Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 059 - Dicembre- Anno Quinto

1. La farina di Ofelia

"Non arriverò al punto di affermare che redigere una storia dell'umano pensiero trascurando lo studio profondo delle idee matematiche nelle varie epoche storiche sia come omettere il personaggio di Amleto dalla tragedia omonima, ma è certamente analogo alla rimozione della parte di Ofelia. Questa similitudine è singolarmente precisa, perché Ofelia è assolutamente essenziale al dramma, è molto affascinante… ed è un po' matta."

La citazione è di Alfred North Whitehead, ed è una delle frasi che ci rallegrano quando pensiamo al ruolo storico della matematica e della matematica ricreativa in particolare. Con un tocco d'ironia e una buona dose di understatement, Whitehead riesce a lasciar intravedere la profonda importanza della matematica, senza però prenderla eccessivamente sul serio e non tralasciando di puntualizzarne la componente meno seriosa. In altre parole, è un ritratto come ci si aspetta che lo dipinga un matematico: non a caso il suo collaboratore più famoso, Bertrand Russell, si espresse in maniera non troppo diversa: *"La matematica può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se quanto stiamo dicendo sia vero"*. Le citazioni hanno l'obbligo primario della verità, ma anche gli obblighi secondari della sintesi e dell'umorismo. Nel caso di queste appena riportate, ad esempio, è facile capire che, oltre al motto di spirito, una scintilla di verità riscalda le massime: nessuna rivista specializzata in giurisprudenza, chimica o qualsiasi altra materia può permettersi il lusso di scrivere seriamente una frase del tipo "la nostra disciplina non è un dromedario": i suoi lettori penserebbero inevitabilmente ad un errore tipografico, o alla momentanea perdita della ragione dell'articolista. Se noi invece la scrivessimo qui, sulle pagine di una celebre rivista di matematica ricreativa, saremmo certi di ricevere a stretto giro di posta un paio di lettere tese a dimostrare che è vero: la matematica non può essere un dromedario; una dozzina abbondante dimostrerebbero rigorosamente il contrario[1], quattro o cinque puntualizzerebbero le ragioni per cui il quesito sia in realtà indecidibile, e non mancherebbe qualcuno che ci farebbe notare sette od otto errori formali nella stesura della domanda. Whitehead, insomma, non scherzava mica tanto quando parlava di pazzia.

Coloro che invece la matematica non la amano la citano raramente, e quelle poche volte a sproposito. Concedetevi dieci secondi di meditazione per rispondere a questa domanda: "Qual è la citazione più frequentemente sentita sulla matematica?". Non possiamo essere certi che la nostra risposta coincida perfettamente con ognuna delle vostre, ma siamo convinti che, almeno in Italia, la frase fatta più ripetuta sul tema sia la terrificante *"La matematica non è un'opinione"*.

Visto che si parla di opinioni, lasciateci dire che la nostra, a proposito di cotanta sentenza, è che trasuda arroganza. Viene usata quasi sempre per tacitare e per imporre, e non viene quasi mai usata da chi conosce davvero la matematica. Se qualcuno sta sbagliando un calcolo, può essere sbeffeggiato da altri che quel conto non hanno sbagliato, ma difficilmente viene redarguito dagli amanti, dilettanti o professionisti, della matematica: loro sanno benissimo che sbagliare i conti è facilissimo. E se, interrogato sulla "verità" della citazione, qualsiasi politico sarà pronto a sottoscriverla, è d'altro canto facilissimo immaginare l'algebrista o il logico professionista che cominciano a rispondere all'ipotetico quesito con una serie di distinguo: "Uhm... ma di quale «matematica» stiamo parlando? Sa, ultimamente noi si preferisce il termine «matematiche», al plurale..." – oppure – "Beh, per stabilire la verità di un'affermazione occorre definirne i termini, no? Mi definirebbe, per favore, in maniera formale, il concetto di «matematica» e di «opinione»? Ah, e non dimentichi di puntualizzare se il termine «non» e il verbo «essere» sono in questo contesto usati secondo le normali regole sintattiche colloquiali, o se invece..."

Una cosa può anche essere evidente come è evidente che due più due fa quattro, ma proprio per questo non è detto che sia facile. I due signori inglesi citati ad inizio capitolo hanno affrontato un tema molto più semplice di 2+2=4, e l'hanno svolto così:

«**4·43.** $\vdash :.\ \alpha,\beta\varepsilon 1 . \supset : \alpha\cap\beta = \Lambda . \equiv . \alpha\cup\beta\varepsilon 2$

Dem.

$\vdash . *54\cdot 26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha\cup\beta\varepsilon 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51\cdot 231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13\cdot 12] \qquad \equiv . \alpha\cap\beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11\cdot 11\cdot 35 . \supset$

$\vdash : (\exists x,y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha\cup\beta\varepsilon 2 . \equiv . \alpha\cap\beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11\cdot 54 . *52\cdot 1 . \supset \vdash . \mathrm{Prop}$

Da qui segue che, quando l'addizione aritmetica è stata definita, 1 + 1 = 2.»

e chiunque abbia anche solo intravisto questo svolgimento dà alla frase "chiaro come è chiaro che due più due fa quattro" un senso radicalmente diverso di quello comunemente usato[2].

[1] Non v'è dubbio alcuno che i matematici e i lettori di RM troverebbero più affascinante la dimostrazione dell'identità tra la matematica e il gibboso ruminante rispetto alla dimostrazione contraria.

[2] E non sperate che si tratti di una delle prime affermazioni del libro. Bisogna sfogliare i "Principia Mathematica" fino a pagina 379, per arrivarci.

A parziale discolpa del luogo comune che prevede non essere opinione la matematica, c'è da dire che, come al solito, la citazione originale era più restrittiva e un po' meno arrogante, visto che era coniugata in modo congiuntivo e retta da un modesto "ritengo…". Eccola:

"Per me, tutte le opinioni sono rispettabili ma, ministro o deputato, ritengo che l'aritmetica non sia un'opinione".

La frase non corre i rischi usuali delle traduzioni, perché fu pronunciata proprio in italiano, nel novembre 1879, da un deputato che era anche stato Ministro delle Finanze. Questo spiega sia l'inciso "ministro o deputato" del testo, sia perché la frase incriminata sia tuttora molto pronunciata in Italia ma non all'estero. Leggendola si scopre con sorpresa che inopinabile non è tutta la matematica, ma solo l'aritmetica; ma per capire come mai alla Camera dei Deputati si tranciassero giudizi sulla disciplina dei numeri, occorre fare un piccolo passo indietro, e scoprire che al centro della discussione non c'erano affatto i numeri naturali o la proprietà distributiva, ma piuttosto il pane e la farina.

Il 21 Maggio 1868, il giovane parlamento del giovane Regno d'Italia discusse ed approvò una legge destinata a restare famosa: legge che venne poi promulgata il 7 Luglio del medesimo anno, per diventare operativa il 1° Gennaio 1869. Si trattava della famosa e impietosa "tassa sul macinato", una sorta di vestigia medievale riportata alla vita dal novello stato unitario, che imponeva di pagare direttamente nelle mani dei mugnai 2 lire per ogni quintale di grano portato a macinare, 1 lira e 20 centesimi per ogni quintale di avena, 80 centesimi per quintale di mais, e così via per ogni altro tipo di granaglie che necessitavano della ruota del mulino.

Era una strana Italia, quella del 1868: aveva a malapena compiuto i sette anni di vita, eppure il governo che promulga la tassa sul macinato è già l'undicesimo del Regno, ed è anche il secondo retto dal generale Menabrea. È un'Italia senza Roma, un'Italia che ha acquisito il Veneto solo da pochi mesi, grazie alla guerra perduta contro l'Austria nel 1866. A rigor di termini, la guerra del 1866 viene catalogata dai sussidiari come Terza Guerra d'Indipendenza, e annoverata nella colonna "vittorie" nel bilancio delle italiche guerre: eppure l'esercito e la flotta italiane ebbero, nel 1866, solo sonore sconfitte: il primo venne sbaragliato a Custoza, la seconda a Lissa. Quasi a dimostrazione della perfida illogicità degli spargimenti di sangue, la guerra fu comunque davvero vinta, e il Veneto fu davvero riscattato a seguito di quegli avvenimenti, nonostante le due terribili sconfitte sul campo. Ciò dipendeva dall'alleanza che l'Italia aveva stretto con la Prussia (impegnata anch'essa, a quei tempi, a ricostituire l'unità nazionale germanica) e dal non trascurabile fatto che la Prussia inflisse all'Austria, in quel di Sadowa, una delle più terribili sconfitte che l'aquila bicipite asburgica abbia mai avuto la ventura di ricordare. Durante i trattati di pace successivi, gli austriaci rifiutarono con fare sdegnoso di cedere il Veneto agli italiani, ma grazie ad un allegro passamani diplomatico la bella regione arrivò in casa Savoia dopo essere transitata prima in Prussia e poi in Francia, per essere infine donata dalle auguste mani di Napoleone III a quelle un po' più piccine di Vittorio Emanuele II (e, naturalmente, previo opportuno plebiscito, che a quei tempi andava molto di moda). Può sembrare una maniera un po' contorta di ottenere terre e vittorie, ma funzionava; al punto che solo un paio di anni dopo il gioco viene quasi ripetuto: Roma e il papa erano intoccabili proprio perché protetti da Napoleone III e dalla amica Francia, ma bastò aspettare che i francesi venissero distratti dai soliti prussiani (la celebre carneficina di Sedan, 2 Settembre 1870), e se ne poté tosto approfittare per mandare i bersaglieri a Porta Pia. Suonerebbe certo meno bene se tutte le "Via XX Settembre" sparse per l'Italia si chiamassero "Via Diciotto Giorni Dopo Sedan", ma il senso storico sarebbe forse meglio salvaguardato.

Se Custoza e Lissa non erano di fatto servite ad ottenere il Veneto, erano però riuscite ad incrementare notevolmente il ciclopico deficit del neonato Regno d'Italia. Nel 1866 il governo italiano è assai più preoccupato dei duecento e passa milioni di disavanzo che della necessità di annettersi l'Urbe, ed è per questo che il Ministro delle Finanze Cambray-Digny istituì la tassa del macinato, con l'appoggio entusiasta di Quintino Sella. Il principio logico alla base della tassa è vergognosamente elementare: essendo pochi i ricchi e moltissimi i poveri, occorre tassare i poveri: e se i poveri non hanno niente altro che il pane, occorrerà tassare il pane. La macinatura della farina è praticamente l'unico passo che i contadini non possono svolgere autonomamente, nel processo che va dalla semina del grano all'affettare la pagnotta sul tavolo; ed è proprio questo unico passo che viene tassato. I mulini vengono dotati di contatori, e i mugnai costretti a diventare esattori. E il bilancio nazionale venne risanato in pochi anni.

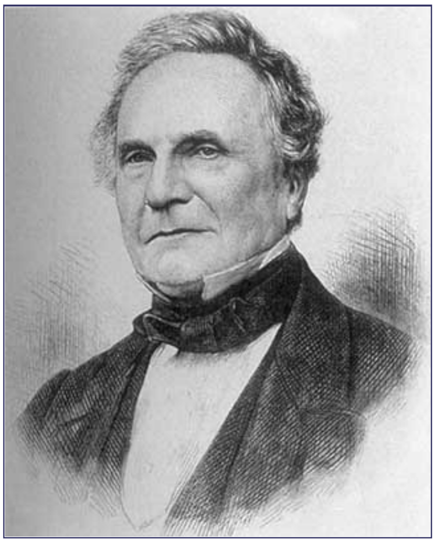
Dire che la tassa sul macinato fu impopolare è un grazioso eufemismo: non sono infrequenti le cronache medievali (tassare l'opera dei mulini era un'attività ben nota a tutti i possessori di terre, fin dall'antichità: più semplicemente, di solito il mulino era di proprietà diretta del nobile proprietario delle terre) che registrano ribellioni proprio a causa dell'imposizione di balzelli sul macinato: la "bella mugnaia", regina del Carnevale di Ivrea, viene cantata dalla leggenda come ribelle all'imposizione dello "ius primae noctis", ma è probabile che storicamente la vera causa dell'insurrezione popolare sia stata un'imposta sul macinato: non per niente la graziosa fanciulla è una mugnaia. Nel 1867 il medioevo è passato da un pezzo, ma le ribellioni si ripetono in tutta Italia, e con particolare veemenza nell'Emilia Romagna. I moti di piazza causarono più di duecentocinquanta morti.

Visto a più di un secolo di distanza, è un periodo storico che si tende a ricordare come tutto centrato sulla formazione dello stato unitario, eppure i governi italiani di quei tempi vengono messi in crisi, cadono e si riformano soprattutto sull'onda di questa tassa, fortemente voluta dalla destra storica per risanare il bilancio e fortemente temuta dalla sinistra per la sua evidente impopolarità. Il ministero Cairoli riduce l'imposta nel 1878, ed entra in crisi. Depretis prova ad abolirla, e il suo governo cade nel 1879. Nel Luglio del 1879 è ancora Cairoli il capo del governo, ma a Novembre del medesimo anno è di nuovo crisi, ed è nuovamente chiamato da re a formare un nuovo ministero. Quando nella Camera dei Deputati risuona la celebre frase che ci ha condotti a ripercorrere un po' di storia patria, troviamo che a pronunciarla è Bernardino Grimaldi, che era stato ministro delle Finanze nell'appena trascorso ministero Cairoli (II) ma non più nell'entrante ministero Cairoli (III). E il triste senso era chiaro: il ministro della sinistra storica cercava di giustificare il mantenimento della tassa sul macinato (introdotta, come si è visto, da governi della destra) con "ovvie" questioni di calcolo: non si poteva far altro che tassare il pane, per sanare il bilancio, perché tassare i gioielli dei ricchi non avrebbe garantito neanche una piccola frazione dello stesso ammontare. I governi di destra tassavano senza porsi problemi etici, quelli di sinistra chiamavano l'aritmetica a giustificarli. E la tassa sul macinato rimase in vigore, in un modo o nell'altro, fino al 1884.

Se scoprire nelle pieghe della storia improbabili parentele tra i sistemi di tassazione e i luoghi comuni sulla matematica può sembrare singolare, è solo perché abbiamo poca familiarità con le sorprendenti caratteristiche degli uomini. Ci si può sforzare di studiarli e comprenderli, ma è inevitabile che si finisca con il catalogarli sotto qualche etichetta semplificatrice che quasi mai riesce davvero a descriverli pienamente. Ad esempio, è insolito immaginarsi uno dei massimi poeti romantici d'Inghilterra come un marito insicuro in grado di abbandonare la moglie dopo un anno di matrimonio con tanto di figlioletta nata appena un mese prima, eppure è esattamente quello che fece Lord George Gordon Byron.

La giovane signora abbandonata si chiamava Anne Isabelle Milbanke, e parte del fascino che il sommo Byron lesse in lei dipendeva forse dal fatto che era un'amante della matematica: il poeta la chiamava scherzosamente "mia Principessa dei Parallelogrammi", e ogni tanto si dilettava a commisurare con lei le proprie difficoltà con i numeri[3]. La piccola figlia del poeta aveva nome Augusta Ada, e il suo cognome era ovviamente Byron; ma, da grande, avrebbe sposato il signor King, diventando così la contessa di Lovelace.

Augusta Ada Byron King, contessa di Lovelace, nacque il 10 Dicembre 1815 a Piccadilly[4], e fin da bambina mostrò uno spiccato amore per… la geografia. Ma non si può essere impunemente la figlia della Principessa dei Parallelogrammi; mamma Anne Isabelle reindirizzò (non si sa quanto amorevolmente: le malelingue sostengono che volesse soprattutto evitare che Ada seguisse le orme paterne) gli interessi della bambina, sollecitando i tutori a curarne soprattutto l'educazione aritmetica a scapito di quella geografica e letteraria. E, volente o nolente, la fanciulla divenne una delle poche donne, nell'Europa del diciannovesimo secolo, ad avere familiarità con la matematica. Sebbene avesse abbandonato la famiglia, Byron rimase in buoni rapporti con Anne Isabelle, e di tanto in tanto si informava sulla salute e sui progressi di Ada; inoltre Lady Noel Byron, madre del poeta e nonna di Ada, fu costantemente in contatto con la nipotina. Figlia di lord, Ada apparteneva alla nobiltà inglese, e venne introdotta a corte nel 1833.



Fu proprio a corte che conobbe, non ancora diciottenne, il quarantunenne matematico Charles Babbage, che era già noto per i suoi lavori sulla misteriosa "Macchina Analitica". Babbage era nato il 26 Dicembre 1791[5], anch'egli in quel di Londra, e Ada fu così affascinata dal progetto della Macchina Analitica da rendergli visita, appena due settimane dopo e accompagnata dalla madre, direttamente nel laboratorio. Se Ada era ancora solo una istruita giovane di buona famiglia, Babbage era già un matematico di grido: dopo aver studiato al Trinity College di Cambridge, venne eletto agli onori della Royal Society appena venticinquenne, e successivamente anche a quelli della scozzese Royal Society of Edinburgh e della Royal Astronomical Society. Infine, nel 1827, assurse alla cattedra lucasiana che fu di Newton, che mantenne per dodici anni.

---

[3] *"Concordo con te anche sulla matematica, seppur devo contentarmi di ammirarla a grandissima distanza, e sempre aggiungendo questo alla lista dei miei rimpianti: so che due più due fa quattro, e sarei bene felice di dimostrarlo se ne fossi in grado, sebbene debba confessare che, per qualche ragione, se potessi dimostrare che due più due fa cinque ne ricaverei un piacere molto più grande"* – col che si dimostra che Lord Byron sarebbe stato un grande estimatore di RM.

[4] Oggi si direbbe "a Londra", ma a quel tempo Londra non era ancora arrivata a Piccadilly.

[5] La redazione di RM è estremamente grata ai due personaggi della storia per aver avuto il buon gusto di nascere nel medesimo mese dell'anno, consentendoci così un "duplice compleanno" senza far torto a nessuno dei due.

Babbage, matematico e astronomo, fu verosimilmente colpito da uno strano punto di contatto tra le due scienze: l'astronomia si basava su una sterminata quantità di tavole logaritmiche per i calcoli necessari alle osservazioni dei corpi celesti; la matematica aveva nel calcolo delle "differenze finite" uno strumento abbastanza semplice dal punto di vista teorico (limitandosi all'esecuzione di addizioni e sottrazioni) ma assai potente, visto che era in grado di calcolare successioni generate da polinomi di secondo grado. Perseguì pertanto l'idea di "meccanizzare" i calcoli, creando delle macchine che potessero, mediante un gran numero di operazioni semplici, produrre risultati complessi. Ebbe successo nella creazione di questo "Motore Differenziale", e i finanziamenti e i riconoscimenti che seguirono lo indussero ad affrontare il più complesso progetto della "Macchina Analitica".

Nel 1833, quando Ada e Charles si conoscono, la giovane nobildonna è poco più di una bambina e Babbage ha ancora intatti tutti i sogni di realizzare la sua potente Macchina Analitica: e le condizioni perché una nuova scienza tragga da questa situazione un inizio leggendario e romantico ci sono già tutte. Nonostante la differenza di età, formano già una "coppia generatrice": Ada sembra intuire immediatamente le potenzialità della macchina di Charles, e, figlia di poeta romantico e della Rivoluzione Industriale, intravede maestosi e romantici sviluppi: *"La caratteristica che distingue la Macchina Analitica e che ha reso possibile la creazione di un meccanismo con così estese possibilità da poter essere visto come il braccio destro esecutivo dell'algebra astratta è l'introduzione in esso dello stesso principio che Jacquard ha usato per governare le sue macchine tessili tramite schede perforate, che consentono la creazione di motivi complicatissimi nei tessuti. È in questo che giace la differenza tra le due macchine[6]: nulla del genere esiste nel Motore Differenziale. Potremmo affermare, assai congruamente, che la Macchina Analitica tesse motivi algebrici proprio come il telaio di Jacquard tesse fiori e foglie."*

Se il maturo matematico ha il germe per fondare la nuova scienza dell'informatica, Ada sembra avere il ventre per portarlo a maturazione: l'aneddoto, che se anche fosse leggendario non perderebbe comunque un'oncia del suo fascino, è quello che racconta come Ada abbia un giorno proposto a Babbage, preoccupato della quantità di operazioni che dovevano essere eseguite sulla sua macchina, di elencarle una per una in un piano di esecuzione sequenziale. Il mito della nascita è completo: se Babbage è senza dubbio l'inventore di quello che oggi chiamiamo hardware, è dalla mente di Ada che nasce la prima idea di "programma": Ada Lovelace è l'inventrice del software[7].

A ciò si aggiungono poi molti elementi drammatici: Ada muore giovane[8], come ogni eroina romantica che si rispetti; la Macchina Analitica, nonostante i rilevanti fondi stanziati dalla Royal Society e quelli che lo stesso Babbage ci mette di tasca propria, non verrà mai realizzata, restando una chimera inespressa del sogno meccanicistico inglese. Ma restano i disegni dettagliatissimi di Babbage, che mostrano al lettore

---

[6] Tra la "macchina analitica" e il "motore differenziale", non tra la macchina analitica e il telaio Jacquard.

[7] Non a caso un linguaggio di programmazione (abbastanza sofisticato e relativamente rivoluzionario) fu chiamato, in suo onore, **ADA**. Era uno dei divertimenti principali dei vecchi programmatori mettere in imbarazzo i neofiti con domande del tipo: "Cosa significa **FORTRAN**?" – e il giovane, sicuro: "**FOR**mula **TRAN**slation". "E **COBOL**?" – "**CO**mmon **B**usiness **O**riented **L**anguage!" – "**BASIC**?" – "**B**eginners' **A**ll-purpose qualcosa **C**ode, ma, tsè, lo dice pure il nome che è robetta per dilettanti!!" – "**LISP**?" – "**L**ot of **I**nsulse and **S**tupid **P**arentheses! Ah, ah!… no, no, lo so che vuole dire **LIS**t **P**rocessing… - "E **ADA**?" - "Er.. allora… **A**nalytic **D**estructured **A**lgorithm? **A**nalogic-**D**igital **A**mbaradan?". Non gli sembrava davvero possibile, che non fosse un acronimo…

[8] Per l'esattezza, visse 13502 giorni: il che significa che non ha festeggiato il suo 37° compleanno.

moderno che la Macchina, una volta costruita, avrebbe funzionato[9]: soprattutto, mostrano una stupefacente analogia tra il progetto iniziale di Babbage e la struttura dei moderni calcolatori. La macchina descritta da Babbage è composta da cinque parti principali: l'input e l'output (e già questi due termini basterebbero a ritagliargli un posticino nella storia della computer science...), il "controllo", il magazzino e quella parte che attualmente chiamiamo CPU. Il "magazzino" (store) è perfettamente aderente al concetto moderno di memoria RAM, e la CPU veniva romanticamente chiamata da Babbage "il mulino" (mill).

È un mulino diverso da quelli di cui abbiamo parlato nella prima parte di quest'articolo: è un mulino generato dalla matematica. Parafrasando Whitehead, potremmo dire che è il mulino che macina la farina di Ofelia, densa di idee e di promesse, e soprattutto esentasse. Con il ritorno al mulino della Macchina Analitica di Babbage dai mulini italiani della tassa sul macinato, il cerchio potrebbe già chiudersi: ma, come al solito, la storia ha in serbo coincidenze più sorprendenti. Il primo incontro tra Ada e Charles serve a spiegare l'entusiasmo, condiviso tra la giovane fanciulla e il meno giovane matematico, per l'immaginifica visione di un meccanismo quasi pensante: ma se i due devono passare insieme alla storia, il legame che li unisce deve essere più profondo: cosa fece, in ultima analisi, quella fanciulla diciottenne per la Macchina Analitica di Babbage? Come si celebrarono le nozze (beninteso, solo intellettuali) dei progenitori dell'informatica? E, soprattutto, chi fu l'officiante di quel matrimonio?

Nel 1840 Babbage fece un viaggio di studio a Torino, dove illustrò i principi teorici della sua Macchina Analitica e si confrontò con alcuni professori italiani. Le sue teorie affascinarono soprattutto un professore di meccanica dell'università torinese: si trattava di uno studioso brillante, appena trentunenne, che avrebbe di lì a poco ottenuto dei significativi risultati nel campo dell'analisi strutturale basata sul principio del lavoro virtuale: più tardi, sarebbe diventato anche relativamente famoso per la dimostrazione del principio di "minima azione", da lui pubblicata unitamente a Bertrand e in concorrenza (solite dispute di priorità...) con Castigliano. Il professore torinese deve essere davvero impressionato dalle idee di Babbage se decide di comprenderle, studiarle, e soprattutto estenderle fino al punto di pubblicare una importantissima memoria dal titolo *"Notions sur la machine analytique de Charles Babbage"*[10].

Non deve essere davvero un lavoro da poco, se Ada si precipita a tradurlo in inglese non appena viene pubblicato nella Biblioteca di Ginevra: e lo mostra a Babbage. Charles la esorta, visto che sa bene essere Ada Byron una delle maggiori conoscitrici della sua macchina, ad ampliare lo studio dell'italiano, a commentarlo e estenderlo ulteriormente. E il risultato è uno studio approfondito e visionario sulla Macchina Analitica: Ada, nel commentare la memoria italiana, scrive sostanzialmente la sua "opera omnia" scientifica: triplica la lunghezza dello scritto originale, aggiunge le illustrazioni necessarie, esegue tutto il lavoro algebrico necessario alla dissertazione conclusiva (con l'eccezione del trattamento dei numeri di Bernoulli: quelli furono esaminati direttamente da Babbage), scopre e corregge un grave errore nel processo originale del matematico inglese, e inserisce qui le celebri frasi sui "programmi" che la eleggono oggi a madre di tutti i software. Il lavoro finale, noto oggi con il semplice nome di "Notes", fece affermare a Babbage che *"le due memorie prese insieme* [quella di Ada e quella italiana] *danno, a coloro che sono in grado di seguirne il*

---

[9] Il condizionale è caduto nel 1989, quando la Macchina Analitica è stata effettivamente costruita sulla base dei disegni e degli scritti di Babbage. *Ha* funzionato.

[10] Gli italiani del Piemonte, si sa, per molto tempo hanno preferito scrivere in francese. Non che fosse una cattiva idea, poi, visto che il francese era la "lingua scientifica" dell'epoca.

ragionamento, una dimostrazione completa che tutti gli sviluppi e le operazioni dell'analisi sono ora in grado di essere eseguiti da una macchina".

Se non possiamo non gioire del fatto che Ada Lovelace sia finalmente riconosciuta come una figura fondamentale nella genesi dell'informatica, è pur vero che rimane nelle italiche menti la sensazione che, nello strano "marketing & advertising" delle scoperte scientifiche, l'Italia non sia molto brava a farsi conoscere. Senza assolutamente nulla togliere ad Ada e a Charles, appare evidente che il ruolo della memoria italiana è basilare nella genesi della Macchina Analitica di Babbage, e non dubitiamo che se l'autore fosse stato anch'egli inglese (o addirittura americano), ci sarebbero adesso valanghe di marchi, sistemi operativi, serie di computer e pacchetti applicativi che si richiamerebbero al suo nome. Ma è anche vero che in Italia l'unica Lovelace che è conosciuta al grande pubblico resta la bella Linda[11], quindi il senso di stupore passa in fretta.

Lo stupore ritorna raddoppiato quando si scopre che il professore torinese di meccanica autore delle "Notions", oltre a portare avanti una brillante carriera scientifica, ne portò avanti anche una militare, fino al raggiungimento dell'augusto grado di generale nell'arma del Genio: era uno dei comandanti, tanto per dire, nella citata battaglia di Custoza; e che alla brillante carriera militare fece seguire una ancora più eclatante carriera politica, prima diventando ministro, poi assurgendo addirittura, e per ben due volte, alla carica di Presidente del Consiglio del regno italiano. Il suo nome è Luigi Federico Menabrea[12], e non c'è nessuna omonimia: è proprio lui il capo del governo del 1868, quando viene promulgata la vituperata tassa sul macinato: i mulini, reali o virtuali, sembrano aver accompagnato costantemente la sua vita.

Scoprire che l'Italia abbia avuto per capo del governo un matematico è cosa che meraviglia, soprattutto ai giorni nostri; ma, come dicevamo più sopra, forse la meraviglia è causata dalla nostra smania semplificatrice che tende troppo a classificare i professori come professori, i generali come generali, i primi ministri come primi ministri senza ricordare che, prima d'ogni altra cosa, sono uomini: e come tali, di "multiforme ingegno", come dice Omero.

E sulle coincidenze della storia… in fondo, è evidente che basta andare a cercarle, e saltano fuori come ranocchie in uno stagno. Anche in questo breve racconto, forse, sono più quelle non raccontate che quelle che sono state elencate: basta pensare a George Byron e alle donne. Non esce un ritratto bellissimo del grande poeta inglese, dalla nostra cronaca: il suo animo romantico, sommamente evocativo e poetico, qui lascia poche tracce di sé, e Byron figura solo come un padre talmente assente da avere una figlia esplicitamente allevata in modo da non seguire le sue orme, e forse proprio per questo in grado di estendere la propria immaginazione nel futuro in una maniera inaspettata. Ma per il povero George non si tratta dell'unico caso: nell'estate del 1816 Ada ha circa sei mesi di vita, e suo papà se ne sta a Villa Diodati, sul lago di Ginevra, a comporre poesie e a navigare sul lago con i suoi amici, tra i quali figura il non meno celebre poeta Pierce Bysshe Shelley. Di sera, leggono storie spaventose di fantasmi, e Byron lancia una sfida agli amici letterati, esortandoli a scrivere una storia del genere.

Con le migliori penne inglesi dell'Ottocento presenti, chi avrebbe mai potuto vincere siffatta gara? Meglio, chi avrebbe mai potuto osare raccogliere la sfida? Non abbiamo notizie su quali siano state le mirabili e terrificanti storie prodotte per l'occasione da

[11] Linda Lovelace, celebre protagonista, unitamente all'ancor più celebre John Holmes, del cult-movie "Gola Profonda" (Deep Throat).

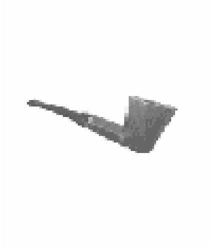
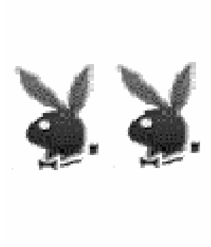
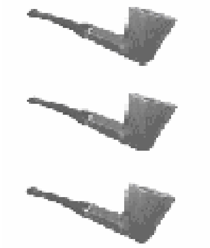
[12] Avevamo qui una meravigliosa fotografia del Nostro, che però ha la sfortuna di essere nato a settembre...

Byron e Shelley, ma sappiamo che quest'ultimo era accompagnato dalla sua graziosa e giovanissima fidanzata. La diciannovenne Mary ci piace immaginarcela a metà annoiata dalla poesia diurna e a metà spaventata dalle storie di fantasmi notturne: quel che sembra certo è che quella notte dormì male, e tanto per non mandare sprecato un incubo cominciò a carezzare l'idea di sfruttarlo per scrivere un racconto adatto ad accogliere la sfida byroniana. Qualche mese dopo, Mary Wollestonecraft Shelley aveva completato un romanzo che, con buona pace del fidanzato e di tutti gli amici del fidanzato, avrebbe venduto molte più copie di tutte le loro opere di poesia messe assieme. Un romanzo[13] sempre guardato con un po' di disdegno dai letterati professionisti, ma che porta in sé una miscela esplosiva: la creazione artificiale della vita, magari la clonazione, di certo un freudiano complesso di Edipo ante litteram, e certo anche l'idea di automa. Tutte cose sulle quali il secolo successivo sguazzerà felice come un paperottolo nello stagno di casa.

Il cantore inglese di certo non si è mai reso conto di aver scatenato due tigri, entrambe con gli artigli ben piantati nel futuro.

[13] Mary Wollestonecraft Shelley, *"Frankenstein; or, the Modern Prometheus"*, 1816-1817: Bodleian Library, Oxford, (Dep. c. 477/1 and Dep. c. 534/1-2). Parts One and Two.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Tre Dadi Duri			
Numeri Civici (al Paesello!)			

2.1 Tre Dadi Duri

Allora, il gioco è stato testato da Alberto e Fred, che si sono impossessati dei miei dadi da "Dungeons & Dragons", mostrando un preoccupante interesse in particolare di quello icosaedrico. Comunque, cercheremo di generalizzare il gioco a dadi a N facce. Il consiglio, come al solito, è di provare prima con dei dadi piccoli (vi ricordo che in D&D esiste anche un dado a quattro facce…).

Il "Banco" tira due volte il dado, ottenendo due numeri. Quindi, tirate voi. Se il vostro risultato è strettamente incluso tra i due valori ottenuti dal banco, vincete. Quali sono le vostre probabilità di vincere?

> *Adesso però abbiamo un problema in Redazione… Vi raccontiamo un attimo gli affari nostri. Come al solito, appena ha visto che il problema trattava di probabilità, Alice ha chiuso il cervello e ha detto "tre birre", suscitando le proteste della parte restante della Redazione, che considerava il problema facile.*
>
> *Quindi, ci siamo trovati costretti a complicarlo un po'; il guaio è che il risultato è stato verificato (per il dado a venti facce) attraverso una simulazione[14] in "C"; abbiamo la risposta, ma non la soluzione; a rigore, quindi, non si tratta di un problema. È però nostra ferma convinzione che la soluzione sia ricavabile anche per il caso generale: se qualcuno vuole provarci…*

Piccola complicazione: Adesso, quando il banco ha tirato il dado due volte, potete scegliere: o "tenete" uno dei due valori ottenuti dal banco (e in questo caso il banco tira un'altra volta il dado per ottenere il suo secondo valore) o tirate voi il dado per ottenere il vostro valore. Le regole di vincita sono sempre le stesse.

La strategia di scelta non è difficile da ottenere, ma… Quali sono le vostre probabilità di vincita?

[14] Visto che stiamo parlando di faccende personali: un "Grazie" a Aldo, uno dei nostri più antichi lettori, che ha installato sul portatile di Alberto e Fred un Linux con un "gcc" decisamente stabile.

2.2 Numeri Civici (al Paesello!)

Abbiamo osservato con piacere un certo revival del problema degli aeroplanini, e la cosa ha suscitato un certo interesse al Paesello, quando finalmente siamo riusciti a tornarci (ve l'avevo raccontato, che ci si era allagata la casa? Abbiamo dovuto restaurare il piano terra, e ne abbiamo approfittato per buttar via un po' di muri...). Non essendo interessato alla soluzione ma volendo in un modo o nell'altro dire la sua, il Sindaco ha dato l'incarico ad Alberto e a Fred di ridipingere i numeri civici della piazza principale[15].

La cosa (che più che sfruttamento di manodopera minorile si configura come costituzione di banda armata) ha evidentemente interessato i nostri, che ne hanno approfittato per porre un interessante quesito, sicuri che fosse irrisolubile (in realtà è talmente risolubile da avere più di una soluzione...). Queste le dichiarazioni di Alberto (tutte vere: non è un problema di logica!):

"Abbiamo cominciato assieme, Fred in senso orario da "1" e io in senso antiorario dall'ultimo numero. Io sono più veloce di Fred, e dipingo [valore incomprensibile causa campanaccio di mucca] cifre nel tempo che lui ne dipinge [idem causa chiesetta del paese]. Quando abbiamo finito, ciascuno di noi aveva passato lo stesso numero di case."

E le case ci sono ancora tutte, aggiungo io.

Ora, supposti noti e detti F e A i due valori che non abbiamo capito, sapete dirmi quante case ha la piazza? *[Il Capo insiste che anche se sono solo in seicento ci possono essere più di cento numeri civici sulla piazza... ma io comunque ci lascio una birra sola! (A.R)]*

3. Bungee Jumpers

Provare che nell'identità, per ***N*** naturale,

$$N = \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \ldots + \frac{N}{2^n} \qquad \texttt{[003.001]}$$

ogni frazione può essere sostituita dall'intero più vicino, ossia:

$$N = \left[\frac{N}{2}\right] + \left[\frac{N}{4}\right] + \left[\frac{N}{8}\right] + \ldots + \left[\frac{N}{2^n}\right] \qquad \texttt{[003.002]}$$

"binario" forse aiuta...

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

4.1 [058]

Come sempre, qui mettiamo le cose che non sappiamo dove mettere..

PMP ci segnala una cosa interessante, in merito ai numeri di telefono (due di noi sono esperti in telefonia e non lo sapevano… Grazie!):

> I numeri 555-xxxx sono in realtà l'equivalente dei nostri 4xxxx, cioè servizi legati al singolo operatore. Ad esempio, l'equivalente del nostro 12 è 555-1212. I numeri usati sono però pochi, e quindi Hollywood ha un gran numero di scelte "sicure" possibili.

[15] No, non vi dico come si chiama la piazza, potreste individuare il Paesello. È ancora un posto ragionevolmente tranquillo, con circa seicento abitanti di cui solo un paio laureati in materie scientifiche.

La scorsa Newsletter ha suscitato in qualcuno di voi delle curiosità geografiche; Mirtillo, a margine di una soluzione, ci chiede dove siamo. Beh, nel momento in cui è arrivata la sua mail Doc era a Bruxelles a spiegare delle cose, Rudy a Milano a fare il buffone (in inglese: conta come estero?) e Alice alle Galapagos a contare le tartarughe (compito molto facile, purtroppo; ne sono rimaste pochissime).

Soddisfatte queste insane curiosità, passiamo alle soluzioni che sono arrivate.

4.1.1 Un comportamento disgustoso

Siamo felici di notare l'esistenza di due scuole di pensiero, riflessione delle opinioni dei redattori. Qualcuno di voi è riuscito a dare ragione ad Alice, che lo riteneva un problema complicato. Altri, invece, hanno optato per la via preferita da Doc e da Rudy, che non lo ritenevano poi questa enormità.

Cerchiamo di andare in ordine di complessità. Primo arriva ***Mirtillo***, semplice e lineare (a parte la dimenticanza di qualche parentesi…): non solo, ma ammette di essere partito dal punto sbagliato.

> All'inizio avevo pensato (sbagliando) che con due spaghetti avessi una media di un anello e mezzo, cioè o uno fatto da due spaghetti o due singoli. Però bisogna tener conto che avendo un capo di uno spaghetto in mano ne rimangono 2 di un'altro spaghetto e 1 di se stesso.
>
> Perciò la media è inferiore perché avrò 1 anello sicuro più 1/3 se lo vado a legare a se stesso. Quindi, per due spaghetti,
>
> $$E(2) = 1 + \frac{1}{3} \qquad \texttt{[004.001]}$$
>
> Con tre spaghetti ho 5 capi liberi di cui 1 del mio spaghetto. Se lo lego a se stesso, ho il caso precedente con uno spaghetto in più. Questo accade una volta su 5. Allora, per tre spaghetti:
>
> $$E(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \qquad \texttt{[004.002]}$$
>
> Con 4 spaghetti ho 7 capi liberi.
>
> La formula con n spaghetti risulta:
>
> $$E(n) = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-5} + \ldots + 1 \qquad \texttt{[004.003]}$$

Semplice, chiaro e lineare. La prima complicazione (sia detto in senso buono) arriva da ***PMP***; conoscendo la sua abituale *nonchalance* nel trattare le formule ricorsive, ci aspettavamo effettivamente qualcosa di interessante. Comunque, da questo mese non è più il solo, ad avere certe insane passioni: ***Pazqo*** (no, non è un typo: è una new entry) infatti sviluppa un ragionamento dello stesso tipo. Misceliamo le due soluzioni, che si completano a vicenda.

> con probabilità $\frac{1}{2n-1}$ facciamo subito un anellino
>
> con probabilità $\frac{2n-2}{2n-1}$ otteniamo semplicemente uno spaghetto più lungo.
>
> Allora, si ha:

$$
\begin{aligned}
E(n) &= \frac{E(n-1)+1}{2n-1} + E(n-1)\frac{2n-2}{2n-1} = \\
&= E(n-1)\frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} \\
&= E(n-1)\frac{1+2n-2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1}
\end{aligned}
\qquad [004.004]
$$

Quindi,

$$
\begin{cases}
E(1) = 1 \\
E(n) = \dfrac{1}{2n-1} + E(n-1)
\end{cases}
\qquad [004.005]
$$

da cui A(n) è la somma degli inversi dei primi n numeri dispari.

Esprimendolo in forma chiusa, si vede che maggiora la serie armonica, e quindi diverge.

Al prezzo di qualche passaggio in più, abbiamo una soluzione un po' più giustificata. E troviamo la risposta per ***GaS*** che segue circa la stessa strada ma (confessando una conoscenza delle serie "quasi sotto zero") si chiedeva se convergesse. No, sorry… Con un numero infinito di spaghetti il limite è dato unicamente dalla pazienza dei commensali. Va però detto che la convergenza è molto lenta; se provate con Excel, vi accorgete che ci vogliono un qualcosa come tremila spaghetti per aspettarsi cinque anelli.

Poi, ad un certo punto, sono arrivati i pezzi grossi. E mi riferisco a ***Eddie Devde*** (non sappiamo se considerarlo una New Entry… dice che ci segue ogni tanto. Ci chiedevamo qual'è l'allonimo e quale l'allocognonimo, ma lasciamo perdere…) e ***ChiQua***; quest'ultimo con una soluzione che sembra normale e va avanti tranquilla, poi alla fine salta una settantina di passaggi e ti rifila una formula che ci metti tre giorni solo a capire di cosa sta parlando. Cominciamo con Eddie *[e cominciamo con un rabbuffo; Eddie, perché in PDF??? Abbiamo dovuto copiarcela tutta a manina! Ti va bene che è una bella soluzione, altrimenti era il cestino![16] (RdA)].*

Supponiamo di avere ***N*** spaghetti disgiunti. Il numero di estremità è ***2N*** .

Scegliamo a caso due estremità. La scelta della prima estremità è abbastanza ininfluente, diciamo che determina la scelta di un determinato spaghetto, ma quando ci accingiamo a scegliere la seconda estremità possono succedere due cose:

1. la seconda estremità scelta è l'estremità dello spaghetto scelto quando abbiamo scelto la prima estremità;
2. la seconda estremità scelta corrisponde ad uno spaghetto diverso da quello scelto quando abbiamo scelto la prima estremità.

Se adesso annodiamo le due estermità nel caso 1) otteniamo un anello e rimangono ***N-1*** spaghetti disgiunti, nel caso 2) uniamo due spaghetti (diventano uno spaghetto, un po' più lungo ma pur sempre uno spaghetto), non creiamo nessun anello e rimangono ***N-1*** spaghetti disgiunti.

[16] Vero ma non troppo… Tentando un export in modo testo, abbiamo scoperto che le formule vengono scritte *al contrario*; per intenderci, anziche` "N-1" era pieno di "1-N".

Ora la probabilità che capiti il caso 1) è $\frac{1}{2N-1}$ (infatti scelta la prima estremità ne rimangono ***2N-1*** e tra queste una sola corrisponde allo spaghetto scelto), mentre la probabilità che capiti il caso 2) è (di conseguenza) $1-\frac{1}{2N-1}=\frac{2N-2}{2N-1}$

Questo è (quasi) tutto quello che ci serve per risolvere il problema.

Qual è la probabilità $P_{N,k}$ che partendo da ***N*** spaghetti si formini ***k*** anelli? Al primo passo (quando tutti gli spaghetti sono digiunti) possono succedere due cose (ciascuna delle due esclude l'altra) o annodo uno spaghetto su se stesso e allora nei rimanenti ***N-1*** spaghetti devo formare ***k-1*** anelli oppure non formo nessun anello e quindi nei rimanenti ***N-1*** spaghetti devo formare ancora ***k*** anelli. Di conseguenza, dalla formula delle probabilità totali:

$$P_{N,k}=\frac{1}{2N-1}P_{N-1,k-1}+\frac{2N-2}{2N-1}P_{N-1,k} \qquad \texttt{[004.006]}$$

A questo punto vogliamo calcolare quanti anelli si formano mediamente con ***N*** spaghetti.

Indichiamo questa media con E_N. Innanzitutto notiamo che sicuramente si forma almeno un anello (tutti gli spaghetti sono legati a formare un unico cerchio) e al più si formano ***N*** anelli (tutti gli spaghetti sono annodati su se stessi).

Dalla definizione di media:

$$\begin{aligned} E_N &= \sum_{k=1}^{N} k * P_{N,k} = \\ &= \sum_{k=1}^{N} k * \left(\frac{1}{2N-1}P_{N-1,k-1}+\frac{2N-2}{2N-1}P_{N-1,k}\right) \end{aligned} \qquad \texttt{[004.007]}$$

Questa sommatoria si può riscrivere, notando che $P_{N-1,0}=0$ e che $P_{N-1,N}=0$, nel seguente modo:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}(k+1)P_{N-1,k}+\frac{2N-2}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}P_{N-1,k} = \\ &= \frac{1}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}P_{N-1,k}+\frac{1}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}k*P_{N-1,k}+\frac{2N-2}{2N-1}\sum_{k=1}^{N-1}k*P_{N-1,k} \end{aligned} \qquad \texttt{[004.008]}$$

e poiché :

$\sum_{k=1}^{N-1}P_{N-1,k}=1$ essendo la probabilità di formare ***1***, ***2***, ***...***,***N-1*** anelli con ***N-1*** spaghetti;

$\frac{1}{2N-1}+\frac{2N-2}{2N-1}=1$;

$\sum_{k=1}^{N-1}k*P_{N-1,k}=E_{N-1}$

Si ottiene:

$$E_N = \frac{1}{2N-1} + E_{N-1} \qquad \texttt{[004.009]}$$

e considerato che $E_1 = 1$, si ha che la media cercata è la somma dei reciproci dei numeri dispari da ***1*** a ***2N-1***.

…sin qui la parte di Eddie; ChiQua aggiunge una perla finale che risponde alla domanda di alcuni di voi e che vi riproponiamo come l'ha scritta lui:

Possiamo anche esprimere il numero in forma chiusa, come

```
(1/2)(EulerGamma+Log[4])+(1/2)PolyGamma[0,(1/2)+N]
```

o se preferite

```
(1/2)HarmonicNumber[(-1/2)+N]+Log[2]
```

Veramente, preferivamo la Carbonara di Doc…

4.1.2 Il posto della suocera

Cominciamo a pensare che ci sovrastimiate.

Avevamo trovato un grazioso problema, non troppo difficile; l'unica cosa che non ci piaceva era che non avevamo un'ambientazione… Doc, il nostro specialista (e inventore del termine) nella "dematematizzazione" dei problemi, se ne è fatto carico costruendo il contorno. Sembra però che il contorno vi abbia spaventato, e non abbiamo ricevuto nessuna soluzione in merito; per punizione, ve lo lasciamo in sospeso, ma siccome siamo crudeli, ve lo forniamo matematizzato.

Avete un ***n-agono*** regolare, e dovete "arrotondare" gli spigoli con degli archi di cerchio in modo tale che il risultato abbia il minimo perimetro e la massima area. Quale deve essere il raggio degli archi?

Adesso che vi siete divertiti con i voli pindarici di Doc, vi spiacerebbe tornare nel mondo della matematica?

5. Quick & Dirty

La fabbrica di batterie nella quale lavorate produce una batteria su mille non funzionante. Per fortuna, avete un ottimo test (che applicate a tutte le batterie) per verificare il funzionamento; infatti azzecca tutte quelle fallate però, per una su cento funzionanti vi dice che non funziona (ossia è preciso al 99%).

Il test vi ha appena detto che questa batteria è fallata; qual'è la probabilità che sia vero?

Su 1000, una è fallata, e la trovate. Ma delle restanti 999, l'1% (ossia circa 10) risulteranno fallate anche se perfettamente funzionanti. Quindi, vi ritrovate ***11*** batterie teoricamente fallate, di cui però ***1*** sola lo è effettivamente. Quindi, la probabilità che sia fallata è ***1/11***, ossia circa il ***9%***.

6. Pagina 46

Utilizzando l'identità $[a] = \left\lfloor a + \frac{1}{2} \right\rfloor$, la tesi può essere ridefinita come:

$$N = \left\lfloor \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \ldots \qquad \texttt{[006.001]}$$

Ora, sia (espansione binaria di ***N***)

$$N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 \qquad \texttt{[006.002]}$$

con $a_i \in \{0,1\}$. Allora si ha:

$$\left\lfloor \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_1 + \frac{a_0 + 1}{2} \right\rfloor = \\ = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \ldots + a_1 + a_0 \qquad \texttt{[006.003]}$$

E, nello stesso modo,

$$\left\lfloor \frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a_n 2^{n-2} + a_{n-1} 2^{n-3} + \ldots + \frac{a_1 + 1}{2} + \frac{a_0}{4} \right\rfloor = \\ = a_n 2^{n-2} + a_{n-1} 2^{n-3} + \ldots + a_1 \qquad \texttt{[006.004]}$$

Da cui:

$$\left\lfloor \frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor a_n + \frac{a_{n-1} + 1}{2} + \frac{a_{n-2}}{4} + \ldots + \frac{a_0}{2^n} \right\rfloor = a_n + a_{n-1} \qquad \texttt{[006.005]}$$

e nello stesso modo si verifica che $\left\lfloor \frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = a_n$ e che tutti i termini con a denominatore potenze superiori di ***2*** valgono ***0***.

Ossia, è:

$$\left\lfloor \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{N}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \\ = a_n * \left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1 + 1\right) + \\ + a_{n-1} * \left(2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1 + 1\right) + a_1(1+1) + a_0 = \\ = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + a_1 2 + a_0 = N \qquad \texttt{[006.006]}$$

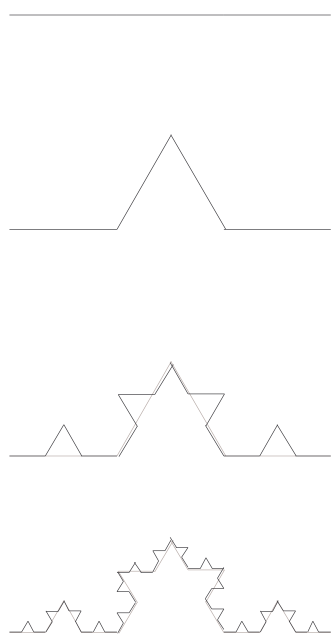
7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Roba da Islandesi [002]

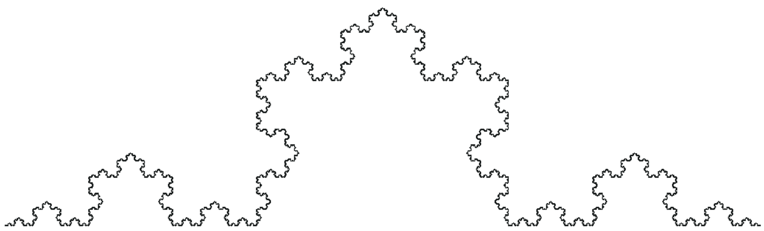
Bene, avete avuto un mese per pensarci, presumo ci siate arrivati. Proprio loro, i frattali. Se adesso vi aspettate gli insiemi di Mandelbrot o di Liapunov, calmate i bollenti spiriti, che cominciamo da uno semplice: la ***Curva di Koch***.

Bene, come si costruisce un frattale di questo tipo?

Il modo migliore è attraverso quello che si chiama ***L-system***[17]: in pratica, si tratta di un algoritmo per la costruzione; prima, però, ripassiamo un attimo la nostra simpatica curva, con un disegnino (sperabilmente qui di fianco) dei primi passaggi.



In sostanza, partite da un disegno (la prima riga in alto) e a ogni segmento di questo aggeggio sostituite il secondo disegno; e proseguite *ad infinitum*. Quindi, il primo è il passaggio zero, poi abbiamo la prima iterazione, la seconda (in cui vi ho lasciato in grigio chiaro la prima iterazione) e la terza. Avanti così, se non avete fatto guai dopo qualche passaggio dovreste ritrovarvi un aggeggio tipo quello qui da qualche parte.



Bene, il sistema di descrizione utilizzato dallo storico (qualcuno preferisce *pre*istorico) programma ***Fractint*** funziona esattamente in questo modo: dato un ***assioma*** (la prima linea) si sostituisce una ***regola*** composta di copie dell'assioma (più piccole) ciascuna delle quali è attaccata alla fine della precedente ruotata in senso orario o antiorario di un certo ***angolo***; probabilmente è più facile se vi passo la descrizione di questo aggeggio secondo L-System:

```
KochCurve { ; Adrian Mariano
  Angle 6
  Axiom F
  F=F+F--F+F
  }
```

Avete il nome della curva, un paio di spazi per scriverci commenti e nome dell'autore in prima riga; in seconda riga, fornite l'angolo (in frazioni dell'angolo giro: quindi la rotazione è di ***60*** gradi); in terza riga, l'assioma; una linea, chiamata ***F*** e infine, la regola di iterazione: ad ogni ***F*** sostituite prima un ***F*** tale e quale, girate a sinistra di 60 gradi (il segno più) e tracciate un altro ***F***; poi girate due volte a destra di 60 gradi (i due segni meno)… e avanti così[18].

---

[17] Nota per i curiosi: prende origine dal biologo Lindenmayer, che lo ha utilizzato per descrivere la crescita degli organismi viventi.

[18] Motiviamo il titolo? Mandelbrot porta come esempio di frattale la costa dell'Islanda; se la misurate con un righello lungo venti metri, facendo in modo che le estremità siano sempre sulla battigia (non si chiama bagnasciuga), otterrete un certo valore; se, con lo stesso metodo, utilizzate un righello lungo un metro, ottenete un valore decisamente maggiore. Il che ricorda clamorosamente il passaggio da un segmento a una serie di segmenti. Tutto qui? Sì.

Carino, vero? Un modo per ***non*** vedere la bellezza di questo procedimento è quello di vedere cosa succede ad ogni passo, sostituendo nella formula in modo diretto. Con l'opzione di "replace" è facilissimo: qui di fianco avete i primi due passaggi, e quindi l'ultima formula rappresenta il nostro terzo disegno; se vi piace, da qui in avanti potete calcolarvelo voi, io non è che mi ci entusiasmi.

```
F
F+F--F+F
[F+F--F+F]+[F+F--F+F]--[F+F--F+F]+[F+F--F+F]
```

Come nota a margine, mi limito a segnalarvi che se partite da un assioma un po' diverso come ad esempio un triangolo equilatero (***F++F++F***) ottenete la cosiddetta "curva del fiocco di neve", che è chiusa (ed è una bellissima decorazione per gli auguri di Natale).

Bene, chi ci prova a calcolare la dimensione?

La dimensione topologica è sicuramente ***1***: basta un punto da qualche parte e avete diviso in due la curva, che non è altro che una linea un po' attorcigliata.

Per quanto riguarda la dimensione di Hausdorff-Besicovitch, proviamo a tagliare un po' per i campi, come nostro solito. In sostanza, voi prendete il segmento iniziale e a quello sostituite ***quattro*** copie dello stesso segmento, ciascuna ridotta di un fattore ***tre***; la lunghezza del secondo esemplare quindi sarà pari a $\frac{4}{3}$ dell'esemplare precedente. E avanti così. Quindi, la lunghezza della curva è ***infinita***. Bene, la dimensione è maggiore di uno.

A coprirla con dei quadrati, non mi sembra neanche il caso di provarci: non è neanche chiusa… Questa viene zero di sicuro, quindi la dimensione è minore di due.

Quindi, è maggiore di uno e minore di due.

Beh, io sono stato attento; da nessuna parte ho scritto che la dimensione deve essere *intera*… Infatti,

> *Un* **frattale** *è un insieme per cui la dimensione di Hausdorff-Besicovitch è* **strettamente maggiore** *della dimensione topologica.*

Che è una definizione più precisa rispetto a quella di Doc, anche se indubbiamente meno pittoresca[19].

Qui, bisogna fare un po' più di conti. Per favore, lasciatemi chiamare "grandezza" la "dimensione" nell'altro senso del termine. E andiamo con calma, partendo da qualche esempio.

Se partiamo da un segmento, possiamo dividerlo in segmenti più piccoli, ciascuno di grandezza pari a metà del segmento originario. La lunghezza del segmento genitore sarà allora la somma dei due segmenti più piccoli, ciascuno dei quali ha lunghezza ***metà*** dell'originale.. Se invece parliamo di aree, allora prendiamo un quadrato e possiamo dividerlo in quattro quadrati figli ciascuno avente area ***un quarto*** dell'originale… ***un ottavo***… e avanti così. È chiaro, fin qui?

Bene, dovreste riuscire a ricavare la regola: *data una figura di grandezza* **S**, *la dividiamo in* **N** *parti simili alla figura data, ciascuna di grandezza* $\frac{S}{N}$ *tale che*

[19] "Un frattale è qualsiasi cosa per cui uomini, donne e programmatori sono d'accordo nel dire che stia benissimo come screen saver" (Piotr R. Silverbrahms, comunicazione personale)

$N * \left(\frac{S}{N} \right) = S$. *In ognuno dei casi utilizziamo una diversa funzione per esprimere* **S**. Il tutto è riassunto nella tabella qui da qualche parte.

Figura	***Fattore***	***S(a)***
Segmento	$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right)^1$	$S(a) = a$
Quadrato	$\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} \right)^2$	$S(a) = a^2$
Cubo	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} \right)^3$	$S(a) = a^3$

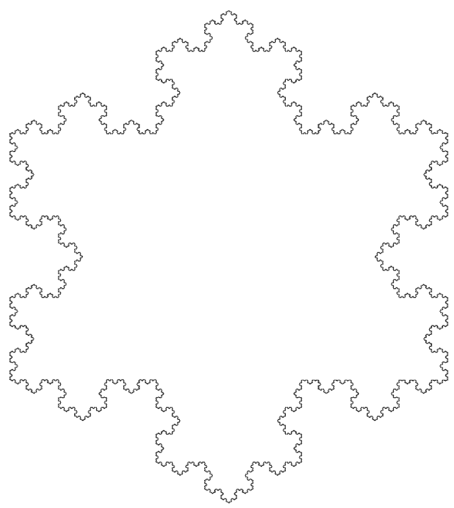
Riassumendo, *Esiste un parametro* **D** *tale per cui* $N * \left(\frac{S}{N} \right) = S$ *può essere riscritta come* $N * \left(\frac{a}{M} \right)^D = a^D$, *in cui* **a** *è la "grandezza lineare" della figura,* **M** *è il numero di parti in cui la dividiamo e* **N** *è il numero totale di parti utilizzate.*

Da questo, si ricava che è $N * M^{-D} = 1 \Rightarrow N = M^D$; nei casi precedenti abbiamo imposto ***M=1,2,3***. A questo punto *[…e qui casca l'asino… (RdA)]* definiamo come ***dimensione*** il valore:

$$D = \frac{\log N}{\log M} \qquad \texttt{[007.001]}$$

…senza pretendere che sia intero[20].

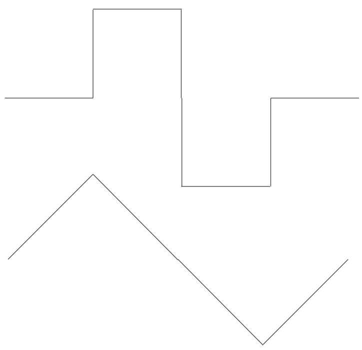
Ora, se siete arrivati sin qui meritate un premio. Il "fiocco di neve" ve lo disegno qui di fianco, con grande fatica *[pochi secondi in FractInt, in realtà… Ho dovuto scrivere la formuletta (RdA)]*.



Contenti? Bene, adesso calcolatene la dimensione.

Ci vuole un attimo, se avete capito tutto: qui abbiamo ***N=4*** (in quanto a ogni segmento sostituiamo quattro segmentini) e ***M=3*** (in quanto ogni segmentino è ***un terzo*** del segmento originale). Da cui, la dimensione di questo aggeggio diventa $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.261859\ldots$

Semplice, vero? Sì, a parte il fatto che è un numero piuttosto intrattabile…

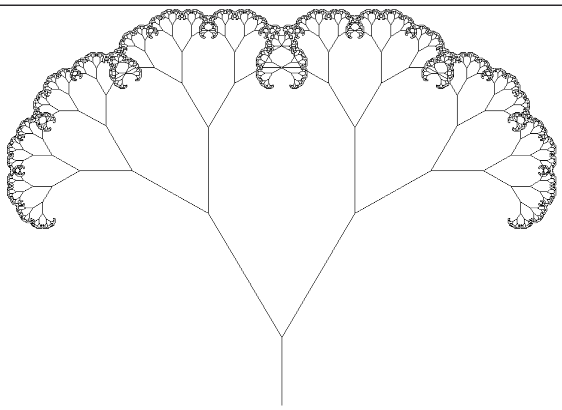


In effetti, buona parte delle cose che generate con LSystem danno origine a dei valori irrazionali. Ne conosco poche per le quali si abbiano dei valori (almeno) razionali, ma qui sta il bello del giochino. A titolo di esempio, provate con questi due che trovate qui di fianco; dovreste ottenere dei valori razionali; nel primo caso, ***N=8*** e ***M=4*** vi portano alla dimensione $D = \frac{3}{2}$, mentre nel secondo (un filino più complicato) dovreste avere ***N=4***

[20] Quelli che hanno chiesto "…in che base?" restano a pulire la lavagna.

e $M = \left(\frac{4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$ che dovrebbe portarvi a $D = \frac{4}{3}$.

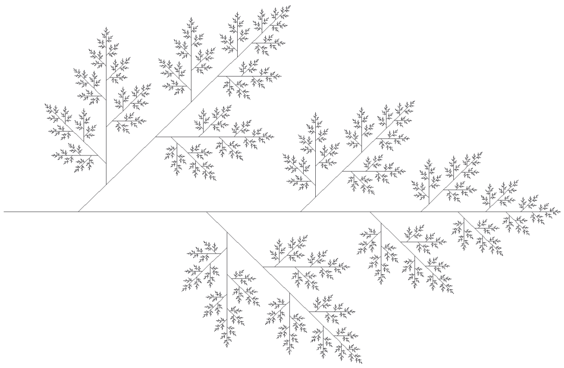
L'ambiente è ingannevolmente semplice, ma all'interno di L-System si possono ricavare anche degli oggetti piacevoli per cui il calcolo della dimensione è decisamente complesso. Se la nostra grande linotype non opera censure (lei odia i cavoli e i files di grosse dimensioni), quelli che trovate qui da qualche parte sono un buon esempio in merito (no, non si possono "vedere meglio": sono già in bianco e nero, il grigio è dato dai "buchi". E il tutto, con sole venti iterazioni).



```
Cavolfiore { ;
       angle=12;
       axiom +++FX
       X=@.6[-FX]+FX
}
```

Le formule sono abbastanza complicatine, e richiedono qualche conoscenza in più del "linguaggio", ma se vi piacciono potete procurarvi fractint[21]. Se ottenete qualcosa di bello mandate, pubblicheremo.

Col "cavolo", che vi dico la dimensione…



```
Cima di paglia { ;
       angle 8
       axiom a
       a=f[+x]fb
       b=f[-y]fa
       x=a
       y=b
       f=@1.36f@i1.36
}
```

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[21] Una veloce ricerca in rete vi fornirà il sito; se volete anche il manuale, attenzione che dovete prendere anche la versione DOS, unica in grado di generarlo. Lì trovate spiegato tutto il linguaggio..