Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 058- Novembre - Anno Quinto

1. Fuoco, Acqua e Infinito

Non deve essere facile insegnare.

Una vita passata dalla parte sbagliata della cattedra ci fa sentire una profonda affinità elettiva con il vasto popolo degli studenti, ma bisogna riconoscere che il mestiere dell'insegnante, dalla scuola materna ai dottorati di ricerca, non deve essere una passeggiata. E non stiamo parlando delle molteplici e serissime difficoltà amministrative, burocratiche ed economiche che ogni docente deve affrontare per ottemperare agli obblighi professionali; l'osservazione è circoscritta unicamente alle difficoltà connesse alla trasmissione della conoscenza.

C'è sempre qualcosa di magico in un bambino di sei anni che a Settembre varca i cancelli della scuola elementare per uscirne qualche mese dopo già in grado di leggere e scrivere: ci vorranno ancora anni perché riesca a padroneggiare bene entrambe le attività, ma i progressi che i piccoli uomini fanno a quell'età sono incredibili e misteriosi. Partono dal nulla e, con l'aiuto di maestre, matite e metodo, acquisiscono gli strumenti fondamentali della conoscenza. Imparare ad utilizzare l'alfabeto è una pratica consolidata ormai da qualche migliaio di anni, ma mantiene inalterato il suo fascino misterioso.

Quando però le conoscenze da acquisire diventano più specializzate, anche i metodi di insegnamento e di apprendimento si diversificano, per necessità interna; ed è qui che si scoprono specifici ostacoli nel tentativo di "spiegare il mondo" alle giovani menti. La assoluta mancanza di esperienza nel campo dell'insegnamento ci farà forse prendere degli abbagli, ma la sensazione è che, da questo punto di vista, l'insegnante di matematica non sia il più sfortunato del corpo docente. Questo non perché la matematica sia più facile delle altre materie d'insegnamento: anzi, a prescindere dalla sua oggettiva facilità o difficoltà, la nostra amata scienza è pregiudizialmente considerata "difficile", quando non addirittura impossibile. E' ancora forse l'unica disciplina in cui suonano normali affermazioni quali "mio figlio non è proprio portato", o "la ragazza ha davvero il pallino". Senza voler sindacare troppo sulla reale esistenza o meno di tale "predisposizione naturale", positiva o negativa che sia (e di solito considerata immutabile per tutta la vita), ci limitiamo ad osservare che raramente si sentono le stesse affermazioni riguardo alla filosofia o alla letteratura inglese. Ma la ragione per cui riteniamo che l'insegnamento della matematica dovrebbe risultare meno complesso di altre materie e' che il docente è, in genere, in grado di misurare meglio dei colleghi il grado di reale comprensione della disciplina da parte degli studenti. In matematica è difficile nascondere "debiti formativi", perché anche se nel corso degli anni gli argomenti di studio cambiano e si susseguono, i fondamentali (come ad esempio la tavola pitagorica; ma non solo) sono continuamente riutilizzati e argomentati.

Questa possibilità di misurare la confidenza che lo studente ha acquisito con la materia non è sempre altrettanto disponibile per gli insegnanti di altre discipline. Da studente, conoscevo con buona approssimazione il mio grado di preparazione in matematica (viaggiavo regolarmente in quello spazio che tecnicamente si definisce "sufficienza risicata") e il mio insegnante condivideva, purtroppo, tale preziosa conoscenza. Ma non accadeva la stessa cosa per altre materie; soprattutto, non accadeva affatto per la storia. Pur potendo esibire un rendimento scolastico prossimo alla decenza, trovavo impressionante il profondissimo livello di ignoranza storica che il mio cervello gelosamente custodiva. Questo forse dipende dal fatto che "insegnare la storia" è oggettivamente difficile. Non è certo impossibile studiare una lezione, impararla, ripeterla e ottenere un buon voto alla verifica: è però assai più difficile fare in modo che tali conoscenze maturino, si connettano alle altre consorelle, fino a costituire una vera e propria cultura. La tragica verità viene alla luce solitamente qualche anno dopo che si sono concluse le scuole medie superiori: nomi e ordinali di re e regine, faticosamente appresi, sono ridotti a fanghiglia meningea: interi secoli risultano totalmente assenti dal reparto "cultura generale" del cervello[1], e solo qualche superuomo riesce a vedere una reale continuità da Omero a Gorbaciov. Tutti sanno che continuità esiste, ma sentirla davvero è tutto un altro paio di maniche.

Forse è un problema sentito più dalle generazioni di mezzo che da quelle più giovani: e se così fosse, avremmo davvero occasione per rallegrarci: una vignetta di Staino di qualche anno fa mostrava Bobo, quarantenne barbuto, in ascolto della figlia Ilaria che gli chiedeva aiuto per preparare la lezione. La bimba chiedeva se era giusto supporre che la forza principale dell'antica Roma consistesse nell'innovativo sistema politico della "federazione", ma il padre riusciva solo a raccontarle della mano bruciata di Muzio Scevola, della botte piena di chiodi di Attilio Regolo e dei gioielli di Cornelia. La striscia si chiudeva con Ilaria che chiede perplessa al papà se lui da piccolo avesse studiato la storia su Novella Duemila, e la domanda non era certo peregrina. Quello che i coetanei di Bobo hanno imparato di storia alle elementari è esattamente questo: un po' di gossip nobilitato dall'invecchiamento e, siccome l'aneddoto e il pettegolezzo sanno ancorarsi in memoria assai meglio delle conoscenze strutturate, la conseguenza finale è un'ignoranza quasi formidabile.

[1] Provate da soli, con un piccolo esame privato: quanti nomi (di qualsiasi natura: storia militare o politica, letteratura, scienza) riuscite a nominare del settimo secolo dopo Cristo? Del quarto? Del dodicesimo?

I primi sospetti del disastro conoscitivo affiorano in maniera subdola: ad esempio, quando si fa fatica a capire, anche con ragionevole approssimazione, in quale epoca storica siano situati i film western. Nonostante si vedano benissimo treni, orologi e mitragliatrici, molta gente tende a posizionarli assai più indietro nel tempo di quanto in realtà non siano. Per contro, la forza di penetrazione mnemonica dei film e telefilm è così forte che il Settimo Cavalleggeri del Generale Custer è noto quasi universalmente, e molti assumono che la battaglia del Little Big Horn sia più o meno comparabile, come dimensione e importanza, allo sbarco in Normandia. Quando poi gli si ricorda che nell'epico scontro morirono forse 200 persone, si sentono quasi defraudate.

Perché i sentimenti sono assai più facilmente solleticati dalle "storie" che dalla "storia"; e soprattutto perché, a meno che un bel romanzo o un gran film non vengano in aiuto all'immaginazione, è davvero difficile calarsi nell'evento, immaginare davvero quello che poteva significare un episodio in un determinato momento storico. Paradossalmente, potrebbero forse essere proprio le nude cifre a dare una mano nella visualizzazione degli accadimenti: le cifre unite al piccolo sforzo di capire davvero cosa quelle cifre vogliono dire. Con tutte le limitazioni del caso, ovviamente: quando muore un uomo muore un intero universo, e la mera quantificazione in certi casi ha un valore soltanto relativo. Ciononostante, e senza voler sottendere alcun insegnamento morale, dovrebbe stupire che il luogo e il modo della morte del generale di brigata George Armstrong Custer sia noto a tutte le persone di media cultura, mentre i tempi e i modi della battaglia di Stalingrado lo sono assai meno. A Stalingrado i morti, di tutte le parti, furono 1.109.000: il che significa che per ogni singolo cavalleggero di Custer a Stalingrado si è avuta una carneficina pari al disastro del Vajont e delle Twin Towers messe assieme. Visualizzare le "storie della storia" è sempre difficile e faticoso; e anche rischioso. Stalingrado e' stato un massacro moderno della durata di cinque mesi, Little Big Horn si è consumato nello spazio di un solo giorno e con la tecnologia del massacro relativamente poco sviluppata del 1876. Non appena si supera lo stupore dato dalle cifre, cominciano le considerazioni più meditate e i distinguo; ciononostante, anche tenendo conto dei distinguo, la storia mantiene la capacità di stupire.

Duemiladuecentoventi anni fa la tecnologia era decisamente più malandata di quella del tardo diciannovesimo secolo, eppure si celebravano carneficine di fronte alle quali molti disastri moderni impallidiscono. Un cartaginese quasi mai vissuto a Cartagine, potenza marittima per eccellenza, decise di affrontare in terraferma le legioni della maggiore potenza terrestre dell'epoca. Nella quasi totale assenza di strade attraversò mezza Europa, dall'Iberia fino alla pianura padana, superando le Alpi con un intero esercito nel quale erano pochissimi i connazionali punici. Cosa voglia dire muovere un esercito di migliaia di uomini nel territorio dell'Europa del terzo secolo avanti Cristo non è cosa facile da capire: le cronache dicono che Annibale perse un occhio per una malattia presa durante l'attraversamento di paludi, e al lettore di oggi è richiesta una buona dose di fantasia per immaginare cosa volesse dire, allora, valicare catene montuose o acquitrini vasti quanto intere province. Il solo attraversamento di un fiume poteva voler dire perdere mesi, se non esistevano guadi. I "tempi" di quei tempi sono profondamente diversi da quelli di oggi. Pure, nonostante quei tempi rallentati, il punico coglieva successi su successi, e in ognuno dei primi anni della sua presenza in Italia ottiene delle vittorie devastanti, ognuna delle quali riduce notevolmente il potenziale bellico romano. Nel 218, anno di arrivo, ci sono le battaglie del Ticino e della Trebbia. Nel 217, sulle rive del Trasimeno, un intero esercito consolare viene spazzato via, insaccato tra le truppe puniche e le acque del lago umbro. "Esercito consolare" significa venticinquemila uomini: di questi, scamparono seimila cavalieri e pochi altri. Roma non aveva mai neanche immaginato la possibilità che un intero esercito potesse scomparire così: un esercito può essere sconfitto, sbaragliato, ridotto in frammenti disorganizzati, ma totalmente cancellato? Il 217 fu l'anno in cui Roma si preparò ad essere conquistata; i consoli erano due, e due erano gli eserciti consolari, ma Annibale si era lasciato alle spalle le truppe dell'altro console, che in ogni caso non sembrava in grado di fermarlo.

Cosa davvero accadde nelle case romane, dopo la battaglia del Trasimeno? Quale livello di panico dovettero sopportare i futuri padroni del mondo? E cosa dovettero chiedersi, quando scoprirono che i punici non approfittavano della situazione, tirando dritti verso sud, invece di cingere d'assedio Roma? Con quale spirito cominciarono a riorganizzarsi, con leve e reclutamenti straordinari, fino a riuscire a ricostituire due nuovi eserciti, ancora più forti e numerosi di quello inghiottito dal Trasimeno? Ci riuscirono: il momento terribile del 217 fu affrontato e superato. Nuove legioni furono costituite, organizzate, schierate e messe agli ordini di Quinto Fabio Massimo, il temporeggiatore. Il "Cunctator" non si sognava neppure di affrontare Annibale in campo aperto: sapeva benissimo che non avrebbe avuto speranza, neanche con forze superiori di numero. Ma lo controllava, gli impediva i movimenti e i saccheggi. E presto sarebbe arrivata la rivincita, e il 217 superato e dimenticato. Venne infatti il 216.

Geometria: se, dopo le battaglie, fosse stato possibile vedere i luoghi degli scontri dell'antichità da un aeroplano, quello che si sarebbe visto sarebbero state delle forme a "goccia allungata". Le rituali tecniche di massacro prevedevano infatti uno schianto iniziale tra le truppe, e i cadaveri lasciati sul terreno in questa fase costituiscono il nucleo della goccia. Poi, la parte che ha la peggio volge in rotta, scappando: e i vincitori cominciano l'inseguimento e il metodico scannamento. E questo disegna sul terreno la lunga "coda" della goccia, che diventa via via più sottile mentre si allontana dal luogo dello scontro iniziale. Ma se un aereo avesse sorvolato i cieli di Puglia sopra la valle dell'Ofanto, la sera del 2 Agosto 216 a.C., avrebbe visto invece solo una "goccia senza coda", ma compatta, e molto, molto intensa. Quel giorno il comando delle legioni romane toccava a Terenzio Varrone, che non era uno che amava temporeggiare. Nonostante il parere contrario del collega, Lucio Emilio Paolo, Varrone schierò l'intera forza romana sulla piana di Canne per ingaggiare battaglia. La geometria che tagliò via la "coda" della goccia fu causata da Annibale e dalla sua strategia che, grazie alla superiorità della cavalleria numida, riuscì ad accerchiare completamente i romani chiudendo loro ogni possibile via di fuga, e procedendo poi ad un metodico massacro.

Aritmetica: in quel solo giorno, rimasero uccisi ottantamila uomini. Ottantamila sono le parole che servono per scrivere un lungo libro, sono i chilometri che servono a fare due volte il giro del mondo, sono poco meno del numero di secondi contenuti in un giorno. In quel giorno di Agosto, ottantamila persone morirono insieme, di morte violenta: e a differenza di quanto succede oggi grazie agli esplosivi, ogni morte di quel giorno era in stretta relazione biunivoca con un esplicito atto muscolare ed omicida compiuto da qualcun altro. Non bastano i numeri a disegnare compiutamente un evento della storia degli uomini: ma dovrebbero essere almeno un inizio, una prima e grossolana valutazione degli sconvolgimenti degli animi che quell'evento hanno vissuto. Sono infatti davvero molti gli interrogativi che i numeri non riescono neanche a scalfire: con l'esercito romano del tutto annientato, perché Annibale non seguì il consiglio di Maarbale[2] dirigendosi subito verso Roma? Perché continuò ancora a cercare di sollevare le popolazioni italiche alla ribellione, se il nemico era ormai inerme? Perché, visto che gran parte dell'Italia meridionale era poi già passata dalla

[2] Maarbale era il comandante della più formidabile arma punica, la cavalleria. "Tu sai come ottenere le vittorie, Annibale, ma non sai come sfruttarle", disse al suo comandante, quando questi rifiutò, subito dopo Canne, di seguire il suo consiglio di dirigersi immediatamente contro l'Urbe.

parte del vincitore di Canne[3]? I numeri non possono rispondere a questo; più che a dare risposte, le cifre sono infatti brave a porre ulteriori domande.

Grazie alle cifre, per esempio, si può dare un piccolo contributo alla causa di chi si rifiuta di ammantare di "gloria" qualsivoglia azione militare. Il nostro inno nazionale celebra ancora "l'elmo di Scipio", e le guerre puniche sono uno dei pochi momenti, durante lo studio della storia, in cui l'orgoglio nazionale militare trova soddisfazione. Nulla da eccepire, se davvero si ritiene gratificante e soddisfacente veder vincere una battaglia: ma rammentare che per ogni cartaginese della seconda guerra punica scesero in campo ventiquattro romani potrebbe in parte smorzare gli eroici entusiasmi. I numeri da soli non bastano a render conto di come doveva essere la vita in quegli anni di guerra continua: i cartaginesi d'Africa che scendono in Italia partendo dalla Spagna; i romani che alla fine riescono ad avere la meglio proprio riconquistando prima la Spagna, mantenendo lo stallo in Italia, e infine arrivando in Africa loro stessi. Di nuovo, i semplici conteggi servono non a spiegare, ma a porre nuovi interrogativi: un bravo studente di liceo, interrogato qualche anno dopo l'esame di maturità, riesce probabilmente ancora a ricordare la discesa fino a Canne, e forse anche che a questa seguì la rivincita romana con Scipione a Zama[4]. Se era uno studente davvero diligente e attento, forse rammenta anche che, prima di Zama, ci fu la fondamentale vittoria romana sul Metauro, ai danni degli unici seri rinforzi cartaginesi portati ad Annibale dal fratello Asdrubale. Ma se al bravo studente cadono gli occhi sulle date, è difficile che non rimanga perplesso: nello studiare una lezione di storia si tende a concatenare in fretta gli eventi salienti, e alcune volte anche le semplici sottrazioni risultano complicate. Ad esempio, la guerra inizia nel 218, e nell'estate del 216 sembra finita nella piana di Canne: meno di tre anni contengono la più clamorosa marcia militare della storia antica e quattro sconfitte apocalittiche delle legioni romane. Zama, che resterà poi l'unica vera sconfitta di Annibale, arriva solo nel 202.

Tra il 216 e il 202 trovano spazio quattordici anni. Cosa succedeva in Italia, in questi quattordici anni? Succedevano molte cose: Annibale Barca possedeva l'Italia da Roma in giù, faceva "ozi" a Capua, e arrivò anche a fare un picnic non troppo distante da Porta Pia[5]. Il senato e il popolo dell'urbe si affidavano di nuovo allo "scudo di Roma", Quinto Fabio Massimo, e quando ebbero finalmente la forza di essere di nuovo qualcosa di diverso da zero dal punto di vista militare, anche alla "spada di Roma", Claudio Marcello. Questi fu uno dei condottieri romani più importanti della guerra annibalica, anche se viene dimenticato con una certa facilità: negli anni in cui la guerra fu segnata non più dalle colossali battaglie campali ma dalle scaramucce e dalla guerriglia, le sorti romane furono tenute quasi esclusivamente da questo generale, che Plutarco ritenne tanto grande da dedicargli una delle sue "Vite Parallele"[6]. Nel raccontare le imprese del romano, lo storico greco (che non era certo

---

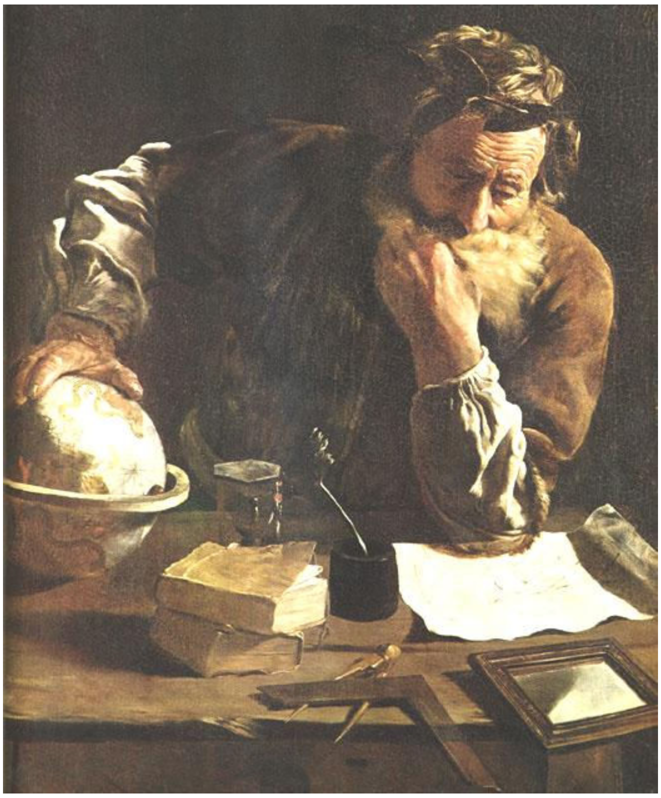
[3] Arnold J. Toynbee, uno dei più grandi storici del XX secolo, ipotizza addirittura che sia da ricercare in questi anni la radice iniziale della sempiterna "questione meridionale" che affligge da sempre lo stato unitario italiano.

[4] La battaglia non sembra poi essersi svolta a Zama, ma a Naraggara, che da Zama dista quasi un centinaio di chilometri.

[5] Narra la leggenda che, con un paio di compagni, giunse sotto le mura di Roma, a Porta Collina, lanciando un giavellotto infuocato oltre le mura, che cadde nel Campo Scellerato (il luogo dal nome infelice è maledetto tuttora: coincide con un cortile all'interno del Ministero delle Finanze). "Hannibal ad portas!" vale ancora come proverbio latino per indicare l'imminenza di una tragedia.

[6] Secondo Plutarco, il "parallelo" di Marcello era Pelopida, il generale tebano amico fraterno (qualche maligno sostiene che fossero anche più, che "amici fraterni") di Epaminonda. Insieme vinsero a Leuttra, nel 371 a.C., contro gli Spartani, e la battaglia fu memorabile sia perché una sconfitta di Sparta non si era mai vista prima, quantomeno di quelle proporzioni; sia perché la vittoria fu determinata in massima parte

contemporaneo di Marcello: visse tre secoli dopo) narra la parte più sporca della guerra: quella che diventa routine, abitudine, con città che vengono perse, riconquistate e ancora perse; con saccheggi, violenze sui civili, e continue schermaglie. Ma, per nostra fortuna, narra anche le imprese del più grande matematico del mondo antico.



Nell'isola il cui nome significa più o meno "Triangolo", la città di Siracusa era fortezza solida protetta dal mare e da mura possenti; e quando Marcello si predispone ad espugnarla, attorno al 212 a.C., non sa ancora che la principale arma di difesa della città è un vecchietto figlio di un astronomo dal nome di scultore[7]. Archimede di Siracusa nacque nella città siciliana probabilmente nel 287: lo si deduce proprio da Plutarco, che afferma che il geniale matematico siracusano aveva compiuto i settantacinque anni nell'anno dell'assedio romano. E' anche curioso che la maggior parte delle informazioni su Archimede provengano dalla "Vita di Marcello" scritta dallo storico greco nell'ambito delle sue "Vite Parallele": quasi come se, mutatis mutandis, si fosse costretti a dedurre le implicazioni della Teoria della Relatività basandosi sugli accenni ad Einstein e alla sua celebre lettera riportati in una ipotetica biografia del generale Eisenhower. Ma va anche detto che il genio archimedeo era ben evidente anche ai suoi contemporanei, e la figura dello scienziato talmente elevata e affascinante che i dettagli sulla sua vita sono numerosi, anche se inglobati nella biografia di un'altra persona. Anzi, il genio di Archimede era probabilmente fin troppo affascinante, al punto che quasi tutti gli episodi che lo riguardano sono entrati di forza nella conoscenza popolare, rivestiti da un'aura di leggenda. Tutti ricordano l' "Eureka!" che annunciava la scoperta del principio che da Archimede prende il nome, anche se è probabile che il ricordo sia più legato al fatto che leggenda vuole che lo scienziato sia subito saltato fuori dalla vasca da bagno correndo nudo per la città urlando a squarciagola, piuttosto che al contenuto vero e proprio della scoperta. Il luogo comune dello scienziato perennemente assorto in meditazione (e conseguentemente assente e distratto nelle normali attività quotidiane) trova in Archimede un eccezionale testimone a favore. Eppure, il siracusano sembra proprio che di senso pratico ne avesse da vendere.

dal "battaglione sacro" tebano, che combattè in maniera davvero eroica. E, sempre secondo il maligni, quel battaglione era composto tutto da coppie di "amici fraterni". Pettegolezzi a parte, con Leuttra inizia il periodo di predominio tebano dell'Ellade.

[7] Si chiamava Fidia, il papà di cotanto genio; con tutto il rispetto del sommo scultore, se consideriamo Archimede come una sua "opera", l'astronomo batte lo scultore di diverse lunghezze, in quanto a creatività.

Gli storici antichi sembrano attratti soprattutto dalle capacità di invenzione e costruzione che Archimede aveva: cosa che non stupisce, in fondo, visto che ebbe parte importante nella vita sociale della sua città e negli avvenimenti bellici che segnarono la difesa di Siracusa. Del resto, facendo il solito esercizio di calarsi, per quanto possibile, nell'atmosfera di quei tempi, gli effetti pratici dell'intelletto archimedeo erano semplicemente devastanti. Se Vitruvio narra con dovizia di particolari la scoperta della spinta idrostatica, che in fondo si limitava ad essere lo smascheramento di un falso in bilancio[8], Plutarco mostra stupore e ammirazione soprattutto per i "congegni" inventati a fini bellici. Catapulte e paranchi, complicati sistemi di leve che consentivano al nostro eroe di muovere una intera nave senza sforzo alcuno; micidiali arieti che sbucavano velocissimamente dalle mura a picco sul mare per colpire e affondare le triremi romane; tutti ordigni che all'epoca non potevano non sembrare frutto di stregoneria. E' del resto stupefacente ancora oggi immaginarsi dei sistemi puramente meccanici (e senza l'ausilio di alcun motore) in grado di fare quanto Plutarco descrive: fino al misterioso passo in cui si narra addirittura dei terrificanti specchi ustori, in grado di incendiare a distanza le navi nemiche. Questa arma da fuoco ante litteram interessò molto gli studiosi del Seicento, che si cimentarono nel tentativo di ricostruire gli specchi micidiali: Bonaventura Cavalieri analizzò le possibili soluzioni al mistero ustorio, senza peraltro riuscire ad ottenere dei risultati significativi. E non è prova facile, bisogna riconoscerlo: anche se ogni discolo contemporaneo riesce facilmente ad arrostire povere formiche disgraziate con una comune lente di ingrandimento, la tecnologia del tempo vedeva una lente convergente più o meno alla stessa maniera di come la tecnologia attuale vede i viaggi nell'iperspazio, per non parlare delle dimensioni ciclopiche che tale lente avrebbe dovuto avere: l'unica vaga possibilità è quella che passa non per la rifrazione, ma per la riflessione dei raggi solari su uno specchio parabolico. Ma perché uno specchio parabolico riesca a concentrare nel fuoco del paraboloide abbastanza raggi solari da incendiare qualcosa, questo fuoco dev'essere abbastanza vicino alla superficie dello specchio stesso, rendendo quindi impossibile l'idea di incendiare le navi "a distanza"; o, in alternativa, essere di dimensioni così grandi da rendere la sua costruzione praticamente impossibile ancora oggi. Come riuscì a domare il fuoco del Sole, allora, il vecchio Archimede? Non vi riuscì, dicono oggi gli storici: gli specchi ustori sono certamente una leggenda, una impossibilità storica. E probabilmente gli storici hanno ragione: gli specchi archimedei non esistevano. Ma questa conclusione non elimina tutti gli interrogativi; restano le pagine di Plutarco, ridotte a mera fantascienza, e, abbastanza stranamente, ad una fantascienza che però conteneva un principio fisico reale e realistico. C'è però qualcosa che gli specchi ustori ci dicono comunque, siano essi leggenda o realtà: ci dicono che Archimede veniva considerato, nell'antichità, come un uomo capace di ogni scientifica magia. Se era davvero capace di penetrare i segreti delle forze dell'acqua, perché non poteva imbrigliare la potenza del fuoco? Se riusciva davvero a muovere una nave con un solo dito, perché non poteva, a meno d'un singolo punto d'appoggio, sollevare il mondo intero?

---

[8] La storia è risaputa, ma a beneficio di chi non la ricorda, la riassumiamo velocissimamente. Gerone, tiranno di Siracusa, aveva commissionato ad un orefice una corona d'oro a scopi votivi. Indotto a sospettare che la corona, pur splendida, non fosse interamente d'oro come concordato ma che contenesse una parte di argento, chiese ad Archimede come si potesse verificare se il suo regale sospetto fosse fondato o meno. Archimede prese allora il celebre bagno, e mentre il livello della sua vasca si alzava a causa della sua abluzione, scoprì come determinare la genuinità della corona. Si fece prestare dal tiranno due corpi dello stesso identico peso della corona, uno interamente d'oro e l'altro interamente d'argento; li immerse a turno in un recipiente colmo fino all'orlo d'acqua, misurando accuratamente la quantità d'acqua che ne traboccava. L'acqua che fuoriusciva a causa dell'oro (che ha peso specifico maggiore dell'argento) era minore di quella fatta traboccare dall'argento. Quando infine immerse la corona sospetta, osservò che la quantità d'acqua che fuoriusciva dal contenitore era superiore a quella versata dal corpo d'oro, svelando l'inganno perpetrato ai danni di Gerone. Era ovviamente possibile anche determinare, con una semplice proporzione, la quantità dell'argento usata al posto dell'oro nel forgiare la corona.

Archimede figlio di Fidia vedeva certamente il mondo in maniera diversa da come lo vedevano gli altri uomini. Il suo unico viaggio accertato fuori da Siracusa fu quello ad Alessandria d'Egitto, dove fino a non molti anni prima lavorava Euclide. Fu lì che, forse spinto dalle evidenti difficoltà di estrazione d'acqua dal Nilo per l'irrigazione, inventò la "vite di Archimede": una pompa che si basa puramente sulla geometria e cha ha ancora oggi applicazioni sul campo. Questa sua capacità di immediata visione seguita da diretta applicazione non poteva non essere ammirata dai suoi contemporanei; la sensazione che permane è però quella, vagamente irriverente, che i suoi concittadini di Siracusa considerassero Archimede in maniera non troppo dissimile da come gli abitanti di Paperopoli considerano il suo mezzo omonimo Archimede Pitagorico: un geniaccio distratto e sregolato, capace di inventare qualsiasi cosa. Sensazione che però è essenzialmente sbagliata.

Archimede inventò moltissimo, senza essere nell'animo un inventore; esplorò principi fondamentali della fisica, senza essere in realtà troppo attratto dalla filosofia naturale: quello che realmente e profondamente lo interessava era solo la matematica. Lo si capisce non solo dalle pagine degli storici, che pur ponendo l'attenzione sulle realizzazioni pratiche dello scienziato non nascondono che l'unica cosa per lui realmente interessante erano i suoi pensieri profondi e le figure geometriche che disegnava incessantemente: anche sulla sabbia, persino nell'acqua della vasca da bagno, sul suo stesso corpo, passandosi le dita sulla pelle e restando a guardare gli invisibili triangoli che le sue mani avevano marcato solo per lui. Lo si capisce anche dalle sue opere, che per fortuna sono giunte fino a noi, al pari delle sue gesta; ma se Plutarco e Polibio narrano della vita del matematico, nei suoi libri è il matematico stesso che parla di matematica, e ne parla in maniera stupefacente.

E' necessario fare un altro piccolo esercizio mentale, per tentare di capire la grandezza del greco-siculo: in questo rugginoso ventunesimo secolo i "fondamentali del far di conto" sono così radicalmente acquisiti che è fin troppo facile dimenticare la potenza semplificatrice che hanno al loro interno. I dieci simboli indiani delle cifre da zero a nove si imparano ancor prima che le lettere dell'alfabeto: il potere dirompente della notazione posizionale viene inoculata nei bambini prima ancora che siano in grado di chiedersi seriamente cosa siano in realtà i numeri che stanno addizionando, e si ritrovano prestissimo a maneggiare simboli misteriosi come lo zero, che l'Occidente ha adottato solo dopo duemila anni di matematica; sanno benissimo che "3" in penultima posizione significa una cosa ben diversa da un "3" in ultima posizione, quando scrivono un numero. Mettono numeri in colonna e addizionano migliaia, moltiplicano e dividono, perfino, seguendo algoritmi la cui magia può rimanere a loro ignota per tutta la vita. Ciononostante, con un pezzo di carta, una matita e un po' di pazienza riescono facilmente a moltiplicare fra loro le migliaia e a farle diventare milioni, e oltre.

I Greci non avevano questo strepitoso computer. Avevano le lettere dell'alfabeto, che in maniera non dissimile da quanto fecero poi i romani, servivano a segnare in qualche maniera le quantità numeriche. Non avevano la notazione posizionale, non avevano neanche la virgola e la parte decimale dei numeri non interi. Tutto quanto era non intero era espresso in frazioni, e maneggiato attraverso di esse. Provate a calcolare l'area di un triangolo di base 7 e ¾ e di altezza 123 e ¼, se volete provare l'ebbrezza dei loro calcoli, ma fatelo senza usare le cifre arabe e la virgola: fatelo a mente, se volete, ma in maniera onesta: non "riproducete" mentalmente l'algoritmo di moltiplicazione che avete imparato a scuola, evitate di visualizzare questo:

```
     123,25 x
        7,75 =
-----------
      ?????
     ?????
    ?????
-----------
  ???,????
```

perché quello che avete a disposizione è assai più simile a questo:

CXXIII e IV parte per VII e III di IV parti[9]

Il calcolo era un ostacolo di assoluta rilevanza, a quei tempi. Ed è probabilmente per questo che la matematica degli antichi Greci sembra essere soprattutto geometrica: esistono anche bellissimi teoremi non geometrici, come ad esempio la prova euclidea dell'infinità dei numeri primi. Ma non è un caso che quel teorema sia un gioiello di pura logica, che esplora e deduce proprietà dei numeri senza la necessità di eseguire neanche una piccola addizione[10].

Archimede non si spaventa di questo. Scrive addirittura un opera, "l'Arenario", in cui introduce un metodo per maneggiare numeri grandi e grandissimi. Il numero più grande che avesse allora un nome proprio era la "miriade", pari a diecimila, ma lui esegue facilmente il salto di livello, passa alle "miriadi di miriadi", alle "miriadi di miriadi di miriadi", e oltre ancora, introducendo una notazione che in qualche modo ha già un'aria moderna. "Arenario" viene proprio da "sabbia", perché in questa maniera Archimede si proponeva semplicemente di contare quanti granelli di sabbia contenesse l'Universo. Archimede calcola, e solo il cielo sa come riesca a fare certi calcoli. In geometria, scopre dei teoremi bellissimi: il semplice rapporto 2/3 che regolamenta sia il rapporto delle superfici che quello dei volumi della sfera e del cilindro lo entusiasma al punto da volerlo immortalato sulla lapide della sua tomba. E anche questo è un teorema stupefacente, che stupisce e meraviglia ancora oggi per la sua semplice e inaspettata bellezza.

Ma ci sono cose che corrono il rischio di non stupire più, semplicemente perché date per "scontate". Ai tempi di Euclide era già ben noto che il rapporto tra circonferenza e diametro del cerchio era costante per tutti i cerchi. Questo tipo di conoscenza, l'invarianza di un rapporto, è tipicamente greco: l'importante non è tanto il valore del rapporto stesso, quanto il fatto che non cambi in nessun caso. Era facile misurare, anche "sperimentalmente", che questo rapporto non doveva essere troppo distante da 3, ma il punto essenziale non era certo il suo valore esatto. Il cerchio nasconde però anche altri rapporti e altre proporzioni misteriose: l'area del cerchio, ad esempio, è in rapporto costante con il quadrato del suo diametro, e anche in questo caso conta principalmente questa precisa permanenza del rapporto più del fatto che valga (e

---

[9] Archimede usava l'alfabeto greco, ma aveva il vantaggio che quello era il "suo" alfabeto. Usare i numeri romani è ovviamente solo una meschina approssimazione traslata, ma serve a rendere l'idea.

[10] La redazione di RM coltiva anche la radicata opinione che questa difficoltà nel calcolo sia stata benefica per la matematica occidentale. Quello che oggi intendiamo per "matematica" (anche se ci guardiamo bene dal definirlo) ci sembra essere molto più connesso al concetto di "relazione" che a quello di "calcolo". In altre parole, ci sembra che la nascita del concetto di "dimostrazione matematica" sia nato e cresciuto nella matematica greca anche perché fertilizzato dalla difficoltà di calcolare numericamente grandezze matematiche complesse. Alcune matematiche orientali, come l'indiana o la cinese, sono storicamente più abili nel calcolo, ma prive del "rigore" originato dalla metodologia della matematica greca. Il grande Ramanujan, che lasciava stupefatto Hardy e il resto del mondo per la sua straordinaria capacità di calcolo e di intuizione matematica, aveva seri problemi nel capire la "necessità della dimostrazione". Però, tutto questo è pura opinione, e come tale, per definizione opinabile: per questo lo scriviamo qui, in una timida e non comprovata nota a piè di pagina.

questa misura era già ben più complessa, da fare per via "sperimentale") un po' meno di 4/5. E si poteva forse continuare, comprendere anche l'immutabile rapporto tra il cubo del diametro e il volume della sfera e magari, chissà, scoprire che il misterioso valore non era troppo distante da 9/17. L'armonia era data dalle proporzioni, e dalle figure geometriche che gelosamente le conservavano perennemente.

Queste sono le conoscenze del mondo[11], quando Archimede scrive "Sulla misura del cerchio", un minuscolo trattato di poche pagine, quasi meno di quelle di questo articolo; è un libretto forse incompleto, che contiene solo tre proposizioni, e di queste tre la seconda è strana e quasi incomprensibile, probabilmente giunta a noi solo dopo alterazioni posteriori. Ma la prima terrificante proposizione è questa:

"L'area del cerchio è uguale a quella del triangolo rettangolo avente uno dei cateti pari al raggio del cerchio, e l'altro pari alla circonferenza".

L'area del cerchio! Neanche Euclide era riuscito a trovarla! E come suona strana, ai nostri orecchi, la proposizione che ne svela la formula… viene immediatamente voglia di riscrivere l'affermazione di Archimede in formule, come la scriveremmo oggi:

$$\mathbf{A_{cerchio} = rC/2} \qquad [1]$$

Ma suona strana lo stesso… l'usuale espressione dell'area del cerchio è talmente radicata nelle nostre teste che sembra innaturale, o perlomeno sorprendente, vederla parificata a quella di un triangolo, seppur dai cateti tanto particolari. Chi legge oggi quell'espressione, non può evitare di verificarla in un decimo di secondo: un "fondamentale" di geometria euclidea[12] sembra sempre essere $\mathbf{C=2\pi r}$, e in un amen l'espressione di Archimede sembra "verificata" perché immediatamente riconducibile a $\mathbf{A=\pi r^2}$. Solo che Archimede non ha tra i suoi "fondamentali" alcun "pi greco erre quadro", perché l'espressione dell'area del cerchio è il grande mistero dei suoi tempi.

E come dimostra la [1], il siracusano? Come ha potuto arrivarci? Uguagliare l'area del cerchio a quella di un triangolo sembra anche essere la stessa cosa della quadratura del cerchio: e se esiste al mondo uno in grado di quadrare il cerchio, quel qualcuno è certamente Archimede, che ha già quadrato anche la parabola. Ma no, non si tratta di vera "quadratura": sotto molti aspetti, e' perfino "più" di una quadratura impossibile. La dimostrazione della [1] sembra un complicato gioco di prestigio: quali erano gli strumenti matematici più eleganti e potenti, in quel tempo? Due gioielli brillavano, e brillano tutt'ora, nel panorama delle dimostrazioni alla greca: la "reductio ad absurdum" e il metodo di esaustione di Eudosso. Archimede conosce il metodo di esaustione meglio di quanto lo conoscesse lo stesso Eudosso, e la reductio ad absurdum gli è talmente familiare che la usa non una, ma due volte.

Riassumere il metodo di dimostrazione non è difficile: detta **C** l'area del cerchio e **T** l'area del triangolo sopra definito, Archimede dimostra che sia l'assunzione **C>T** che la contrapposta **T>C** portano a contraddizione. Non rimane che concludere che **C=T**, allora. E questo è il metodo logico della dimostrazione, quello che passa, per due volte, attraverso la reductio ad absurdum. Ma come riesce Archimede a dimostrare che **C>T** e **C<T** sono entrambi impossibili? Ci riesce passando inscrivendo e circoscrivendo nel cerchio poligoni regolari, e aumentando via via il numero dei lati dei poligoni. Consideriamo un semplice esagono inscritto nel cerchio: la sua area è facilmente

[11] Non che siano poche: Pitagora, Zenone, Eudosso, Euclide, per non parlare di Socrate, Platone e Aristotele, hanno già calpestato il pianeta. Il riferimento, se sembra riduttivo, è limitato soltanto alle capacità di calcolo.

[12] Col che si dimostra che quella che chiamiamo solitamente "geometria euclidea" non necessariamente era del tutto nota ad Euclide.

misurabile, perché equivale a quella di sei triangoli di base pari al lato dell'esagono e altezza pari all'apotema dell'esagono stesso. E' del tutto evidente, ma tanto per cautela notiamo anche l'ovvia equivalenza tra l'area dell'esagono e quella di un "triangolo equivalente" che abbia per base l'intero perimetro dell'esagono e per altezza la stessa altezza dei triangoli sopra considerati. E' un fatto evidente, ma non per questo banale: se dall'esagono di passa poi al dodecagono, e poi al poligono regolare di 24 lati, e poi a quello di 96, e così via, cosa si nota immediatamente? Si nota che il "perimetro" del poligono si avvicina sempre di più alla circonferenza del cerchio, e che l'altezza/apotema dei triangoli/poligoni si avvicina sempre di più al raggio del cerchio; e il "triangolo equivalente" si avvicina sempre di più a quello utilizzato da Archimede nella sua proposizione. Quello che resta da fare è poi "solo" mostrare che i poligoni inscritti non riusciranno mai a superare l'area del cerchio, pur continuando a diventare sempre più estesi, mentre quelli circoscritti non riusciranno mai a ridursi al di sotto dell'area del cerchio, pur continuando a diventare sempre meno estesi.

Zenone aveva lasciato il segno. Anche lui figlio dell'italica Magna Grecia, era riuscito a terrorizzare tutti i filosofi del suo tempo, che adesso dovevano convivere con il terrore dell'infinito. Tutti i matematici sapevano perfettamente che nei meandri dell'infinito proliferavano paradossi e contraddizioni, ma Archimede deve trattare l'infinito, se vuole aver ragione dell'area del cerchio. Già il metodo di Eudosso era un tentativo di utilizzare infiniti e infinitesimi, ma è Archimede che con maestria e sottigliezza usa l'infinito nelle sue dimostrazioni, cercando allo stesso tempo di non far vedere che lo sta usando. Archimede sta percorrendo, con quasi duemila anni di anticipo, le tappe che porteranno Newton e Leibniz alle soglie del calcolo infinitesimale. Quel che Archimede, a differenza di Newton e di Leibniz, non ha, è la possibilità di mostrare esplicitamente il suo avvicinarsi alle quantità infinite, e non ha i metodi di calcolo che possedevano i suoi più fortunati successori. E' per questo che nasconde l'infinito, e dà ai suoi contemporanei l'apparentemente innocua equivalenza dell'area del cerchio a quella di un apparentemente innocente triangolo rettangolo.

I risultati che ottiene sono clamorosi. La piccola e semplice [1] non è solo la conquista dell'area del cerchio: e' anche un'espressione che mette in relazione area e circonferenza, ed entrambe sono in relazione con il raggio, e quindi con il diametro. Contiene insomma la preziosa informazione che il rapporto tra diametro e circonferenza e quello tra diametro e area sono in realtà regolamentate non da due, ma solo da ***una*** costante. Quella costante che vale un po' più di 3 è la stessa, proprio la stessa, che regolamenta il rapporto tra area del cerchio e quadrato del diametro. Se ci fosse stato un buon sistema di calcolo, si sarebbe forse riusciti prima a capire che le due costanti erano la stessa, a meno della divisione per 4?[13] Forse: ma non è detto che questo avrebbe aiutato a *dimostrare* che si trattava di una sola costante. Nella sua prima proposizione, Archimede spazza via dalla cultura antica il peso di due costanti su tre, e triplica l'importanza dell'unica superstite. E deve ben rendersi conto della sua importanza, se dedica la terza proposizione del suo libro al tentativo di determinarla:

> *"Nel cerchio, la circonferenza è tripla del diametro, e lo supera inoltre di meno di un settimo e di più di dieci settantunesimi della misura del diametro stesso"*

[13] So che rischio la lapidazione, evidenziando quanto ai lettori di RM è sicuramente già evidente da tempo, ma mi arrischio a far notare che quella costante che nella pagina precedente dichiariamo essere "un po' meno di 4/5" è naturalmente **$\pi/4$**, così come quella "non troppo distante da 9/17" altro non è che **$\pi/6$**. Evito però, anche in nota, di esplicitare quale sia quella "che vale un po' più di 3".

Tutta qua, la terza proposizione. Se non vi sembra granché, significa che il piccolo esercizio in cui vi chiedevamo di calcolare l'area di un triangolo usando i numeri romani e dimenticandovi tutti gli algoritmi delle scuole elementari lo avete svolto con irrisoria facilità. Archimede, per arrivare a questa affermazione, ha dovuto costruire poligoni regolari fino a quello di 96 lati, fuori e dentro il cerchio. Ha dovuto addentrarsi in calcoli inimmaginabili per l'epoca, senza l'aiuto di alcuna tavola trigonometrica, anche senza l'aiuto di una matita moderna a punta fine. E se vi sembra poco importante il particolare della matita, scrivete in fretta un paio di istruzioni per far generare al vostro personal computer un 96-agono, guardatelo comparire sullo schermo, e poi ditemi onestamente se siete in grado da distinguerlo da un cerchio. Quanto fatto da Archimede è semplicemente un lavoro immane, quasi sovrumano. E il risultato, espresso in termini moderni, sembra ben piccolo: 1/7 significa 0,142857 e 10/71 significa 0,140875, che è come dire che Archimede non riuscì a determinare neppure la terza cifra decimale di quel numero che noi adesso chiamiamo π. Ma è stato lui il primo uomo al mondo a pronunciare la frase "tre e quattordici" dandole un significato del tutto particolare.

A questo punto, i pochi sopravvissuti che ancora resistono nel leggere queste pagine lo stanno facendo solo per capire perché mai si parla di Archimede, in questo compleanno novembrino. La regola finora sempre rispettata dei "compleanni di RM" prevede che si celebri un matematico nato nel mese di uscita della rivista, e il giorno di nascita di Archimede è del tutto ignoto: come si dice più sopra, persino l'anno di nascita è incerto. Il fatto è che la regola ferrea che pretende di individuare i protagonisti dei "compleanni" direttamente nei "calendari di RM" esclude dalle celebrazioni tutta la matematica antica; e questa ci sembrava un'ingiustizia bella e buona. Del resto, la celebrazione mensile è, più che una regola, una scusa per parlare dei matematici; e se anche fosse una regola, anche in matematica le regole hanno spesso i loro punti di singolarità. Ci sembrava in ogni caso necessario un pretesto, per parlare di un "grande antico", e in questo grigio autunno i giornali ci hanno regalato il pretesto che cercavamo.

E' quasi impossibile non conoscere la parola "palinsesto", in una società televisiva come la nostra; è invece più probabile che non sia conosciuto il significato originale. Gli amanuensi dei conventi medioevali abbisognavano di pergamena, cara e preziosa. E molti libri antichi che venivano giudicati poco importanti dal punto di vista religioso venivano raschiati, cancellati, ripiegati e riscritti. Erano questi i palinsesti: libri riciclati; e il significato attuale probabilmente è veicolato dalla necessità di cancellare e riscrivere continuamente il piano dei programmi televisivi, in accordo con gli spietati verdetti dell'Auditel.

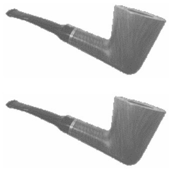
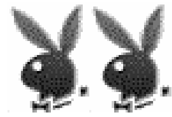
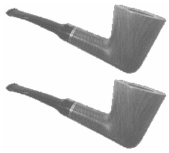
Quasi un secolo fa, nel 1906, un messale di un monastero di Costantinopoli si scopre essere un palinsesto redatto sopra un antico testo greco. Le vicissitudini che sembrano segnare il destino degli importanti manoscritti di matematica si rinnovano ancora una volta: il filologo danese Heilberg riconosce nel testo greco il Metodo dei Teoremi Meccanici di Archimede, ma riesce solo a fotografare il manoscritto, a lavorare sui copie fotostatiche (peraltro incomplete) e quando finalmente può ritornare a Costantinopoli per ottenere il permesso di lavorare sull'originale scopre che nel frattempo la Prima Guerra Mondiale ha seminato terrore e distruzione anche tra i libri. Il palinsesto è andato perduto, se ne sono perse le tracce. Ricompare ottantacinque anni dopo, nel 1991, da Christie's, messo all'asta da una famiglia francese che ne ignora presumibilmente autore e importanza. Prima che sia venduto, gli esperti che lo esaminano lo riconoscono e confermano: si tratta proprio del palinsesto perduto: e non contiene solo il Metodo, ma ben sette dei trattati attribuiti ad Archimede. Molti di questi sono giunti a noi solo attraverso altre opere, o in traduzioni latine o arabe. Sotto il palinsesto, invece, c'e' la scienza di Archimede scritta nella lingua di Archimede: non si tratta certo di un manoscritto autografo, perché è datato attorno al 1000, ma è probabile che si tratti di una copia fedele, la più fedele al mondo. Due milioni di dollari, e il palinsesto cambia proprietario: lo acquista un collezionista americano, che però non esita ad affidarlo alle cure di un museo specializzato. Dalle 354 pagine del palinsesto rinascono, dopo anni di prudente e paziente lavoro, 177 pagine di matematica archimedea. Oltre al "Metodo" tornano alla luce "Dei Corpi Galleggianti", "Della Sfera e del Cilindro", "Dei Conoidi e degli Sferoidi", persino il leggendario "Stomachion", del quale si aveva solo una proposizione in arabo. In questo 2003 sta cominciando finalmente il lavoro più interessante, dopo il faticoso intervento di restauro. Stanno arrivando gli esperti di matematica, che cominciano a leggere i testi di Archimede quasi di prima mano. Tra loro, anche un italiano, Fabio Acerbi, professore di liceo scientifico che è anche tra i massimi esperti mondiali di Archimede: dovrà interessarsi proprio dello Stomachion, che è un gioco analogo al tangram.

Ci è sembrato una buona notizia, pretesto sufficiente a giustificare la violazione della regola dei compleanni. Una scusa buona per raccontare di nuovo, insieme e dopo altre migliaia di penne assai più autorevoli, qualche episodio della vita del grande siracusano. Episodi ingigantiti dalla tradizione, certamente, perché sembra quasi impossibile che, nel mediterraneo primitivo flagellato da una delle più grandi guerre dell'antichità, un singolo essere umano fosse tanto grande da dominare al tempo stesso i segreti della meccanica, dell'acqua, del fuoco e dell'infinito. Ancora più stupefacente, però, è il fatto che tra tutte queste conoscenze, quella che la tradizione non si è peritata affatto di ingigantire è proprio la più complessa e misteriosa: la via di Archimede oltre i confini del finito.

La morte di Archimede non è meno rivestita della sua vita dal manto della leggenda. Marcello sembra avesse ordinato di salvare la vita al genio che tanto lo aveva fatto penare, e questo non è difficile crederlo: anche ai giorni nostri i militari sono tra i più ferventi tifosi degli scienziati, quando pensano che i cervelli possono trasformarsi in armi: anche Von Braun e tutta la scuola di fisica tedesca traslocò negli USA, dopo il 1945. Sembra però che l'ordine del console romano sia stato disatteso dal legionario che sorprese il vecchio matematico mentre disegnava in terra le sue amate figure geometriche. "Non rovinare i miei cerchi", disse il vecchio Archimede al romano. E se è vero, non dubitiamo che lo disse con l'orgoglio e la forza di uno scienziato settantacinquenne ad un soldato sporco di sangue e impaurito, che non aveva forse neanche un terzo dei suoi anni. "Noli Tangere Circulos Meos".

I nostri tempi consentono stupori nuovi e buffi. Se si chiede l'aiuto di un motore di ricerca per ottenere informazioni dalla Rete sulla chiave "Noli tangere", si è sommersi da centinaia di indirizzi che puntano ad un fiore precoce, un "Impatiens". Raffinando la ricerca eliminando questa chiave poetica e floreale, rimangono attivi gli indirizzi che puntano alla frase di Archimede e a quella che Cristo indirizza a Maria Maddalena, dopo la resurrezione: "Noli Me Tangere". E' strano paragonare le due frasi e i due contesti: entrambi gli imperativi negativi "Non toccare" orbitano attorno al momento della morte: entrambi sono dettati dalla necessità di proteggere qualcosa che è proibito al tocco di chi non può capire. L'umano non può capire il divino, su questo sono serenamente d'accordo sia i credenti che gli atei razionalisti. E la violenza d'una daga insanguinata da un saccheggio non può capire la bellezza di un teorema di matematica. Senza eccezioni.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Un comportamento disgustoso			
Il posto della suocera			

2.1 Un comportamento disgustoso

Adesso vi racconto l'ultima schifezza che diverte Fred.

Come sapete, il suo alimento principale sono gli spaghetti (in bianco); adesso, si è messo ad applicare una strana procedura:

1. Prendere un capo libero di uno spaghetto
2. Prendere un altro capo libero di uno spaghetto (non necessariamente lo stesso)
3. Annodarli assieme

...e ripetere queste operazioni sin quando è possibile (no, non viene interrotta dagli scappellotti; viene interrotta dalla fine dei capi liberi di spaghetti).

Per evitare il disgusto, di solito mi rifugio nella Matematica. Se nel piatto ci sono "N" spaghetti, quanti "anelli" (in media) vi aspettate di ottenere?

2.2 Il posto della suocera

Tutto per colpa d'una vecchia barzelletta. Ve la ricordate, no? Quella del tizio che chiede all'architetto una casa tonda e fatta solo di stanze tonde, solo perché la madre di sua moglie gli aveva sussurrato: "Beh, poi nella casa nuova un angolo per me lo trovate, vero?". Sembra incredibile, ma Al è tornato a casa dicendo che un suo compagno di scuola gli ha raccontato che suo papà sta "arrotondando" tutti gli angoli della casa, dopo aver sentito quella barzelletta. Ha cominciato con le stanze da letto, tutte a pianta quadrata, e in breve ha trovato un "raggio di curvatura" esteticamente gradevole. Visto che oltre che muratore e piastrellista dilettante è anche un discreto amante della matematica ricreativa, si è messo di buzzo buono a calcolare il rapporto area/perimetro disegnato dalla pianta delle sue nuove stanze (non solo per gioco: dopo il lavoretto agli angoli delle pareti deve risistemare tutti i pavimenti, e se sapete quanto costano le piastrelle e il parquet, capite bene che ogni centimetro quadro risparmiato é un mezzo capitale in meno da spendere...), confrontandolo anche con il rapporto area/perimetro "prima" del suo intervento anti-angoli. Solo che adesso si trova un pó nei guai, visto che abita in una vecchia palazzina liberty e il bovindo ha una pianta perfettamente ottogonale. Ha provato anche qui a capire quale fosse il raggio ottimale di curvatura per eliminare gli angoli, ma il suo senso estetico ha ceduto al rigore della matematica. Adesso ha deciso che quel rapporto non deve essere solo "estetico", ma deve più semplicemente essere "massimo". Questo probabilmente gli costerà il dover rifare di nuovo anche la dis-angolatura già fatta delle stanze quadrate, ma non c'é niente da fare. L'ottagono del bovindo ha fatto crollare le sue convinzioni artistiche, e si sussurra in giro che sia così perso nei suoi pensieri da non ricordarsi di avere uno stranissimo sgabuzzino a pianta pentagonale (il precedente proprietario della casa era un tipo davvero losco, somigliava a Rasputin e disegnava pentacoli ad ogni piè sospinto...).

Vabbé, sono stato costretto da Alberto a dargli una mano. La peste aveva nella cartella perfino la pianta dell'appartamento, ma col cavolo che l'ho guardata... sono rimasto molto sul generico e sul teorico, ho considerato un qualsiasi N-agono di lato unitario, ho chiamato "r" il raggio di curvatura che raccorda perfettamente i lati del' N-agono (fate esercizio di pronuncia: enne-agono, non ennagono, mi raccomando...) e ho trovato per quale valore di r il rapporto Area/Perimetro è massimizzato. Ho scritto il risultato in fretta su una pagina bianca del diario di Al, e adesso vengo a scoprire che Al e il suo amichetto l'hanno usata per farci un aeroplanino di carta. Ah, io comunque su quel calcolo non ci torno di sicuro. Se avete voglia di farlo voi...

3. Bungee Jumpers

Trovare l'espressione generale per $x, y, z \in N$ tali che $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Grazie al valido aiuto del server di mail (che è skiantato per una giornata), poche soluzioni, stavolta… Capita. Fortunatamente, le soluzioni arrivate sono abbastanza varie da coprire (quasi) tutte le possibilità. Ma cominciamo con un vecchio tormentone…

4.1 [055]

4.1.1 Rompere le palle!

Direi che la scatologia del titolo ha fatto sì che le meditazioni in merito si sprecassero… Attenti, stiamo lavorando ad un PM con titolo decisamente simile (è complicatissimo, quindi non avanziamo ipotesi di date).

Comunque, chi si impegna nel campo è ***Mistral***, con alcune interessanti considerazioni, che qui riportiamo *[…e non ci pensiamo neanche, a dare una forma decente…(RdA)]*.

> Vi segnalo alcune considerazioni che mi sembrano interessanti, oltre ad un paio di formulette carine; tra l'altro la soluzione che minimizza i lanci non è male neanche come scale salite, mentre esiste una soluzione analoga a quella che minimizza i lanci anche tenendo conto delle scale salite, cioè posso trovare il piano a cui si rompe la palla senza salire cumulativamente più di ***568*** piani. Infine si può formare una versione ibrida tra le due, che minimizza i lanci finche può cercando di non eccedere le scale salite: in tal caso si devono al massimo salire cumulativamente ***599*** piani.
>
> In ogni caso la soluzione del problema, lasciando perdere la minimizzazione delle scale, è molto bella, oltre che genuinamente nello spirito della Matematica ricreativa. Tra l'altro un avviso di stare attenti nella formulazione del problema l'avevate dato, avergli dato retta!
>
> ***Strategia di base o di riferimento.***
>
> La mia idea e che avendo due sfere devo essere in grado di fare qualcosa di meglio di quello che farei con una sfera. Chiamo quindi strategia basica l'unica strategia possibile avendo una sola sfera a disposizione. Partendo dal basso salgo un piano alla volta e getto la sfera; se si rompe ho determinato l'altezza minima, se non si rompe invece scendo, raccolgo la sfera e passo al piano successivo. L'efficienza di questa strategia, e in generale di una qualsiasi strategia, può essere misurata come

il numero di piani saliti globalmente per scoprire il piano da cui la sfera si rompe. Faccio l'ipotesi che scendendo le scale non si faccia fatica [14].

Detto m il numero incognito del piano per cui la sfera si rompe, e F(1,m) la somma totale dei piani cumulativamente saliti con la strategia basica che ho appena definito, si ha che:

$$F(1,m) = 1+2+3+4+\ldots m = \frac{m(m+1)}{2} \quad \text{se } \boldsymbol{m<100}. \qquad \texttt{[004.001]}$$

F(1,100)=F(1,99) se non si rompe a 99 si deve rompere a 100, altrimenti ho sbagliato il palazzo!

Quindi suppongo che la sfera debba rompersi entro un numero di piani non superiore a 100.

Per m vicino a 100 si tratta di fare circa 50 volte su e giù nel nostro palazzo, mica male come ginnastica!.

Per quanto dirò dopo, mi viene utile anticipare ora il caso del costo in scale salite usando la strategia basica partendo dal piano terra e iniziando a lanciare dal piano a, scendendo e risalendo fino ad arrivare piano $b \geq a$. Chiamo questo costo ***F(a,b)*** e risulta che:

$$\begin{aligned} F(a,b) &= a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + \ldots + a + (b-a) = \\ &= a + a*(b-a) + \frac{(b-a+1)(b-a)}{2} \end{aligned} \quad \text{se } \boldsymbol{b<100} \qquad \texttt{[004.002]}$$

Sempre con ***F(a,100)=F(a,99)***.

Ricerca della strategia ottimale

Cerco di generalizzare, quindi suppongo di scegliere: ***n(1)< n(2)<n(3)<....<n(s)<n(s+1)=99*** con ***s<100***

al solito ***m*** è il piano minimo incognito a cui la sfera si rompe, e la strategia è:

Salgo a ***n(1)*** e getto una sfera: se si rompe parto dal piano ***1*** con la strategia basica fino a trovare ***m***; se non si rompe vado al piano ***n(2)*** getto la sfera: se si rompe scendo a raccogliere la prima sfera, risalgo a ***n(2)+1*** e procedo con la strategia basica fino a che non trovo ***m***…etc.

Il numero di scale spese dipende da ***m***: quello che si chiede ad una strategia ottimizzata e di stare "il più possibile" al di sotto della strategia basica, non mi lancio del concetto "il più possibile al di sotto" non serve.

Definisco con ***G(m)*** le scale salite per determinare ***m***, si ha in particolare:

$$G(n(1)) = n(1) + F(2, n(1)-1) \qquad \texttt{[004.003]}$$

$$\begin{aligned} G(n(2)) &= n(1) + (n(2) - n(1) + F(n(1)+1, n(2)-1 = \\ &= n(2) + F(n(1)+1, n(2)-1) \end{aligned} \qquad \texttt{[004.004]}$$

$$\begin{aligned} G(n(3)) &= n(1) + (n(2) - n(1)) + n(3) + F(n(2)+1, n(3-1) = \\ &= n(2) + n(3) + F(n(2)+2, n(3)-1) \end{aligned} \qquad \texttt{[004.005]}$$

[14] Per i più "pistini" , quindi anche per me, preciso che faccio anche ulteriori ipotesi, cioè che il peso della sfera sia trascurabile rispetto al nostro peso, di modo che sia non sia significativo distinguere tra quando salgo le scale con una sfera e quando le salgo con due sfere, e che le sfere non si usurino con i lanci, cioè una sfera che ha subito urti non letali si rompe allo stesso piano di una sfera che non ha subito urti.(N.d.Mistral)

$$G(n(4)) = n(1) + (n(2) - n(1)) + n(3) + (n(4) - n(3)) + F(n(3)+1, n(4)-1) = \\ = n(2) + n(4) + F(n(3)+1, n(4)-1) \qquad [004.006]$$

Se ***i*** è pari (infatti si rompe la seconda sfera a n(i)):

$$G(n(i)) = n(2) + n(4) + \ldots + n(i) + F(n(i-1)+1, n(i)-1) \qquad [004.007]$$

Se in questo caso risulta ***n(i)=n(i-1)+1*** allora:***G(n(i))= n(2)+ n(4)+…+n(i)***

Se ***i*** è dispari (infatti si rompe la 1a sfera a ***n(i)*** e ne ho un'altra da usare e la utilizzo per il lancio a ***n(i-1)+1***):

$$G(n(i)) = n(2) + n(4) + \ldots + n(i) + F(n(i-1)+2, n(i)-1) \qquad [004.008]$$

Se in questo caso risulta ***n(i)=n(i-1)+1*** allora:***G(n(i))= n(2)+ n(4)+…+n(i)***

Le somme di ***n(j)*** sopra sono estese a tutti i valori ***j*** pari inferiori ad ***i***, più ***i*** stesso. Nel caso generale:

Se ***m<n(1)***:

G(m)=n(1)+F(2,m)

Se ora ***n(i)<m<n(i+1)***, allora:

G(m)=n(2)+n(4)+...+n(i+1)+F(n(i-1)+1,m) se i è *pari*

G(m)=n(2)+n(4)+...+n(i+1)+F(n(i-1)+2,m) se i è *dispari* e ***m≥n(i)+2***

G(n(i)+1)=n(2)+n(4)+...+n(i+1) se i è *dispari* e ***m=n(i)+1***

Infine:

G(100)= n(2)+ n(4)+…+n(s)+99,

ora sono nella condizione di imporre un numero ***H*** massimo di scale salite se ***m=n(i)***, infatti le equazioni ***G(n(i))=H*** sono equazioni di 2° grado che si posso risolvere in cascata. Non tutti i valori di ***H*** consentono di raggiungere ***n(s)=99***, cioè esiste un ***H*** minimo, pochi tentativi numerici dimostrano che risulta essere ***568***. Partendo dalla soluzione Rudy/Sam ho provato a ricalcolare gli ***n(i)*** dove ***G(n(i))*** superava ***568*** e ho scoperto che non si riusciva a correggerla, allora ho fatto salire ***H*** fino a ***599***, primo valore per cui è possibile una correzione che porta a ***n(s)=99***. Vi allego sotto una tabellina di sintesi, ovviamente i calcoli mi sembrano giusti ma non ne ho la certezza assoluta, anzi dato il bel risultato mi puzza ci sia qualche cavolata.

Soluzione Rudi/Sam					Soluzione Mistral					Soluzione Ibrida				
s	n(s)	G(n(s))	F(1,n(s))	Lanci	s	n(s)	G(n(s))	F(1,n(s))	Lanci	s	n(s)	G(n(s))	F(1,n(s))	Lanci
1	14	104	105	14	1	33	560	561	33	1	14	104	105	14
2	27	273	378	14	2	47	567	1128	15	2	27	273	378	14
3	39	401	780	14	3	57	524	1653	12	3	39	401	780	14
4	50	522	1275	14	4	65	539	2145	11	4	50	522	1275	14
5	60	581	1830	14	5	72	529	2628	11	5	60	581	1830	14
6	69	662	2415	14	6	78	565	3081	11	6	68	593	2346	13
7	77	664	3003	14	7	83	516	3486	11	7	75	580	2850	13
8	84	713	3570	14	8	87	532	3828	11	8	80	535	3240	12
9	90	670	4095	14	9	91	547	4186	12	9	85	559	3655	13
10	95	695	4560	14	10	94	556	4465	12	10	89	575	4005	13
11	99	619	4950	14	11	97	564	4753	13	11	93	590	4371	14
					12	98	469	4851	12	12	96	599	4656	14
					13	99	568	4950	13	13	98	508	4851	14
										14	99	509	4950	14

[Una cavolata te la trovo io, Mistral… Perchè ci hai passato la tabellina come disegno???? L'impaginazione, ad essere gentili, viene "fetente"… (RdA)].

4.2 [057]

Bene, come abbiamo detto il mailserver ha fatto un po' le bizze… Può darsi si sia persa qualche soluzione, e ce ne scusiamo. Comunque, chi ha inviato ha spaziato per molte strade, e la cosa ci è piaciuta.

2003-10-01 16:09	[P1]	PMP	Incredibile! *C'è anche il disegno!*
2003-10-02 11:01	[P1]	Mistral	
2003-10-02 14:14	[P2]	Mistral	
2003-10-04 15:07	[P1]	Pasquale (1)	Il più giovane
2003-10-04 12:03	[P1]	GaS	
2003-10-04 14:04	[P2]	GaS	
2003-10-06 08:23	[P1]	Viggio	
2003-10-06 13:38	[P2]	Pasquale	
2003-10-06 21:21	[P1]	Gigia	Conta per tre
2003-10-06 14:41	[P1]	Elena	
2003-10-08 10:14	[P2]	PMP	
2003-10-08 10:46	[P1]	KroK	
2003-10-10 11:17	[P1]	Pasquale (2)	Il più vecchio
2003-10-11 19:19	[P1]	PierCarlo	
2003-10-15 12:00	[P1]	Desmatron	
2003-10-16 17:07	[P2]	Tesctassa	

…giusto per chiarire i commenti:

Forse non ci daranno mai la Medaglia Fields, ma riuscire a costringere PMP a mandare un disegno è comunque un'impresa di cui ci sentiamo di andare fieri.

O i "Pasquale" si trovano degli allonimi, o li chiamiamo così, forti del fatto che Pasquale (1) si è iscritto venti minuti prima di Pasquale (2).

Gigia ha mandato tre soluzioni (e intanto ci ha offerto l'aperitivo). "Conta per tre" per la prima parte della frase, non per la seconda, che è stata comunque molto apprezzata.

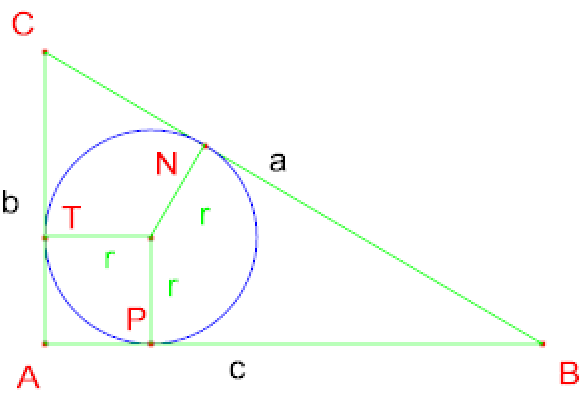
4.2.1 Geometria dell'endecasillabo

Ogni tanto qualche lettore ci scrive dicendoci che RM gli piace, ma che i problemi proposti gli sembrano di difficoltà troppo elevata per le sue capacità. A quel punto ci lanciamo in rassicurazioni sincere e appassionate, e una delle frasi che ripetiamo più spesso è "Guarda che tra noi in redazione c'è qualcuno che ha serie difficoltà con le sottrazioni…". Finalmente ***Viggio*** è riuscito a dimostrare che non si trattava solo di parole dette tanto per dire. Nel compleanno di Ottobre ci siamo lanciati in disquisizioni sul Weierstrass e Sofia Kovalevskaya, specificando nel testo anche che il primo morì nel 1897, e che la bella Sofia lasciò questa valle di lacrime nel 1891. Nonostante cotante esplicitazioni, Doc non ha esitato ha scrivere, parlando della Kovaleskaya, che "…morì a soli 41 anni, meno di quattro anni dopo il suo maestro…". Chiamato in causa, Doc ha prima blaterato qualcosa sul fatto di aver confuso il 1897 della morte di Weierstrass con il 1887; poi l'ha messa sul patetico, dicendo che il suo inconscio non poteva sopportare l'idea che uno già sfortunato com'era sfortunato Weierstrass avesse dovuto sopportare anche di veder morire la sua pupilla, e altre penosi tentativi di giustificazione. Ma ormai non c'e' più speranza, Viggio lo ha smascherato. Quello della redazione che non sa fare le sottrazioni è proprio lui.

4.2.2 Chi porta da bere?

Come dicevamo, ***PMP*** ha mandato il disegno; spossato da questo immane sforzo, la sua soluzione è un po' stringata (e anche il disegno non è un gran che…:-).

> Come si vede dal disegno, ***a+2r=b+c***. Ma ***2r*** è anche il lato del quadrato interno, quindi ***b+2r=c*** e insomma ***a=2b***. Quindi il lato corto del triangolo è ***a/2***, quello lungo è ***sqrt(3)*a/2***, e la loro differenza, che è il diametro della nostra lattina, è
>
> ***(sqrt(3)-1)*a/2***,
>
> che dà circa 10.98 cm.
>
> *[Avanti di questo passo e entro una decina d'anni userà anche il Formula Editor…(RdA)].*



Sapete che apprezziamo sempre il fatto che troviate soluzioni diverse dalle nostre; va detto, però, che questa volta almeno Rudy era particolarmente contento che qualcuno avesse trovato la *sua*… Si basava infatti su un interessante teoremino, che la gente tende a dimenticare. Ci è arrivato però ***Mistral***; per problemi di impaginazione, facciamo riferimento al disegno di PMP.

> Dalla condizione di triangolo circoscritto alla circonferenza segue che il centro del cerchio si trova all'incrocio delle bisettrici dei tre angoli del triangolo.
>
> Quindi ***BN=BP***, ***AP=AT***, ***CT=CN***. *[Il signore vince una bambolina! (RdA)]*
>
> Imponendo poi che il cerchio al centro della scatola abbia la stessa dimensione dei cerchi all'interno dei triangoli si deve avere che:
>
> `L-x+r-(r+x)=2r`
>
> Da cui:
>
> `L=2(r+x)`
>
> Quindi l'angolo del triangolo rettangolo è 30°.
>
> `2r=30(cos(30)-sin(30))=10.98 cm`
>
> Sono curioso di vedere se esiste una versione più creativa della soluzione.

[È la meno creativa di tutte… Ci siamo arrivati in due! (RdA)]

Dicevamo che ***Gigia*** ci ha offerto l'aperitivo (anche se a giudicare dall'abbondanza di cibarie sembrava una cena… Il Comitato di Redazione successivo, troppo occupato a digerire, non è neanche riuscito a decidere la data del prossimo meeting); chiacchierando del più e del meno, è saltato fuori che era indecisa su che soluzione mandare; la nostra immediata dichiarazione è stata "Tutte!" e, a stretto giro di posta, ci sono arrivate ***tre*** soluzioni. Cosa molto apprezzabile, anche perché ha dimostrato che la teoria (di Rudy) che trovata una soluzione una persona tende a sedersi sugli allori e a non pensarci più, è piacevolmente falsa.

> Osservo la figura e noto che:
>
> - I quattro triangoli esterni sono rettangoli, con angoli di 30° e 60° e uguali (perché i cerchi inscritti lo sono e per la simmetria della figura).

- Il cerchio centrale è inscritto in un quadrato.
- Se L = lato quadrato esterno = cm 30, i cateti di ogni triangolo misurano L/2 e $L\sqrt{3}/2$.
- Il diametro dei cerchi è uguale al lato del quadrato interno.

1° soluzione

Il quadrato interno si può ottenere tagliando dalla figura i 4 triangoli rettangoli esterni.

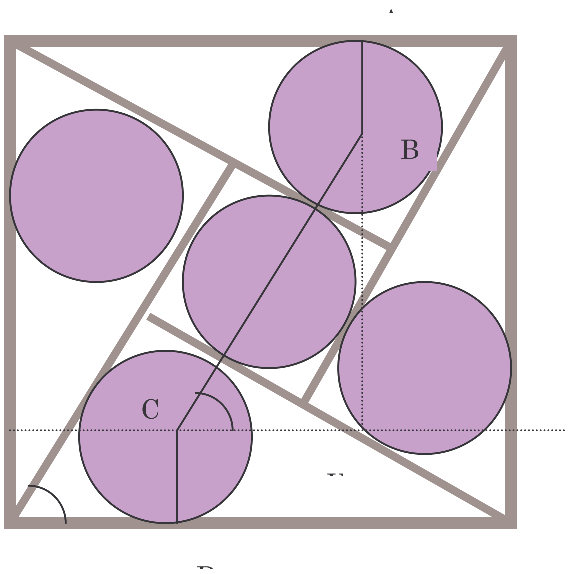
$A_{\text{quadrato esterno}} = L^2$

$$A_{\text{triangolo rett.}} = \left[\frac{L\sqrt{3}}{2}\right] * \left[\frac{L}{2}\right] * \frac{1}{2} = \frac{L^2\sqrt{3}}{8}$$

$$A_{\text{4 tr. rett.}} = \frac{L^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_{\text{quadr. int.}} = A_{\text{quadrato esterno}} - A_{\text{4 tr. rett}} = L^2 - \frac{L^2\sqrt{3}}{2} = L^2\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\text{Diametro} = \sqrt{L^2\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]} = L\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$



2° soluzione

Noto che gli angoli segnati valgono 60° e che:

AB = r

BC = 4r

CD = r

$$BH = \frac{4r\sqrt{3}}{2} = 2r\sqrt{3}$$

Allora:

L = AB + BH + CD =

$$= r + 2r\sqrt{3} + r = 2r\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$2r = diametro = \frac{L}{1+\sqrt{3}} = L\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

3° soluzione

La relazione fra L e diametro =2r si può anche trovare con il calcolo della doppia area di uno dei triangoli rettangoli calcolata in due modi:

cateto*cateto = perimetro* raggio

$$\frac{L}{2} * \frac{L\sqrt{3}}{2} = \left(L + \frac{L}{2} + \frac{L\sqrt{3}}{2} \right) * r$$

$$\frac{L^2\sqrt{3}}{4} = L\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} \right) r$$

$$\frac{L\sqrt{3}}{2} = \left(3+\sqrt{3}\right) r \qquad ; \qquad 2r = L\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = L\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

…interessante soluzione anche da ***Elena*** che ci promette un disegno (che, naturalmente, non ci ha mandato…):

> […] chiamerò x e 30-x i due segmenti che le bottiglie laterali staccano sui lati della scatola. Detto questo, i quattro triangoli rettangoli uguali hanno cateti che misurano x+r e 30-x+r e il quadratino centrale ha lato 2r. Quindi:
>
> $$2(x+r)(30-x+r) + 4r^2=900$$
>
> ma anche (per il teorema di Pitagora applicato ad uno dei triangoli rettangoli, visto che il quadrato del suo ipotenusa è la scatola stessa):
>
> $$(x+r)^2+(30-x+r)^2=900.$$
>
> Sommando membro a membro le due equazioni ottenute :
>
> $$3r^2-x^2+30r+30x=450$$
>
> $$r^2+x^2+30r-30x=0$$
>
> si trova l'equazione
>
> $$4r^2+60r=450$$
>
> che è risolta per
>
> $$r = \frac{15}{2} \cdot (\sqrt{3}-1)$$
>
> Quindi il diametro delle bottiglie misura
>
> $$15 \cdot (\sqrt{3}-1)$$

[Giusto per essere polemico… Perchè tutti avete calcolato calcolato il **raggio**? *L'occupazione, in frigo, dipende dal* **diametro**… *(RdA)]*

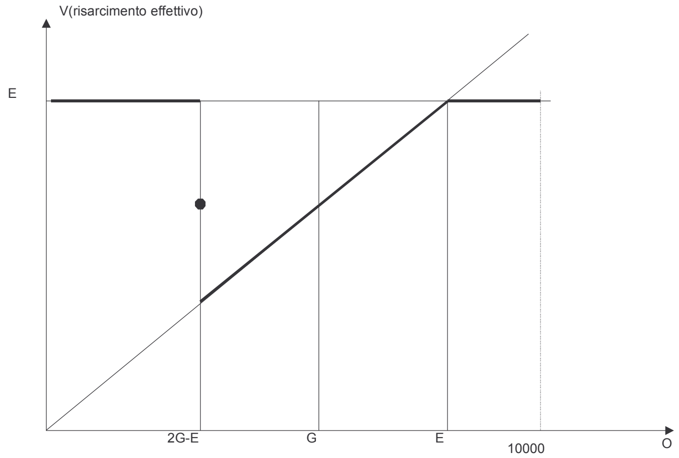
4.2.3 Obiezione, Vostro Onore!

Sì, ci piacciono le soluzioni diverse… ma vorremmo il risultato fosse sempre uguale!

Allora, prima è arrivato ***Mistral***, che ci convince solo "a metà":

> Se chiedo ***3000*** sicuramente intasco almeno ***3000***, usando un approccio pseudo-probabilistico posso massimizzare in media la cifra intascata, nel caso sia possibile intascare meno di ***E***, scegliendo opportunamente ***E***.
>
> Suppongo inoltre che il querelato scelga ***O*** in maniera equiprobabile su un intervallo ***[0,M]*** con ***M>10000***.

Se il querelato chiede più ***O≥10000*** ottengo sempre almeno la mia cifra ***E*** comunque la scelga nell'intervallo ***[3000,10000]*** estremi inclusi.



Se il querelato chiede ***O<10000***, l'intervallo di scelta di ***O*** in cui posso essere risarcito con ***O<E***, se ***G<E***, è $[2G-E,E]$, se invece ***G≥E*** allora sono risarcito sempre almeno con ***E***.

Il risarcimento mediato su ***O***, se ***G<E*** e ***2G-E≥3000*** vale:

$$\frac{E^2-G^2+E*(7000-2*(E-G))}{7000} \qquad \texttt{[004.009]}$$

A cui corrisponde un massimo per ***E=G+3500***, dato che il valore atteso di ***G*** è ***6500***, cioè la media aritmetica degli estremi dell'intervallo, dovrei scegliere ***E=10000*** a cui corrisponde un guadagno medio di ***16500/2=8250***.

Se ***2G-E<3000*** si avrebbe il risarcimento medio:

$$\begin{aligned}&\frac{E^2-G^2+E(10000-E)}{10000-E+2G-E}\le\frac{E^2-G^2+E(10000-E)}{7000}\\&\le\frac{E^2-G^2+E(7000-2(E-G))}{7000}\le 8250\end{aligned} \qquad \texttt{[004.010]}$$

quindi non esistono altri casi migliori di quello trovato in termini di guadagno medio massimo.

Se il querelato spia quello che scrivo, dato che conosce il criterio di giudizio del giudice, mettendo non meno di ***10000*** aumenta la probabilità di spendere proprio non meno di ***10000***, quindi metterà meno di ***10000*** e se gli va male spende al massimo ***10000***. Io fossi in lui metterei ***0*** cosicché nel 50% dei casi in cui spendo meno di ***10000*** posso spendere ***0***, nei rimanenti ***10000***. Quindi limitandosi ai casi in cui posso spendere meno di ***10000*** avrei una media di ***5000***.

Se vuole maggiore certezza di non spendere ***10000***, deve scegliere ***10000q*** con ***0<q<1*** allora nel $\left[\frac{100*(1+q)}{2}\right]$% dei casi spende ***10000q*** e nel $\left[\frac{100*(1-q)}{2}\right]$% dei casi ***10000*** e la spesa media è ***10000(1+q²)/2≥5000***. In tal caso il querelante deve scrivere ***5999***.

In sintesi conviene prendere tutto quello che il querelato offre, chiedendo il massimo che il giudice può usare come metro per un compenso ragionevole, e tener presente, che per ipotesi, l'evento che offra zero è equiprobabile all'evento che offra qualsiasi cifra tra ***[0,M]*** con ***M>10000***, quindi in "media" chiedere *il massimo G* conviene.

…e ***PMP***, attraverso un ragionamento non molto diverso, conviene con Mistral. ***Pasquale (il più giovane)***, invece, si accontenta di poco:

Sapendo che il giudice può chiedere da ***3000*** a ***10000***, ne chiederei ***3000***, perché sarei sicuro di prenderle. Infatti, per ogni ***x*** in più che chiedo rispetto a ***3000***,c'è sempre la possibilità che il querelato chieda ***3000-x +1*** e così, se il giudice decide per ***3000***, invece di prenderne ***3000*** ne prendo meno. É pur vero che il querelato non può scendere al di sotto di ***0***, per cui nel caso che il giudice decidesse per ***10000***, prevedendolo con la sfera magica, potrei chiederne ***10000*** o anche meno ed il querelato per avvicinarsi dovrebbe chiedere più di me. Però non so quali saranno i comportamenti e quindi: chi si contenta gode.

D'altra parte, se chiedo ***3000*** e la controparte pensa che il giudice sparerà alto, c'è rischio che sia lui stesso a farmi guadagnare di più, superando l'offerta delle ***3000***.

Non mi pare nemmeno opportuno impostare discorsi di probabilità, perché non ritengo che gli eventi in questione siano di natura casuale.

Diverso è il caso con lo specchio, in cui chiederei ***5996***, per le ragioni che seguono.

Premesso che per ovvie ragioni mi riferisco al caso in cui: ***O<G<E***, per un giudizio favorevole al querelante, deve accadere che:

$$E-G<G-O$$

$$E<2G-O$$

$$E = 2G - O - 1 \text{ (almeno)} \qquad \textbf{[004.011]}$$

Per i querelato deve essere:

$$G-O<E-G$$

$$O>2G-E$$

$$O = 2G - E + 1 \qquad \textbf{[004.012]}$$

Allora mi metto nei panni del querelato:

poniamo che il querelante stimi "x" la mia possibile offerta; in base alla **[004.011]** deve chiedere

$$E = 2G - X - 1 \Rightarrow G = \frac{E + X + 1}{2} \qquad \textbf{[004.013]}$$

Io allora chiedo in base alla **[004.012]**:

$$O = 2G - E + 1 = \frac{2 * (E + X + 1)}{2} - E + 1 = X + 2 \qquad \textbf{[004.014]}$$

La questione sarebbe a mio favore, essendo: **G-O<E-G** , come è possibile verificare:

$$G-x-2<2G-x-1-G$$

$$-x-2<-x-1$$

Sostituendo in **G-O<E-G** i valori di **[004.013]** e **[004.014]**, sarebbe anche:

$$G-2G+E-1<2G-x-1-G$$

$$E-G<G-x$$

$$2G>E+x$$

$$G>(E +x)/2$$

$$G = \frac{E + X}{2} + 1 \text{ almeno} \qquad \textbf{[004.015]}$$

Indipendentemente da quanto il querelante abbia stimato la mia "X", io le attribuisco un valore arbitrario e dalla **[004.015]** traggo il valore di ***G*** tale che inserito nella mia **[004.012]** mi permetta di realizzare **G-O<E-G**

Se stabilisco che: x = 0 , la **[004.015]** diventa:

$$G = \frac{E}{2} + 1 \qquad \textbf{[004.016]}$$

Siccome la ***E*** la vedo nello specchio, nella **[004.012]**, sarà:

$$O = 2G - E + 1 = 2 * \left(\frac{E}{2} + 1 \right) = E + 2 + 1 = 3 \qquad \textbf{[004.017]}$$

Cioè io (querelato) potrò chiedere sempre 3 euro, con la speranza di pagare niente, a patto che il giudice stabilisca la sua cifra in un range che va da ***0*** ad ***E/2 +1***.

Facciamo un esempio:

Vedo nello specchio 4000 e scrivo 3:

se il giudice non supera E/2 + 1, cioè 2001, il mio scarto è minore di quello del querelante, mentre i guai iniziano se

G>2001.

Altro esempio:

Vedo nello specchio 1.000.000 e scrivo 3:

se il giudice non supera 500.001, tutto va bene.

Avrei potuto anche stabilire x=1000: sarebbe stato: G=(E+1000)/2+1 e dalla 2) la mia richiesta sarebbe stata: 1003;

quindi vedendo nello specchio 1.000.000 avrei scritto 1003 e la cosa sarebbe andata bene se il giudice non avesse superato 500.501, ma ne valeva la pena ? Tanto meno se nello specchio avessi visto una cifra bassa.

[…a me sembra la complicazione di un affare semplice… Ma forse, quando si parla di Teoria dei Giochi, è sempre così… (RdA)]

Insomma con questa strategia il rischio c'è, ma quanto più alta è la cifra che vedo nello specchio, tanto più aumentano le possibilità a mio favore, mentre se la cifra è troppo bassa diminuiscono, ma diminuisce pure la soma da pagare.

A questo punto, ipotizzando che il querelante giunga alla stessa conclusione, cioè che intuisca la strategia del querelato, sapendo che il giudice non scriverà meno di 3000, scriverà: 2(3000-2) = 5996 ed in questo modo, a patto che il querelato richiedi 3, riscuoterà quasi il doppio di quanto avrebbe chiesto senza la questione dello specchio.

Boh, un po' debole, ma per non fare passo l'ho vista così.

Bene, anche se con motivazioni leggermente diverse, ***Tesctassa*** è d'accordo con il nostro giovine.

È nostra opinione che siate finiti un attimo in quella che uno di noi (Rudy) definisce "sindrome da Teoria dei Giochi", ossia quella catena di "seiodico…alloraluidice…" da cui non si esce più. Fortunatamente, a toglierci da questa *impasse* arriva ***GaS***, con una soluzione un pó più calcolata che ragionata *[GaS, spero non ce ne vorrai se pubblichiamo la redazionale: è sostanzialmente identica, e già impaginata…(RdA)]*. Prima, pero`, una soluzione eterodossa da parte del Nostro, che apre nuove e interessanti prospettive…

Il querelato offre 3000 Euro solo nel caso che sia abbastanza preparato da fare le considerazioni di cui sopra. Se però non mi sembra tanto sveglio adotto una giocata d'azzardo: offro 10002 Euro con l'accortezza di scrivere il numero al contrario (prima il 2 poi, alla sinistra, uno 0, un altro 0 e così via). Una tale operazione, vista allo specchio, equivale alla scrittura del numero 50001 (non è difficile fare un 2 che allo specchio appaia come un 5). Il mio avversario vedrà che compongo il numero 50001 e, forse, non penserà alla riflessione speculare; penserà invece che, offrendo 0 euro ha la sicurezza di non pagare niente (0 è più vicino a G di 50001, per tutti i possibili valori di G). In questo caso, se il trucco dovesse riuscire, il mio guadagno aspettato sale a 7142,85+ Euro, se dovesse fallire scende a 6499.99 Euro che non mi sembra un gran peggioramento rispetto ai 6500.

Forse e` meglio passare alla redazionale…

Supponiamo ***B*** sia ***3000*** euro (livello inferiore della scelta) e ***A*** sia il livello maggiore, ossia ***10000***.

Il valore medio tra la richiesta del querelante e l'offerta del querelato è:

$$M = \frac{E+O}{2} \qquad \texttt{[004.018]}$$

Siccome il giudice sceglie un numero con probabilità costante tra ***A*** e ***B***, la probabilità per il querelante di ricevere ***E*** è:

$$p(E) = \frac{A-M}{A-B} \qquad \texttt{[004.019]}$$

negli altri casi, riceverà ***O***.

Quindi il guadagno atteso dal querelante è la media (pesata) del ricevere ***E*** e del ricevere ***B***.

$$g = \frac{E*(A-M)}{(A-B)} + D*\left(1-\frac{A-M}{A-B}\right) \qquad \texttt{[004.020]}$$

e, espandendo:

$$g = \frac{1}{A-B}*\left(EA-\frac{E^2+EO}{2}\right)+O-OA+\frac{EO+O^2}{2} \qquad \texttt{[004.021]}$$

Derivando rispetto a ***E*** (visto che il querelante conosce solo ***E***), si ha

$$g' = \frac{1}{A-B}*\left(EA-\frac{E^2+EO}{2}\right)=\frac{A-E}{A-B} \qquad \texttt{[0004.022]}$$

E, cercando i punti in cui la derivata prima è uguale a zero (e la derivata seconda è negativa), si ha ***A=E***, quindi ***il querelante massimiszza le sue speranze chiedendo sempre il massimo*** (e sin qui, qualcuno lo potrebbe considerare intuitivo); però, il bello è che *questa grandezza non dipende da* **O**; quindi, *in nessun caso la scelta del querelato influenza la vostra scelta* e quindi, anche se conosce (grazie allo specchio) quello che avete intenzione di chiedere, *la vostra speranza di guadagno non cambia.*

5. Quick & Dirty

La fabbrica di batterie nella quale lavorate (braccia sottratte all'elettrotecnica?) produce una batteria su mille non funzionante. Per fortuna, avete un ottimo test (che applicate a tutte le batterie) per verificare il funzionamento; infatti azzecca tutte quelle fallate però, per una su cento funzionanti vi dice che non funziona (ossia è preciso al 99%).

Il test vi ha appena detto che questa batteria è fallata; qual'è la probabilità che sia vero?

6. Pagina 46

Si ha:

$$\begin{aligned} & zx + zy = yz \Rightarrow xy - zx - zy + z^2 = z^2 \\ & \Rightarrow (x-z) * (y-z) = z^2 \end{aligned} \qquad \texttt{[006.001]}$$

Ora sia ***t*** il Massimo Comun Divisore tra ***x***, ***y*** e ***z***, ossia

$$t = MCD(x, y, z) \Rightarrow \begin{aligned} x &= x_1 t \\ y &= y_1 t \\ z &= z_1 t \end{aligned} \qquad \texttt{[006.002]}$$

con x_1, y_1, z_1 primi tra loro.

Inoltre, sia anche $m = MCD(x_1, z_1)$ e $n = MCD(y_1, z_1)$, ossia

$$\begin{cases} x_1 = mx_2 \\ z_1 = mz_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y_1 = ny_2 \\ z_1 = nz_2 \end{cases} \qquad \texttt{[006.003]}$$

da cui, lavorando con i moduli:

$$\langle z_1 \rangle_m = \langle z_1 \rangle_n = 0 \Rightarrow \exists p \in N : z_1 = mnp \qquad \texttt{[006.004]}$$

e quindi si ha:

$$\begin{cases} x = mx_2 t \\ y = ny_2 t \\ z = mnpt \end{cases} \qquad \texttt{[006.005]}$$

Sostituendo questi valori in `[001]` e dividendo per mnt^2 si ottiene:

$$(x_2 - np)(y_2 - mp) = nmp^2 \qquad \texttt{[006.006]}$$

Ma x_2 è primo rispetto a ***n***, in quanto $m = MCD(x_1 = mx_2, z_1 = mnp)$, e y_2 è primo rispetto a ***p***.

Inoltre, espandendo il primo membro di `[006]`, si ha:

$$x_2 y_2 = x_2 mp + y_2 np \qquad \texttt{[006.007]}$$

E questo *deve essere divisibile per* **p**, il che implica ***p=1***, ossia:

$$(x_2 - n)(y_2 - m) = mn \qquad \texttt{[006.008]}$$

Ora, x_2 è primo rispetto a ***n*** in quanto sono primi tra loro $(x_1 = mx_2),(y_1 = ny_2),(z_1 = mn)$. Questo implica che $(x_2 - n)$ sia primo rispetto a ***n***, mentre $(y_2 - n)$ deve essere divisibile per ***n***.

Analogamente, si ha che $(x_2 - n)$ è divisibile per ***n***.

Quindi,

$$\begin{cases} x_2 - n = \pm m \\ y_2 - m = \pm n \\ x = \pm y_2 = \pm m + n \end{cases} \qquad \texttt{[006.009]}$$

Da cui:

$$\begin{cases} x = m(m+n)t \\ y = \pm n(m+n)t \quad \text{con} \quad m,n,t \in N \\ z = mnt \end{cases} \qquad \texttt{[006.010]}$$

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Roba da Islandesi [001]

Non ne ho nessuna voglia. Ma devo farlo.

È dall'inizio di questa rubrica che so che dovrò scontrarmi con questo argomento, ma la voglia di scriverlo è quasi nulla. Eppure è un argomento divertente, interessante, tutto quanto... Peccato che ci abbiano già scritto sopra una valangata di roba, sicuramente migliore di quella che scriverò io.

Allora, prendiamola alla lontana; tanto, lo capirete subito dove cercherò di andare a parare.

Ogni spazio concepibile ha un caratteristico numero ad esso associato, detto ***dimensione***. Ora, chiunque abbia studiato un po' di matematica ha perfettamente presente di cosa stiamo parlando; piuttosto intuitivamente, la definizione di dimensione è "*il numero di parametri necessari per descrivere univocamente la posizione di un qualsiasi elemento dello spazio*. Quindi, uno spazio è unidimensionale se vi basta un numero per definire la posizione di un elemento dello spazio, mentre sul piano ve ne occorrono due (notate che la dimensione è un'*invariante*: ve ne occorreranno sempre due, sia che utilizziate le coordinate cartesiane, sia che utilizziate le coordinate polari).

Potete anche trovare dei casi piuttosto bizzarri (che, almeno secondo senso comune, mettono un po' in crisi la definizione di cui sopra); ad esempio, l'insieme di tutti i cerchi sul piano è *tridimensionale*; infatti, vi servono due valori per definire le coordinate del centro e uno per definire il raggio (capito perché poco sopra ho parlato di *elementi* e non di *punti*? Qui, sono i cerchi che compongono lo spazio, non i punti...).

Vediamo un altro esempio, cercandolo tra quelli un po' strani. Qual è la dimensione dello spazio dei numeri di telefono?

Beh, a prima vista, siccome ogni numero di telefono può essere univocamente determinato giustappunto dal numero di telefono, sembrerebbe unidimensionale. In realtà (in modo molto visibile negli USA, in modo più "nascosto" in Italia), le prime cifre del numero definiscono l'*area* nella quale si trova quel numero: Nei vecchissimi[15] film polizieschi americani, era normale un "Signorina! Mi passi ATTica 3-1415!" (il lavoro di centralinista -o "operatrice"- era considerato l'unico adatto alle ragazze di buona famiglia). Successivamente, quando anche i personaggi di questi film hanno imparato a farsi il numero da soli, potevate vedere le lettere dell'alfabeto associate ad ogni cifra sul disco preselettore (no, non servivano per gli SMS...); le prime tre cifre vi definivano l'area, attraverso un'associazione con il nome. Ora, non tutte le associazioni lettera-numero esistevano[16], quindi non possiamo dire che il nostro spazio ha dimensione uno. Nella realtà quindi il nostro spazio è tetradimensionale: tre caratteri, più un numero. Insomma, uno spazio tetradimensionale con meno punti di uno spazio monodimensionale. Cantor non abita più qui.

Un altro modo con il quale possiamo pensare al concetto di dimensione è la definizione di *gradi di libertà* del sistema nello spazio nel quale si trova. Qui però la nostra scelta delle direzioni deve essere *ortogonale*. Il movimento in una data direzione non deve essere esprimibile come una combinazione di moti nelle direzioni restanti: in questo caso, avremmo "sovradimensionato" lo spazio.

---

[15] In quelli meno vecchi non capita più, anche perché Hollywood si è autoregolamentata e, presumibilmente d'accordo con la Bell e la ATT, mette in audio e video solo numeri che iniziano per "555", corrispondenti ad una "area" che non esiste nel mondo reale, essendo appositamente riservata al rutilante mondo della fiction. [PRS]

[16] Oltre al "555" della nota precedente, ricordo un vecchio romanzo giallo di Ellery Queen in cui un particolare chiave veniva deciso dall'inesistenza del numero di telefono ACQueduct-7-3682; la lettera "Q" non esiste sui dischi preselettori [RdA].

Il bello di questa definizione è che è molto coerente e pragmatica: siccome un punto non può muoversi, è zero-dimensionale.

Proviamo a complicarci la vita? Secondo voi, che dimensione ha lo spazio definito come *due rette che si incrociano*? Beh, un punto su una retta può muoversi solo in una direzione, quindi a prima vista sembrerebbe monodimensionale... Già, ma il *punto di incrocio* ha *due* direzioni di movimento tra cui scegliere: una lungo una retta, l'altra lungo l'altra. Un'idea potrebbe essere "Teniamo il minimo"; Già, bravi furbi... Adesso provate a calcolare la dimensione di uno spazio definito da un *quadrato* più un *punto* non appartenente al quadrato. Se tenete il minimo, vi ritrovate con uno spazio zero-dimensionale con dei punti che scorrazzano liberamente nel quadrato. Qualcosa, però, ci dice che lo spazio {✕} dovrebbe essere monodimensionale, mentre lo spazio {•,■ } dovrebbe essere bidimensionale[17].

Cerchiamo di essere un po' più precisi, e partiamo quindi da qualcosa di "reale". Ad esempio, lo spazio nel quale viviamo è associabile il concetto di "distanza" tra due punti (per i raffinati: è uno spazio su cui definiamo una *metrica*); nel piano euclideo, la distanza ***s*** tra due punti è definita come:

$$s^2 = x^2 + y^2 \qquad \texttt{[007.001]}$$

Che probabilmente considerate "intuitiva", esattamente come il sottoscritto da piccolo.

Beh, non è vero. Ad esempio, una delle cose per cui Einstein *non* ha vinto il Nobel[18] è che nella Relatività la "separazione" tra due eventi deve tener conto del "tempo proprio", e il conto si fa in un modo un po' diverso:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \qquad \texttt{[007.002]}$$

Altro esempio, se preferite qualcosa di più "terra-terra": supponiamo di poter camminare solo sulle strade di una città con le vie perpendicolari e parallele[19], equidistanziate tra di loro; "Scusi, per Madison Avenue?" "Dritto per tre isolati, poi a sinistra per cinque" E voi sapete che dovete scarpinare una distanza di 3+5=8 isolati.

Quindi, anche il concetto di distanza non è propriamente immediato. Tra l'altro, esiste un grazioso giochetto, che permette di vedere immediatamente l'enorme differenza tra questi spazi (o perché a Torino ci siano tanti matematici, fate voi...): dato un punto, l'insieme di tutti i punti aventi distanza dal punto dato minore o uguale ad un certo ***d*** viene detto *disco* (chiuso). Voglio sperare che con gli spazi bi- e tridimensionale non abbiate grossi problemi, ma provate a tracciare un "disco" nello spazio della Taxicab Geometry...

Quello di dimensione sembra effettivamente un concetto piuttosto complesso, al di fuori dei casi "reali". E sappiamo tutti benissimo che il limitarsi alla realtà è estremamente seccante, per i matematici.

Va bene, vi dico l'assassino. Però bisogna aspettare sino al Novecento (*mille* e novecento) per arrivare a qualcosa di sensato. Infatti, nel 1913, ***Brouwer*** riesce a dare una definizione formalmente corretta del concetto di dimensione; affrontiamola prima in modo intuitivo, poi cercheremo di complicarci la vita.

Supponiamo di avere un cubo; dividiamolo in cubetti più piccoli. Domanda: i punti che sono comuni al maggior numero di cubi, a quanti cubi appartengono?

---

[17] I più scafati di voi cercheranno di cavarsela dicendo che i due spazi sono effettivamente così ma hanno una *singolarità*... Spiacente, ma inventarsi un nome nuovo per una cosa che non si riesce a capire non è propriamente "metodo scientifico".

[18] Lo ha vinto per la descrizione dell'effetto fotoelettrico.

[19] A noi capita sovente... Il monopolismo culturale imperante però ci impedisce di chiamarla "Geometria Torinese", costringendoci ad optare per dei filoamericani "Manhattan" o "Taxicab" Geometry.

È abbastanza evidente che un punto su una faccia apparterrà a due cubi, mentre un punto su uno spigolo (lasciamo perdere un attimo il vertice) apparterrà a ***quattro*** cubi. Bene, sottraete uno da questo valore massimo e avete la dimensione dello spazio.

Cerchiamo di essere un po' più formali. Per definizione, l'***insieme vuoto*** ha dimensione -1 ed è l'***unico*** "oggetto" ad avere questa dimensione (no, non ve lo spiego. Serve a far tornare i conti). La dimensione di qualsiasi altro oggetto è definita come *uno più la dimensione dell'oggetto che può essere usato per separare completamente ogni parte dell'oggetto dal resto*.

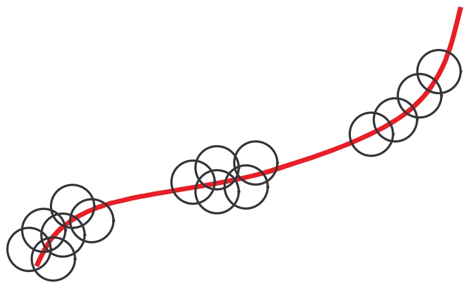
L'importante, come per molte definizioni di questo tipo, è cominciare dal basso. Per separare una parte di un insieme numerabile di punti dal resto non vi serve nulla (se l'insieme è numerabile, ha un numero finito di punti, e quelli sono già separati per conto loro), o meglio vi serve l'insieme vuoto; quindi, un insieme numerabile ha dimensione ***zero*** (se a qualcuno si accende una lampadina a proposito del "meno uno" del piano di sopra, è sulla strada giusta).

Da questo punto di vista, cosa possiamo dire a proposito dei nostri simpatici amici, {✕} e{•,■ }? Beh, per {✕} non c'è problema; un punto (anche nella "singolarità") divide lo spazio in due sottospazi, quindi se il punto ha dimensione zero, {✕} ha dimensione ***1***.

Il secondo è un pò più complesso, in quanto dobbiamo distinguere tra dimensione ***locale*** e ***globale***; se guardiamo il punto, il nostro spazio ha dimensione zero, ma se guardiamo il quadrato allora ha dimensione due; quindi, la nostra definizione va leggermente modificata: ***la dimensione (globale) di uno spazio è il massimo della dimensione locale; la dimensione locale è la dimensione dell'oggetto con dimensione minima in grado di dividere in due parti lo spazio più uno***. In questo modo, anche il secondo aggeggio, pur avendo in alcune zone dimensione locale zero, risulta avere dimensione globale due. Vi faccio notare, se non ve ne siete accorti, che {✕} ha dappertutto la stessa dimensione locale; almeno un problema lo abbiamo risolto.

È facile vedere che anche se stiracchiamo i nostri oggetti senza romperli (o se preferite, li sottoponiamo a trasformazione propria per mezzo di un omomorfismo) la dimensione non cambia; siccome stiracchiare le cose senza romperle è il lavoro della Topologia, questa definizione di dimensione è detta ***dimensione topologica***.

Bene, dopo questa abboffata teorica, vediamo se possiamo definire la dimensione in qualche altro modo interessante… Consideriamo il disegno qui di fianco. Visto che ormai tutti abbiamo una stampante a colori *[Si, anch'io, finalmente! (RdA)]*, consideriamo la riga rossa come avente dimensione incognita.



Cominciamo a coprirla con dei ***dischi***[20], e vediamo cosa succede. Nella figura, vedete tre possibili disposizioni.

Nel primo caso (quello a sinistra), ci sono sempre almeno ***tre*** dischi che hanno un'area in comune con un dato disco; nel secondo caso, ci sono sempre almeno ***due*** dischi che hanno un'area in comune con un dato disco; mente nel terzo caso c'è sempre almeno ***un*** disco con un'area in comune con il disco dato (si, c'è anche il disco "dall'altra parte"… Lasciamolo perdere, è sempre nella stessa situazione). Potete ridurre l'area comune ad un singolo punto (cerchi tangenti), ma sotto questo valore non potete andare; potete ridurre il raggio del disco (e a questo punto dovrete metterne qualcun altro), ma il discorso è lo stesso. Quindi, il nostro oggetto ha ***dimensione di copertura*** pari a ***uno***.

[20] Vi ricordo che il concetto di disco dipende dalla metrica dello spazio; qui non ci sono problemi, ma è bene tenerlo presente, se volete giocare con delle cose strane.

Proviamo un esempio senza disegno, per vedere se abbiamo capito: se prendete un insieme (finito) di punti separati tra loro e fate i dischi abbastanza piccoli, vi serve un disco per ogni punto e non si sovrappongono; quindi, dimensione zero.

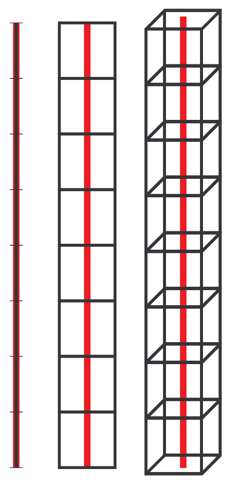
Se vi sembra una definizione piuttosto stupida di dimensione, provo a darvela in modo più formale; le anime semplici, se non vogliono essere turbate, possono saltare la parte indentata.

> Quando un insieme ***S*** è coperto di dischi, il massimo numero di dischi aventi intersezioni non vuote è definito ***ordine*** della copertura. Una ***copertura aperta*** di ***S*** è una collezione di dischi aperti finiti $A = \{A_1, \ldots, A_m\}$ tale che la loro unione copre ***S***. Una copertura aperta $B = \{B_1, \ldots, B_m\}$ è detta ***affinamento*** di ***A*** se $\forall B_i \; \exists A_k : B_i \subset A_k$. L'ordine di una copertura ***A*** è il massimo ***k*** tale che esistono indici disgiunti $i_1, \ldots, i_k$ con $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} \neq 0$. Un insieme ***S*** ha dimensione di copertura ***n*** se qualsiasi copertura aperta di ***S*** ammette un affinamento aperto di ordine ***n+1*** ma non di ordine ***n***.

Per la serie "Ufficio Complicazioni Affari Semplici".

No, non mi piace. Come sapete dai problemi che compaiono su RM, quell'"andare per tentativi", mi sta un po' antipatico. C'è comunque di peggio, state a vedere.

Credo ormai abbiate capito che la definizione di dimensione dipende anche da come un matematico si sveglia al mattino... E infatti, anche ***Hausdorff*** e ***Besicovich*** ci hanno provato, lavorando sul concetto di copertura. Teniamoci sul semplice e facciamo un disegnino.



Allora, prendiamo la nostra linea (rossa) e proviamo a coprirla; prima con dei segmenti, poi con dei quadrati, e poi con dei cubi.

Calcoliamo adesso quanto è "grande" la nostra linea rossa[21], supponeniamo che i nostri aggeggi che coprono lo spazio di cui cerchiamo di misurare la dimensione abbiano "grandezza" ***r*** e che per coprire il nostro aggeggio ne servano $N(r)$: è abbastanza evidente che il numero dei segmenti che ci servono sarà funzione di ***r*** e, nel caso particolare della linea di lunghezza ***L₀***, possiamo affermare che $N(r) = \frac{L_0}{r}$. Quindi, volendo complicarci un po' la vita, possiamo dire che è:

$$L = \lim_{n \to 0} N(r) * r = \lim_{n \to 0} \frac{L_0}{r} * r = \lim_{n \to 0} L_0 * r^0 = L_0 \qquad \texttt{[007.003]}$$

Insomma, la misura ***L*** diventa asintoticamente uguale alla lunghezza della linea ed è indipendente da ***r***.

Se calcoliamo invece l'area (secondo caso), dovremo considerare il numero dei quadrati sempre definito da $N(r) = \frac{L_0}{r}$, però questa volta ogni elemento ha area

$$A = \lim_{n \to 0} N(r) * r^2 = \lim_{n \to 0} \frac{L_0}{r} * r^2 = \lim_{n \to 0} L_0 * r^1 = 0 \qquad \texttt{[007.004]}$$

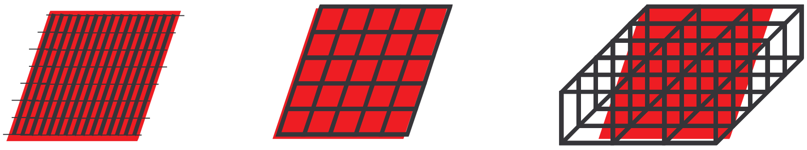
[21] La sua "dimensione", nell'altro senso. Qui, il bisticcio di parole non fa assolutamente ridere.

E a questo punto non dovreste avere problemi ad esaminare il terzo caso:

$$V = \lim_{n \to 0} N(r) * r^3 = \lim_{n \to 0} \frac{L_0}{r} * r^3 = \lim_{n \to 0} L_0 * r^2 = 0 \qquad [007.005]$$

Insomma, l'unica misura interessante è la ***lunghezza*** della linea. Le altre portano a dei valori non significativi.

Proviamo a vedere un altro esempio: capisco che questa vi possa sembrare piuttosto stupida, come metodologia, ma funziona proprio così.



Proviamo con un'area:

Riferimento al disegnino, come sempre (questa volta è più schifoso del solito). Qui, però mi limito a darvi le formule.

Allora, se $\boldsymbol{A_0}$ è l'area:

$$L = \lim_{r \to 0} N(r) * r = \lim_{r \to 0} A_0 * r^{-1} = \infty \qquad [007.006]$$

$$A = \lim_{r \to 0} N(r) * r^2 = \lim_{r \to 0} A_0 * r^0 = A_0 \qquad [007.008]$$

$$V = \lim_{r \to 0} N(r) * r^3 = \lim_{r \to 0} A_0 * r^1 = 0 \qquad [007.009]$$

...e qui l'unica misura interessante è l'***Area***.

Visto che ormai siete convinti che sia una stupidaggine, proviamo con la definizione più formale: come sempre, se non ve la sentite saltate l'indentato.

> È data una ***funzione di saggio*** $h(r) = \gamma * r^d$ di copertura di un insieme ***S*** in cui γ è un fattore dipendente dalla geometria dell'insieme; con essa è formata la ***misura*** $M(d) = \sum h(r)$. La misura sarà zero o infinito in funzione della scelta di ***d***; la dimensione di Hausdorff-Besicovich è il valore critico di ***d*** per cui la misura cambia il valore da zero a infinito:

$$M_d = \sum \gamma * r^d = \gamma * N(r) * r^d \xrightarrow{r \to 0} \begin{cases} 0 & \Rightarrow d > D_H \\ \infty & \Rightarrow d < D_H \end{cases} \qquad [007.010]$$

Se questa definizione causa in voi un irrefrenabile moto di ammirazione, allora possiamo aggiungere che la funzione di saggio preferita è

$$\gamma(d) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d}{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)} \qquad [007.011]$$

In cui i più scafati potranno riconoscere il volume di un'*ipersfera* d-dimensionale.

…era di questo, che avevi paura di parlare? Noo, questa è l'*introduzione*… Adesso indovinate di cosa parlerò la prossima volta. E cosa c'entrano gli Islandesi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms