dove erano ben presenti) per spostarsi all'estremo nordest dell'impero germanico, sulle rive del Baltico, per conquistare alla cristianità e all'impero le tribù pagane che risiedevano oltre i confini nordorientali. Se "teutonico" e "prussiano" sembrano ai giorni nostri sinonimi, era ben diversa la situazione all'inizio del XIII secolo. La Prussia era pagana, e i Teutonici avevano carta bianca nel procedere alla conversione da attuare a fil di spada. Erano delle vere e proprie macchine da guerra, e conquistarono una estesissima quantità di terre: quello che venne a lungo chiamato "Stato dell'Ordine

[4] Anche se il termine "stato nazionale" è di per sé un po' prematuro, parlando del 1100-1300.

[5] Sembra ci fosse ancora una strana commistione tra la vocazione cristiana e i miti del Walhalla, nel cuore dei Teutonici: e nel paradiso di Odino si entrava solo se si moriva in battaglia.

[6] Anche i Teutonici ricevettero la regola di Sant'Agostino, direttamente da Celestino III.

Teutonico" arrivò a comprendere, alla fine del XIV secolo, la Pomerania, Danzica, l'Estonia, la Lituania, l'isola di Gotland e molte altre contrade. Subirono anche sconfitte, nella loro marcia di conquista: l'epica russa ricorda orgogliosamente la vittoria di Aleksander Nevskij, che usò contro di loro una tattica spesso ripetuta dai comandanti russi, anche in tempi diversi della storia. Si narra che i Teutonici, giganteschi e appesantiti dalle armature di uomini e cavalli, vennero attratti sui ghiacci in grado di sostenere le leggere milizie russe, ma non abbastanza solidi per i cavalieri della croce nera; come accadde ai tank di Hitler cinque secoli dopo, anche i Teutonici sprofondarono nei gelidi laghi di Russia. Ma, dal punto di vista militare, il declino vero e proprio cominciò con la sconfitta che subirono da parte di Ladislao II di Polonia, nel 1410, sul campo di battaglia di Tannenberg.

Al declino militare e politico seguì quello ideologico, perché, da cristiani tedeschi, vissero una cruciale tensione esistenziale durante la riforma luterana; se all'inizio della loro storia si erano fusi con l'ordine dei Portaspada di Livonia[7], la rivoluzione di Martin Lutero li divise tra Protestanti e Papisti, e il loro furore guerriero li portò ad una guerra fratricida. Lo stato teutonico da loro fondato terminò formalmente nel 1525, quando il Gran Maestro dell'Ordine di allora, Alberto di Brandeburgo, si legò alla causa protestante trasformando la Prussia nel Ducato ereditario di Brandeburgo. I Teutonici cattolici si rifugiarono sotto la protezione degli Asburgo d'Austria, e, a differenza dei confratelli Templari, rimangono tutt'ora un ordine riconosciuto, pur attraverso varie riforme e modifiche, dalla Santa Sede[8].

Per tre secoli, i Cavalieri Neri percorsero le coste del Baltico da Danzica a San Pietroburgo, combattendo contro i popoli che ritenevano barbari e miscredenti, e portandovi la loro cultura germanica; nel percorso di conquista fondarono castelli e fortezze, e attorno a questi castelli si svilupparono città. L'attuale capitale dell'Estonia, Riga, fu fondata dai Teutonici: ma la più famosa delle città fondate dall'Ordine fu senza dubbio Königsberg.

Königsberg, la "montagna del re", è probabilmente la città più curiosa dal punto di vista geografico e topologico: lo dimostra il fatto che ai giorni nostri non è immediato trovarla su un atlante geografico. La sua storia la qualifica come città visceralmente tedesca: la sua posizione è sulla costa del Baltico, ma è più orientale di Danzica. Questo potrebbe sembrare un fatto di poco conto, se non fosse che Danzica è storicamente una città polacca; anzi, per molto tempo è stata l'unico porto della Polonia. Senza entrare troppo in dettaglio sugli eventi del "corridoio di Danzica", basti ricordare che Königsberg e tutta la sua regione (la Prussia Orientale) si è trovata per gran tempo a far parte del territorio tedesco pur essendo fisicamente isolata dal resto della madrepatria: la Prussia prima e la Germania poi non erano pertanto uno stato "semplicemente connesso" dal punto di vista geometrico, proprio a causa di Königsberg e del suo entroterra, che erano separati dal resto della Germania dal corridoio di Danzica. Questa situazione non è poi così insolita: i confini geografici delle nazioni sono stabiliti dagli umori politici dei popoli e degli uomini, e non è difficile trovare situazioni analoghe: la nostra stessa Italia[9] è topologicamente bizzarra, con i due buchi della Repubblica di San Marino e della Città del Vaticano e con l'enclave italiana in territorio svizzero di Campione d'Italia. Altre nazioni dai confini naturali meno definiti della nostra, subiscono sconvolgimenti anche maggiori: la Polonia, ad esempio, è di fatto "traslata" di metà della sua larghezza verso

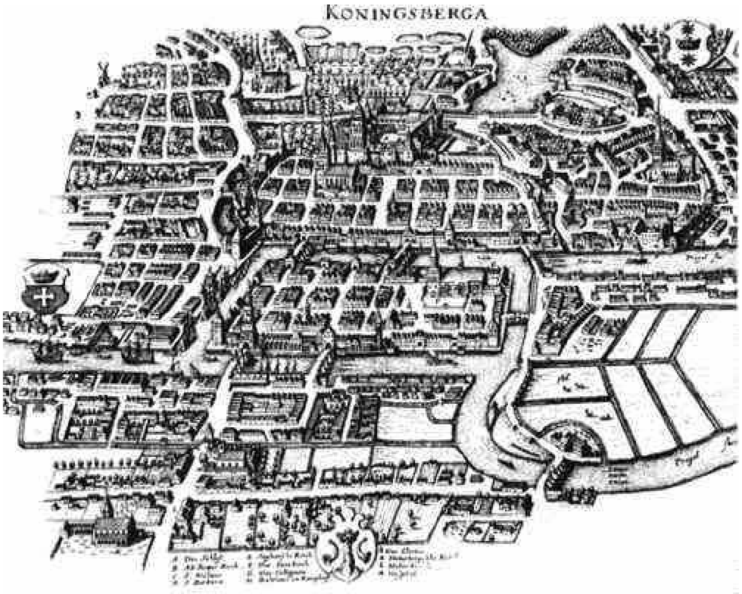
[7] E per questo sono talvolta citati anche come Ordine Livonico.

[8] Lo Statuto d'onore dei Cavalieri dell'Ordine Teutonico è stato riapprovato dal Vaticano il 22 settembre 1965.

[9] Ci limitiamo a considerare quella "continentale", visto che le isole, per definizione, non sono connesse alla madrepatria.

occidente, nel 1945. Anche tenendo conto della precarietà degli umani confini, però, Königsberg sembra avere una vocazione speciale alla separazione dalla madrepatria: quando il secondo conflitto mondiale ridisegnò l'Europa politica, Königsberg fu strappata alla Germania e divenne parte dell'Unione Sovietica; questa aveva già inglobato nel 1940 le repubbliche baltiche, e la città fondata dai Teutonici perse pertanto la sua singolarità topologica: era ormai parte "connessa" del territorio dell'URSS, solo che anziché essere l'estremo lembo orientale della Germania era passata ad essere l'estremo lembo occidentale[10] del gigante sovietico. A ribadire la perduta identità tedesca, la città venne anche ribattezzata con il nome di un eroe della rivoluzione russa, Mikhail Ivanovich Kalinin; ed è per questa ragione che non è immediato trovare Königsberg negli atlanti moderni: perché bisogna cercarla con il nuovo nome di Kaliningrad. I passi successivi sono storia recente: l'URSS si sgretola alla fine degli anni Ottanta, le repubbliche baltiche riprendono la loro autonomia, ma Kaliningrad resta territorio russo, e territorio di rilevante importanza strategica[11]. Di nuovo separata dalla madrepatria, di nuovo "non connessa", Königsberg/Kaliningrad compirà l'ultimo passo della sua singolarità geografica nel Maggio 2004, quando Polonia e Lituania entreranno a far parte dell'Unione Europea: a quel punto non sarà soltanto separata dalla Russia, ma sarà anche un'enclave totalmente racchiusa in territorio europeo.

Ma le singolarità topologiche di Königsberg non si limitano alle disavventure dei confini della Prussia orientale: la città stessa è il "tòpos" per eccellenza di uno dei più famosi problemi di matematica. Anzi, di topologia.



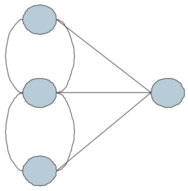
Il più illustre figlio di Königsberg è il maggiore dei filosofi tedeschi: Immanuel Kant, e il problema connesso a Königsberg viene talvolta raccontato come "la passeggiata di Kant". Il fiume Pregel disegna, all'interno della città, due isole, la più piccola delle quali (Kniephof) corrisponde al centro storico metropolitano. Sei ponti uniscono le isole alla terraferma, e uno unisce le due isole fra loro: il problema di Kant consisteva nel trovare un percorso che gli consentisse una passeggiata comprendente tutti i sette ponti e di poter tornare al punto di partenza, ma attraversando ogni ponte una sola volta.

È il famosissimo problema dei "sette ponti di Königsberg", che dovette attendere la mente di Euler per essere risolto: anzi, per essere dimostrato come irresolubile: nell'affrontarlo, il matematico svizzero affrontò per la prima volta la teoria dei grafi,

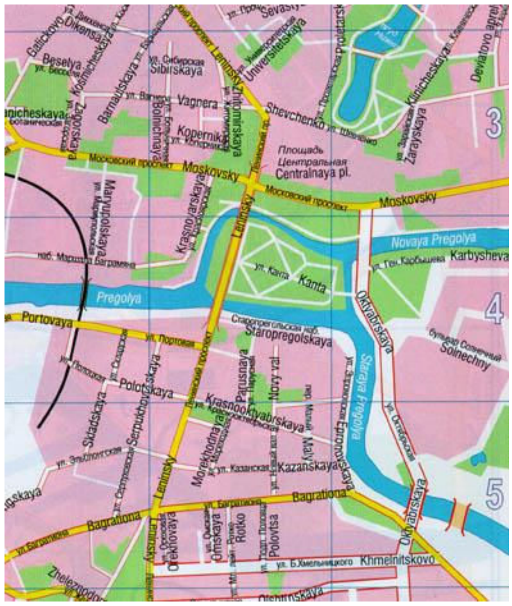
[10] Ed è più occidentale di quanto potrebbe sembrare a prima vista: complice il fatto, spesso dimenticato, che l'Italia continentale si estende più nella direzione Est-Ovest che in quella Nord-Sud, risulta stupefacente che la regione di Königsberg raggiunga quasi la stessa longitudine di Otranto. Le separa poco più di un misero grado di longitudine.

[11] E' l'unico porto russo sul Baltico libero dai ghiacci nel periodo invernale, con le conseguenze commerciali e militari che si possono facilmente immaginare.

gettandone le fondamenta, e mostrando una volta di più che i problemi senza soluzione sono spesso territorio fertile per nuove scoperte.



La schematizzazione "grafica" del problema dei sette ponti venne riassunta da Eulero con il disegno a fianco, ed è famosa quasi quanto il problema stesso. La celebrità del problema, del resto, ha raggiunto perfino il livello del "turismo matematico", visto che appassionati continuano a tentare una sorta di pellegrinaggio a Kaliningrad per passeggiare sui sette luoghi del delitto, magari indossando le t-shirt con il disegno dei ponti o del grafo di Eulero, che sono diffusamente vendute in quei paraggi. Purtroppo, il pellegrinaggio è mutilato dal fatto che, dei ponti originali, ne sopravvivono soltanto due, e anche se ne sono stati costruiti altri su altre posizioni della città, la topologia originale del problema è ormai perduta. Se l'attraversamento dei ponti e la teoria dei grafi vi affascinano, potete sempre verificare se i ponti moderni di Kaliningrad sono meno ostici dei ponti originali di Königsberg: vi forniamo all'uopo una cartina moderna del centro della città.



Oltre ai pellegrinaggi, si sono sviluppate altre perversioni intellettuali: secondo autorevoli critici, il più idiota di tutti gli indovinelli "matematici" è proprio quello che recita: "Quali sono i nomi dei sette ponti di Königsberg?". Se incontrate qualche folle che osa farvi una domanda del genere, il nostro consiglio è quello di far finta di non aver sentito e girare al largo da una persona ormai perduta per l'umana razionalità; ma se siete fanatici del Trivial Pursuit, vi offriamo su un piatto d'argento la risposta: i sette ponti si chiamavano Grün, Höhe, Holz, Honig, Köttel, Krämer e Schmied.

È probabilmente superfluo, ormai, aggiungere quali siano le traduzioni in italiano dei sette nomi dei ponti: le abbiamo già scritte nella prima riga di quest'articolo. Per mostrare a chiunque che in matematica non può esistere "l'indovinello più idiota" così come non può esistere "il primo numero privo di interesse"[12], ci siamo dilungati per sei pagine nella costruzione di un indovinello ancora più idiota del precedente campione mondiale di idiozia. Le sette parole di apertura sono pertanto i nomi tradotti in italiano dei sette ponti di Königsberg; il famoso filosofo ad essi correlato è Kant; il celeberrimo matematico (ma non protagonista del compleanno) è Eulero. Il passo finale dovrebbe a questo punto essere ovvio: in questo mese di Gennaio stiamo celebrando un matematico nato in quel di Königsberg: basta allora cercare nell'anagrafe della città per scoprire che...

… che a Königsberg di matematici ne sono nati a frotte. Goldbach, Neumann, Clebsch, Hensel, Hesse, Kirchhoff, Lipschitz, Rosenhain, Schroeter, Sommerfeld... C'era forse da aspettarselo, da una città a così alta vocazione matematica. Ma non è il caso di continuare troppo con i misteri: pur con tutto il rispetto per i nomi altisonanti appena elencati, non c'è dubbio alcuno che sopra di loro si erga un personaggio di levatura maggiore e assoluta: David Hilbert.

[12] Per la buona ragione che "il più piccolo numero privo di interesse", qualora esistesse, diventerebbe proprio per questo interessante; occorrerebbe allora cercare un nuovo "numero privo di interesse", che però, una volta individuato, diventerebbe proprio per questo… dobbiamo continuare?

Hilbert nacque il 23 Gennaio 1862 in qualche punto non troppo distante dai sette ponti sul Pregel, crebbe, studiò, si laureò e insegnò nell'università della sua città natale, e la abbandonò infine solo per trasferirsi nella più rinomata città di Göttingen, il non plus ultra del mondo accademico tedesco. A Göttingen passò il resto della sua vita e lì morì, il giorno di san Valentino del 1943; e gli ottantuno anni che separano la data della sua nascita da quella della sua morte furono totalmente dedicati alla matematica. Per quanto il nome di David Hilbert sia riconosciuto come uno dei maggiori nell'insieme dei matematici moderni, permane comunque la sensazione che non sia ancora stato celebrato a sufficienza: Hilbert ha rifondato la geometria, e facendolo ha sostanzialmente ridefinito il ruolo e l'essenza della matematica stessa; ha ricondotto alla matematica le maggiori teorie fisiche della sua epoca, che sono anche le teorie fisiche più rivoluzionarie da Newton ai giorni nostri; ha introdotto il concetto di metamatematica e, nel frattempo, ha marcato indelebilmente ogni progresso matematico del Novecento grazie ad un singolo discorso pubblico.

Il miglior amico di Hilbert, quando era studente a Königsberg, fu Minkowski, e i due si influenzarono vicendevolmente; uno superando i vincoli di Euclide, l'altro formalizzandoli ex novo. Il primo lavoro di Hilbert riguardava la Teoria delle Invarianti, e nel 1888, a ventisei anni, dimostrò il Teorema delle Basi: era un teorema che, limitato a due sole variabili, era già stato dimostrato da Gordan nel 1868, ma che sfuggiva a successive generalizzazioni. Quel che è maggiormante significativo, già in questo primo lavoro, è che Hilbert giunse alla generalizzazione del problema utilizzando un approccio assai poco canonico: anziché costruire una base finita generalizzata, come il teorema sembrava richiedere, dimostrò sì che una base finita esisteva per qualsiasi numero di variabili, ma lo fece in via del tutto astratta. Era il suo primo fondamentale approccio alla "metamatematica": il primo tentativo di trattare matematicamente non solo quelli che allora erano considerati i normali "oggetti matematici", ma anche le regole e gli operatori stessi della matematica.

Un passo decisamente più ardito nella stessa direzione (ma stavolta direttamente nella geometria, e non nell'algebra) lo realizzò nel 1899 con la pubblicazione dei "Fondamenti della Geometria", in cui tutta la geometria euclidea veniva sistemata in un corpus totalmente assiomatico. I 21 assiomi di Hilbert costituiscono il maggior progresso nella geometria dai tempi di Euclide, ma la loro importanza trascende il mero ambito geometrico: il metodo assiomatico ha caratterizzato virtualmente ogni successivo sviluppo nella matematica. Oltre a ciò, il risultato più evidente e immediato fu la totale riconduzione della geometria alla teoria dei numeri reali: in genere, le grandi riconduzioni da una teoria matematica all'altra vengono ricordate soprattutto quando falliscono (e i paradossi di Russell e il Teorema d'Incompletezza di Gödel sono proprio per questo celeberrimi), ma l'immane lavoro e l'assoluta importanza dei risultati che si ottengono quando riescono dovrebbero essere davvero guardati con suprema ammirazione.

E il desiderio fortissimo di conoscere e generalizzare guidò tutta la vita di Hilbert: è forse il caso di rammentare che tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento non esisteva, in realtà, il concetto di "fisica teorica". La fisica era (e continua certo ad essere) una scienza basata sull'osservazione e la sperimentazione, ma era altrettanto indubbio che le sue complicazioni matematiche cominciavano a richiedere un salto qualitativo negli strumenti matematici fino ad allora usati. La figura del "fisico teorico" prende quindi una definita identità solo durante i primi decenni del Novecento, ma Hilbert sembra rendersi conto della necessità di una accurata formalizzazione delle teorie fisiche ben prima. "La fisica sta diventando troppo difficile per i fisici" è una delle sue frasi più celebri, e la sua non era solamente un'osservazione divertita. Lavorò alla formalizzazione di diversi aspetti della teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell, e del suo fondamentale contributo alla stesura definitiva delle equazioni della Relatività Generale parlammo già nella celebrazione di Emmy Noether[13]. Il suo contributo maggiore alla fisica arrivò comunque a beneficiare la Meccanica Quantistica, che fa uso ampio e diffuso della sua teoria degli spazi L^2 e degli isomorfi "Spazi di Hilbert". La Meccanica Quantistica venne indipendentemente formalizzata da Schrödinger usando il formalismo della meccanica ondulatoria e da Heisenberg usando quello delle matrici: l'isomorfismo delle due trattazioni venne chiarito facendo largo uso degli spazi di Hilbert e della sua "matematica degli operatori"[14].

Nonostante questi maiuscoli contributi, non è solo a causa di essi che la voce "Hilbert, David" è quasi sempre la più ricca di riferimenti negli indici analitici dei testi di storia della matematica moderna; anzi, forse è proprio per aver evitato di parlare della sua passione per la matematizzazione della fisica, che questo accade. Nel 1897 si tenne a Zurigo il Primo Congresso Internazionale di Matematica, e il discorso di apertura fu pronunciato da Henri Poincaré: questi aveva idee abbastanza distanti da quelle di Hilbert sulle relazioni tra Matematica e Fisica, e dedicò proprio a questo argomento il discorso inaugurale del Congresso. Quando, tre anni dopo, a Parigi, il discorso inaugurale del Secondo Congresso fu riservato ad Hilbert, la platea si attendeva certo una "risposta" da parte di questi alla precedente prolusione. Ma tre anni dopo il 1897 significa che si era già nel 1900, e il ventesimo secolo che si affacciava aveva un fascino del tutto particolare. Stregato dal calendario, Hilbert aveva preparato un discorso che era affatto diverso dalla risposta a Poincaré: quando cominciò a parlare dal palco d'onore, le sue parole erano tutt'altro che risposte ad un celebre matematico: erano ventitré domande per tutti i matematici del pianeta, anche per quelli non ancora nati.

"Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo oltre il quale giace nascosto il futuro? Di gettare uno sguardo ai prossimi progressi della nostra scienza, e ai suoi

---

13 RM050, marzo 2003; "Questione di Attributi".

14 I due terzi più vecchi della Redazioni di RM hanno scoperto l'arduo concetto di "operatore" con somma fatica nelle aule della Facoltà di Fisica di Torino, dove il terribilissimo professor Cesare Rossetti teorizzava terrorizzando (o terrorizzava teorizzando) generazioni di studenti dall'alto della cattedra di Istituzioni di Fisica Teorica (indirizzo generale). Stressati dalla fatica, in una scura sera invernale i due si giocarono a pari o dispari chi doveva varcare la soglia dell'ufficio del fisico teorico per porgli la cruciale domanda: a perdere fu il vostro cronista (non a caso il vincitore ancora oggi fa il Gran Capo e il perdente solo il Postino) che, tremando di paura, entrò nella tana del lupo: "Professore, potrebbe per favore definire esattamente il concetto di operatore?", mormorò tremante. Il vecchio lupo grigio quasi sorrise (miracolo!), non sbranò il sottoscritto per la ridicolezza della domanda, e con pazienza, dopo una ventina di secondi di meditazione, sancì che "l'operatore è un martello". Il solo fatto di essere entrato (e uscito vivo) da quell'ufficio valse al vostro eroe una settimana di gloria tra la popolazione studentesca, e la metafora del martello strappò persino qualche generoso sorriso alle studentesse più algide. Ma la risposta del vecchio saggio era tutt'altro che una mera battuta di spirito: adesso che le studentesse algide sono meno centrali nell'economia dei valori, l'ex-studente riesce a capire che il buon Rossetti stava suggerendo di pensare ai numeri, alle variabili, alle funzioni come ai chiodi e alle viti della matematica, e agli operatori come martelli e cacciaviti. Stava poi lasciando ai discenti, certo volontariamente, il passo stupefacente finale, e cioè che anche per i martelli e cacciaviti si potevano applicare regole di calcolo e matematiche proprio come agli oggetti elementari. Con quel "martello" voleva conficcarci in testa il salto di livello, il prefisso "meta" da applicare agli oggetti della matematica come agli operatori, e perfino alla matematica stessa. Russell, Hilbert e Gödel stavano tutti brandendo quel martello insieme a Rossetti, ma il sottoscritto se ne è reso conto (e neanche troppo bene) in colpevole ritardo.

ancora segreti sviluppi dei secoli futuri? Quali saranno gli obiettivi verso i quali si dirigeranno i più grandi spiriti matematici delle generazioni a venire? Quali i nuovi metodi, quali i nuovi fatti nel vasto e ricco campo del pensiero matematico che saranno dischiusi nei nuovi secoli?"

Sono le parole con le quali Hilbert inizia il più celebre discorso della storia della matematica: discorso che prosegue con l'esposizione di quelli che a suo parere sono i problemi irrisolti più importanti della sua scienza. Ne elencherà ed esporrà ventitré, che spaziano in tutte le discipline matematiche immaginabili, e che si estendono per tutta la durata della storia umana: alcuni sono discesi da teorie appena formulate e definite, altri risalgono alla Grecia antica. E per quanto siano tanto variegati da apparire anche molto diversi e distanti fra loro, da quel 8 Agosto 1900 verranno quasi sempre unificati da un comune denominatore: sono diventati i "Ventitré Problemi di Hilbert".

Eccone i titoli:

1. L'ipotesi del continuo, o problema di Cantor sul Numero Cardinale del Continuum (se vi piacciono i titoli ad effetto, potrebbe andar bene per questo "Quanti sono i numeri? ")[15]
2. La compatibilità degli Assiomi Aritmetici (ovvero, la consistenza dell'Analisi)
3. La scomposizione del tetraedro, ovvero l'uguaglianza dei volumi tra due tetraedri di uguale base e uguale altezza.
4. Problema della linea retta come distanza minima tra due punti[16].
5. Concetto di Lie di un gruppo di trasformazioni continue senza l'assunzione della differenziabilità della funzione che definisce il gruppo.
6. Assiomatizzazione della Fisica (in un certo senso, l'attesa risposta al discorso di Poincarè: Hilbert la credeva possibile).
7. Definire l'irrazionalità e la trascendenza di alcuni numeri, quali e^{π} e $2^{\sqrt{2}}$
8. Il problema dei numeri primi (detto così sembra niente… dentro, solo in questo problema, ci sono nascoste l'ipotesi di Riemann e la Congettura di Goldbach. E non solo loro).
9. Legge generale di reciprocità in qualsiasi campo numerico
10. Determinazione della risolvibilità delle equazioni diofantee
11. Forme Quadratiche con qualsiasi coefficiente numerico algebrico
12. Generalizzazione del Teorema di Kronecker sui campi abeliani
13. Impossibilità della soluzione generale di settimo grado tramite medie di funzioni di due soli argomenti
14. Dimostrazione della finitezza di alcuni sistemi completi di funzioni
15. Fondazione rigorosa del Calcolo Enumerativo di Schubert
16. Topologia di Curve e Superfici Algebriche
17. Rappresentazioni di forme definite tramite quadrati

---

[15] E se vi viene voglia di rispondere semplicemente "Infiniti!", andatevi a ripassare gli aleph di Cantor.

[16] Anche qui, non siate frettolosi nel rispondere: se avessimo scritto "Le Geodetiche nelle diverse Geometrie" avremmo detto la stessa cosa, che non è cosa semplice.

18. Tassellatura dello spazio tramite poliedri congruenti (problema di Keplero, gruppi cristallografici)
19. Analiticità delle soluzioni dei problemi del Calcolo Variazionale.
20. Esistenza delle soluzioni del Calcolo Variazionale.
21. Esistenza di equazioni differenziali lineari con gruppo monodromico predefinito
22. Uniformità delle relazioni analitiche tramite medie di funzioni automorfe
23. Ulteriori sviluppi del Calcolo Variazionale.

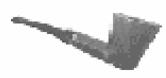
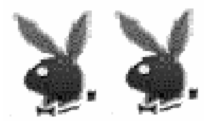
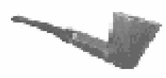
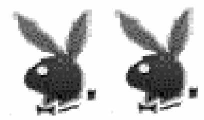
I Ventitré Problemi marchiarono così a fondo la matematica del secolo scorso che possono essere usati come "fil rouge" per seguirne quasi completamente le evoluzioni[17]. E sono problemi davvero vari, anche negli sviluppi successivi: alcuni sono stati risolti rapidamente, altri ancora resistono ad ogni attacco: di alcuni si è dimostrata l'impossibilità di soluzione, altri sono addirittura considerati risolti o meno a seconda dell'interpretazione. Alcuni matematici sono diventati famosi legando il loro nome ad uno dei problemi di Hilbert; e tutti quelli viventi, probabilmente, sentono la mancanza di un Hilbert del 2000 che abbia la lungimiranza e la visione generale della matematica tali da poter stilare una analoga lista di problemi per il ventunesimo secolo.

Per chi, come noi, resta invece a contemplare i problemi dalla incommensurabile distanza dell'inarrivabile, David Hilbert resta simpatico soprattutto per la totale dedizione alla sua scienza. Dai mille aneddoti su di lui sembra trasparire una generosità d'animo e una simpatia davvero insolita, determinata soprattutto dal fatto che il mondo esterno alla matematica sembrava da lui frequentato solo per sbaglio. Citazioni divertenti sulla sua distrazione se ne trovano a bizzeffe, da quelle di vita quotidiana, come "Ho scoperto che mia moglie mi prepara ben due uova a colazione! Dio solo sa da quanto va avanti questa storia…", fino a insospettate rivelazioni di modestia: durante una conferenza sugli spazi di Hilbert sembra abbia sussurrato a Courant, che gli sedeva vicino: "Ma insomma, Richard, potresti spiegarmi cosa esattamente sia uno spazio di Hilbert?". E altre ancora, che hanno trovato spesso spazio anche nelle nostre celebrazioni dedicate ad altri matematici. La sua frase più celebre è comunque quella che è incisa sulla sua tomba a Göttingen: più celebre ancora dei ventitré problemi, esprime la sconfinata e ottimistica certezza che non esista alcun problema non penetrabile dall'uomo: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen*[18].

[17] Ed è esattamente quello che fa Odifreddi nel suo "La Matematica del Novecento", PBE Einaudi.

[18] E qualora l'hilbertiano "Dobbiamo sapere. Sapremo" fosse davvero arcinoto anche nell'originale tedesco, è del tutto palese che il fantomatico mistero iniziale su quale fosse il matematico celebrato in questo "compleanno di RM" era poi misterioso quanto il fatto che dopo il 2003 viene il 2004. A proposito, Buon Anno da tutta la redazione di RM!

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Alieni Alienati			
Alle cinque, finita la guerra			

2.1 Alieni Alienati

> *Di solito nella criptaritmetica si chiede di indovinare i numeri. Qui, vi chiediamo di indovinare le* **operazioni**...

Vi ricordate gli alieni cui abbiamo spedito il messaggio, qualche anno fa, sì? Bene, come ricorderete, i primi due erano sbagliati. E quindi i nostri saccenti vicini di Universo hanno deciso di darci qualche lezione di matematica.

Ci sono arrivate un paio di tabelle delle moltiplicazioni con, a fianco, il "metodo" che loro usano (e l'implicito consiglio "Visto i guai che combinate col vostro, provate questo").

Allora, dal pianeta ***X*** è arrivata questa tabellina:

Calcolo	Spiegazione
6*3=18	4 ciuff - 1 ciuff
5*0=0	2 ciuff - 2 ciuff
6*4=24	5 pluff - 1 pluff
5*4=20	4 ciuff - 0 ciuff
5*3=15	4 pluff - 1 pluff
6*6=36	6 pluff - 0 pluff
13*12=156	12 ciuff - 0 ciuff
8*2=16	5 pluff - 3 pluff
0*0=0	0 pluff - 0 pluff
4*4=16	4 pluff - 0 pluff
4*3=12	3 ciuff - 0 ciuff
4*1=4	2 ciuff - 1 ciuff
4*2=8	3 pluff - 1 pluff

Nota importante: Nelle moltiplicazioni del pianeta ***X*** si scrive sempre prima il numero più grande (no, gli "spazi" non contano. È che le operazioni si fanno ordinate!)

Ora, quello che ci interesserebbe sapere, visto che dobbiamo preparare la risposta, è:

1. Quando si usa "pluff" e quando "ciuff"
2. Come si decide quanti "pluff" e quanti "ciuff" usare
3. Cosa cavolo sono i pluff e i ciuff.

...neanche il tempo di riprendersi da 'sta robaccia, che dal pianeta ***Y*** ci arriva il seguente messaggio:

Calcolo	Spiegazione
`8*4=32`	`12 plaph - 4 plaph`
`9*6=54`	`15 ciaph - 3 ciaph`

...e a questo punto preferireste ampiamente essere soli, nell'Universo...

2.2 Alle cinque, finita la guerra

Facilefacile... Pensavo di passarvelo come "Quick & Dirty", poi ho pensato che c'è un mucchio di gente che ci rema, col calcolo delle probabilità...

Avete mai letto "Il buon soldato Sc'weik", di Hašek? In quel libro, il buon soldato Sc'weik e lo zappatore Voywoda si danno appuntamento "Nella Piazza Grande di Praga, alle cinque finita la guerra[19]". L'altro giorno, mentre stavo rileggendo il libro, mi è venuto in mente un grazioso problema.

Due amici si danno appuntamento (in un giorno ben preciso) tra le ***17*** e le ***18*** davanti al ristorante. L'accordo è che il primo che arriva aspetterà il secondo per (al massimo) ***10*** minuti e poi se ne andrà.

Che probabilità hanno i due amici di trovarsi?

3. Bungee Jumpers

Abbiamo definito ***triangolo intero*** un triangolo per cui tutti i lati sono numeri interi.

Trovate una formula che esprima tutti i triangoli interi rettangoli.

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

BeneBeneBene. Un po' di soluzioni, e abbastanza variate, oltretutto.

2003-11-28 16:44	[058]-P2	Andrea
2003-12-01 23:09	[058]-P2	Elena
2003-12-01 14:20	[059]-P1	Mirtillo
2003-12-01 17:12	[059]-P1	Andrea
2003-12-01 20:11	[059]-P1	GaS
2003-12-05 09:40	[059]-P1	Mirtillo
2003-12-02 13:50	[059]-P2	Elena
2003-12-04 15:59	[059]-P2	Pasquale (Quello giovane)

[19] Il riferimento è alla prima guerra mondiale. E la risposta è "Aspettami sino alle cinque e un quarto, può darsi faccia tardi".

2003-12-05 12:16	[059]-P2	Andrea
2003-12-06 17:34	[059]-P2	GaS
2003-12-15 11:10	[059]-P1	GaS
2003-12-15 12:30	[059]-P1	PMP

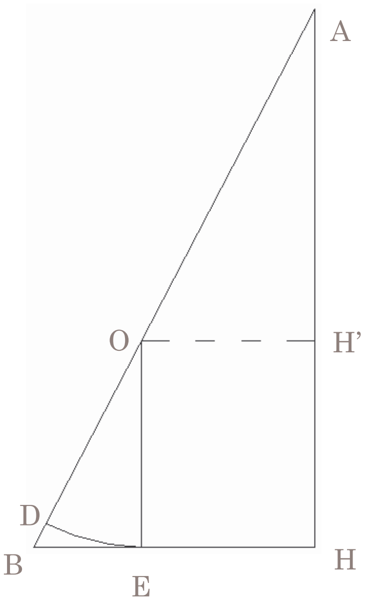
Non abbiamo da lamentarci, soprattutto per il fatto che, come vi avevamo preannunciato, questo mese volevamo chiudere un po' prima (promesso, il mese prossimo vi raccontiamo lo zampone e le lenticchie). Ovviamente dopo sono arrivate altre soluzioni, ma noi eravamo già presi a digerire panettoni con l'aiuto di buone dosi di spumante...

4.1 [058]

4.1.1 Il posto della suocera

Ebbene sì! Sono finalmente arrivate! La rampogna dello scorso numero ha fatto sì che qualcuno si decidesse a rispondere al problema! In realtà, le soluzioni sono arrivate "prima" dell'uscita della rampogna, ma essendo il numero già chiuso in tipografia (nel senso che la nostra preoccupazione era ormai cosa mettere in questo numero), abbiamo lasciato correre. Inoltre, come vedrete, non era propriamente una cosa semplicissima, mettere all'ultimo minuto le soluzioni.... Comunque, cominciamo con quella di ***Andrea*** (New Entry che, come al solito, invitiamo a trovarsi un allonimo tale da distinguerlo dagli altri sei. E se anche gli altri sei volessero per favore darsi da fare...).

Nonostante sia molto interessante, siamo però costretti a tagliare un po' la sua mail; infatti il nostro ci mette mezza pagina solo per dirci che ha sbagliato strada (passando tra l'altro anche da considerazioni sulla grammatica... sorvoliamo)

> Allora: 1ª ipotesi: gli archi di cerchio che smussano gli angoli partono con la tangente coincidente con il lato dell'N-gono. [P.S. vogliate scusare se certe volte non uso un linguaggio matematicamente ineccepibile, ma con la matematica mi ci voglio divertire! Per cui siano perdonate espressioni non proprio ortodosse che certamente userò nel seguito o quanto meno le prossime volte]
>
> Un semplice disegno ci fa capire come il problema sia da restringere alla figura semplice in cui considero solo metà triangolo tra tutti quelli in cui, a partire dal centro, si può suddividere un N-gono generico (c'è una simmetria centrale, non proprio radiale, ma quasi). Vedi figura sotto.
>
> 
>
>
> Iniziamo a vedere alcune cose importanti.
>
> Intanto, chiamiamo a l'apotema dell'N-gono (ricordo che quello che si vede in figura è solo il mezzo triangolo di cui sopra, quindi nella figura ***A*** è il centro dell'N-gono, ***B*** è un vertice, e ***H*** è il centro di un lato dell'N-gono), ed ***r*** il raggio del cerchio che smussa l'angolo.
>
> Quindi, ***AH=a***, mentre ***OD=OE=H'H=r*** (con $r \leq a$) *[Dato che il lato del poligono è unitario, il valore di **a** è anche dato... (A.R.)].*
>
> Vediamo come possiamo esprimere area e perimetro della figura risultante (o meglio, solo il contributo dato da questo pezzo, dato che ci saranno **2*n*** parti identiche a questa che comporranno la figura totale.
>
> Allora, il contributo all'area è l'area del poligono mistilineo ***ADEH***, mentre al perimetro concorre solo

l'arco ***DE*** e il segmento ***EH***. Tali 2 contributi saranno ognuno ***1/2n*** del totale; quindi, posso massimizzare solo questo anziché portarmi appresso un'altra ***n***.

Notiamo, *en-passant*, che l'angolo ***BÂH=π/n*** (metà dell'n-ma parte dell'angolo giro).

Iniziamo ora i calcoli, a partire dal perimetro, che è più semplice.

L'arco DE è una parte di circonferenza, con angolo al centro pari a ***DÔE=OÂH=π/n***, quindi

$$DE = r \cdot \frac{\pi}{n}$$

Mentre

$$\overline{EH}(=\overline{OH'}) = \overline{AH'} \cdot tg(O\hat{A}H) = (a-r)\cdot tg\frac{\pi}{n}$$

Pertanto, il contributo al perimetro da parte di questa figura è

$$r\cdot\frac{\pi}{n} + (a-r)\cdot tg\frac{\pi}{n}$$

Andiamo ora a vedere le aree.

Il contributo all'area da parte di questa figura è la somma del triangolo AOH', del rettangolo OEHH' e della parte di cerchio ODE.

L'area di ODE è semplice, essendo una parte di un cerchio:

$$Area(ODE) = r^2 \cdot \frac{\pi}{2n}$$

Per l'area del triangolo AOH' ho:

$$Area(AOH') = \frac{\overline{AH'}\cdot\overline{OH'}}{2} = \frac{1}{2}(a-r)^2 \cdot tg\frac{\pi}{n}$$

Infine, il rettangolo OEHH' ha area:

$$Area(OEHH') = \overline{OH'}\cdot\overline{H'H} = r\cdot(a-r)\cdot tg\frac{\pi}{n}$$

Sommando i tre contributi delle aree e dividendo per il contributo al perimetro calcolato prima, si ottiene, dopo un po' di semplici passaggi:

$$\frac{A}{2p} = \frac{\frac{1}{2}r^2\cdot(\frac{\pi}{n} - tg\frac{\pi}{n}) + \frac{1}{2}a^2\cdot tg\frac{\pi}{n}}{r\cdot(\frac{\pi}{n} - tg\frac{\pi}{n}) + a\cdot tg\frac{\pi}{n}}$$

Ora, per semplificarmi la vita, posso moltiplicare per 2 (tanto, massimizzare una cosa o il suo doppio è lo stesso) e derivare rispetto a *r*.

Uguagliando a zero *[la derivata (A.R.)]* si ha, dopo qualche passaggio:

$$r^2\cdot(tg\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n})^2 - 2a\cdot r\cdot tg\frac{\pi}{n}\cdot(tg\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}) + a\cdot tg\frac{\pi}{n}\cdot(tg\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}) = 0$$

[purtroppo "qualche passaggio" deve essere stato sbagliato, per cui il resto dei valori qui riportati non è valido... (A.R.)] Ossia:

$$r^2 \cdot \left(tg\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) - 2a \cdot r \cdot tg\frac{\pi}{n} + a^2 \cdot tg\frac{\pi}{n} = 0$$

Da cui:

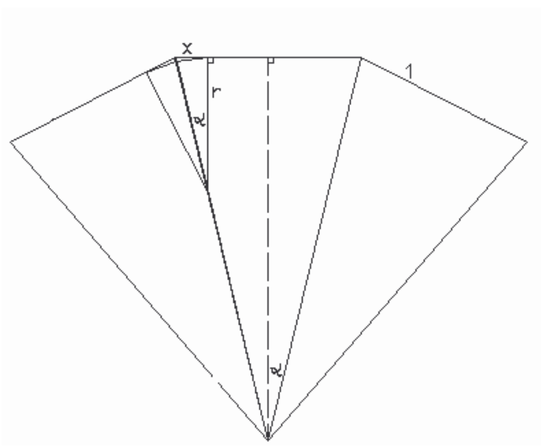
$$r_{\max} = \frac{a \cdot \left(tg\frac{\pi}{n} \pm \sqrt{\frac{\pi}{n} \cdot tg\frac{\pi}{n}}\right)}{tg\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}}$$

Questi sono due valori. Dal momento che la funzione da massimizzare tende a $-\infty$ per $x \to -\infty$, mentre tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ (mi rifiuto di fare la derivata seconda per vedere le concavità, quindi vado a spanne!), ho un massimo nella soluzione minore (quella con il $-$, dato che il denominatore è certamente positivo) e un minimo in quella maggiore (quella con il $+$).

Peccato per l'errore di calcolo, perché il resto delle considerazioni che ci manda perde di valore... anche un meraviglioso disegno tridimensionale fatto con excel. Sarà per la prossima volta.

Proviamo a confrontare con un'altra soluzione... Già, perché ne è arrivata *un'altra!* Questa da ***Elena***, che si sta dimostrando un'ottima analizzatrice (anche se il Time Management lascia un po' a desiderare... aveva promesso la soluzione degli spaghetti!). Disegno chiarissimo, e anche l'*incipit* ha una certa potenza:

$$\alpha = \frac{\pi}{n}, \; x = r \cdot \tan\alpha \qquad \text{[004.001]}$$



Un n-agono di lato unitario ha perimetro pari a ***n*** e superficie pari a $\frac{n}{4} \cdot \cot\alpha$, essendo $\frac{1}{2} \cdot \cot\alpha$ l'apotema del poligono.

Il rapporto Area/Perimetro varrà quindi $\frac{1}{4} \cdot \cot\alpha$.

Arrotondando tutti i vertici del poligono con raggio di curvatura ***r*** $\left(0 < r \le \frac{1}{2} \cdot \cot\alpha\right)$, si ottiene un "poligono arrotondato" che ha perimetro:

$$n - 2n \cdot x + 2\pi r = n - 2nr \cdot \tan\alpha + 2\pi r = n - 2r(n \cdot \tan\alpha - \pi)$$

e superficie:

$$\frac{n}{4} \cdot \cot\alpha - n \cdot r \cdot x + \pi r^2 = \frac{n}{4} \cdot \cot\alpha - nr^2 \cdot \tan\alpha + \pi r^2 =$$

$$= \frac{n}{4} \cdot \cot\alpha - r^2 \cdot (n \cdot \tan\alpha - \pi)$$

e quindi il rapporto vale:

$$y(r)=\frac{\frac{n}{4}\cdot\cot\alpha-r^2\cdot(n\cdot\tan\alpha-\pi)}{n-2r(n\cdot\tan\alpha-\pi)} \qquad \texttt{[004.002]}$$

E fino qui era andata benissimo, ma purtroppo anche lei dimostra di non aver grande fortuna con le derivate e ci scodella un un risultato simpatico ma sbagliato. Noi comunque siamo generosi e ve lo diciamo, che la derivata veniva:

$$y'(r)=\frac{2a\left(ar^2-r+b\right)}{(1-2ar)^2} \qquad \texttt{[004.003]}$$

Dove: $b=\frac{1}{4}\cot\alpha$

$a=\tan\alpha-\alpha$

La funzione ha quindi un massimo per:

$$r=\frac{1-\sqrt{\alpha\cot\alpha}}{2(\tan\alpha-\alpha)}$$

Se avete voglia di ragionare su quello che succede all'aumentare del numero di lati (n) e raccontarci i vostri pensieri...

Un novo lettore (benvenuto **Zar**!) ci comunica che preferisce tenersi la suocera, che gli cucina ottimi tortellini... in questo periodi di feste siamo buoni anche noi e non commentiamo.

4.2 [059]

4.2.1 Tre Dadi Duri

Uh! Qui non possiamo lamentarci… Un mucchio di soluzioni per la prima parte, ma poca roba per la seconda. Beh, avevamo detto che non l'avevamo neanche noi. Comunque, la prima arriva da ***Mirtillo***, che si ricorda di un vecchio problema; la parentela, indubbiamente, è notevole:

> […] un giorno mi era stato proposto questo problema, da un urna contenente N numeri, si estreggono 3 numeri che possibilità ci sono che il terzo sia compreso tra i primi due?
>
> Ora facendo due prove ci si rende conto che la possibilità è 1/3 per qualunque N, se prendete un segmento lungo N e prendete due punti a caso (infinite volte) la distanza media tra i due è N/3 perciò in media dividono il segmento in 3 parti uguali la probabilità che un terzo punto cada nel segmentino centrale è dunque di un terzo.
>
> Questo discorso va a meraviglia se NESSUNO dei numeri estratti dopo è uguale ad uno già estratto (il caso dell'urna). Con i dadi è diverso, però mi aspetto che con un dado da tantissime facce la mia possibilità di vincere sia circa di 1/3.
>
> Bene, a questo punto vediamo i vostri casi, partendo da quello a 3 facce (sì giocavo anche io a D&D, non esiste questo dado... *[Ah si? Il Manuale dice di tirare il dado da sei e dividere per due il risultato, tenendo la parte intera. Esiste anche il dado "da due", vedendo se viene pari o dispari un qualsiasi dado "pari". Ma in questo caso è più comodo a "testa o croce" (con una delle mie monete, evidentemente… (RdA)]).*

La mia possibilità base è 1/3 (come ho spiegato male prima :-)) meno tutte le possibilità in cui escano due numeri uguali, se due dei tre sono uguali io sono spacciato.

Perciò ecco le possibilità di fare una coppia di numeri :

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}*\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{9}$$

ora delle possibilità rimanenti (1 - 7/9 = 2/9) ho 1/3 delle possibilità di vincere.

2/9 * 1/3 = 2/27.

la formula è : (1 - (1/3 + (2/3 * 2/3))) * 1/3.

vediamo il dado piramide a 4 facce :

cambia solo la parte di possibilità di fare coppie di numeri

(1 - (1/4 + (3/4 * 2/4))) * 1/3 = (1 - 10/16) * 1/3 = 6/16 * 1/3 = 6/48 = 1/8

vediamo il 20

(1 - (1/20 + (19/20 * 2/20))) * 1/3 = (1 - 58/400) * 1/3 = 342/1200....

quasi un terzo.

Formuletta generale :

$$\left(1-\left(\frac{1}{N}+\left(\frac{N-1}{N}*\frac{2}{N}\right)\right)\right)*\frac{1}{3}$$

A questo punto è arrivato ***Andrea***, con una sequenza di tre mail: una sbagliata di un fattore tre *[Andrea, ti pare che il sottoscritto proponga un gioco con possibilità di vittoria di questo genere? La cosa avrebbe dovuto metterti un rinoceronte nell'orecchio… (RdA)]*, che però pone un interessante problema: si chiede, infatti, se esistano solo i dadi progettati sui *solidi platonici* e se non esista, ad esempio, un dado a sette facce. Anche a me subito è venuto da rispondere "Sì, si chiama INT(RAND()*7+1)", ma ripensandoci trovo la cosa piuttosto interessante. Secondo voi, se togliamo l'obbligo di avere dei poligoni regolari come facce, si riesce a fare qualcosa? Così a occhio direi che l'uniformità della distribuzione dipende anche dagli angoli che le facce formano tra loro, quindi sembra impossibile. Però, mi ricordo che i dadi si truccano, di solito, mettendo un peso (pallina di piombo) all'interno per fare in modo che una faccia finisca appoggiata più spesso delle altre (avvantaggiando il valore sul lato opposto; se potessimo variare, all'interno del dado, la densità del materiale, secondo voi è possibile? Boh…).

Dicevamo, una sbagliata di un fattore tre, una che correggeva l'errore, e dell'altra ne parliamo dopo.

Già, perché ***GaS*** segue suppergiù la stessa strada, e si ricorda di dividere per tre, spiegandone anche chiaramente il motivo; infatti, nelle sue parole,

La probabilità che vengano tre risultati distinti è:

$$P'=\frac{N-1}{N}*\frac{N-2}{N} \qquad \textbf{[004.004]}$$

(il primo dado può essere quello che mi pare, il secondo ha probabilità ***(N-1)/N*** di essere diverso dal primo e, al terzo dado, rimangono solo ***N-2*** possibilità su ***N***). *Ora dobbiamo solo imporre che quello di punteggio mediano sia proprio il mio*; data la simmetria, ho una possibilità su tre.

Ottimo! Credo ormai l'abbiate capito, che al primo gioco è meglio lasciare perdere; le possibilità sono schifosamente a favore del banco.

Già, ma il secondo?

Beh, ci ha provato ***Mirtillo***, che mostra un'acutissima capacità di analisi, dicendo: "*Il discorso è a dir poco complesso…*". Comunque, ci prova, anche se la sua tattica non mi convince moltissimo (contrariamente alla sua poetica: il "ritmo" della dimostrazione ricorda Allen Ginsberg). Mi rifiuto comunque di passarvi tutte le formule al Formula Editor. Courier e via andare, che per Pasqua vorrei aver finito. Oltretutto, alcuni gioielli notazionali, come ad esempio "4=0", non vorremmo ve li perdeste. Una volta tanto, ve lo passiamo "tale e quale".

> La tattica è semplice, dei due numeri che escono bisogna tenere il più 'estremo' (se escono, su un dado da 6, 3 e 2 tengo il 2 perché più vicino ad un estremo) e ritirare l'altro, questo solo se le mie possibilità aumentano cambiando, se per esempio mi escono 1 e 5 (sempre su D6) cambiando il 5 avrò molte possibilità di peggiorare la mia situazione.
>
> Passiamo al calcolo di questa soglia, quando dovrò cambiare e quando tenere?
>
> Purtroppo per ogni tipo di dado non è un numero solo, ma ne serve uno in base al risultato dei primi due dadi.
>
> Se ottengo un 1 e 3 (D6) è molto diverso da ottenere un 2 e 4 (D6) perché cambiando il 3 del primo caso ho ancora tutte le possibilità di avere il risultato migliore (4 buchi tra uno e sei) mentre cambiando il 4 al massimo potrò ottenere 3 buchi tra 2 e 6.
>
> Analizziamo le possibilità avendo un dado a valore uno e l'altro variabile:
>
> (indico i buchi, cioè le mie possibilità ogni trattino divide il mio dado numero 2, nei casi 1-2-3-4-5-6)
>
> `0-0-1-2-3-4`
>
> quando tengo un risultato e quando cambio?
>
> Calcolo la media : 4!/6 = 1,6666
>
> In generale : (N-2)!/N (N=facce del dado)
>
> È evidente che questo vale anche per il valore 6 fisso e gli altri variabili.
>
> Perciò se ho un 6 o un 1 nel primo tiro, farò ritirare il banco se i miei 'buchi' compresi tra i numeri sono o 0 o 1.
>
> Ma se non ho ne un 6 ne un 1?
>
> Analizziamo il 2 fisso e gli altri variabili come prima.(vale anche per il 5)
>
> `0-0-0-1-2-3`
>
> Calcolo media : 3!/6 = 1
>
> In generale : (N-3)!/N
>
> In questo caso l'uno posso tenerlo o ritirarlo, gli 0 li ritiro.
>
> Ultimo caso mi escono `3-4 4-3 4-4 3-3` (i due più distanti dal centro)
>
> `1-0-0-0-1-2`
>
> La media si abbassa, (2!+1)/6 = 0,6666
>
> in generale : ((N-4)!+1)/N

perciò tengo tutti i valori tranne lo 0 (in questo caso posso avere solo 0 ma è tanto per capire come si modifica il numero mano a mano che ottengo coppie sempre più 'centrali').

E mo? Ci facciamo la birra con questo *[No, quella la facciamo con un PM che sto scrivendo (RdA)]*, perché comunque devo sapere quante combinazioni devo ritirare e che valore hanno.

Iniziamo a vedere quante e che combinazioni mi aspetto in base ai dadi.

D3 : 7 combinazioni con 0 possibilità e 2 con 1

D4 : 10 combinazioni a 0 possibilità 4 con 1 e 2 con due.

D5 : 13 – 6 – 4 – 2

D6 : 16 – 8 – 6 – 4 – 2

Combinazioni con 0 : 2N + (N-2)

1 : 2(N-2)

2 : 2(N-3)

3 : 2(N-4)

ora così so anche quante combinazioni ho, però devo anche guardare a che fascia appartengono (se sono con gli estremi oppure con i centrali…etc), perché ogni fascia ha una media diversa.

Le combinazioni a zero andranno sempre ritirate, ma neanche queste le posso escludere dal conteggio perché uno zero in fascia uno vale piu di uno zero in fascia due. Vediamo le combinazioni per fascia:

```
D3 =  8F1  1F2
D4 = 12F1  4F2
D5 = 16F1  8F2 1F3
D6 = 20F1 12F2 4F3
```

Ogni fascia sale di 4 tranne la prima che vale 1 e c'è solo per facce dispari.

Combinazioni per fascia : 4(N-1) e 4(N-3) e 4(N-5) ecc..

Se N-X = 0 mettere 1 se N-X < 0 mettere 0

Vediamo ora come sono composte le fasce:

D3 = 11000000 0 (2 uno e 6 zeri in fascia 1, quando c'è solo un elemento perché è sempre 0)

D4 = 221111000000 0000 (2 due 4 uno 6 zeri in fascia 1, quando ci sono 4 elementi son sempre 4 zeri)

```
D5 = 3322221111000000 11000000 0
D6 = 44333322221111000000 221111000000 0000
```

Gli elementi e le posizioni hanno una certa logica.

Il tipo di elementi contenuto dipende solo dal numero di elementi.

Prima fascia, 2 elementi N-2 4 elementi N-3 4 elementi N-4…6 elementi 0

Fascia 2, 2 elementi N-4 4 elementi N-5…6 elementi 0

Se formula primo elemento di fascia N-X = 0 → 4 zeri se = -1 → 1 zero

Da tutto questo si potrà mai ricavare una formula generale?

Vediamo il D4.

Quando devo ritirare?

```
F1= (N-2)!/N = 3 / 4 = 0,75
F2= (N-3)!/N = 1 / 4 = 0,25
```

Quanti sono gli elementi al di sotto di questi valori? Solo gli 0.

F1 abbiamo due 2, quattro 1 e sei 0, F2 essendo N-4 = 0 abbiamo quattro 0

Tengo 6 tiri su 16 ne ritiro 10 su 16.

Con i primi 6 tiri che tengo ho 8 possibilità (la somma dei miei buchi) su tiri * facce. 8/24.

Con i rimanenti 10 ho 3 / 4 * 6 (la media di un tiro in prima fascia * le sei volte) + 1 / 4 * 4 (quelli di seconda fascia) il tutto diviso i miei tiri * facce (18/4 + 1) / 40

ora per avere degli interi dovrei moltiplicare tutto per 4 (che è il mio tiro supplementare).

Su 256 tiri 32 volte vinco senza ritirare e 22 volte ritirando.

Ok è un risultato plausibile, vediamo un dado da 8.

Le fasce sono 4

F1 (N-2)!/N = 21/8 = 2,6..

F2 (N-3)!/N = 15/8 = 1,8..

F3 ((N-4)! + 1) / N = 1,3

F4 ((N-5)! + 2) / N = 1

Elementi fascia

2(N-2) + 4(N-3) + … + 6 (N-8) → tengo 14 su 28 con valore 2*6+4*5+4*4+4*3=60.

2(N-4) + 4(N-5) + … + 6 (N-8) → tengo 10 su 20 con valore 2*4+4*3+4*2=28

2(N-6) + 4(N-7) + 6 (N-8) -→ tengo 2 su 12 con valore 2*2 = 4

4(N-8) tengo 0 su 4 = 0

sommo valori ottenuti e moltiplico per 8 -→ 736.

Prendo valori scartati e moltiplico per le medie il tutto per 8:

(14 * 21/8) * 8 = 294 (fascia 1)

(10 * 15/8) * 8 = 150 (fascia 2)

(10 * 11/8) * 8 = 110 (fascia 3)

(4 * 8/8) * 8 = 32 (fascia 4)

sommiamo tutto su 8^4 tiri.

1322/4096

vediamo l'ultimo da 20, saranno un bel po' di calcoli.

Le fasce sono 10

```
F1    (N- 2)!/N = 171/20 = 8,55
F2    (N- 3)!/N = 153/20 = 7,65
F3  ((N- 4)!+1)/N = 137/20 = 6,85
```

```
F4  ((N- 5)!+2)/N = 122/20 = 6,1
F5  ((N- 6)!+3)/N = 108/20 = 5,4
F6  ((N- 7)!+4)/N =  95/20 = 4,75
F7  ((N- 8)!+5)/N =  83/20 = 4,15
F8  ((N- 9)!+6)/N =  72/20 = 3,6
F9  ((N-10)!+7)/N =  62/20 = 3,1
F10 ((N-11)!+8)/N =  53/20 = 2,65
```

Elementi fascia

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) = 504`

Questa dovrebbe essere l'espressione 'matematica' (le virgolette perché non so se si può scrivere quello che ho scritto *[Certe espressioni sono un po' tossiche, effettivamente… I deboli di cuore sono pregati di saltare il prossimo pezzo (RdA)]*) di quanto sotto

2 (N-2) + 4 (N-3)… + 6(N-20) … tengo fino ai 9, ne tengo 38 su 76 = 2*18 + 4*17 + 4*16 + 4*15 + 4*14 + 4*13 + 4*12

+ 4*11 + 4*10 + 4*9 = 504

ora sommiamo gli elementi tenuti della fascia due a quelli della fascia 1

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4 + (2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4 =` **872**

e via così fino che il numero di una fascia non è zero.

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-6)+(sommatoria da N-7 a (((N-4)+1)!/N)int-sup. di N*4) =` **1152**

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-6)+(sommatoria da N-7 a (((N-4)+1)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-8)+(sommatoria da N-9 a (((N-5)+2)!/N)int-sup. di N*4) =` **1332**

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-6)+(sommatoria da N-7 a (((N-4)+1)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-8)+(sommatoria da N-9 a (((N-5)+2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-10)+(sommatoria da N-11 a (((N-6)+3)!/N)int-sup. di N*4) =` **1452**

`(2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-6)+(sommatoria da N-7 a (((N-4)+1)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-8)+(sommatoria da N-9 a (((N-5)+2)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-10)+(sommatoria da N-11 a (((N-6)+3)!/N)int-sup. di N*4) +`

`(2(N-12)+(sommatoria da N-13 a (((N-7)+4)!/N)int-sup. di N*4) =` **1524** il tutto va moltiplicato per N

```
((2(N-2)+(sommatoria da N-3 a ((N-2)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-4)+(sommatoria da N-5 a ((N-3)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-6)+(sommatoria da N-7 a (((N-4)+1)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-8)+(sommatoria da N-9 a (((N-5)+2)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-10)+(sommatoria da N-11 a (((N-6)+3)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-12)+(sommatoria da N-13 a (((N-7)+4)!/N)int-sup. di N*4) +
(2(N-14)+(sommatoria da N-15 a (((N-8)+5)!/N)int-sup. di N*4)) *
N = 30880
```

Prendo valori scartati e moltiplico per le medie e per le facce

```
(4 * (N-1) - ((((N-2) - (((N-2)!/N))int-sup.) * 4) + 2)) * (((N-
2)!/N)) * N = 38 * 171 = 6498
```

ora bisogna proseguire diminuendo i vari N per le altre fasce, vi scrivo la prima poi le altre le calcolo e basta :

```
(4 * (N-3) - ((((N-4) - ((N-3)!/N))int-sup.) * 4) + 2)) * ((N-
3)!/N)) * N = 34 * 153 = 5202
```

Ricordare che se il primo N-X = 0 mettere 1 come combinazione.

```
(60 - (((14 - 7) * 4))+2) * 137 = 4110
(52 - (((12 - 7) * 4))+2) * 122 = 3660
(44 - (((10 - 6) * 4))+2) * 108 = 2376
(36 - ((( 8 - 5) * 4))+2) *  95 = 2090
(28 - ((( 6 - 5) * 4))+2) *  83 = 1826
(20 - ((( 4 - 4) * 4))+2) *  72 = 1296
12 * 62 = 744
4 * 53 = 212
```

il totale è 28014 (possibilità ritirando) + 30880 (possibilità non ritirate) = **58894/160000**

Esiste anche il dado da 100... ma chi ha voglia?

Noi no di sicuro… Anche perché adesso capiamo benissimo come si sentiva Pollicino quando le formiche gli avevano mangiato le briciole.

GaS ci comunica che "*…il 90% sono elucubrazioni, ma forse ci troverete qualcosa di interessante…*", Beh, per definizione le elucubrazioni sono interessanti.

Siano A e B i risultati dei primi due dadi con A<B (se sono uguali ho perso e quindi non devo calcolare proprio niente), l'intervallo dei numeri tra 1 ed N è diviso in tre tronconi:

- 1,…,(A-1)
- (A+1),…,(B-1)
- (B+1),…,N

Se l'intervallo più grande è il primo allora mi tengo A, se è il secondo tiro il mio dado, se è il terzo mi tengo B.

Devo scegliere quindi di giocare nell'intervallo "più grande", detto C=max[(A-1),(B-A-1),(N-B)] si ha che la probabilità di vittoria, giocando in modo intelligente, è di C/N.

Cominciamo, per esempio, col calcolare in maniera estesa un caso semplice: N=5. Se i primi due dadi sono uguali non abbiamo possibilità di vincere, possiamo vincere solo con una di queste alternative:

Risultato dei primi due dadi (A B)	**Probabilità che venga tale risultato**	**Probabilità di vittoria**
1 2	2/25	3/5
1 3	2/25	2/5
1 4	2/25	2/5
1 5	2/25	3/5
2 3	2/25	2/5
2 4	2/25	1/5
2 5	2/25	2/5
3 4	2/25	2/5
3 5	2/25	2/5
4 5	2/25	3/5

Cominciavo a notare lo schema generale, tutti i risultati che possono dare una speranza di vittoria hanno una probabilità di $\frac{2}{N^2}$ questa probabilità va moltiplicata per la somma dei valori dell'ultima colonna, si avrà quindi:

$$P(N) = \frac{2}{N^2} \cdot \frac{F(N)}{N} \qquad \textbf{[004.005]}$$

dove la F(N) è una funzione di N che andrà calcolata; nel nostro caso si avrà `F(5)=3+2+2+3+2+1+2+2+2+3=22` e quindi

$$P(5) = \frac{2}{5^3} \cdot 22 \qquad \textbf{[004.006]}$$

Non è difficile calcolare i valori di F(N) per N piccoli semplicemente enumerando tutti i casi:

N	F(N)
4	9
5	22
6	42
7	72
8	113

Quello che ho cercato di fare, senza successo, è stato trovare una struttura generale per la F(N). Vediamo però qualche considerazione: la P(N), per N→ infinito, deve mantenersi minore uguale di 1. Ne segue che la P(N), che naturalmente è strettamente crescente, non può tendere ad infinito più velocemente di N^3. Se quindi la F(N) fosse una funzione polinomiale deve essere di terzo grado, con qualche calcolo, però, si vede che non esiste una funzione siffatta che soddisfi tutti e 5 i dati trovati.

Una formula che secondo me approssima abbastanza bene la F(N) è la seguente:

per N pari:

$$F(N) = \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} 3 \cdot k \cdot (N-1-k) + H(N) \qquad \texttt{[004.007]}$$

per N dispari:

$$F(N) = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 3 \cdot k \cdot (N-1-k) + H(N) \qquad \texttt{[004.008]}$$

Vediamo che cosa succede, nella sommatoria della F(N) io avrò un certo numero di 1, un certo numero di 2, un certo numero di 3, ……. , un certo numero di (N-2); ma quanti?

Sperimentalmente ho notato che N-2 compare 3 volte, N-3 compare 6 volte, N-4 compare 9 volte e così via finché si arriva ad (N-1)/2 [o (N-2)/2]; questi contributi sono tenuti in conto nella sommatoria della formula di cui sopra. Per i contributi con valore più basso ho aggiunto la H(N).

È facile capire (e anche dimostrare) che i contributi della F(N) sono in tutto N(N-1)/2 [il numero triangolare di N-1 perché abbiamo tolto le coppie di numeri uguali] quindi dobbiamo aggiungere T contributi dove:

$$T = \frac{N \cdot (N-1)}{2} - \sum_{k=1}^{\frac{N-2}{2}} 3 \cdot k \qquad \texttt{[004.009]}$$

A questo punto mi sono incasinato, nella versione originale di questo "articolo" avevo scritto un'altra pagina di conti, sommatorie e spiegazioni incomprensibili e così mi sono detto: ma cosa cavolo sto facendo? Tanto la formula che sto cercando (e non ho trovato) deve essere data in pasto ad un computer per essere calcolata, anche solo per N>10. A questo punto basta sviluppare una piccola routine con complessità leggermente superiore ma facilmente implementabile con qualsiasi programma di calcolo:

$$F(N) = \sum_{A=1}^{N-1} \sum_{B=A+1}^{N} \max\{(A-1),(B-A-1),(N-B)\} \qquad \texttt{[004.010]}$$

a questo punto il problema è risolto.

Sento che vi state lamentando ma perché? Io sono allievo ingegnere, mica un matematico!! La formuletta appena scritta ha una complessità abbastanza bassa, la potrei sviluppare anche con excel.

$$P(N) = \frac{2}{N^3} \cdot \sum_{A=1}^{N-1} \sum_{B=A+1}^{N} \max\{(A-1),(B-A-1),(N-B)\} \qquad \texttt{[004.011]}$$

Per la cronaca: ho tentato di barare cercando sulla "Enciclopedia of integer sequences" se la 9,22,42,72,113… fosse conosciuta ma non è niente di noto *[Solo due cose: tanto per cominciare, non è "barare". Secondariamente, potremmo sempre introdurla come "la prima sequenza che non è nell'Enciclopedia delle sequenze…" (RdA)].*

No, non era facile, lo ammettiamo. Tant'è che anche ***PMP*** ha scritto un programmino. In *perl*, tanto per cambiare (sarà perché ha scoperto che Rudy usa il "C"?) Se volete fare un po' di esperimenti, ve lo passiamo qui sotto.

```
more a.pl
#!/bin/perl
# problema 59.1 di Rudi Mathematici
# se abbiamo 12 valori possibili, e il banco ha tirato 3 e 8,
possiamo
# a) lasciarli: possibilità di vincita 8-3-1 = 4
# b) tenere 3: possibilità di vincita 3-1 = 2
# c) tenere 8: possibilità di vincita 12-8 = 4

use vars qw ($n $a $b $ok $diff $win $lose $tot);

$n = shift;     # numero facce dado

if ( not defined $n ) { die "indica il numero di facce"; }

$win = $lose = 0;

for ($a = 1; $a <= $n; $a++) {
 $lose += $n;  # il caso $a = $b è sempre perdente
 for ($b = $a+1; $b <= $n; $b++) {
  $ok = $b - $a - 1;  # caso a)
  $diff = $a - 1;
  if ($diff > $ok) { $ok = $diff };   # caso b)

  $diff = $n - $b;
  if ($diff > $ok) { $ok = $diff };   # caso c)
  $win += 2*$ok; #due volte per ragioni di simmetria [Argh! (PRS)]
  $lose += 2*($n-$ok);
  }
}
$tot = $win+$lose;
print "$n facce: win $win, lose $lose, totale $tot\n";
```

Non male, effettivamente. No, il mio non ve lo passo.

4.2.2 I numeri del Paesello

Va bene che vi avevo detto che c'erano soluzioni multiple, ma mi pare siate andati un po' troppo sul caso particolare; colpa mia, lo ammetto: non avrei dovuto darvi indicazioni sulle dimensioni del Paesello. Comunque, qui prima è arrivata ***Elena***, con un'interessante soluzione: si esaminano tre casi.

1° caso: N<100

Il numero di cifre che occorrono per scrivere tutti i numeri da ***1*** a ***N*** è

$$C(N) = 2N - 9 \qquad [004.012]$$

(2 cifre per ogni numero meno gli "zeri" davanti ai primi nove numeri ad una cifra: 01, 02,…).

Considerato che Alberto dipinge ***A*** cifre mentre Fred ne dipinge solo ***F*** (***F<A***), e che il numero totale di cifre dipinto dai due sarà

$$\begin{cases} C(F) = C\left(\dfrac{N}{2}\right) = 2 * \dfrac{N}{2} - 9 = N - 9 \\ C(A) = C(N) - C(F) = N \end{cases} \qquad [004.013]$$

dall'uguaglianza dei rapporti $\frac{C(F)}{F} = \frac{C(A)}{A} = k$ segue

$$k = \frac{9}{A - F} \qquad \textbf{[004.014]}$$

e quindi

$$N = \frac{9A}{A - F} \qquad \textbf{[004.015]}$$

2° caso: 100<=N<200

$$C(N) = 3N - 1*90 - 2*9 = 3N - 108 \qquad \textbf{[004.016]}$$

(3 cifre per ogni numero meno gli "zeri" davanti ai 90 numeri a due cifre: 010, 011, 012,…e meno le coppie di "zeri" davanti ai primi nove numeri ad una cifra: 001, 002,…).

$$\begin{cases} C(F) = C\left(\frac{N}{2}\right) = 2*\frac{N}{2} - 9 = N - 9 \\ C(A) = C(N) - C(F) = 2N - 99 \end{cases} \qquad \textbf{[004.017]}$$

(N/2 è un numero di due cifre)

dall'uguaglianza dei rapporti $\frac{C(F)}{F} = \frac{C(A)}{A} = k$ segue

$$k = \frac{81}{2F - A} \qquad \textbf{[004.018]}$$

e quindi

$$N = 9*\frac{11F - A}{2F - A} \qquad \textbf{[004.019]}$$

3° e "ultimo" caso: N=>200

$$C(N) = 3N - 108 \qquad \textbf{[004.020]}$$

$$\begin{cases} C(F) = C\left(\frac{N}{2}\right) = 3*\frac{N}{2} - 108 \\ C(A) = C(N) - C(F) = 3*\frac{N}{2} \end{cases} \qquad \textbf{[004.021]}$$

dall'uguaglianza dei rapporti $\frac{C(F)}{F} = \frac{C(A)}{A} = k$ segue

$$k = \frac{108}{A - F} \qquad \textbf{[004.022]}$$

e quindi

$$N = \frac{72A}{A - F} \qquad \textbf{[004.023]}$$

Pasquale (quale? Ve l'avevamo detto di sceglierví degli allonimi! Adesso dobbiamo andare a vedere in archivio… Un attimo. Eccolo. "Il più giovane") trova una soluzione decisamente più discorsiva:

Se indichiamo con ***t*** la durata del lavoro e con ***A***, ***F*** il totale del numero delle cifre lavorate rispettivamente da Alberto e Fred nel tempo **t**, sarà: ***A > F***.

Dal momento che, trascorso ***t***, ambedue lavorano lo stesso numero di palazzi, questo deve essere pari.

Con qualche minimo di logica che pure necessita e limitandosi alle situazioni di un possibile Paesello reale, per Fred i casi possibili sono:

1 - Soltanto palazzi con civici ad 1 sola cifra;

2 - Palazzi con civici ad 1 sola cifra, più palazzi con civici a 2 cifre.

Per quanto riguarda Alberto, gli possono capitare:

nel caso 1): palazzi ad 1 cifra, più palazzi a 2 cifre, oppure soltanto palazzi a 2 cifre

nel caso 2): soltanto palazzi a 2 cifre

Non esiste per Alberto il caso di palazzi ad una sola cifra, perché altrimenti sarebbe A=F.

Conseguentemente, si può individuare in ***10*** il numero minimo di palazzi esistenti, lavorati nel tempo ***t*** totale, restando matematicamente validi tutti i numeri pari maggiori di 10 e minori di 100, come dalla seguente tabella, nella quale sono indicati il numero totale dei palazzi e le cifre lavorate da Fred ed Alberto (fra parentesi vengono indicati i palazzi ad una cifra e quelli a 2 cifre, separati da una virgola, che contribuiscono al conteggio delle cifre):

Palazzi	**Cifre Fred**	**Cifre Alberto**
10	5(5,0)	6(4,1)
12	6(6,0)	9(3,3)
14	7(7,0)	12(2,5)
16	8(8,0)	15(1,7)
18	9(9,0)	18(0,9)
20	11(9,1)	20(0,10)
22	13(9,2)	22(0,11)
.	.	.
98	89(9,40)	98(0,49)

Come si può notare, il rapporto tra A ed F è sempre maggiore di 1, ma minore o al massimo uguale a 2, mentre sia Alberto che Fred lavorano lo stesso numero di palazzi, cioè la metà del totale, data dalla somma delle cifre fra parentesi.

Ad esempio, nel caso di 98 palazzi, è come se il testo avesse recitato: ".....Io sono più veloce di Fred e dipingo 98 cifre nel tempo che lui ne dipinge 89....."; infatti Fred dipinge le cifre di 9 palazzi ad 1 cifra e di 40 a 2 cifre (49 palazzi e 89 cifre), mentre Alberto dipinge quelle di 49 palazzi a 2 cifre (49 palazzi e 98 cifre).

Così inteso, il problema ammetterebbe 45 soluzioni possibili (avendo limitato a 98 il numero dei palazzi), ma per un paesello (ed anche per una grande città) 98 palazzi in una piazza mi sembrano troppi, per cui appare necessario interpretare il tempo ***t*** come tempo intermedio e non totale.

In questo caso, il testo avrebbe senso solo nei casi di 12 e 18 palazzi (vedi tabella) e sarebbe stato: ".....dipingo 3 cifre nel tempo in cui ne dipinge 2 ....", oppure ".....dipingo 2 cifre nel tempo in cui ne dipinge 1 ...." (non credo che si sia voluto intendere anche un testo del tipo ".....dipingo 3 cifre nel tempo in cui ne dipinge 2,5 ....", perché in questo caso vi sarebbe stata una sola soluzione, quella dei 10 palazzi, e non più di una).

Comunque, per un paesello, 12 mi sembra sufficiente, anzi già è troppo.

Andrea, invece, segue una strada decisamente più simile a quella di Elena; e si pone un quesito (verso la fine) che siamo felici di poter aiutare a risolvere. Diciamo questo perché ci sembra che la gente legga le proprie soluzioni con una certa disattenzione, e non vorremmo il Nostro si perdesse interessanti notizie.

> Intanto notiamo che il numero di case n deve essere pari, altrimenti Alberto e Fred non potranno mai averne dipinto lo stesso numero, che mi sembra chiaro essere $n/2$.
>
> Supponiamo che i numeri civici crescano in senso orario, altrimenti Alberto e Fred si ingarbugliano. Chiamiamo A ed F i due valori che individuano le "velocità" di pittura di Alberto e Fred, con $A>F$, e distinguiamo vari casi:
>
> - $n \leq 8$
> - $10 \leq n \leq 18$
> - $20 \leq n \leq 98$
> - $100 \leq n \leq 198$
> - $200 \leq n \leq 998$
>
> Poi basta, perché di certo più di 600 case non ci saranno mai! (a meno che non esistano multiproprietari straricchi con un mucchio di case tutte al paesello…e poi non sarebbe più "-ello"…)
>
> Vediamo prima il caso che è probabilmente il più realistico, dato il numero di abitanti.
>
> **20≤n≤98**
>
> Le cifre dipinte da Fred sono $9+(\frac{n}{2}-9)\cdot 2 = n-9$ (le prime 9 case hanno una sola cifra). Quelle dipinte da Alberto saranno semplicemente n.
>
> Se le "velocità" di Alberto e Fred sono rispettivamente A ed F, uguagliando i tempi di pittura, ho:
>
> $$\frac{n}{A} = \frac{n-9}{F} \qquad \texttt{[004.024]}$$
>
> Da cui
>
> $$n = \frac{9A}{A-F} \qquad \texttt{[004.025]}$$
>
> Con n ovviamente intero e pari!
>
> **n≤8**
>
> Non esistono soluzioni, a meno che le velocità A ed F non siano uguali (ma non lo è perché si dice chiaramente che Alberto è più veloce di Fred). In questo caso, qualunque numero pari inferiore a 10 sarebbe stato soluzione possibile.
>
> **10≤n≤18**
>
> In questo caso le cifre dipinte da Fred sono $n/2$. Quelle dipinte da Alberto saranno $\frac{3}{2}n-9$
>
> Se, come prima, le "velocità" di Alberto e Fred sono rispettivamente A ed F, uguagliando i tempi di pittura, ho:

$$\frac{n}{2F} = \frac{3n-18}{A} \qquad \texttt{[004.026]}$$

Da cui

$$n = \frac{18F}{3F-A} \qquad \texttt{[004.027]}$$

100≤n≤198

Fred dipinge n-9 cifre. Alberto ne dipinge 2n-99

Uguagliando le velocità ho che le case saranno:

$$n = \frac{99F-9A}{2F-A} \qquad \texttt{[004.028]}$$

200≤n≤998

Qui, mentre Fred dipinge $\frac{3}{2}n-108$ cifre, Alberto ne dipinge 3n/2.

Le case saranno pertanto:

$$n = \frac{216A}{3A-3F} \qquad \texttt{[004.029]}$$

E basta.

Quindi, se dati i valori di A ed F, non ottengo un n intero e pari in nessuno dei casi su elencati, tre sono le cose:

- Alberto e/o Fred hanno barato sulle loro velocità
- Non hanno finito insieme il lavoro
- Il paesello conta molto più di 600 abitanti

Le condizioni in cui si può ricadere in uno o nell'altro caso

Vediamo a quali condizioni devono soggiacere A ed F affinché il numero di case possa essere compreso in uno degli intervalli considerati.

Per il primo caso, impongo che n sia compreso tra 20 e 98 (compresi). Risolvendo il sistema si ha che deve essere:

$$\frac{98}{89}F \le A \le \frac{20}{11}F \qquad \texttt{[004.030]}$$

Il caso n≤8 porterebbe a soluzioni, come già detto, solo se A=F.

Se n è compreso tra 10 e 18 allora deve essere:

$$\frac{6}{5}F \le A \le 2F \qquad \texttt{[004.031]}$$

Se n è tra 100 e 198, deve essere:

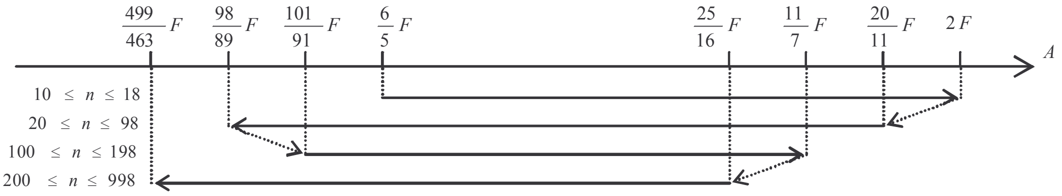
$$\frac{101}{91}F \le A \le \frac{11}{7}F \qquad \texttt{[004.032]}$$

Mentre se n è tra 200 e 998 deve essere:

$$\frac{499}{463}F \le A \le \frac{25}{16}F \qquad \texttt{[004.033]}$$

Quindi A non può mai essere più del doppio di F.

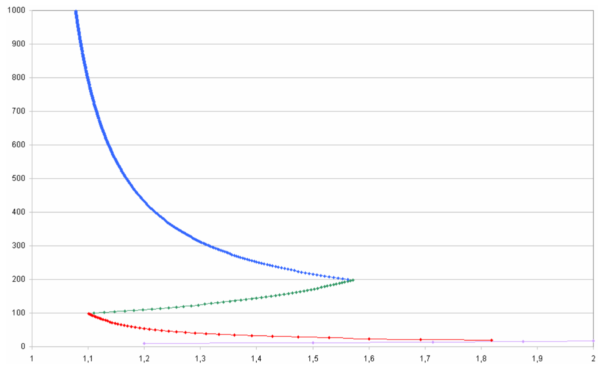
Se metto su un asse orientato questi valori, otteniamo gli intervalli in cui possono esistere risposte nei casi sopra discussi.



Andiamo a spiegare il disegno.

L'asse orientato indica i valori di A, misurati rispetto a F. Sulle righe sotto l'asse c'è l'intervallo di variabilità ammesso per A/F affinché n sia compreso tra i valori indicati. La freccia indica il verso nel quale variando A/F aumenta il valore di n. Le frecce tratteggiate tra le righe indicano il concatenamento tra un caso e l'altro, sempre "aumentando n".

Siccome non so trattare le equazioni diofantee (non le ho mai studiate, lo ammetto, spero non sia infamante! Anche se certe volte potrebbe essere carino sapere come si risolvono… *[Pienamente d'accordo! Fai un salto dalle parti del numero 17 di una prestigiosa rivista di matematica ricreativa e probabilmente trovi qualcosa. Tieni a tiro anche i numeri dal 14, perché le cose sono collegate (RdA)]*), per vedere come varia n al variare del rapporto A/F, ho fatto anche un grafico.



In ascisse, il rapporto A/F, in ordinate, il numero di case. I puntini indicano solo quei valori (di A/F) che ammettono valori di n interi e pari.

Anche ***GaS*** arriva alle conclusioni di Elena e Andrea, con alcune interessanti considerazioni finali:

> In un paesello di 600 abitanti spero che non ci siano più di 999 case solo nella piazza centrale e quindi termino qui la mia ricerca.
>
> Uno si potrebbe domandare: "visto che non conosco N quale delle formule presentate devo usare?" La risposta è semplice, si prova la prima e se viene ***N<20*** è a posto, se venisse una ***N>19*** si prova la seconda e poi, in caso, la terza e la quarta.
>
> La cosa carina, forse perché non l'avevo prevista, è che funziona anche con un numero dispari di case supponendo che, nella casa centrale, Albert e Fred dipingano una cifra a testa (oppure due uno e una l'altro).
>
> Altra considerazione da fare è: chi ci assicura che le ***N*** cosi trovate siano un numero intero? Nessuno. Il fatto è che non tutte le ***F*** ed ***A*** prese a caso possono soddisfare i dati del problema, per esempio per ***19<N<100***, ***F*** ed ***A*** devono essere tali che la loro differenza sia ***1***, ***3*** o ***9*** (condizione necessaria ma non sufficiente).

Interessante, vero?

5. Quick & Dirty

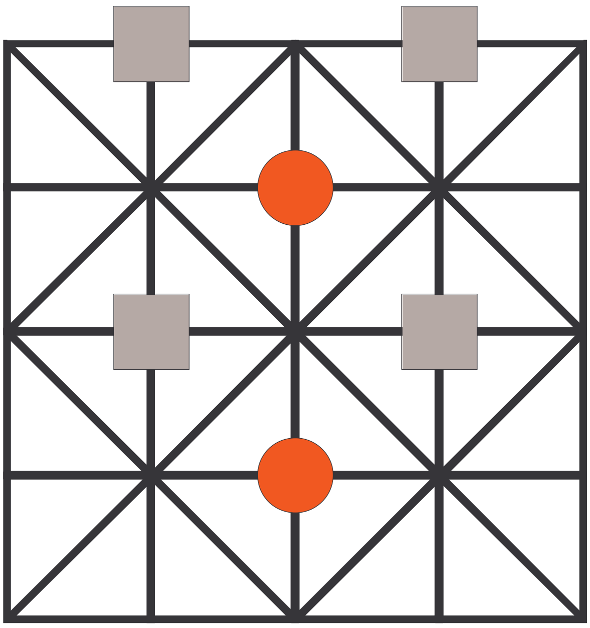
Perché uno specchio inverte destra e sinistra e non alto-basso, anche se lo appendo per storto?

6. Zugzwang!

6.1 L'abbuffata delle tigri

L'altra volta avevamo visto un gioco in cui ciascuno si fa sostanzialmente i fatti propri; questa volta ne ho trovato uno in cui i due giocatori... No, non si può dire che socializzino... Come diceva Woody Allen, "Il leone e l'agnello giaceranno insieme, ma uno dei due dormirà molto poco".

Per prima cosa, non so come si chiama. So che è di origine indiana (nel senso dell'India), ma nulla più.



Allora, per prima cosa vi serve una scacchiera un po' strana: non fate caso ai cerchi rossi e ai quadrati grigi, quelli servono per posare un po' di pedine.

Già, pedine. Qui vanno benissimo le monete; ve ne servono ***venti*** di un tipo (sarebbero le caprette) e ***due*** di un altro (sarebbero le tigri).

All'inizio del gioco, le due tigri vengono posate sui due cerchi, mentre le capre vengono impilate cinque a cinque sui quadratini (...e se il vostro spirito agricolo si chiede come si fa ad impilare cinque capre, tranquilli: dopo è vietato).

Il primo a muovere è il giocatore delle capre; questo può prendere una pedina da una delle pile e spostarla in uno dei punti di incrocio adiacenti liberi; nelle mosse successive, potrà muovere una delle pedine già mosse o "tirare giù" un'altra capretta dalla pila. Le capre non si saltano, quindi quella tirata giù va in un incrocio libero.

Il giocatore delle tigri muove al suo turno una tigre esattamente nello stesso modo: ha però la possibilità di "mangiare una capra", saltandola (come nella dama); deve però saltare una capra per volta e la casella di arrivo deve essere libera (quindi due capre in fila con una tigre davanti sono sicure, sinchè non si spostano). Se una tigre "salta" la pila di capre, mangia solo quella in cima, le altre sopravvivono.

Scopo del giocatore tigre è, abbastanza evidentemente, quello di mangiarsi tutte le capre.

Scopo del caprone è invece quello di "bloccare" le tigri, facendo in modo che entrambe non possano muovere.

Solo un breve commento: il gioco è decisamente semplice e la scacchiera è molto piccola, impedendo quindi "strategie" di ampio respiro; potreste provare a giocarne qualche partita, e poi dirmi la vostra opinione: è solo una sensazione, ma a me le capre sembrano avvantaggiate...

7. Pagina 46

Il problema è equivalente alla soluzione dell'equazione (intera):

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad [007.001]$$

Se ***x***, ***y*** e ***z*** hanno fattori comuni, ossia se ***t=MCD(x,y,z)***, allora è possibile fattorizzare un fattore ***t²*** ottenendo un'equazione equivalente, quindi assumeremo ***x***, ***y***, ***z*** *primi tra loro*.

Quindi, ***al più una*** delle incognite può essere *pari*: se fossero in due anche la terza sarebbe pari e questo permetterebbe di fattorizzare un valore ***2***.

Inoltre, se ***x*** e ***y*** sono entrambe dispari (ad esempio $x = 2k + 1$ e $y = 2m + 1$), si ha:

$$x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2m+1)^2 = 2 * \left[2\left(k^2 + m^2 + k + 1\right) + 1\right] \qquad [007.002]$$

ricordiamo che ***z²*** è dispari se ***z*** è dispari, altrimenti è divisibile per ***4***. Poiché l'espressione sulla destra non è divisibile per ***4*** si ha (dal fatto che ***x²+y²*** è dispari) che *tra* **x** *e* **y***, uno è pari e l'altro dispari.*

Supponiamo $x = 2x_1$. Allora, $2x_1{}^2 = z^2 - y^2$, da cui:

$$x_1{}^2 = \underbrace{\frac{z+y}{2}}_{=u} * \underbrace{\frac{z-y}{2}}_{=v} \qquad [007.003]$$

E quindi risulta

$$\begin{cases} z = u + v \\ y = u - v \end{cases} \qquad [007.004]$$

e ***u*** e ***v*** devono essere primi tra loro. Inoltre, siccome il loro prodotto è un quadrato perfetto, ciascuno di loro deve essere un quadrato perfetto, ossia deve essere

$$\begin{array}{l} u = a^2 \\ v = b^2 \end{array} \qquad [007.005]$$

Ossia, riprendendo le variabili precedenti,

$$\begin{cases} z = u + v = a^2 + b^2 \\ y = u - v = a^2 - b^2 \\ x_1 = \sqrt{uv} = ab \end{cases} \qquad [007.006]$$

e quindi, escludendo la condizione di coprimalità tra ***x***, ***y***, ***z***, si ha:

$$\begin{cases} x = 2tab \\ y = t\left(a^2 - b^2\right) \\ z = t\left(a^2 + b^2\right) \end{cases} \text{dove } a > b, \quad MCD(a,b) = 1, \quad t \in N \qquad [007.007]$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 ricorsione (s.f.): vedi "ricorsione"

Quella che ci fa da titolo è considerata, da alcuni matematici, una bella barzelletta: noi cerchiamo di prenderla più seriamente, anche perché è un argomento che molte persone cui piace la matematica considerano decisamente inutile e noioso; di solito, lo scontro avviene con l'implementazione della funzione fattoriale in linguaggi come il "C" o il "Pascal", con risultati di questo genere:

```
unsigned int fattoriale(unsigned int n)
{
if(n==1)
      return(1);
else
      return(n*fattoriale(n-1));
}
```

Non appena riuscite ad apprezzarne la bellezza, vi rendete conto che in realtà, se vi serve il fattoriale, metterci un ciclo con un accumulatore vi porta allo stesso risultato e vi consente di risparmiare memoria (e anche tempo di elaborazione, a voler essere pignoli); quindi, dieci minuti dopo aver passato l'esame, ci si dimentica bellamente della sua esistenza[20].

Peccato, perché qualcosa di carino ci si può fare; vediamo di lavorarci un attimo.

Tanto per cominciare, cerchiamo di convincerci che le successioni sono, in fin della fiera, ***funzioni***; avranno i valori calcolati in un modo un po' balordo, ma, a ben guardare, una successione non è altro che una funzione avente come dominio i naturali (tutti) e come immagine, genericamente, i reali. La cosa non è molto chara per via della notazione, in quanto ci si ritrova di solito davanti s_n anzichè un probabilmente più chiaro $s(n)$, ma il significato è lo stesso.

Ora, una sequenza è definita *ricorsivamente* quando vengono dati:

1. Alcuni valori, solitamente il primo o i primi
2. Una formula per calcolare i valori successivi.

Ora, una questione di lana caprina, almeno a prima vista. Possiamo calcolare il valore di s_n in due modi:

> *Iterativamente*, calcolandone i valori $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ in modo da averli a disposizione per effettuare il calcolo (e questo è il modo normale per calcolare il fattoriale; unoperduepertreperquattro…)
>
> *Ricorsivamente,* guardando da quali valori dipende il nostro s_n, poi guardando da quali valori dipendono i valori da cui dipende s_n,… e avanti sin quando arrivate ad un valore noto.

In generale, le ricorsioni che ci si trova davanti di solito sono del tipo:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} \quad \texttt{[008.001]}$$

[20] Tranne eventualmente per rendersi conto di quali stupidaggini si possono scrivere in questo modo: ad esempio, `Fibo(N)=Fibo(N-1)+Fibo(N-2)`; provate a vedere quante volte viene richiamata la funzione già solo per trovare il sesto termine.

Con ***a*** e ***b*** costanti e s_1, s_2 specificati. Supponiamo, per amor di generalità, che sia $a \neq 0, b \neq 0$; quello che ci interessa trovare è una soluzione nella forma $s_n = cr^n$ per una qualche costante ***c***; se questo è vero, dovrebbe essere anche:

$$r^n = ar^{n-1} + br^{n-1} \qquad \texttt{[008.002]}$$

E, dividendo per r^{n-2} si ha:

$$\begin{aligned} &r^2 = ar + b \Rightarrow \\ &r^2 - ar - b = 0 \end{aligned} \qquad \texttt{[008.003]}$$

In altre parole, se $s_n = cr^n$ per qualsiasi ***n***, allora ***r*** deve essere la soluzione della **[003]**, che è detta ***equazione caratteristica*** (o *polinomio caratteristico*) della relazione di ricorsione.

Ora, possono aversi due casi: se le soluzioni dell'equzione caratteristica sono ***distinte***, allora sarà:

$$s_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n \qquad \texttt{[008.004]}$$

"...e da dove li tiriamo fuori, c_1 e c_2?" Beh, voglio sperare che vi abbiano fornito i termini s_0 e s_1; in questo modo, vi trovate un sistema di equazioni in due incognite e non dovrebbe essere un problema risolverlo.

Nel caso invece di soluzioni ***coincidenti***, allora risulta:

$$s_n = c_1 r^n + c_2 n r^n \qquad \texttt{[008.005]}$$

Con le costanti calcolate nello stesso modo.

Siccome comincio a vedere degli sguardi piuttosto vacui, prendetevi la *serie di Fibonacci* e provate a farci di conto; giusto per i più pigri, abbiamo:

$$F_n = (1*)F_{n-1} + (1*)F_{n-2} \qquad \texttt{[008.006]}$$

e quindi equazione caratteristica:

$$r^2 - r - 1 = 0 \qquad \texttt{[008.007]}$$

Che dovreste riconoscere, tra l'altro.

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \texttt{[008.008]}$$

Non coincidenti, quindi si usa la **[004]**:

$$s_n = c_1 * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 * \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \texttt{[008.009]}$$

Che ha l'aria di una brutta bestia, ma non è poi così brutta, se vi ricordate che il termine zero e il termine uno della serie sono pari a ***1***. In pratica, il sistema diventa:

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \text{[008.010]}$$

Che, risolta, dà:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ c_2 = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases} \qquad \text{[008.011]}$$

...e cosa ci faccio? Beh, sostituita nella **[009]** vi permette di calcolare qualsiasi termine della serie *senza dover calcolare i precedenti.*

Adesso proviamo a complicarci un pò la vita; se andate a riprendervi RM048, vi accorgerte che il PM si intitola "Metallika!" ed è una generalizzazione delle serie di Fibonacci con il metodo per il calcolo di altre sezioni; lì, dovreste trovare abbastanza compiti a casa da capire come funziona il giochino.

Leggete bene il prossimo periodo, se volete sapere a quali abissi di perversione si può arrivare in matematica.

> Il passo successivo consisterebbe nel parlare di ***funzioni generatrici***, ovverossia nel tirare in ballo una serie (geometrica) $\sum a_n x^n$, in cui gli a_n sono gli elementi della serie definita ricorsivamente (Fibonacci, nel nostro esempio) e chiedersi a quale funzione tenda questa serie nel raggio di convergenza.

Allora, se avete capito di cosa sto parlando sapete già tutto, se non avete capito rileggetelo e ringraziate per il fatto che ve lo risparmio.

Tutto nasce in realtà da un problemino che volevo porvi ma che non sono riuscito a dematematizzare... Vediamo un attimo.

Prendiamo la serie di Fibonacci; moltiplichiamo l'*i-esimo* termine per la *"meno-(i+1)-esima* potenza di ***10***; sommiamo i risultati. A cosa tende, il tutto?

Termine	Potenza	Risultato
1	-2	0.01
1	-3	0.001
2	-4	0.0002
3	-5	0.00003
5	-6	0.000005
8	-7	0.0000008
13	-8	0.000000013
21	-9	0.0000000021
34	-10	0.00000000034

Cerco di essere un minimo più chiaro, con una tabellina. Se tutto va bene e non ci sono guai di paginazione, dovrebbe essere qui di fianco. Quello che vi si chiede è di sommare l'ultima colonna e trovare a quanto arriva.

Siccome non è difficilissimo, complichiamoci un po' la vita:

1. Lavoriamo con una ***serie generalizzata*** e
2. consideriamo il tutto in una ***generica base B***.

La cosa comincia a diventare interessante?

Allora, la serie diviene:

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} \qquad \text{[008.012]}$$

e il polinomio caratteristico

$$F(r) = r^2 - ar - b \qquad \texttt{[008.013]}$$

risulta avere due radici distinte:

$$r_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \qquad \texttt{[008.014]}$$

Quindi, imponendo tra le condizioni iniziali l'esistenza del termine ***0-esimo*** (pari a zero), l'***n-esimo*** termine diventa (definito in modo non ricorsivo):

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}}\left(r_1^{\,n} + r_2^{\,n}\right) \qquad \texttt{[008.015]}$$

E la somma di cui al problemino diventa:

$$S = \frac{1}{B}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{B^n} \qquad \texttt{[008.016]}$$

Sostituendo da `[015]` e raccogliendo i termini, si ha:

$$S = \frac{1}{B\sqrt{a^2 - 4b}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_1}{B}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_2}{B}\right)^n\right) \qquad \texttt{[008.017]}$$

Ora, supponiamo sia, per entrambi i valori, ***r<B***; questo ci garantisce la convergenza delle due serie geometriche, e quindi ci permette di dire che è:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{B\sqrt{a^2 - 4b}}\left(\frac{1}{1-\frac{r_1}{B}} - \frac{1}{1-\frac{r_2}{B}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}}\left(\frac{1}{B - r_1} - \frac{1}{B - r_2}\right) \qquad \texttt{[008.018]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - 4b}}\left(\frac{r_1 - r_2}{(B - r_1)(B - r_2)}\right) \end{aligned}$$

Ora, spero non siate talmente persi da non accorgervi che il denominatore sotto parentesi nell'ultimo termine è semplicemente ***F(B)***, ossia il valore ***B*** (la base in cui stiamo lavorando) inserito nel polinomio caratteristico; quindi, moltiplicando per ***B***,

$$S * B = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n}{B^n} = \frac{B}{F(B)} \qquad \texttt{[008.019]}$$

Adesso, torniamo un attimo nella realtà. Riprendiamo il polinomio caratteristico della serie di Fibonacci e riconsideriamo il fatto che abbiamo dieci dita; questo significa, semplicemente, che ***a=b=1*** e ***B=10***. La nostra serie, che non è altro che la sommatoria al centro della `[019]`, convergerà *all'inverso del decimo termine della serie.*

Ora, riconsiderate la dipendenza dalla base, e ditemi voi se non è una cosa decisamente carina. E tutto partendo dalla ricorsione!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms