Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 057 – Ottobre- Anno Quinto

1. Geometria dell'endecasillabo

"Nessun matematico è un vero matematico

se non è in parte anche un poeta"

Come la matematica, anche la poesia sembra essere qualcosa di cui si può serenamente fare a meno, nella vita di tutti i giorni; e come per la matematica, anche per la poesia questo giudizio è certamente sbagliato. La maggior parte degli esseri umani ha bisogno di emozioni e sentimenti, anche se passa la maggior parte del tempo ad inseguire quadrature di bilancio e scadenze di consegna. E qualche volta, questo bisogno di poesia viene svelato, magari con timidezza, quando se ne presenta l'occasione.

Può capitare che il chairman di una importante riunione aziendale sia sorpreso dalla bellezza del tramonto che occhieggia fuori dalla grande vetrata della sala riunioni del quattordicesimo piano, e approfitti del suo ruolo e della stanchezza che ormai traspare dal volto di tutti i partecipanti, per declamare:

"E' l'ora che volge al desìo, e ai naviganti intenerisce il core"

Così facendo, l'illustre manager ricorda al consesso che si è fatto tardi, che anche i dirigenti d'azienda hanno un'anima e la voglia di tornare in famiglia, che possiede una solida cultura classica e, soprattutto, che la noiosissima riunione è ormai diventata intollerabile, e bisogna insomma smetterla con queste baggianate e chiudere tutto lì. In una riunione aziendale è difficile che qualcuno osi mettere in dubbio le opinioni e le citazioni del sommo presidente, e di solito le riunioni non sono frequentate da bambini delle scuole elementari: e questo è un peccato. I bambini delle elementari sono infatti tra i pochi soggetti della moderna civiltà occidentale cui è consentito fare domande di qualsiasi natura: sono ancora piccoli, devono ancora impadronirsi della lingua, quindi il novenne presente alla riunione avrebbe tutti i diritti di chiedere: "Scusate, ma che vuol dire che *l'ora volge al desìo*?".

Sarebbe interessante scoprire quali risposte potrebbe raccogliere il bambino; non v'è dubbio che qualcuno gli spiegherebbe che "desìo" significa "desiderio", e che il poeta in qualche maniera voleva dire che ci sono dei momenti, verso sera, in cui si risveglia il desiderio. Qualcun altro, forse, potrebbe svicolare sul secondo verso, e deviare l'attenzione sul cuore intenerito dei marinai: tutti, sembra quasi di sentirli, spenderebbero parole per spiegare al bambino che la poesia è piena di "licenze poetiche", e che non è tanto importante il significato delle parole, quanto la bellezza, e il suono, e il ritmo delle stesse. Direbbero al bambino che deve aprire il cuore, e cercare dentro di sé il significato di quel "volge al desìo", e scoprire così il vero valore dell'arte poetica. Perché la poesia parla soprattutto al cuore, e non alla testa.

In queste "spiegazioni" c'è molto di vero. Ciò che rende immortale un verso è una congerie di ragioni, e se quel "volge al desìo" riesce a distinguersi all'interno dei 14233[1] versi della Divina Commedia pur mantenendo celato il suo significato, questo certo significa che davvero "il cuore ha ragioni che la ragione non intende". Ciononostante, forse il ragazzino si meritava una spiegazione migliore e più completa, che nulla toglie alla bellezza dei versi, anzi. Tanto per cominciare, si potrebbe notare che non tutti i due versi citati, chissà perché, sono endecasillabi, visto che "E' l'ora che volge al desìo" non supera le nove sillabe; e questo è assai strano, visto che l'Alighieri all'endecasillabo era molto affezionato. Poi, magari prendendo il fanciullo da parte affinché il gran presidente non senta, gli si potrebbe rivelare che il distico di Dante non è stato citato al meglio. Quello che l'Alighieri effettivamente scrisse è:

Era già l'ora che volge il disio

ai navicanti e 'ntenerisce il core[2]

e con il testo ben chiaro, si potrebbe analizzare meglio il pensiero dantesco. Si potrebbe scoprire allora che entrambi i versi sono di undici sillabe, per cominciare. Poi, sarà facile osservare che l'ora non "volge al desio", ma "volge il disio"; e non è un cambiamento da poco. Infine, come colpo di scena finale, si potrebbe notare che la piccola congiunzione "e" non si trova tra "desio" e "ai naviganti", ma tra "navicanti" e "'ntenerisce". E questo cambia tutto. Nella citazione manageriale, le due azioni che "l'ora" fa sono quelle di "volgere al desio" e di "intenerire il cuore ai naviganti". Secondo la lettura più puntuale, si scopre invece che "l'ora" "volge il disio ai navicanti" e "'ntenerisce il core" (e lo intenerisce tout court, senza limitare l'azione emolliente nei soli riguardi di chi è uso andar per mare).

Con queste premesse si può affrontare il bambino curioso con armi migliori. Gli si potrebbe spiegare che "disio" significa sì "desiderio", e che "volgere" significa semplicemente "rivoltare", "far girare"; poi, si dovrebbe far appello all'immaginazione del fanciullo e spingerlo a figurarsi i naviganti di quei tempi. Metà avventurieri e metà esploratori, andavano per i mari alla ricerca di terre nuove e nuove genti:

[1] Che potrebbe sembrare un numero primo, ma non lo è: 14233=43x331

[2] Purgatorio, VIII, 1-2

dovevano essere per forza coraggiosi, molto coraggiosi, perché quasi sempre viaggiavano verso l'ignoto, sfidando gli elementi e i pericoli connessi alla navigazione. Quale forza li spingeva in imprese così pericolose? Certo il bisogno, la voglia di ricchezza, o anche solo di sfuggire alla miseria: ma soprattutto doveva esserci il desiderio di andare avanti, di scoprire nuove cose. Così, il desiderio dei naviganti era sempre lì, davanti alla prua della loro nave, rivolto alle nuove terre ancora da scoprire. Non è difficile immaginarseli con lo sguardo a proravia, nella speranza di vedere comparire all'orizzonte la destinazione agognata.

Ma i marinai sono uomini, e da uomini sono soggetti alla malinconia e soprattutto alla nostalgia, che non a caso significa "dolore del ritorno". Anche il più inveterato dei marinai ogni tanto viene colto dal desiderio di tornare a casa, trafitto dalla mancanza dei suoi cari. E così come è facile immaginarseli con lo sguardo rivolto in avanti durante tutta la giornata di navigazione, è altrettanto facile figurarsi che, quando la luce del giorno infine cade e con essa cessano le attività frenetiche dell'uomo di mare, il loro cuore si apra alla nostalgia. E il desiderio e gli occhi dei naviganti cambiano oggetto e direzione, e si volgono a poppa, verso le terre che hanno lasciato e che continuano ad allontanarsi sempre di più, dietro l'orizzonte. E mentre il sole tramonta, il loro cuore, e il nostro con loro, si intenerisce.

Questo il senso del "volge il disio ai navicanti"; è davvero un desiderio che cambia direzione, che si sposta dalla direttrice di prua, avanti, verso la destinazione, alla direttrice di poppa, indietro, verso casa. Ed è proprio in quella particolare ora, in quel momento in cui il giorno muore e discende la sera, che questo avviene. E il racconto al bambino curioso dovrebbe terminare con la stupefacente rivelazione, ormai evidente, che i due versi del sommo poeta servono solo ad annunciare che "scende la sera".

Se è vero che non è necessario conoscere sempre il significato delle parole per apprezzarle, è impossibile che comprenderle appieno tolga qualcosa alla loro bellezza; anzi, è frequente che si accenda uno stupore supplementare, un piacere nuovo, nello scoprire come sia stato magistralmente descritto un evento magari banale con delle parole così mirabili. E si possono fare dei confronti, al limite del sacrilegio letterario, con poeti cronologicamente a noi più vicini. In una canzone dell'album "La Buona Novella", Fabrizio de Andrè fa parlare Tito, uno dei due ladroni crocifissi sul Golgota insieme al Cristo. Quando il disgraziato è ormai morente, dopo che ha lasciato in versi il suo irriducibile testamento spirituale, afferma:

"E scivola il sole, aldilà delle dune,

a violentare altre notti[3]*"*

il cui significato è il medesimo dei due versi danteschi. Ma così come nei versi di Dante traspare il tramonto segnato dalla nostalgia, qui c'è la disperazione di un tramonto che è anche l'ultimo che a Tito è dato di vedere, disperazione che scuote il cuore grazie all'utilizzo brutale di quel "violentare altre notti". Ma, anche in questo caso, è necessario ricordare che il verso è reso possibile solo dalla conoscenza, lapalissiana nel ventesimo secolo ma non nel tredicesimo, che ad ogni tramonto corrisponde un'alba in qualche altra parte del globo, e che in ogni momento convivono, sul nostro pianeta, un'alba e un tramonto.

Anche la poesia ha le sue regole; nei confronti della matematica ha forse il vantaggio che può essere goduta anche su livelli diversi, anche solo per il suono delle parole. Chi scrive ha passato buona parte della sua adolescenza incantato dall'urlo di Polifemo: *"Egli allora, ululando: Ohimè! rispose, da' prischi vaticinî eccomi côlto!"*[4] forse

[3] F. De Andrè, "Il Testamento di Tito"

[4] Omero, "Odissea" – Libro IX. Traduzione di Ippolito Pindemonte

proprio perché ignorava del tutto sia il significato di "prischi" sia quello di "vaticini", e il risultato era misterioso e affascinante. La matematica è più sfortunata: per godere della bellezza di un teorema occorre comprenderlo davvero, possedere il linguaggio delle formule o dei concetti usati per dimostrarlo. Ma le somiglianze tra matematica e poesia sono più frequenti di quanto si potrebbe essere tentati di pensare, specie se si è cresciuti all'ombra della formazione italiana che, gentilescamente e crocianamente, continua a ritenere impermeabili il mondo delle arti e letterature e quello delle scienze. A contraddire questa posizione resistono le opinioni di molti matematici illustri, che hanno spesso paragonato la bellezza della matematica a quella della poesia; ma a far loro compagnia ci sono anche le opinioni di altrettanto illustri poeti.

"Spero che le mie poesie abbiano la solidità di alcune pagine di algebra", diceva Paul Valéry[5]; e Gustave Flaubert non sembra su una lunghezza d'onda troppo diversa, quando afferma "la Poesia è una scienza esatta come la Geometria". Sembrano essere soprattutto i transalpini a riconoscere una stretta somiglianza tra versi e teoremi: da parte sua, il grande Voltaire arrivò ad enunciare un concetto assai impegnativo:

"L'immaginazione è presente in matematica in una maniera sorprendente. C'era molta più immaginazione nella testa di Archimede di quanta ve ne fosse in quella di Omero"[6].

Questa lancia spezzata a favore del primato della matematica, soprattutto perché proveniente da un non matematico come Voltaire, può sembrare esagerata. Non sappiamo in che periodo della sua vita Francois-Marie Arouet scrisse quest'inappellabile sentenza, ma sospettiamo che fosse nel periodo in cui il filosofo francese era perdutamente innamorato di Madame du Châtelet[7]. A questa donna, eccezionale cultrice di scienza, Voltaire dedicò questi versi che lasciamo in originale, perché possano essere apprezzate le rime da chi conosce il francese:

Sans doute vous serez célèbre

Par les grands calculs de l'algèbre

Où votre esprit est absorbé

J'oserais m'y livrer moi-même;

Mais Hélas ! A + D – B

N'est pas = à Je vous aime.[8]

La cosa che colpisce nella frase che mette a confronto Archimede e Omero è il concetto di "immaginazione", soprattutto se la si confronta con questo commento di David Hilbert tratto da una lettera che il tedesco inviò ad un amico nella quale parla di un suo ex-studente: *"Sai, per essere un matematico non aveva abbastanza immaginazione; ma ora è diventato un poeta e se la cava davvero bene…"*. Ma è vero

[5] Paul Valery (1871-1945), poeta e filosofo francese.

[6] E' impressionante anche la somiglianza di questa frase (che lo storico della matematica D. Wells attribuisce a Voltaire, e noi gli crediamo) con quella che D'Alembert pronuncia nel Discours Préliminaire de L'Encyclopédie: "L'immaginazione di un matematico che crea è in tutto identica a quella di un poeta che inventa (…) Di tutti i grandi uomini dell'antichità, Archimede è quello che più di ogni altro merita di essere posto sullo stesso piano di Omero".

[7] Gabrielle-Émilie Le Tonnelier de Breteuil, marchesa di Châtelet-Lomont (1706-1749), fu una delle rare donne del diciottesimo secolo devote alla scienza. Celebre per aver tradotto i "Principia" di Newton, fu una accesa sostenitrice delle idee dell'inglese, nonostante a quei tempi fosse, soprattutto in Francia, messo in contrapposizione a Cartesio.

[8] "Non v'è dubbio che celebre sarete – per i grandi calcoli dell'algebra – da cui il vostro spirito è assorbito. - Agognerei anch'io colà avventurarmi, - Ma, Ahimè! A + D – B non è = a "Io vi amo"."

che Hilbert adorava a tal punto la matematica che il suo giudizio non può in nessun caso essere considerato obiettivo. Resta però il fatto che l'immaginazione sembra davvero essere il denominatore comune tra matematica e poesia: l'immaginazione e la bellezza, certo; ma si è già detto come sia necessario, per godere della bellezza della matematica, fare lo sforzo iniziale di impararne il linguaggio. Sempre a proposito di matematica, poesia e immaginazione, queste che seguono sono le parole di un giurista inglese[9] (il cui papà, però, fu matematico a Cambridge):

"Che la Scienza e la Poesia siano sorelle non è un vero segreto per chi le conosce, ma rimane un mistero e un ostacolo insormontabile per molti, al punto che nelle più astratte, formali e controintuitive branche della ricerca scientifica un'elevata immaginazione, simile a quella del poeta, è spesso più utile di un lavoro perseverante."

Se sono così frequenti le dichiarazioni di sorellanza tra matematica e poesia (almeno al di fuori dei patri confini), forse la ragione discende anche dal fatto che sia la matematica, sia la poesia, sono di difficile definizione. Spesso la matematica viene confusa con la sola tecnica del far di conto, e la poesia solo con la semplice capacità di mettere delle parole in rima; provate a raccontare a qualcuno al quale non piace la matematica che non è affatto insolito trovare celebri matematici che si impuntavano spesso con la tavola pitagorica, e rifiuteranno di credervi[10]. E in definizioni poco restrittive come queste si può infilare quasi tutto. Se ci accontentiamo di definire "poesia" qualsiasi frase in rima, non è difficile trovare dei limerick[11] entusiasmanti dal punto di vista matematico. Uno dei migliori è questo:

Integral z-squared dz

from one to the cube root of three

times the cosine

of three pi over nine

equals log of the cube root of 'e'.

che è bene tradurre non in italiano, ma direttamente in simboli:

$$\int_1^{\sqrt[3]{3}} z^2 dz \times \left(\cos \frac{3\pi}{9} \right) = \left(\ln \sqrt[3]{e} \right)$$

Ma i poeti potrebbero arrabbiarsi, se persistiamo a chiamare poesia questi divertimenti. Si potrebbe provare allora usare metodi più subdoli ed esoterici, proponendo loro questi versi d'una preghiera vedica, molto liberamente tradotti dal sanscrito:

Oh Signore,

Oh unto dal sacro yogurt che la donna del latte distilla,

[9] Il giurista è Frederick Pollock, e suo padre è il barone J. Frederick Pollock, Cambridge Senior Wrangler.

[10] A tale proposito, l'aneddoto più celebre è forse quello che riguarda una lezione di Ernst Eduard Kummer, uno dei maggiori algebristi tedeschi. Mentre scriveva alla lavagna, gli capitò di dover calcolare 7x9, e cominciò a mugugnare nel tentativo di ricordare il risultato. Uno studente suggerì "61", e Kummer scrisse 61. Allora un altro studente protestò, asserendo che 7 per 9 faceva 69, e non 61. Kummer si spazientì e osservò: "Per favore, signori! Non possono essere entrambi; o è l'uno o è l'altro".

[11] "What is a limerick, Mother? - It's a form of verse, said brother - In which lines one and two - Rhyme with five when it's through - And three and four rhyme with each other". Tutto chiaro, adesso?

Oh Khrisna adorato

Oh, tu che risollevi i caduti,

Oh tu, padrone di Shiva,

Proteggimi, Ti prego.

Senza avventurarci ad indagare sulla poetica religiosa, ci potremmo limitare a chiedere ai poeti e matematici d'occidente quale sia la lettura matematica di una tale invocazione; sembra davvero incredibile leggere alcunché di algebrico o geometrico, nei versi sopra malamente tradotti in italiano. Ma una lettura matematica c'è, eccome. Per arrivarci, occorrono solo due passaggi: il primo, del tutto ovvio, è quello di riportare la preghiera vedica in lingua originale (pur con tutti i connessi problemi di traslitterazione):

gopi bhagya madhuvrata

srngiso dadhi sandhiga

khala jivita khatava

gala hala rasandara

il secondo passaggio consiste invece in una tabella solo apparentemente esoterica, ma che è invece riconosciuta come "standard" tra gli addetti ai lavori. La tabella associa ad ogni consonante sanscrita una cifra decimale.

Gruppo KA	Gruppo TA	Gruppo PA	Gruppo YA	*Valore*
Ka	Ta	Pa	Ya	1
Kha	Tha	Pha	Ra	2
Ga	Dda	Ba	La	3
Gha	Dhda	Bha	Va	4
Nga	Na	Ma	Sha	5
Cha	Ta		Ssa	6
Chha	Tha		Sa	7
Ja	Da		Ha	8
Jha	Dha		Ksh	9
Nya	Na			0

Con l'aiuto di questa tabella (e di un buon manuale che vi aiuti a riconoscere le differenze, tanto per dire, tra "Da", "Dda", "Dha" e "Dhda") dovreste scoprire che la preghiera corrisponde a 31415926535897932384626433832792, ovvero alle prime trentadue cifre di pi greco[12]. In tutto questo non c'è alcuna pretesa di magia o mistica divinazione; anche se si è portati ad associare il sanscrito a periodi antichi (quando trentadue cifre di pi greco erano pura fantascienza), la lingua è invece ancora frequentata ed utilizzata. E l'artificio di associare ai mantra e alle preghiere anche "letture" che aiutino a memorizzare elementi come il rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio non sono insoliti. Ad esempio, sembra che gli astrologi iniziati trovino assai comodo la codifica delle consonanti sanscrite, per orientarsi all'interno delle "case" astrologiche.

Ma quando si parla di Poesia di solito non si parla di messaggi cifrati o di giochi numerici nascosti; e non si deve richiedere al poeta neanche una esatta quantificazione dei concetti, sennò si rischia di fare come Babbage che si perito di correggere Tennyson; pur dichiarando di apprezzare molto la sua poesia, scrisse una lettera in cui chiedeva di cambiare i versi *"Ogni momento muore un uomo, ogni momento uno nasce"*[13] con il più prosaico "Ogni momento muore un uomo, ogni

[12] Se non lo avete ancora fatto, è assolutamente necessario adesso che andiate a frugare in archivio (il vostro o quello del sito di Rudi Mathematici) e andiate a rileggervi il Paraphernalia Mathematica "Due o Tre cose che so su di lui", pubblicato su RM022, Novembre 2000. Di giochi come questi, restando in occidente e senza scomodare il sanscrito, il nostro GC ne ha riportati una dozzina. E lì trovate anche i versi della Divina Commedia che meglio esprimono i dubbi matematici di Dante.

[13] *"Every moment dies a man, every moment one is born"*: Lord Alfred Tennyson, "The Vision of Sin", IV.

momento ne nasce 1 e 1/6", al fine di giustificare l'incremento demografico in atto. Tentativi seri di coniugare al meglio possibile matematica e poesia sono stati, ancora una volta, territorio di caccia di immaginifici cervelli francesi. Proprio durante l'incubazione dell'Oulipo[14], che lo avrebbe poi visto tra i padri fondatori, Raymond Queneau stava completando "Centomila Miliardi di Poesie": si trattava di 10 sonetti di 14 versi ognuno, scritti in maniera che ognuno dei quattordici "primi versi" fosse poi coniugabile con qualsiasi dei secondi, i secondi con i terzi, e così via. Le combinazioni possibili diventavano pertanto 10^{14}, ovvero i centomila miliardi del titolo.

Non tutti gli addetti ai lavori si entusiasmano nella ricerca di paralleli tra matematica e poesia. P.A.M. Dirac, con flemma inglese, notava che *"Nella scienza si prova a dire, in una maniera che sia comprensibile a tutti, qualcosa che non sia mai stato detto in precedenza. In poesia accade l'esatto contrario"*[15]. Sulla stessa linea polemica si trova anche Poincaré, del quale rimase celebre la frase: *"La matematica è l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse"*, enunciata come contraltare alla celebre dichiarazione *"La Poesia è l'arte di dare nomi diversi alle medesime cose"*. Ma quale che sia la verità (e ammesso che verità esista) in proposito, certo è stupefacente quanto numerose siano le osservazioni che coniugano matematica e poesia. Forse perché entrambe richiedono immaginazione, forse perché entrambe non trascurano il lato estetico dei loro prodotti, forse perché entrambe necessitano di un loro proprio linguaggio. Di tutte le citazioni, la nostra preferita è quella semplice e piana che campeggia come sottotitolo di quest'articolo: quel *"Nessun matematico è un vero matematico se non è in parte anche un poeta"* che è anche l'unica citazione passata alla storia di Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

Il nome di Weierstrass è un appuntamento inevitabile nei corsi di Analisi, e non c'è studente che non abbia dovuto farci i conti. Forse proprio per la sua ineluttabilità, è assai difficile che Weierstrass sia ricordato come un nome piacevole e simpatico. La situazione è peggiorata dal fatto che i teoremi che portano la sua firma (quello sul massimo e minimo delle funzioni continue e limitate in un dominio, e l'ancora più celebre criterio sulla convergenza uniforme delle serie[16]) sono fondamentali e appaiono troppo "formali" (il primo riscuote commenti del tipo: "E ci vuole un teorema, per dire questa evidente baggianata?", il secondo e il correlato concetto di "uniforme convergenza" rimangono invece spesso impermeabili alla comprensione per qualche tempo, lasciando nelle teste di chi lo studia la sensazione di

---

[14] Oulipo, ovvero « OUvroir de LIttérature POtentielle» è stato fondato dal matematico dadaista François Le Lionnais e da Raymond Queneau, scrittore. Tra gli altri, vi presero parte quel genio artistico e scacchistico di Marcel Duchamp e il nostro Italo Calvino. Se siete interessati agli sviluppi, alle diramazioni e ai figliocci italiani dell'Oulipo, fatecelo sapere: tra i nostri affezionati lettori qualcuno con le mani in pasta abbiamo speranza di trovarlo.

[15] Non vorremmo fornire argomenti ai cultori della poesia contro la matematica, ma chiunque abbia mai letto anche solo poche pagine degli scritti di Dirac sa quanto suoni sorprendente quel suo "comprensibile a tutti".

[16] E poi ci sarebbe anche il leggendario Teorema di Bolzano-Weierstrass, e molte altre cose ancora…

star parlando del sesso degli angeli. La sensazione è sbagliatissima, senza capire la convergenza uniforme non si fa un passo, nello studio delle serie, ma tant'è…). Poi, c'è il non trascurabile fatto che è un nome tedesco e lungo, non maneggevole come quello di Rolle e Cauchy; infine, se qualcuno ha la ventura di vedere un qualsiasi ritratto del matematico tedesco, si convincerà in via definitiva di trovarsi di fronte ad un professore vecchio, triste e inevitabilmente noioso. Forse anche un po' cattivo, ma soprattutto noioso.

A leggere la sua biografia, lo stereotipo dello scienziato prussiano ottocentesco viene messo a dura prova. Karl nasce il 31 Ottobre 1815 a Ostenfelde, primo di quattro fratelli e figlio di un "uomo in carriera" che ha ben chiaro in testa quale debba essere il futuro dei propri figli. Perde la madre quando è ancora dodicenne, la qual cosa amplifica e accelera un conflitto interiore tra i suoi desideri e il futuro che per lui ha già pianificato il genitore; Wilhelm Weierstrass pretende che il suo primogenito si dedichi all'economia e alla finanza, e non sembra voler notare che Karl già al ginnasio ha brillato oltre ogni aspettativa in matematica, pur dovendo studiare e allo stesso tempo lavorare come commesso in libreria per aiutare le finanze familiari. E Karl non vuole dispiacere il padre: si iscrive all'Università di Bonn per applicarsi in legge, finanza ed economia, anche se di fatto non riesce a seguire le lezioni e a progredire negli studi. Il conflitto tra i suoi desideri (studia matematica da solo, leggendo il Giornale di Crelle[17], applicandosi agli integrali ellittici e alle funzioni abeliane) e il desiderio di obbedire alla volontà paterna lo portano vicino all'alcolismo, minano la sua salute psichica e, alla fine, lo portano ad abbandonare gli studi d'economia senza ottenere la laurea.

Weierstrass soffrirà poi di vertigini per più di un decennio, in età ormai matura e quando la sua carriera di accademico matematico sarà ben avviata e luminosa; e sembra proprio che tale malattia fosse di origine squisitamente psicologica, dovuta all'irrisolto conflitto con il genitore. Del resto, la salute fisica non sarà mai un'alleata per Karl: pur arrivando alla lusinghiera età di 81 anni (morirà nel 1897, di polmonite), i suoi attacchi, cominciati quando aveva trentacinque anni, terminano nel 1861 solo perché sopravviene un collasso totale, che lo porta a tenere lezioni all'università solo con l'aiuto di uno studente incaricato di scrivere alla lavagna quanto lui spiega, seduto, alla cattedra. Negli ultimi anni di vita è persino costretto su una sedia a rotelle.

Tra gli stentati inizi e la sofferente fine, giace una brillantissima carriera di matematico. Più di altri matematici è considerato come il padre dell'analisi, per l'opera di rigorosa rifondazione eseguita. Il rigore è quasi maniacale, e lo porta alla ricerca continua di esempi controintuitivi nell'analisi, come la prima delle curve continue ovunque non derivabili; in altre parole, lo porta alle definizioni e ai teoremi fondamentali che tutt'oggi, non a caso, sono oggetto di studio dagli studenti che citavamo poc'anzi.

Berlino, grazie a Weierstrass, a Kronecker[18] e a Kummer[19] diventa una delle città europee più importanti per la matematica, nella seconda metà del diciannovesimo secolo; eppure, con buona pace degli altri due e malgrado l'antipatia che manifestava verso la didattica, furono soprattutto le lezioni di Weierstrass ad attirare a Berlino frotte di studenti da tutta Europa. Ed erano studenti che avrebbero fatto carriera: Cantor, Klein, Lie, Minkowski, Mittag-Leffler, solo per citare i nomi più famosi. Oltre, naturalmente, a Sofia Kovalevskaya.

---

[17] Di questo giornalino, solo un po' meno famoso di RM, parliamo anche nel "compleanno" di Abel, RM055, Agosto 2003.

[18] Sì, proprio lui: quello che ha inventato la "Delta di Kronecker" e, soprattutto, quello che disse *"Dio ha creato i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo"*.

[19] Lo stesso di cui parliamo nella nota 10.

La Kovalevskaya è, per dirla con Weyl, quella che tra le "due sole donne matematiche della storia" non era matematica[20], ed era ragionevolmente graziosa. Ebbe la sfortuna di nascere in un periodo nel quale alle donne non era concesso iscriversi all'università, e questo nonostante Weierstrass stesso e altri luminari elogiassero in pubblico le sue capacità intellettuali in generale e matematiche in particolare; nella sfortuna, o forse proprio a causa di questa, ebbe però la grande fortuna di ricevere quattro anni di lezioni private proprio da Weierstrass. Si conobbero nel 1871, quando Karl aveva 56 anni e Sofia solo 21; e il loro rapporto sembra essere sempre stato più del tipo Pigmalione-Galatea che Professor Humbert-Lolita, per intenderci. Le lezioni di Weierstrass la condussero ad una tale padronanza della materia da pubblicare tre memorie "ognuna delle quali val bene un dottorato", a sentire l'opinione di Karl: e infine Gottingen laureò davvero la Kovalevskaya, iniziando così la riscossa delle donne in matematica. Nella sua breve vita (morì a soli 41 anni, nel 1891, meno di quattro anni dopo il suo maestro), Sofia fu la maggiore cassa di risonanza delle idee di Weierstrass. E la sua formazione risente certo della passione del vecchio tedesco, se la sua citazione più celebre sembra niente di più che la perifrasi di quella di Weierstrass: *"E' impossibile essere un matematico senza avere l'anima d'un poeta"*.

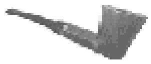
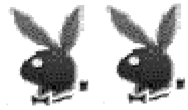
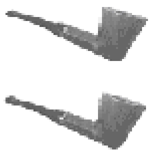
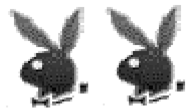
Così, il burbero e noioso Weierstrass si scopre essere un romantico che ha lottato a lungo per riuscire a coltivare la matematica, fino a diventare un caso emblematico e ante litteram dei conflitti generazionali; ha combattuto contro i pregiudizi sessisti imperanti nel suo ambiente e nel suo tempo, senza paura di scandalizzare i benpensanti; ha affrontato la rifondazione dell'algebra armato solo della sua passione e del suo rigore, ha continuato a tenere le sue lezioni all'università anche da invalido, e pur odiando insegnare ha allevato una enorme quantità di giovani matematici. Tutto questo, pensando di fare qualcosa di molto simile all'opera che compiono i poeti.

Non sappiamo se gli animi dei poeti e dei matematici siano davvero simili. Siamo certi, però, che anche ultraottantenne, anche immobilizzato su sedia a rotelle, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass potesse dire, come Foscolo, d'aver *"…quello spirto guerrier ch'entro mi rugge"*[21].

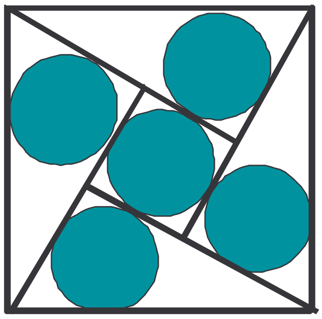
[20] *"Ci sono state solo due donne nella matematica: Sofia Kovalevskaya e Emmy Noether: la prima non era una matematica, la seconda non era una donna"*. Della cattiveria di Hermann Weyl abbiamo già parlato in "Questione di Attributi", RM050, marzo 2003.

[21] Ugo Foscolo, "Alla Sera", verso finale.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Chi porta da bere?			
Obiezione, Vostro Onore!			

2.1 Chi porta da bere?



Allora, con calma. Si tratta di capire se le birre ci stanno in frigo.

Ci è appena arrivato un pacco, con le birre messe come indicato qui di fianco (non fate domande sul motivo dello spreco di spazio: in offerta c'erano anche dei salatini, nella stessa scatola).

La scatola è quadrata, le bottiglie sono tutte uguali tra loro (le imprecisioni del disegno sono dovute all'inettitudine e alla sete del peggior disegnatore di questa rivista) e i quattro triangoli rettangoli sono anch'essi uguali tra loro.

La scatola ha il lato di 30 centimetri ("lattone", più che lattine); ora, qual'è il diametro delle lattine? Ci stanno o no, in frigo? *[Domanda pleonastica, questa, dopo pochi minuti al fresco ce le siamo bevute…(AR)]*

2.2 Obiezione, Vostro Onore!

Allora, un altro problema vecchiotto, ma decisamente simpatico: ha avuto un discreto successo, qualche mese fa. Sapete che la moglie di uno di noi è laureata in Legge (ambito nel quale la matematica non è molto ben vista), ma questo problemino ha scatenato discussioni a non finire (più alcune risposte… nessuna esatta). Oltretutto, il personaggio del raccontino è un giudice di pace e dalle parti dei tribunali le barzellette sui carabinieri (o sugli irlandesi, o sui polacchi, o sulle pantegane babbee… insomma, avete capito) vengono, normalmente, riciclate con un giudice di pace.

Un giudice (di pace) ha un modo strano di dirimere le dispute monetarie; prima della discussione del caso, chiede al querelante di scrivere quanti soldi si aspetta di ricevere (sia ***E*** la cifra). Chiude -senza guardare- il foglio in una busta e fa compiere la stessa operazione al querelato chiedendogli quanto è disposto a pagare (sia ***O*** la cifra), sempre senza guardare. Durante il dibattimento, poi, stabilisce una cifra che lui ritiene equa (e sia ***G***).

Conscio però che per persone diverse la stessa cosa può avere valori diversi, non obbliga il querelato a pagare questa cifra: fa aprire le due buste e guarda quale dei due valori (***E*** oppure ***O***) è più vicino a ***G***.

Quindi, condanna il querelato a pagare la cifra più vicina.

Cerchiamo di capirci qualcosa con un esempio: se il querelante si aspetta ***18000*** Euro, il querelato pensa di non dover pagare niente e il giudice pensa ***8000*** Euro, allora il querelante non prende niente, in quanto ottomila è più vicino a zero che a diciottomila.

Ora, supponiamo che (per oscure questioni di *insider trading* che non staremo ad approfondire) voi, scopriate che ***G*** sarà compreso tra i ***3000*** e i ***10000*** Euro, con tutti i valori equiprobabili. Ora, con voi nella parte del querelante, quanto dovreste chiedere per sperare di intascare più soldi possibili?

Un attimo! All'improvviso, vi accorgete che dietro le vostre spalle, mente state scrivendo il numero, c'è uno specchio, e il querelato sta vedendo tutto quello che scrivete... In questo caso, che cifra scrivete?

3. Bungee Jumpers

Trovare tutti gli $x, y \in Q, x \neq y$ per cui $x^y = y^x$

Stiamo parlando di **razionali**… *Qualcuno si annoiava, a lavorare sempre con gli interi.*

La soluzione, a "Pagina 46"

4. Soluzioni e Note

Allora, se parliamo di effetti, questo mese ne sono successe di tutti i colori. Se parliamo di cause, l'altro mese ne abbiamo combinate di tutti i colori.

Tanto per cominciare, ***abbiamo attribuito la soluzione di Carlo a Sand&Foam***. Tra i vari guai che siamo riusciti a combinare dalla nascita della rivista, questa è la prima volta che sbagliamo un'attribuzione. Senza voler cercare scuse, il problema è stato causato dal fatto che nella procedura di trasmissione delle soluzioni alla linotype abbiamo dimenticato di inserire un momento di controllo. Ci scusiamo con gli interessati, cercheremo di non farlo più.

Per la seconda, invece, non vi chiediamo scusa. O meglio, la chiediamo solo a ***Sam***. È stato l'unico ad accorgersi che (sempre per mancanza di controllo finale) ***il BJ del mese scorso era già stato pubblicato su RM52***. *[Qui, riconosco la mia colpa (RdA)].* Imputiamo tutti questi guai al caldo, cercheremo di fare di meglio (come redazione, non come guai).

Oh, tra le altre cose si è anche discusso di un problema procedurale sollevato da Elena; ci ha mandato una lettera di scuse, in quanto ha chiesto aiuto ad un newsgroup di matematica per trovare una soluzione (e il newsgoup ha scatenato una reprimenda nei suoi confronti per aver chiesto aiuto).

Cerchiamo di chiarire la faccenda.

Allora, tempo fa avevamo detto: "Risolveteli da soli". Questo però risale all'epoca in cui festeggiavamo l'arrivo di una soluzione con abbondanti libagioni (e spendevamo pochissimo, in libagioni…). Inoltre, le soluzioni "di gruppo" via e-mail hanno la pessima caratteristica di essere assolutamente incomprensibili se non per i direttamente coinvolti; il risultato non è "una soluzione", è un effetto cocktail party sulla soluzione, con interventi nelle parti più incredibili per parlare d'altro.

A questo punto, la *vis retorica* di Doc si è lanciata in quarta (pur di dar ragione ad una fanciulla, sarebbe anche in grado di dimostrare l'esistenza di Babbo Natale *[… cosa che ha già fatto, insieme con il Capo, andatevi a vedere il numero 23 (A.R.)]*). Pur di farlo star zitto, abbiamo *[Ha, il Capo (RdA)]* deciso che: (1): È ammesso chiedere aiuto; (2) Se ci arriva una soluzione che è palesemente un dialogo che parla di tutto e di più, non pubblicheremo; (3) La soluzione verrà attribuita unicamente al mittente, che quantomeno ha fatto la fatica di raccogliere in un unico ragionamento sensato le partenze per la tangente del gruppo. *[E poi, il fatto che siano occupati a risolvere problemi va benissimo… Oeu, quella è la* **concorrenza***!!! (RdA)] [Come tutte le regole di RM, sono decise e create ad hoc dalla Redazione ad ogni momento di bisogno, e nello stesso modo infrante… (A.R.)]***.**

Comunque, di seguito l'elenco delle soluzioni ricevute questo mese.

27-08-2003 17:56	P2[55]	Mirtillo	
27-08-2003 12:27	PM[55]	Filippo	
28-08-2003 13:38	P2[55]	Mirtillo	
02-09-2003 16:09	Q&D[55]	RM2	
01-09-2003 16:32	P2[56]	RM2	
01-09-2003 14:32	P1[56]	Sam	
01-09-2003 11:10	P1[56]	PuntoMauPunto	
01-09-2003 11:30	P2[56]	Carlo	
01-09-2003 13:11	P2[55]	Mirtillo	
02-09-2003 10:39	P1[56]	RM2	
02-09-2003 10:41	P1[56]	RM2	
02-09-2003 16:41	P1[56]	Gigia	
02-09-2003 13:06	P1[56]	Mirtillo	
05-09-2003 16:58	P2[56]	RM2	
06-09-2003 11:15	P1[56]	Elena	Verifica anche il problema "degli aeroplanini"
08-09-2003 12:22	P1[56]	Elena	
09-09-2003 15:43	P1[56]	Mirtillo	
11-09-2003 16:19	P1[56]	Mistral	
12-09-2003 15:10	P1[56]	Viggio	
14-09-2003 10:00	P1[56]	Filippo	
15-09-2003 18:43	P2[11]	Mistral	
15-09-2003 18:43	P2[56]	Mistral	

4.1 [055]

4.1.1 Paraphernalia Mathematica

Notiamo con piacere che, anche se c'è una sola persona che legge i Bungee Jumpers, almeno c'è qualcuno che si appassiona ai PM. Sarà perché gli abbiamo chiesto un consulto, ma ***Filippo*** ha lavorato un po' sui numeri colorati. Allora, cediamogli la parola, e vediamo cos'è venuto fuori.

> Sono dovuto ricorrere a complicate tabelle di congruenze per spiegare alcune "proprietà" che, secondo me, perdono molta "magia". Ci sono però anche punti interessanti come il 3.2 (che temo di non saper spiegare) e importanti nozioni di

Teoria dei Numeri. Ho l'impressione che si possano costruire infinite strutture simili a questa, utilizzando altre suddivisioni dei primi. Semmai la fortuna di questa è che vengono generate otto classi che corrispondono, come numero, a quello dei tre colori primari + tre secondari + B e N.

La suddivisione, per quanto riguarda i numeri **primi**, è chiara:

12k+1 Nero

2 12k+5 Rosso

3 12k+7 Verde

12k+11 Blu

(Gli unici primi del tipo 12k+2 e 12k+3 sono 2 e 3; naturalmente non ci sono primi del tipo 12k+9).

Una prima osservazione:

A parte il numero 2, tutti gli altri primi si possono dividere in primi del tipo 4n+1 e del tipo 4n+3. I primi "Neri" e "Rossi" appartengono al primo tipo, i "Verdi" e "Blu" al secondo, infatti:

12k+1=4n+1 per n=3k

12k+5=4n+1 per n=3k+1 che è sempre possibile in entrambi i casi

mentre p. es. non può essere 12k+3=4n+1 (6k+1=2n),

invece 12k+3=4n+3 per n= 3k ecc.

Questa distinzione è importante perché solo i numeri primi del tipo 4n+1 possono essere rappresentati come somma di due quadrati. Un'altra importante nozione sulla somma di due quadrati per i numeri composti è: «un numero esprimibile come somma di due quadrati deve contenere, una volta fattorizzato come prodotto di potenze di primi, i primi della forma 4k+3 solo con esponente pari» (da H. Davenport, Aritmetica superiore).

La suddivisione dei numeri composti tra i vari colori è meno esplicita; la si può dedurre comunque dalle regole per "colorare i numeri".

Dato un numero composto, bisogna "raccogliere" i suoi fattori primi secondo il "gruppo" di appartenenza e, all'interno di ciascun gruppo, calcolare il valore della somma degli esponenti. p. es. 12943710 = 2*3^2*5*13^2*23*37

	fattori	**esponenti**	**somma**	
12k+1 **N**	13 37	2 1	3	dispari
2, 12k+5 **R**	2 5	1 1	2	pari
3, 12k+7 **V**	3	2	2	pari
12k+11 **B**	23	1	1	dispari

Varranno allora le regole:

Nero fattori dei gruppi **R** o **V** o **B** con somma degli esponenti **pari**

Rosso **R dispari** necessariamente,**V** o **B pari**

Verde **V dispari** necessariamente, **R** o **B pari**

Blu **B dispari** necessariamente,**V** o **R pari**

I fattori del gruppo N (12k+1) si comportano come elemento "neutro", possono cioè essere presenti in qualunque "colore" e con qualunque "esponente" (il numero dell'esempio è Blu).

Nella seguente tabella indico dove la somma degli esponenti può essere pari o dispari.

	12k+1	**2** **12k+5**	**3** **12k+7**	**12k+11**
Nero	*qualunque*	Pari	pari	pari
Rosso	*qualunque*	dispari	*pari*	*pari*
Verde	*qualunque*	*pari*	dispari	*pari*
Blu	*qualunque*	*pari*	*pari*	dispari

Non tutti i numeri possono essere rappresentati in questo modo; mancano infatti

12k+1	**2** **12k+5**	**3** **12k+7**	**12k+11**
qualunque	dispari	dispari	*pari*
qualunque	dispari	*pari*	dispari
qualunque	*pari*	dispari	dispari

che vengono chiamati rispettivamente: **Giallo, Magenta, Ciano**

Manca ancora un'ultima categoria

12k+1	**2** **12k+5**	**12k+3** **12k+7**	**12k+11**
qualunque	dispari	dispari	dispari

che viene indicata come **Bianco**.

Ora la classificazione è completa, qualunque numero apparterrà ad una delle otto categorie. Si può già dare qualche risposta (e dimostrazione) alle affermazioni dell'articolo.

1. Forma "3n+x"

1.1 I numeri della forma 3n+1 sono di colore Nero, Bianco, Verde o Magenta

1.2 I numeri della forma 3n+2 sono di uno degli altri quattro colori

I numeri del tipo 3n+1 sono congrui 1 (mod 3)

I numeri del tipo 3n+2 sono congrui 2 (mod 3)

valutiamo le congruenze dei numeri primi di tipo 12k+x (mod 3)

$(12k+1)$ 1

$(12k+1)^2$ 1 Sono sempre congrui 1 per qualunque esponente

$(12k+3)$ 0

$(12k+3)^2$ 0 Sono sempre congrui 0 per qualunque esponente

$(12k+5)$ 2

$(12k+5)^2$ 1 Congrui 2 per esponenti dispari e 1 per quelli pari

$(12k+7)$ 1

$(12k+7)^2$ 1 Sono sempre congrui 1 per qualunque esponente

$(12k+11)$ 2

$(12k+11)^2$ 1 Congrui 2 per esponenti dispari e 1 per quelli pari

costruisco una tabella che dà ragione dell'affermazione 1.1 e 1.2

	N^x	R^{2n}	R^{2n+1}	V^{2n}	V^{2n+1}	B^{2n}	B^{2n+1}	mod 3
Nero	1	1		0		1		0, 1
Rosso	1		**2**	0		1		0, 2
Verde	1	1			**0, 1**	1		0, 1
Blu	1	1		0			**2**	0, 2
Giallo	1		**2**		**0, 1**	1		0, 2
Magenta	1		**2**	0			**2**	0, 1
Ciano	1	1			**0, 1**		**2**	0, 2
Bianco	1		**2**		**0, 1**		**2**	0, 1

Ho indicato in grassetto i fattori che devono essere necessariamente presenti per ogni "colore"; il risultato finale si ottiene moltiplicando, in tutti i modi possibili, le congruenze di ogni fattore.

La stessa cosa può esser fatta con i numeri della forma $4n+x$ (punto 2.)

3. Qualunque quadrato è Nero

Sono gli unici numeri i cui fattori possono avere tutti gli esponenti pari (non tutti i numeri "neri" sono però quadrati)

3.1 Ogni numero che sia la somma di due quadrati è Nero o Rosso ($n=a^2+b^2$)

Infatti, se n è primo sono gli unici del tipo $4k+1$, se n è composto sono gli unici in cui i fattori del tipo $4k+3$ (Blu e Verde) hanno esponente pari.

3.1.1 Se né a né b sono divisibili per 3, allora il numero è Rosso

Tre possibilità (modulo 3):

$(3n+1)^2+(3m+1)^2$ congrui $1+1$ cioè 2

$(3n+1)^2+(3m+2)^2$ congrui $1+4$ cioè 2

$(3n+2)^2+(3m+2)^2$ congrui $4+4$ cioè 2

Sono sempre congrui 2 (mod 3).

Solo i numeri "Rossi" possono essere somme di due quadrati e congrui 2 modulo 3

3.1.2 Se a o b sono divisibili per 3, ma non entrambi, allora il numero è Nero

$(3n)^2+(3m+1)^2$ congrui $0+1=1$

$(3n)^2+(3m+2)^2$ congrui $0+1=1$

Solo i numeri "Neri" possono essere somma di due quadrati e congrui 1 modulo 3

Molte delle proprietà enunciate si basano sulle congruenze modulo 3, 4 e 12; è utile perciò costruire una tabella di congruenze modulo 12.

Fattori del gruppo N (12k+1) 1 (sempre)

R esp. pari 1, 4, 10

R esp. dispari 2, 5, 8

V esp. pari 1, 9

V esp. dispari 3, 7

B esp. pari 1 (sempre)

B esp. dispari 11 (sempre)

	R^{pari}	$R^{dispari}$	V^{pari}	$V^{dispari}$	B^{pari}	$B^{dispari}$	
Nero	1, 4, 10		1, 9		1		0,1,4,6,9,10
Rosso		2, 5, 8	1, 9		1		0,2,5,6,8,9
Verde	1, 4, 10			3, 7	1		0,3,4,6,7,10
Blu	1, 4, 10		1, 9			11	0,2,3,6,8,11
Giallo		2, 5, 8		3, 7	1		0,2,3,6,8,11
Magenta		2, 5, 8	1, 9			11	0,3,4,6,7,10
Ciano	1, 4, 10			3, 7		11	0,2,5,6,8,9
Bianco		2, 5, 8		3, 7		11	0,1,4,6,9,10

Nell'ultima colonna sono indicate le possibili congruenze modulo 12 per ogni "colore". Questo spiega il punto 5: *Al più due numeri consecutivi possono avere lo stesso colore, e uno dei due numeri deve essere divisibile per 3.*

È curioso notare come le coppie Nero-Bianco, Rosso-Ciano, Verde-Magenta e Blu-Giallo abbiano gli stessi valori. Si possono inoltre inventare un gran numero di "fascinating facts" (p. es. solo i numeri Bianchi e Neri possono essere del tipo 12k+1)

4.2 [056]

Vabbò, ci abbiamo provato, a fare un numero "fisico" e, come diceva la mia nonna, sembra che qualcuno ci abbia "fatto la fisica"[22]. Vorremmo dimenticarlo, ma dobbiamo comunque parlarne… Tranquilli, stiamo cercando di fare di peggio. Ma dei prossimi casini ve ne parlerà Doc nella Newsletter.

Comunque, a me *[RdA]* il numero è piaciuto, anche perché erano problemi che riuscivo a risolvere per una via "esteticamente valida" anch'io. Abbiamo cercato di spiegarvelo con le valutazioni (e ormai avreste dovuto capire come funzionano), e vi abbiamo anche detto che io *[lo stesso di prima]* li consideravo roba da Q&D. Quindi, sarebbero dovuti bastare pochi passaggi di ragionamento (e quasi nessun conto) per risolverli. Tutto questo, assolutamente senza voler criticare quelli che hanno scelto la via più dura (secondo me), sempre per il motivo che "esiste sempre un'altra strada". Anche per andare al Paesello, io preferisco la statale, mia moglie l'autostrada.

[22] Per quelli che vivono fuori dal Canavese: "Fare la Fisica" a qualcuno significa lanciargli una stregoneria. Qualcuno di voi riesce a immaginare la faccia di mia nonna (che raccontava con orgoglio di essere imparentata con l'ultima strega bruciata nella zona) quando le ho detto che all'Università studiavo ***Fisica***?

4.2.1 Specchi

Alura, ve l'avevo detto, che era un problema "strano". Dal nostro punto di vista (e si vedeva dalle valutazioni) c'erano due strade per risolverlo, e ci ha reso felici vedere che ne avete trovata un'altra, che è un po' una "via di mezzo" tra quella di Alice e quella di Rudy.

È interessante notare comunque che una cosa era comune a tutte le soluzioni (tranne una): la frase "ci vorrebbero dei disegni…" E farli? Naaa!

Allora, la "strada di Alice", prevedeva di applicare più volte il teorema dei seni, alla serie di triangoli formati dal raggio e dagli specchi. È stata applicata (con metodi poco diversi uno dall'altro) da ***PuntoMauPunto***, ***Elena***, ***Mirtillo, Filippo***. Va detto che Elena e Mirtillo hanno usato questa strada solo per l'angolo, preferendo una via diversa per il calcolo della distanza.

Pubblichiamo quella di ***PuntoMauPunto***, che è la più corretta.

> Partiamo dall'ultima riflessione: essendo ad angolo retto, il penultimo angolo con lo specchio B deve valere $\pi/2-\alpha$. Questo è anche l'angolo esterno del triangolo con lato la penultima riflessione; quindi il terz'ultimo angolo è $\pi/2-2\alpha$. Andando indietro, abbiamo che il primo angolo di incidenza è $\pi/2-6\alpha$. Ma questo corrisponde a un raggio parallelo a B, quindi abbiamo che quel valore è pari ad alfa, da cui si ricava che $\alpha=\pi/14$, cioè poco meno di 6 gradi e mezzo.
>
> Per trovare la distanza X, cominciamo a usare il teorema dei seni a manetta. Per calcolare la distanza X_1 tra il diedro e il penultimo punto di contatto del raggio, abbiamo
>
> $$\frac{X_1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}=\frac{X}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \qquad [004.001]$$
>
> da cui
>
> $$X_1=\frac{X\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} \qquad [004.002]$$
>
> (sì, lo so che il seno di 90 gradi vale 1...)
>
> Per il terz'ultimo punto di contatto abbiamo che la distanza X2 è
>
> $$X_2=X_1\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=X\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)} \qquad [004.003]$$
>
> Tornando indietro, il primo punto di contatto avrà distanza

$$X_6 = X\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-6\alpha\right)} = \frac{X}{\operatorname{sen}(\alpha)} \qquad [004.004]$$

A questo punto, cambiamo triangolo e troviamo che

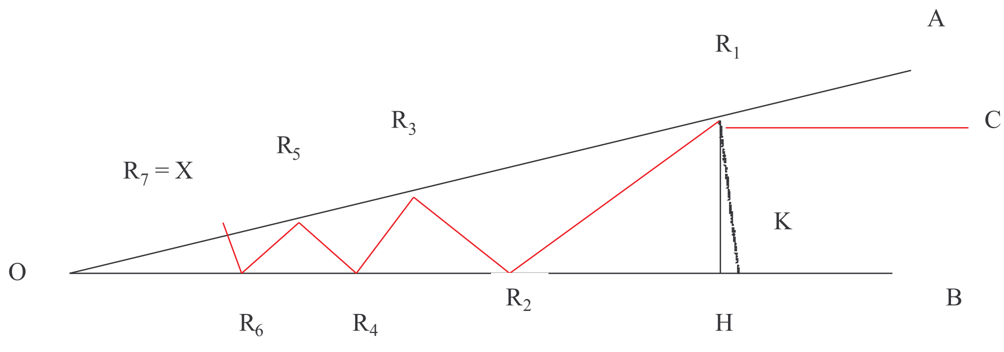
$$\frac{d}{\operatorname{sen}(\alpha)} = X_6 = \frac{X}{\operatorname{sen}(\alpha)} \qquad [004.005]$$

e quindi X = d.

Qualcuno ha preso una “via di mezzo: ***Gigia***, ***Mirtillo*** (per quanto riguarda la prima parte), ***Elena*** (anche lei per la prima parte), ***Mistral***. La soluzione che ci è piaciuta di più è questa:

Costruisco la figura nel modo seguente:

- dopo alcuni tentativi, essendo α incognito, realizzo che α deve essere minore di 45° per poter compiere una prima riflessione e anche minore di 30° per continuare con una 2°….. decido di fermarmi su un angolo di circa 15°.
- dispongo quindi, la sezione normale del diedro con OB orizzontale, OA inclinato di circa 15° su OB, O sulla sinistra del piano.
- Traccio una semiretta orizzontale (parallela ad OB) che incide su OA nel punto R_1 (….i pedici indicheranno il numero di riflessioni avvenute); H sia il piede della perpendicolare condotta da R_1 ad OB. Vedere disegno.
- Osservo che $CR_1A = AOB = \alpha = HR_1K$
- Seguendo le ampiezze degli angoli si trovano le misure : $R_1R_2H = 2\alpha$ ....; $R_2R_3R_1 = 3\alpha$ ……; ……..; $R_3R_5R_4 = 5\alpha$; $R_7R_6O = 6\alpha$
- Ma $OXR_6 = 90°$ quindi $\alpha + 6\alpha = 90°$; $7\alpha = 90°$; $\alpha = 90°/7$

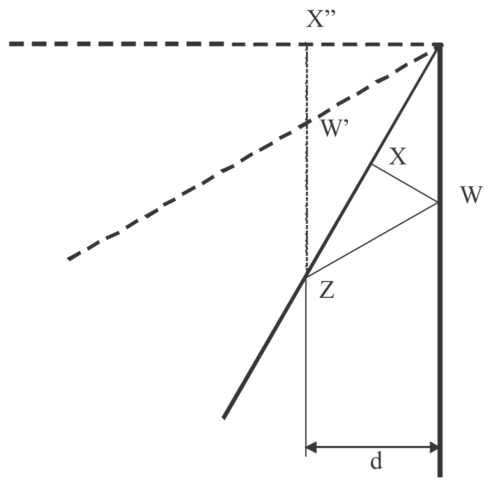


- Con l’applicazione di teoremi sui triangoli, partendo dal triangolo HKR_1, si ottiene che $HR_1=OX=d$

Qualcuno, invece, ha preferito la “strada di Rudy”; ***Sam***, ***RM²***. Siccome però qui è fondamentale il disegno (e figurarsi se i nostri eroi l’hanno fatto), vi passo direttamente la redazionale (sì, il disegno l’ho fatto… Ma mi sono semplificato la vita!)

Permettetemi di citare il mio autore preferito (me): "Se c'è un sette di mezzo, è solo per rompere le scatole".

Quindi, semplifichiamoci il problema (e il disegno) riducendo temporaneamente il numero delle riflessioni a ***tre***; inoltre, anziché far rimbalzare il raggio, facciamolo andare dritto e *riflettiamo il sistema*. I punti con uno o più apici sono le *riflessioni* dell'ambiente reale.



Dal disegno si vede, tanto per cominciare, che *per avere riflessione perpendicolare in* **X** *(e in* **X"***) l'angolo tra i due specchi deve essere pari a* **un terzo** *dell'angolo retto* e quindi, nel problema originale, dovrà essere $\alpha = \frac{90^o}{7}$.

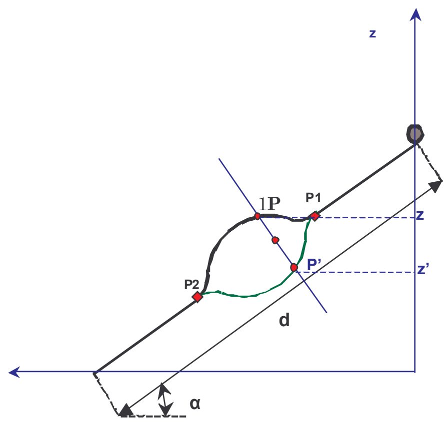
E, dal disegno, è immediato anche che ***X*** (e quindi ***X"***) dista ***d*** dall'origine.

Spero adesso abbiate capito perché a me sembrava così semplice: com'era, il titolo di quel vecchio film? "Non alzare il ponte, abbassa il fiume".

4.2.2 Lezione di Fisica

Bene, qualche risposta anche qui; va detto che probabilmente qualcuno di voi lo ha ritenuto troppo facile e ha pensato di essersi perso qualcosa. No, era proprio facile-facile. L'unica cosa da non fare (e che qualcuno ha provato a fare) era formalizzarsi sulla realtà fisica del problema, come ad esempio considerare il fatto che, per opportune forme del piano, grande è il rischio che la pallina "salti", avendo una componente orizzontale della velocità tale da farla andare dritta all'uscita della modifica di percorso.

La strada della soluzione "dura" è stata quella scelta da Mistral:



Ho messo i due piani inclinati affiancati per cui sono sovrapposti nelle parti in cui coincidono. Le geometrie dell'incavo e del risalto sono irrilevanti fintanto che le palline cadendo lungo i piani inclinati non si distaccano da essi. Il distacco avviene per accelerazione centripeta troppo elevata nell'incavo o nel risalto, pertanto, suppongo l'angolo α così blando e/o la massa della pallina così elevata e/o l'altezza del risalto/incavo così piccola, da evitare il distacco.

A questo punto si tratta di applicare la conservazione dell'energia meccanica alle due palline vincolate a rimanere lungo le curve 12 e 1'2', partendo entrambe dalla cima dei piani con velocità nulla.

$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = mgz_0$, inoltre $v = \frac{ds}{dt}$ con s ascissa curvilinea della traiettoria percorsa.

Il tempo per percorrere la traiettoria Γ é dato da $\Delta t = \int_\Gamma \frac{ds}{v}$

Per entrambi i percorsi nel punto iniziale nel punto finale e nei punti P_1 e P_2 le velocità sono le stesse, perché le quote sono le stesse.

Per entrambi i percorsi Il tempo per andare dalla partenza a P_1, e da P_2 all'arrivo è lo stesso dato che i percorsi coincidono e le distribuzioni di velocità coincidono. Quindi l'eventuale differenza di tempi è pari alla differenza di tempi necessari per percorrere il risalto (Δt) e per percorrere l'incavo(Δt'), dove percorsi e distribuzioni di velocità differiscono.

$$\Delta t = \int_0^H \frac{ds}{\sqrt{2g(z_0 - z(s))}} \quad \text{con } v = \sqrt{2g(z_0 - z(s))} \quad \text{(piano inclinato con risalto)}$$

$$\Delta t' = \int_0^H \frac{ds}{\sqrt{2g(z_0 - z'(s))}} \quad \text{con } v' = \sqrt{2g(z_0 - z'(s))} \quad \text{(piano inclinato con incavo)}$$

H è la lunghezza della curva che definisce il profilo dell'incavo e del risalto, ho preso come origine di s il punto P_1.

Non uso due differenti ascisse curvilinee dato il modo in cui i due piani inclinati sono stati ricavati, quindi ragiono per punti corrispondenti P e P' prima del taglio della lamiera e del ribaltamento.

Escludendo gli estremi, per punti corrispondenti ho sempre che $v' > v$ (perché $z - z' > 0$) e quindi $\Delta t' < \Delta t$.

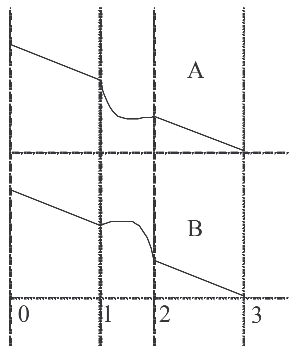
In caso di dubbi "formali" sull'ultimo passaggio, basta tener presente che sotto il segno di integrale si hanno funzioni sempre positive e continue, la cui differenza è sempre strettamente positiva tranne agli estremi che hanno poco peso nel computo degli integrali, infatti posso escludere una porzione sufficientemente piccola di percorso di integrazione in prossimità dei punti P_1 e P_2 in maniera non variare in maniera significativa gli integrali rispetto al caso con estremi di integrazione inclusi.

Per vedere meglio le cose basta notare che:

$$\Delta t - \Delta t' = \int_0^H \frac{(v'^2 - v^2)ds}{v' v(v + v')}$$

Quindi la pallina che scorre sul piano con l'incavo arriva prima della pallina che corre con il piano con il risalto di uguale geometria.

Una via un po' (ma non tanto) più semplice è stata scelta da ***Viggio***:



Le forze che agiscono sulla sfera sono la gravità (conservativa), l'attrito volvente e la reazione vincolare della lastra, ma queste due non compiono lavoro (l'attrito volvente perché lo spostamento è nullo, il lavoro perché forza e spostamento sono ortogonali).

Perciò possiamo usare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica: T+U=cost dove T è l'energia cinetica e U l'energia potenziale dovuta alla gravità. Poiché all'istanze iniziale la pallina è ferma, abbiamo T+U=0 (U lo assumiamo nullo in cima al pendio).

Ora nelle zone tra 0 e 1 e tra 2 e 3 U è la stessa per i due casi (lastra concava e lastra convessa) per cui anche la T è la stessa, ossia la velocità è la stessa. La velocità è invece diversa tra 1 e 2 poiché diversa è la U.

In questa zona abbiamo U(A) sempre minore di U(B) per cui T(A) è sempre maggiore di T(B), per cui nel tratto 1-2 la velocità di A sarà sempre maggiore di quella di B, per poi ritornare a essere la stessa dopo il punto 2. Perciò A arriva prima.

Nessuno ha preso quella che (almeno secondo uno dei redattori) era la via più semplice:

Supponiamo il risalto sia un "gradino", e ignoriamo il fatto che la pallina possa staccarsi.

All'inizio del gradino le palline arrivano con la stessa velocità.

Quella del percorso di tipo ***B*** proseguirà per la "pedata" del gradino alla stessa velocità e poi accelererà lungo l'"alzata" del gradino, uscendo quindi dal gradino ad una certa velocità ***v***.

Quella del percorso di tipo ***A*** accelererà per l'"alzata" e poi manterrà una velocità costante sulla "pedata", uscendo dal gradino alla velocità ***v*** come la pallina del caso precedente.

Entrambe le palline hanno subito la stessa accelerazione e escono alla stessa velocità.

ma nel caso **A** *la pallina percorre il tratto a velocità costante ad una velocità maggiore*.

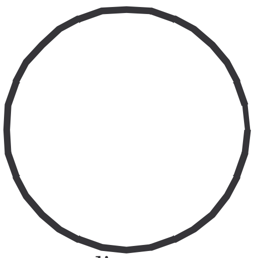
E quindi "esce" prima dal gradino.

Senza calcoli... capito, perché a me sembrava un Quick&Dirty?

5. Summer Contest

Bene, vedo che vi siete entusiasmati. Nonostante il caldo di quest'estate avete trasformato le spiagge negli avamposti di una guerra di posizione.

Cerchiamo di fare un po' di storia, senza rispettare la cronologia.



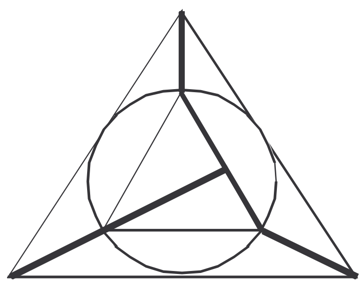
Sapete che, prima di presentarli a voi, i problemi ce li digeriamo un attimo per conto nostro; se compare poi qualche soluzione nostra è perché in breve tempo sono stati risolti (di solito da parte di Alice, ma in alcuni casi ci sono stati anche brillanti contributi da parte di Doc).

Come sempre nel suo *understatement*, Doc ha risposto con quella che doveva essere la "soluzione tappo" insuperabile, da usare come metro di paragone; scavare per l'intera circonferenza[23].

L'idea (del paragone, non dello scavo) è stata considerata buona, e quindi abbiamo cominciato a misurare le soluzioni in "percentuali di circonferenza", arrotondando (per comodità e pigrizia) a due cifre dopo la virgola. Quindi, al momento il miglior risultato a disposizione era del ***100%***.

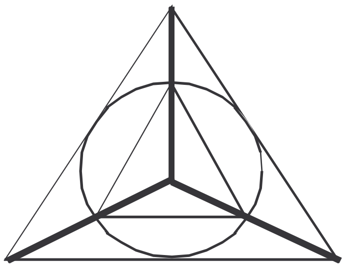
Ora, solo una breve nota: nei limiti del possibile e delle nostre abilità grafiche (PowerPoint) abbiamo cercato di uniformare i disegni: il cerchio è il cerchio, la riga "grossa" lo scavo, le righe piccole servono per la costruzione.

Siccome gli abbiamo detto che sicuramente si poteva fare di meglio, approfittando di un paio di code sull'autostrada il nostro è riuscito ad arrivare a qualcosa di buono: infatti, è sceso al ***99.01%***, con la soluzione qui a destra.

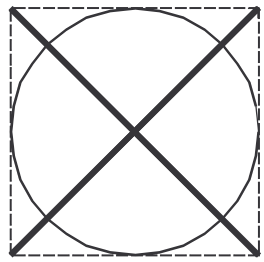


[23] Prontamente smentito da... No, non ve lo diciamo, perché dopo si è riscattato con ottime soluzioni. La sua proposta era di scavare lungo due lati del triangolo equilatero circoscritto.

Si riesce a capire, sì? Scusate, ma l'impaginazione di questo pezzo sarà la dannazione della nostra linotype (Alice).



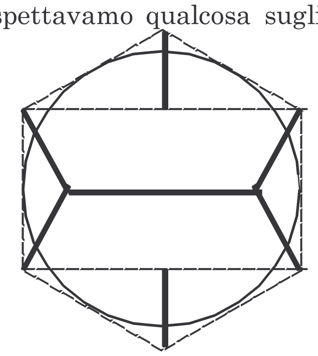
Comunque, ormai Doc non lo fermava più nessuno; fissatosi con questa immagine dei due triangoli, ha rapidamente trovato una soluzione in grado di abbassare ulteriormente i valori; ed eccoci quindi al ***95.49%***, con la soluzione qui a sinistra.



Intanto, arrivavano soluzioni anche da fuori della Redazione, per fortuna; il primo arrivato (come tempo) è ***Desmatron***, che riesce in un modo estremamente elegante e semplice a portare la soluzione al ***90.03%*** con la luminosa idea qui a destra.

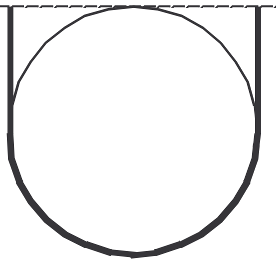
Siccome almeno una soluzione l'avevamo, Doc poteva smettere di pensare a cose serie, quindi si è messo a pensare quale fosse il minimo usando le "stelle"; un veloce calcolo in Excel permette di capire che la lunghezza minima è per il quadrato. Interessante...

Francamente, ci aspettavamo un po' più di soluzioni basate sugli angoli a 120^. Gli archeologi, ossia quelli tra voi che hanno avuto il coraggio di inoltrarsi tra i primissimi numeri di RM, avranno riconosciuto in questo valore la soluzione del "Problema dei tre sindaci", basato sul Teorema di Steiner; in particolare, ci aspettavamo qualcosa sugli incroci minimali da Sam, che durante l'intera Sagra del Pesce Algebrico è andato avanti a fare bolle di sapone delle forme più assurde. Ancora più in particolare mi aspettavo che qualcuno di voi arrivasse almeno vicino a quella che è la mia preferita: non è la migliore, ma trovo abbia una notevole potenza estetica.



Ve la passo qui sulla destra, per fare i conti considerate che l'esagono è regolare e gli angoli all'interno del cerchio sono a 120^.

Come dicevo non è ottimale, ma l'importante è partecipare, non vincere. In questo modo, arriviamo al ***82.04%***.



Infatti, la mia posizione di testa (me lo aspettavo, in verità) è stata velocemente scalzata da un mucchio di gente; ***Max&Katia***, ***ChiQua***, ***RM²***, ***Desmatron***, ***Filippo***, ***Hannibaal*** sono arrivati a quella che è la miglior soluzione conosciuta con una sola trincea; questa è stata denominata ***BKS_1*** (Best Known Solution 1 trincea), e raggiunge un incredibile ***81.85%***; la vedete qui sulla sinistra.

A questo punto, ci siamo accorti che la cosa stava diventando seria. Quindi, abbiamo mandato in giro un messaggio segnalante lo stato dell'arte, senza spiegare però come si fosse giunti a tutto ciò.

Nel messaggio era compreso anche l'Ultima Thule, ossia la dimostrazione che esiste sicuramente un limite minimo (con un numero non definito di tagli) alla dimensione della trincea; se questo sia effettivamente un valore raggiungibile o no, non è al momento dato di sapere. Comunque, la dimostrazione era decisamente complessa, quindi siamo grati a ***Mircea*** che ha reso la cosa un po' più comprensibile anche a chi non ha grossa familiarità con la Teoria della Misura; gli cediamo la parola.

> Chiamiamo ***A*** un insieme di pezzi di curve di lunghezza totale ***L*** e ***dl*** la lunghezza di un trattino infinitesimo di ***A*** che forma un angolo ***a(l)*** con l'asse ***x***.

Sia ***f(x,dl,a(l))*** la lunghezza della proiezione di ***dl*** su una retta che formi con l'orizzontale un angolo ***x***. Allora è:

$$f(x, dl, a(l) = dl\left|\cos(x - a(l))\right| \qquad \texttt{[005.001]}$$

E quindi deve essere:

$$\int_0^{2\pi} f(x, dl, a(l)dx = \int_0^{2\pi} \left(dl\left|\cos(x - a(l))\right|\right)dx =$$
$$= dl \int_{a(l)}^{2\pi + a(l)} \left|\cos(x - a(l))\right|dx = \qquad \texttt{[005.002]}$$
$$= dl \int_0^{2\pi} \left|\cos x\right|dx = 4dl$$

E quindi si ha:

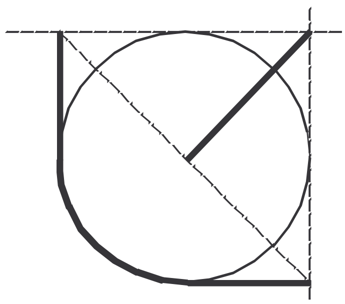
$$\int_A \int_0^{2\pi} dl\left|\cos(x - a(l))\right|dx = 4L \qquad \texttt{[005.003]}$$

E se una retta interseca la circonferenza di raggio ***1***, la retta interseca ***A***; quindi la lunghezza minima della proiezione di ***A*** su una retta ***r(x)*** che forma un angolo ***x*** con l'orizzontale è pari a ***2***; infatti, se così non fosse allora per qualsiasi posizione reciproca della proiezione della circonferenza e di quella di ***A*** sulla retta ci sarebbe un intervallo chiuso della prima che non appartiene alla seconda, e una retta perpendicolare alla retta ***r(x)*** in un punto di questo intervallo intersecherebbe la circonferenza ma non in ***A***.

Con un integrale analogo a quello di `[003]` per la circonferenza e tenendo conto di quanto detto qui sopra, $4L \geq 4\pi$, il che implica $L \geq \pi$.

Tutto chiaro. Quindi, non potete arrivare sotto il 50%.

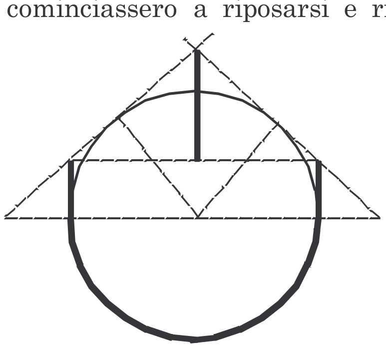
Per nulla delusi da questa importante limitazione, i nostri eroi si sono lanciati nel cercare altre trincee.



E ci sono arrivati, e pure alla svelta. Infatti, ***Desmatron*** e ***ChiQua*** hanno trovato un'elegantissima soluzione, denominata "arco e frecce"; la vedete qui a destra.

È formata da un quadrante di circonferenza, due raggi e dalla semidiagonale del quadrato circoscritto. E, incidentalmente, porta la soluzione per le nostre pesti al valore di ***79.33%***. Un grande passo avanti.

A questo punto ci aspettavamo francamente che i nostri eroi cominciassero a riposarsi e rinfrescarsi sotto l'ombrellone (non sotto la doccia: comincia ad essere pericoloso…), e la nostra preoccupazione cominciava ad essere quella di dover aggiungere un altro decimale ai calcoli.Con una lenta marcia di avvicinamento alla soluzione ottimale a due segmenti, però, altri due solutori hanno migliorato la situazione; e, tra l'altro, con una bellissima soluzione.

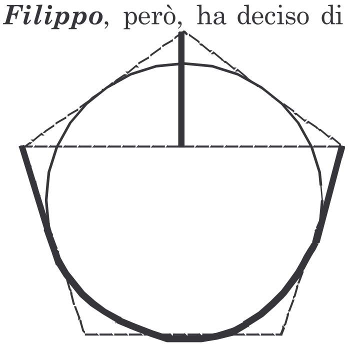


Infatti, ***Max*** (da solo, questa volta?) e ***Filippo*** sono riusciti a trovare la soluzione qui sinistra; ormai, cominciano ad essere necessarie alcune spiegazioni.

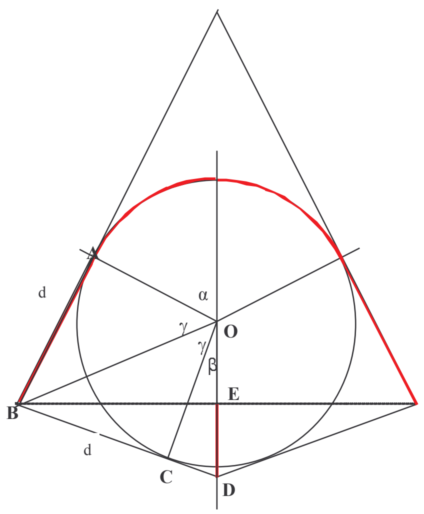
I due triangoli sulla sinistra e sulla destra hanno angolo con vertice coincidente di 60^; il triangolo grande ha quindi angoli alla base di 30^.

Questo porta la lunghezza della circonferenza al valore $\sqrt{3}+\pi$, permettendo ai nostri eroi di raggiungere un incredibile ***77.56%***.

Va detto che a questo punto avete cominciato a rallentare; ***Filippo***, però, ha deciso di continuare a cercare soluzioni migliori, e dobbiamo dargli atto che ha cercato delle soluzioni *esteticamente valide*; infatti, è riuscito a trovare un'ottima soluzione (finora sconosciuta: non abbiamo trovato alcun riferimento in giro) basandosi sul *pentagono*.



Trovate il pregevole reperto qui sulla destra; se considerate i semiangoli al centro ($\alpha = 36^o$), vi accorgete che la lunghezza totale risulta essere $2\tan\alpha + \sin\alpha\tan\alpha + \frac{4}{5}\pi$. Il che porta il nostro tracciato al valore del ***76.71%***.



Anche ***ChiQua*** però ha continuato a darsi da fare. E ha colpito duro, raggiungendo la ***BKS_2***. Qui i calcoli si fanno un pochino complessi, quindi lasciamo la parola al nostro eroe. Il disegnino (il suo: conoscete la nostra inettitudine nel ramo) lo trovate qui sulla sinistra, per riferimento.

Lasciamo variare l'angolo α e la lunghezza *d* del segmento $\overline{AB}$. Vediamo le formule, ponendo il raggio = 1

$$\overline{BO} = \sqrt{1+d^2}$$

$$\gamma = \arctan d$$

$$\beta = \pi - \alpha - 2\gamma$$

$$\overline{OD} = 1/Cos[\beta]$$

$$\overline{OE} = \overline{BO}\ Cos[\beta+\gamma]$$

$$\overline{DE} = \overline{OD} - \overline{OE}$$

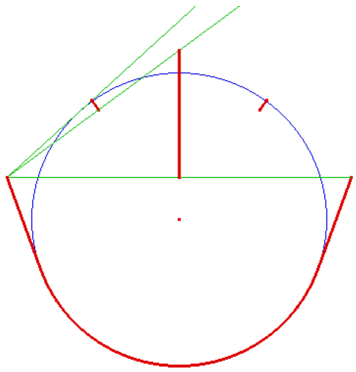
Quindi, l'espressione da minimizzare risulta:

$$2\alpha + 2d + \sqrt{1+d^2} + \cos\alpha + \arctan d - \sec\alpha + 2\arctan d \qquad [005.004]$$

Minimizzando rispetto a *d* e α ottengo una lunghezza di 4.818926...con *d* = 0.7496 e α =72.1673 gradi circa...

Ammettiamolo: i valori finali non saranno una bellezza, ma ci permettono di raggiungere il ***76.69%***. La matematica ci costringe a rinunciare all'estetica per tre miseri decimillesimi. E questa è la ***BKS_2***, come sopra preannunciato. Complimenti!

Successivamente, il valore è stato ulteriormente abbassato da ***Filippo***, arrivato al ***76.51%*** con una soluzione a ***quattro*** segmenti! Incredibile. La cosa è piuttosto complessa, ci vorranno un paio di disegni: usiamo i suoi, che sono decisamente ben fatti. La soluzione finale la vedete qui sulla destra, di seguito avete i calcoli e un ingrandimento per orientarvi..



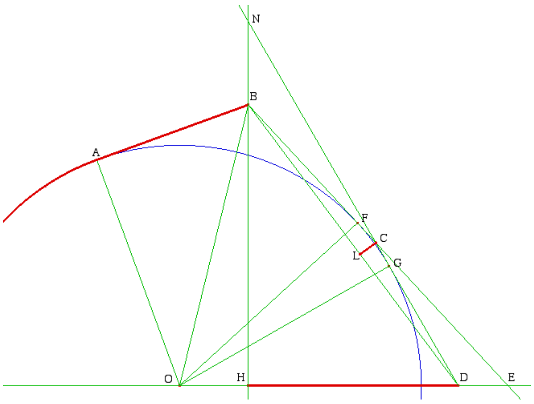
L'**arco** sottende un angolo di 140°.

Il **segmento AB**, tangente in A, forma col centro della circonferenza un angolo di 33,5°. Si traccia dal punto B l'altra tangente BE, essendo F il punto di tangenza, e dove anche l'angolo BOF è di 33,5° (figura2).

Il **segmento HD** è costruito in modo che DOG sia 30,5°; G è il punto di tangenza alla circonferenza della retta passante per D, che interseca la retta passante per BF in C.

Si costruisce il **segmento LC**, perpendicolare a BD, come in figura.

L'angolo AOE, per costruzione, è di 110°; BOE=AOE-AOB, per cui



BOE = 76,5° OBH = 13,5°

OBF=OBE=90-33,5=56,5

OEB=180-(76,5+56,5)=47°

L'**arco** misura 7/9 π (2.44346095279206140769316707 5)

Segmento AB = tan 33,5° (0.661885561195691517914527869 4)

OB=1/sen 56,5°

HB=OB*sen 76,5°=

=sen 76,5°/sen 56,5° (1.16607081529124948012990688 0)

OH=OB*sen 13,5°=

=sen 13,5°/sen 56,5°

OD=1/sen 59,5°

Segmento HD = OD-OH

HD=(1/sen 59,5°) – (sen 13,5°/sen 56,5°) (0.880643269451110969884590441 3)

HB=HD*tan HDB

tan HDB= HB/HD = (sen 76,5°/sen 56,5°)/((1/sen 59,5°) – (sen 13,5°/sen 56,5°))

HDB=52.939065463995448500758168 80°

BDN=59,5°-52,93…= 6.56093453600455149924183120 0°

BD=HB/sen 52,93…= 1.4612507362884513879669277 26

CDE= 180-59,5=120,5°

DCE=180-(120,5+47) = 12,5 (è uguale a FOG)

BCD= 180-12,5=167,5

DBE = 180-(167,5+6,56…) = 5.939065463995448500758168802

L'area del triangolo BDC (noto un lato e gli angoli adiacenti) è:

$$\frac{1}{2}\frac{BD^2 * senB \bullet senD}{sen(B+D)}$$

che deve essere uguale a BD*LC/2

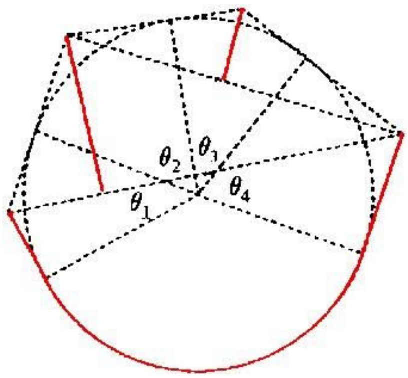
cioè

$$LC = \frac{BD * senB \bullet senD}{sen(12{,}5°)} = 0.07981766400810136849407033990$$

La lunghezza totale è: 4.807510672650758150394953934

…non arrivo a dire che ci crediamo sulla parola, ai calcoli, ma vi preghiamo di notare la precisione. *[Sapeste l'invidia del mio regolo calcolatore… (RdA)].*

E qui sono finite le risposte, con Filippo che si aggiudica il premio (l'abbonamento gratuito ad RM per vent'anni). Adesso però, per evitare che cominci a spiumare l'alloro del giardino per farsi una corona, vi diciamo che *non è la migliore soluzione conosciuta.*



Infatti, la migliore, per il momento, ha tre segmenti, ed è quindi la ***BKS_3***. È bruttissima (almeno secondo noi e -riteniamo- Filippo) e, per quanto ne sappiamo, il tizio che l'ha pubblicata per primo ci è arrivato sostanzialmente per tentativi. Vi forniamo comunque il disegno e i valori topici: se qualcuno ottiene una dimostrazione passabile, la pubblicheremo volentieri. Il valutatore percentuale è di ***76.39%*** e la trovate qui sulla destra. Gli angoli, in radianti, valgono:

$\theta_1 = 0.96\ldots$ $\theta_2 = 1.04\ldots$

$\theta_3 = 0.7\ldots$ $\theta_4 = 1.2\ldots$

Per quanto ne sappiamo, questa è la migliore soluzione esistente; nessuno ha provato a cercare la soluzione con cinque segmenti, e qui le congetture si sprecano: BKS_3 è veramente la migliore in assoluto? Non è possibile avvicinarsi ulteriormente al limite teorico? Quanti segmenti ha la soluzione minima?

Non chiedetelo a noi; come vi abbiamo detto, in questo caso ci siamo limitati a riportare i valori. Se, nelle fredde notti invernali, ripensando all'estate, una strana pista per le biglie vi torna insistentemente in testa, fatecelo sapere. Eh? Volete sapere com'è andata a finire? Beh, che la vernice se l'è beccata un tedesco che ha cominciato a spiegare all'intera spiaggia un mucchio di cose. Purtroppo Alice (che è l'unica di noi che sa il tedesco) si è rifiutata di tradurre e siamo rimasti nell'ignoranza…

6. Quick & Dirty

*Siamo stati alla **Sagra del Pesce Algebrico!** E, sulla via del ritorno, ci si è presentato un interessante problemino.*

Allora, per tenere buono Rudy, gli abbiamo comprato un bel palloncino a forma di radice quadrata, che adesso fa bella mostra di sé (e ingombro nello specchietto) legato in mezzo alla macchina.

Ad un certo punto (niente di grave) il nostro abile Postino-Autista-AccountManager e quantaltro si è trovato costretto a frenare piuttosto bruscamente.

Secondo voi, dove va il palloncino rispetto alla macchina? In avanti, indietro o resta verticale?

Quando la macchina frena, per inerzia, l'aria si sposta in avanti. Quindi, c'e` un aumento di pressione nella parte anteriore della macchina e una diminuzione nella parte posteriore.

E quindi, il palloncino si sposta *indietro*.

7. Pagina 46

Sia $\frac{y}{x} = k \Rightarrow y = kx$. Dalla seconda espressione, si ricava:

$$x^{kx} = (kx)^x \qquad \texttt{[007.001]}$$

E, calcolando la radice ***x**-esima* e successivamente dividendo per ***x***, si ha:

$$\begin{aligned} & x^{k-1} = k \\ & \Rightarrow x = k^{\frac{1}{k-1}} \\ & \Rightarrow y = k * k^{\frac{1}{k-1}} = k^{\frac{k}{k-1}} \end{aligned} \qquad \texttt{[007.002]}$$

Riducendo ai minimi termini[24], supponiamo $\frac{p}{q} = \frac{1}{k-1}$; da questo si ha:

$$\begin{aligned} & k-1 = \frac{q}{p} \\ & \Rightarrow k = 1 + \frac{q}{p} = \frac{p+q}{p} \\ & \Rightarrow \frac{k}{k-1} = \frac{p+q}{q} \end{aligned} \qquad \texttt{[007.003]}$$

E, tornando alle ***x*** e ***y***, si ha:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{p+q}{p}\right)^{\frac{p}{q}} \\ y = \left(\dfrac{p+q}{p}\right)^{\frac{p+q}{q}} \end{cases} \qquad \texttt{[007.004]}$$

Ma noi sappiamo che ***p*** e ***q*** sono *primi tra loro* e, se ***x*** e ***y*** sono razionali, devono esistere le radici ***q**-esime* di ***p*** e ***p+q***. Questo significa che, se $q \geq 2$ e se $p = n^q$, allora deve essere

$$n^q < p+q < (n+1)^q = n^q + pn^{q-1} + \frac{q(q-1)}{2} n^{q-2} + \ldots \qquad \texttt{[007.005]}$$

Ossia, ***q=1***.

[24] In quanto nulla impone che ***k*** sia un naturale.

E allora si ha:

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p} \\ y = \left(\dfrac{p+1}{p}\right)^{p+1} \end{cases} \qquad \texttt{[007.006]}$$

Con $p \in \{N - \{0,1\}\}$.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 To three... and beyond!

Quando non ti ricordi cosa c'è dopo l'uno, il tre è molto lontano

Fred (d'Alembert)

Bene, sembra siate passati attraverso moltiplicazione e divisione senza eccessivi traumi. Ancora un passettino, dai: carta & matita.

Calcolate la radice quadrata di duecentosessantaquattro. Sino al secondo decimale.

Non ditemi che *non vi ricordate*... Incredibile!

Già, anche in età più tarda ci si scontra con affermazioni fideistiche tipo quelle di Topino Tosto, e i relativi concetti matematici vengono rapidamente dimenticati: la moltiplicazione e la divisione le sapete ancora fare probabilmente solo in virtù del fatto che vi servono al mercato, ma la radice quadrata raramente si usa per comprare gli zucchini (a meno che siate un prof di mate... ma questo non c'entra).

Proviamo a vedere cosa possiamo fare per giustificarla, va bene?

Allora, il primo passo è quello di dividere (cominciando dalla virgola) il numero in blocchi di due cifre. Questo è ragionevolmente logico, se provate a moltiplicare un numero per se stesso vi accorgete che il numero delle cifre, suppergiù, raddoppia; quindi ci aspettiamo che ad ogni coppia di cifre corrisponda, nel risultato, una cifra.

Fermiamoci un attimo, che qui c'è qualcosa di interessante. Questo modo di scrivere i numeri è noto come sistema *ettico*; in pratica, se prendete i gruppi di due come se fossero una cifra unica, avete scritto il numero in base ***100*** (o in base $\boldsymbol{B^2}$, se stavate lavorando in base ***B***) senza la necessità di inventarvi i simboli per le cifre (domandina per vedere se avete capito: quanti simboli dovreste inventarvi?). Il sistema è meno peregrino di quanto possa sembrare: l'anno di nascita di uno dei redattori di questa rivista in notazione ettica si scrive **`19 57`** e se sapete il francese, l'inglese o il tedesco abbastanza da leggerlo è molto probabile che lo leggiate in ettico: dix-neuf (cent) cinquante-sept o nineteen fiftyseven o neunzehn(hundert) siebenundfünfzig[25].

Il secondo passo non dovrebbe rappresentare un problema: prendiamo il primo blocco (in notazione ettica) e cerchiamo la radice intera approssimata per difetto. Sarà sicuramente di una cifra, visto che il numero è minore di cento. E, siccome viviamo in una valle di lacrime, sicuramente darà del resto.

[25] Vi ricordate che parlando dei criteri di divisibilità avevamo parlato della "prova del nove" (*casting out nines*, in inglese)? Bene, esiste l'equivalente nel sistema ettico, solo che qui "buttate fuori i novantanove". Prego notare che se la prova del nove vi dice che una moltiplicazione è esatta, sbaglia una volta ogni dieci, in media. La prova del novantanove, invece, una volta su cento.

La situazione dovrebbe essere suppergiù quella indicata qui di fianco, dove abbiamo supposto $\lfloor\sqrt{n_2}\rfloor = a$ (ve le ricordate le parentesi di Gauss? Quelle "girate in basso" approssimano all'intero inferiore). Attenzione che abbiamo abbassato anche il secondo gruppo e abbiamo scritto il risultato della sottrazione in notazione ettica; se volete qualcosa di più "normale", quello che abbiamo scritto è equivalente a $(n_2 - a^2)*100 + n_1*10 + n_0$.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{n_2\ \ n_1n_0.00\ 00} & a \\ \hline
\quad a^2 & \\
(n_2-a^2)\ \ n_1n_0 &
\end{array}
$$

E qui casca l'asino. Il terzo passo è quello di trovare la prossima cifra, ***b***.

Che caratteristiche deve avere, questa cifra?

Confesso, questa parte l'ho capita solo quando ho cambiato la notazione. Tenere dietro ai pedici diventa un problema, altrimenti. Proviamo, poi rimetteremo le nostre cifre al loro posto.

Allora, esprimiamo le *prime due cifre **ettiche*** del radicando come ***X*** e ***Y***; utilizziamo, come abbiamo sempre fatto, la sopralineatura per indicare il numero (e non una moltiplicazione) e mettiamo nei pedici l'indicazione del sistema (decimale o ettico) che stiamo utilizzando. Abbiamo allora che la parte su cui lavoriamo del radicando diventa:

$$\overline{X \quad Y}_{Ett} = 100*X + Y = \overline{n_2 \quad n_1 n_0}_{Ett} = 100*n_2 + 10*n_1 + n_0 \qquad \texttt{[008.001]}$$

Non abbiamo inventato niente di nuovo, abbiamo solo condensato la notazione.

Allora, il nostro ***b*** deve essere tale che:

$$10*a + b = \left\lfloor\sqrt{100*X+Y}\right\rfloor \qquad \texttt{[008.002]}$$

ossia, sorvolando sulla parentesi di Gauss (in fondo, ci farebbe piacere trovare il risultato *esatto* con un intero solo...) deve essere

$$(10*a+b)^2 = 100*X + Y \qquad \texttt{[008.003]}$$

sviluppiamo il quadrato in un modo un po' "strano" e invertiamo il senso:

$$100*X + Y = 100*a^2 + b*(20*a+b) \qquad \texttt{[008.004]}$$

O, se preferite:

$$100*(X-a^2) + Y = b*(20*a+b) \qquad \texttt{[008.005]}$$

E, se ritrasformiamo il primo membro di questo obbrobrio nella notazione precedente,

$$\begin{aligned} 100*(X-a^2)+Y &= 100*(n_2-a^2)+10*n_1+n_0 = \\ &= \overline{(n_2-a^2) \quad n_1n_0}_{Ett} \end{aligned} \qquad \texttt{[008.006]}$$

Ossia siamo riusciti a trasformare il nostro aggeggio nel *resto della sottrazione*.

Quindi, la condizione "ottimale" (supposto non si abbiano ulteriori resti e tutto venga giusto e si sia finito lì) su ***b*** è

$$b: \quad b*(20*a+b) = \text{Resto} \qquad \texttt{[008.007]}$$

In sostanza, cercate un numero tale che *preso il risultato parziale, raddoppiato, scritto di seguito il numero e moltiplicato per il numero, sia il massimo intero minore del resto*. Mi chiedo se esista un modo più complicato per nascondere una moltiplicazione per venti. E poi si ricomincia.

Quindi, dovreste vedere qui a fianco il risultato della nostra operazioncella.

```
 _____________
√ 2 64.00 00 | 16.2
  1          |________
  1 64       | (20+6)*6=156
  1 56       | (320+2)*2=644
     8 00    |
     6 44
     1 56
```

Ottenuto l'***1***, lo moltiplichiamo per ***20*** e cerchiamo il valore di ***b*** che nella formula qui sopra si avvicina di più a ***164***; vediamo che è ***6*** e risulta ***156***, e quindi ***b=6*** e il risultato parziale è ***16***. Il quale viene moltiplicato per ***20*** (e fa ***320***) eccetera. La cifra dopo ve la calcolate voi, per vedere se avete capito.

Oggi è già difficile vederne una fatta così, ma se siete incredibilmente fortunati (?) potreste trovarne anche di scritte un po' diverse. Infatti, in molti posti nel mondo il risultato viene scritto *sopra* il radicando (e fin qui il massimo che potremmo dire è *de gustibus*...), e *solo una parte* del calcolo strano viene scritta *di fianco* al resto. Per intenderci, alla sinistra di ***164*** potreste trovarvi scritto ***20+6=26*** e basta; mentre, alla sinistra dell'***800***, trovereste un illuminante ***320+2=322***. Non chiedetemi la ragione per cui si scrivono dei calcoli così semplici e non gli altri: mi occupo di matematica ricreativa, non di turbe psichiche.

Esiste un metodo "simile" ma decisamente più complesso per calcolare anche la radice cubica, ma quello non lo spiegherei neanche al mio peggior nemico; se volete, ricavatevelo da soli. Le cose cui fare attenzione sono, sostanzialmente, che dovete dividere il numero a gruppi di *tre* cifre (...ma se quella era la notazione ettica, questa come si chiama, *kilica*? Mi rifiuto di andare avanti) e che l'espressione sotto il risultato diventa decisamente complessa, essendo imparentata non con il quadrato ma con il *cubo* del binomio.

Arrivati a questo punto, ammettiamolo: non è un gran bel metodo, ma potrebbe esserci utile per qualche problemino. Ne ho in mente uno, di quelli duri...

Oeu, ma allora come si calcola la radice quadrata?

Se proprio dovete farla a mano, il mio consiglio (posto che non vogliate usare il metodo delle ***frazioni continue*** di cui abbiamo già parlato) è di usare una cosina un po' vecchiotta (risale ai Babilonesi, credo, anche se il buon Neugebauer non sembra molto convinto):

Per calcolare $\sqrt{N}$:

1. Prendete $k_0 \in N : k_0^2 < N$
2. Iterate: $k_{n+1} = \dfrac{k_n + \dfrac{N}{k_n}}{2}$

Il motivo mi sembra abbastanza chiaro: i $k_n < \sqrt{N} < \dfrac{N}{k_n}$ e quella che voi calcolate è la media aritmetica tra le due grandezze.

"E funziona?" Compito per le vacanze facile-facile: dimostrare (alla maestra) che si *fatica meno*...

Secondo alcuni, questa espressione deriva dalla forma:

$$s_i = 2k * s_{i-1} + \left(n - k^2\right) s_{i-2} \qquad \text{[008.008]}$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} \frac{s_i}{s_{i-1}} = \sqrt{N} + k$$

E qui la parentela con le frazioni continue è qualcosa di più di un sospetto.

Si sa per certo che questa formula la conoscevano già i Greci, anche se non è sicuro come ci siano arrivati; a noi, comunque, basta notare che se è $q = \frac{s_{j+1}}{s_j}$, allora la tesi è $q \to \sqrt{N} + k$. Ma allora $(q-k)^2 = N$ e quindi $q^2 - 2kq - (N - k^2) = 0$. Da cui, la sequenza $s_0 = 1$, $s_1 = q$, ..., $s_k = q^k$ soddisfa la prima delle `[008]`.

Ora, con cinque minuti in Excel potete verificare che il metodo "greco" è più *lento* di quello "babilonese". Ha però un interessante pregio, in quanto permette di rispondere meglio alla domanda "*Qual è la miglior approssimazione frazionaria della radice, con il* **denominatore minore di un valore dato***?"*. Il che non è poco: nei calcoli approssimati questo è l'equivalente della pietra filosofale.

Non solo, ma da questo metodo discende un interessante teoremino.

Supponiamo che una delle frazioni ottenute sia la rappresentazione *esatta* della radice. Allora, svolgendo il calcolo al contrario, dovremmo ottenere una *sequenza infinita di naturali strettamente decrescente*. Il che è assurdo. Se a qualcuno di voi questo passaggio ricorda la dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, siete in buona compagnia. È un'ipotesi considerata fondata che, in generale, l'irrazionalità di queste radici sia stata dimostrata dai greci proprio in questo modo (ma non ditelo a nessuno, o Pitagora si arrabbia).

Per vedere un altro metodo prendiamola alla lontana, tanto per cambiare. Ve lo ricordate il modo sbagliato per sommare le frazioni?

$$M\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = \frac{a+b}{c+d} \qquad \texttt{[008.009]}$$

Sì, il mediante. Ne abbiamo parlato a proposito degli alberi di Stern-Brocot, dalle parti di RM 049 e 050; sono *sicuro* che vi siete precipitati a far di conto sopra e ormai siete abilissimi in merito.

Ora, presumo che, se mi metto a concionare del fatto che si tratta di una mappa contrattiva, proviate ad inseguirmi dotati di strumenti contundenti; però, qualche calcoletto interessante forse si può fare. Ad esempio, la mia bestia nera delle scuole "basse" (sì, lei, quella di cui parlavamo al piano di sopra).

Dato un numero ***N***, prendiamo due numeri ***a*** e ***b*** tali che $a * b = N$ e, considerandoli come frazioni (improprie, aventi denominatore ***1***), calcoliamo il mediante e *iteriamo* in un modo un po' strano:

$$\left(\frac{a}{1}, \frac{b}{1}\right) \to \left(M, \frac{N}{M}\right) \qquad \texttt{[008.010]}$$

Domanda: a cosa tende, questa roba? Beh, ormai dovreste essere abbastanza scafati con le medie da accorgervi che tende alla *radice quadrata* del numero; infatti, se giocherellate un po' con Excel, ad esempio per ***N=7*** prendendo ***a=7*** e ***b=1*** e vi ricordate di tenere separati numeratori e denominatori, avete la serie:

$$\left(\frac{7}{1}, \frac{1}{1}\right); \left(\frac{8}{2}, \frac{14}{8}\right); \left(\frac{22}{10}, \frac{70}{22}\right); \left(\frac{92}{32}, \frac{224}{92}\right); \left(\frac{316}{124}, \frac{868}{316}\right); \left(\frac{1184}{440}, \frac{3080}{1184}\right); \ldots \qquad \texttt{[008.011]}$$

…e avanti così; se provate a fare le divisioni, vi accorgete che il primo termine approssima la radice per *eccesso*, mentre il secondo la approssima per *difetto*; in questo modo, potete anche stimare facilmente l'errore; sarà sicuramente minore della differenza tra i due valori.

Bello, comodo, veloce… e anche se iniziate con due valori balordi per ***a*** e ***b*** (come abbiamo fatto noi; il consiglio è di scegliere dei termini "più vicini possibile"), la convergenza è impressionante. Carino, vero?

Bene, adesso sapete contare sino a due. Ma cosa c'entra, il tre?

C'entra; infatti, se consideriamo il ***mediante pesato***, abbiamo:

$$\left(\frac{a}{b},\frac{c}{a},\frac{Nb}{c}\right)\rightarrow\left(\frac{a+c+Nb}{b+a+c};\frac{Na+c+Nb}{Nb+a+c};\frac{Na+Nb+Nc}{Nb+Na+c}\right) \qquad \texttt{[008.012]}$$

Che sarà una brutta bestia, ma sicuramente più mansueta dell'estrazione a mano di una radice cubica.

In realtà è possibile semplificarsi un attimo la vita, almeno dal punto di vista teorico; esprimiamo l'iterazione attraverso gli apici per ***a***, ***b*** e ***c*** a primo membro; otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} c' = c + Na + Nb \\ a' = c + a + Nb \\ b' = c + a + b \end{cases} \qquad \texttt{[008.013]}$$

O, usando una forma (brrrr!) matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & N & N \\ 1 & 1 & N \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' \\ a' \\ b' \end{bmatrix} \qquad \texttt{[008.014]}$$

Spero ammetterete che la matrice quadrata è quasi carina, anche se non piacciono le matrici. Iterare, su questo aggeggio, significa semplicemente calcolare le potenze della nostra matrice. Se andate avanti "per un po'" (io mi sono fermato all'ottava potenza[26]), normalizzate all'elemento in alto a destra e prendete il *reciproco* di ogni valore, ottenete:

$$\begin{bmatrix} N^{\frac{2}{3}} & N^{\frac{1}{3}} & N^{\frac{0}{3}} \\ N^{\frac{3}{3}} & N^{\frac{2}{3}} & N^{\frac{1}{3}} \\ N^{\frac{4}{3}} & N^{\frac{3}{3}} & N^{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} \qquad \texttt{[008.015]}$$

E, sempre fermandosi all'ottava potenza, avete un errore massimo di qualche millesimo.

Non so nel mondo reale, ma in matematica l'appetito vien mangiando… Caso mai vi chiedeste se la cosa funziona anche per altri valori, sì; costruite la matrice dell'opportuno ordine, calcolate la potenza, normalizzate, invertite… e vi ritrovate con tutte le radici che vi servono.

"Guarda che 'POWER' in Excel fa lo stesso lavoro e ci mette meno". Non solo, ma anche quel primitivo del sottoscritto con il regolo calcolatore e i logaritmi arriva a risultati ragionevoli. Ma volete mettere la soddisfazione?

[26] Provate a pensare perché è comodo andare avanti per *potenze di due*. E perché ho fatto solo tre prodotti.

To three, and *beyond*!

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms