Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 054 - Luglio - Anno Quinto

1. L'acusmatico

Se pensate che fare l'ambasciatore a Praga sia un lavoro piacevole e di tutto riposo, potreste avere delle sorprese. Nel 1610 Giuliano de` Medici[1] faceva esattamente questo mestiere, per conto del Granduca di Toscana, e di tanto in tanto riceveva delle lettere che dovevano procurargli un gran mal di testa; ad esempio quella in cui gli capito` di leggere la frase:

HAEC IMMATURA A ME IAM FRUSTRA LEGUNTUR O.Y.

"Queste cose sono ancora inutilmente immature per me" leggeva l'ambasciatore, e le due lettere isolate alla fine certo non aiutavano granché a capire il senso della frase. Ma anche se questo e` l'esempio piu` noto e famoso, certo non era il piu` criptico. La celebre frase arrivo` nel mese di Dicembre, ma in pieno Agosto era stata preceduta da una consorella totalmente incomprensibile e quasi minatoria:

SMAISMRMILMEPOETALEUMIBUNENUGTTAURIAS

In questa, si riesce a malapena ad intravedere la parola "poeta", e verso la fine, la parola "tauri". Il resto e` mistero assoluto, e poiché il mittente non era un cantore

[1] E` celebre e bella la tomba di Giuliano de` Medici realizzata da Michelangelo: ma ha come data di morte incisa sul marmo quella del 1516, quindi siamo ragionevolmente sicuri che non contenga le spoglie del nostro ambasciatore, ma di qualche suo probabile antenato.

spagnolo delle corride, anche le due parole leggibili dovevano considerarsi non meno misteriose del resto della sequenza.

Un vantaggio essenziale, nel fare l'ambasciatore toscano a Praga nel 1610, pero` c'era: era proprio a Praga che in quell'anno risiedeva Johannes Kepler, il piu` grande astronomo dell'epoca. E se il mittente delle frasi misteriosi e` un toscano che si interessa di astronomia, e` assai probabile che messer Keplero possa essere d'aiuto nel decifrare i messaggi. Anzi, e` ancora piu` probabile che il reale destinatario delle frasi misteriose sia proprio l'astronomo tedesco.

E` allora verosimile che il buon Giuliano si limitasse a ricevere le lettere che il quarantaseienne Galileo Galilei continuava a spedirgli e a rigirarle velocemente a Keplero: questi, bene informato sugli artifici che andavano di moda nelle comunicazioni scientifiche d'allora, avra` certamente subito capito che i messaggi misteriosi celavano altrettanti annunci di scoperte, mettendosi di buzzo buono a cercare di anagrammare le frasi per ottenerne altrettante di senso compiuto e rivelatore.

Riusci` nell'intento: uno non scopre le tre leggi fondamentali del moto dei corpi celesti per caso, e non esistono anagrammi, per quanto complessi, in grado di resistere a cotanta mente. L'impossibile stringa d'Agosto venne domata da Keplero secondo questo verso latino:

SALVE, UMBISTINEUM GEMINATUM MARTIA PROLES!

Che si puo` grosso modo tradurre con *"Salve, compagni gemelli, figli di Marte"*. E con questo si e` detto tutto: soprattutto adesso che di telescopi e cannocchiali ne abbiamo di gran lunga migliori di quelli allora disponibili, l'interpretazione kepleriana brilla per la sua lungimiranza: Marte ha infatti due satelliti, Deimos e Fobos, ed e` certo a loro due, gemelli e figli del pianeta rosso, che Galileo si riferiva.

Neanche il mistero dicembrino doveva resistere molto all'analisi del fondatore dell'astronomia moderna: altro che "cose inutilmente immature"! Dopo aver portato alla luce i due satelliti di Marte, il terribile pisano stava enunciando un'altra scoperta spettacolare che riguardava il piu` grande degli dei e dei pianeti:

MACULA RUFA IN IOVE EST GYRATUR MATHEM ECC.

Ovvero: "*C'e` su Giove una Macchia Rossa che gira in modo matematico, ecc.*" Quanto si sara` stupito, Keplero, di una tale affermazione del collega italiano? Una macchia rossa sul pianeta! E tale da poterne osservare il moto "matematico"! Come sempre, dobbiamo metterci nei panni culturali dei tempi: adesso, le foto della grande Macchia Rossa di Giove sono disponibili ovunque, e quello che si crede essere uno spaventoso uragano dell'atmosfera gioviana e` familiare anche ai non astrofili. Ma nel 1610 si finiva in galera solo per affermare che le cose celesti "mutavano", e pertanto sentenze del genere erano impegnative e sconvolgenti.

Lo scopo delle frasi misteriose e` evidente: il prestigio d'una scoperta scientifica e` elevatissimo, e lo era anche all'inizio del Seicento. Forse lo era ancora piu` di quanto lo sia ora; oggigiorno i ricercatori universitari hanno uno stipendio, e soprattutto hanno, a meno di improvvide e sconvolgenti riforme, almeno una tenue possibilita` di carriera. A quei tempi, lo studioso poteva sopravvivere solo se trovava un mecenate, uomo o istituzione che fosse. E i mecenati sono attratti dalle menti brillanti, quelle che possono vantare precedenti e altrettanto brillanti scoperte. La priorita` di una scoperta era pertanto un capitale da proteggere accanitamente, anche per il non troppo nobile fatto che da essa dipendeva non solo il prestigio, ma anche il futuro economico dello scopritore[2]. E se annunciare pubblicamente una scoperta non ancora ben verificata significava rischiare una clamorosa perdita di autorevolezza qualora la scoperta risultasse poi una pia illusione, il pericolo di "arrivare secondi" nella corsa ad una scoperta prestigiosa era ancora piu` frustrante. Da qui l'artificio delle frasi misteriose da anagrammare: appena si riteneva di aver scoperto qualcosa di importante, si dava la notizia ad un esperto tramite l'anagramma; poi si passava con calma alla verifica. Se nel frattempo qualche concorrente giungeva alla medesima scoperta, si poteva comunque rivendicare la priorita`, mostrando che la frase inviata il tal giorno nella tal lettera al tal signore, opportunamente riordinata, mostrava proprio che lo scopritore era il mittente della missiva.

Il metodo era abbastanza diffuso, e tutto sommato affidabile. Ed ecco dunque che Galileo poteva dormire sonni tranquilli: le scoperte dei Satelliti di Marte e della Grande Macchia Rossa di Giove erano al sicuro, e poco contava se Keplero era riuscito a svelare il segreto anagrammato; la sua correttezza deontologica nel non voler anticipare troppo l'annuncio era comunque palese. Quante probabilita` ci sono, infatti, che da una stringa composta in tutto da una quarantina di lettere si possa estrarre una frase di senso compiuto relativa a scoperte scientifiche, se non nel caso specifico in cui l'autore volutamente ce la nasconda?

Gia`, quante?

Se state ripetendovi "Zero!" nella testa, non siete buoni matematici. Zero e infinito sono numeri da trattare sempre con supremo rispetto. In ogni caso, anche se il calcolo esatto forse non e` neanche possibile, la probabilita` e` molto piccola. Infima, anzi. Cosi` infima che e` davvero sorprendente che Galileo, alla fin fine, non abbia affatto scoperto i due satelliti di Marte[3]. Il padre della fisica aveva ben altre intenzioni rivelatrici, con la sua stringa dell'Agosto 1610; quel che voleva realmente dire era:

ALTISSIMUM PLANETAM TERGEMINUM OBSERVAVI

che e` un po' come dire "*Ho visto il pianeta piu` alto triplicato*". Il pianeta e` Saturno, l'ultimo ("altissimum") noto a quei tempi, e Galileo lo aveva visto "triplicato" perché il suo cannocchiale non era sufficientemente potente da risolvere l'immagine degli anelli da quella del pianeta stesso, con il risultato che talvolta Saturno appariva come fosse fatto di tre sfere parzialmente sovrapposte. La rivelazione era davvero sconvolgente, piu` ancora della (mai fatta) scoperta dei satelliti marziani; solo a distanza di quattro secoli noi possiamo prenderci il lusso di trovare gli anelli di Saturno meno stupefacenti della coincidenza di due significati astronomici "veri" in una frase che avrebbe dovuto contenerne solo uno. Come Shakespeare fa dire ad Amleto, "*vi sono piu` cose in cielo e in terra, Orazio, di quante se ne sognano nella vostra filosofia*[4] ".

Ma siamo pronti a scommettere che Orazio, Amleto e anche Shakespeare in persona sarebbero rimasti di stucco a scoprire che anche il secondo anagramma celava una frase del tutto diversa, dal significato astronomico completamente differente rispetto all'ipotizzata macchia rossa di Giove. E se abbiamo giudicata infima la probabilita`

[2] Mutatis mutandis, non e` che al giorno d'oggi le cose siano davvero cambiate troppo. Lo stipendio da assistente ricercatore aggiunto e` una cosa, il Nobel a Stoccolma tutta un'altra.

[3] Galileo non li scopri` per la buona ragione che sono davvero molto piccoli. Chi pero` li predisse con sbalorditiva precisione (a parte quel pessimo anagrammista di Keplero) fu Jonathan Swift. Andate a rileggervi "I viaggi di Gulliver", se non ci credete. *[Solo una piccola nota: il motivo per cui Swift era convinto che Marte avesse due satelliti (e non uno solo) era che se la Terra ne aveva uno e Giove ne aveva quattro, un pianeta in mezzo doveva averne due (RdA)]*

[4] "There are more things in heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy" – William Shakespeare, Hamlet I:5

che una frase anagrammata possa contenere accidentalmente una seconda soluzione altrettanto "vera" della prima, lasciamo come facile esercizio al lettore il calcolo di quale sia la probabilita` che questo accada per due volte consecutive.

Nondimeno, la Grande Macchia Rossa sui Giove c'era e continua ad esserci, proprio come Deimos e Fobos continuano a orbitare, veloci come saette, intorno a Marte. Nelle intenzioni galileiane, le "cose immature" dovevano celare questa frase:

CYNTHIAE FIGURAS AEMULATUR MATER AMORUM

e, poiché Galileo era una persona seria, non aveva intenzione di vantarsi con Keplero di aver conosciuto una certa Cinzia che eseguiva brillanti evoluzioni erotiche, ma piuttosto che la "madre degli amori", cioe` Venere (Mater Amorum), copiava le forme (figuras aemulatur) della Luna (Cynthiae); detto piu` prosaicamente, il pianeta Venere mostra le "fasi" come la Luna.

Nonostante esistano ragazze di nome Cinzia che ignorano che il loro nome significa "Luna", l'ultima frase e` abbastanza famosa: la sua forma originale anagrammata lo e` un po' meno. Nello stesso rapporto si situano piu` o meno la forma in chiaro e quella criptica sulla triplicita` di Saturno, anche se entrambe sono un po' meno note delle consorelle su Venere e Cinzia: ma la duplice e stupefacente profezia interpretativa di Keplero, doppiamente sbagliata dal punto di vista enigmistico e doppiamente esatta dal punto di vista astronomico, e` incredibilmente poco nota.[5]

Anche se non c'e` bisogno di ragioni speciali per raccontare un episodio cosi` curioso, l'aneddoto ne contiene almeno due che sono funzionali alla celebrazione di questo mese di Luglio. La prima e` la solita constatazione di quanto sia futile, e soprattutto sbagliato, separare la cultura scientifica da quella umanistica[6]: per godere appieno dello stupore che il racconto degli anagrammi galileiani genera, occorre sapersi muovere almeno un po' in entrambe. Gia` solo la coppia "altissimum planetam" implica il dover ricordare che nel 1610 tutte le stelle erano considerate fisse, a parte cinque "asteres planetai" cioe` "stelle erranti", mentre gli astronomi di oggi hanno una visione decisamente piu` dinamica di quello che succede sopra la nostra testa (e sotto i nostri piedi); il fatto che i pianeti fossero proprio cinque (da Mercurio a Saturno), oltre a consentire a Galileo l'uso del superlativo assoluto per il quinto e piu` esterno, porto` Keplero persino ad una immaginifica cosmogonia basata sulla supposta relazione tra i cinque pianeti e i cinque solidi platonici.

---

5 Almeno a quanto ci risulta personalmente, e specialmente se commisurata all'effetto di stupore che induce in chi la sente per la prima volta. Inizialmente, la Redazione di RM ha accarezzato l'idea di pubblicare come "indovinello storico" la frase "Haec immatura..." per sollecitare i lettori a scoprire quale famoso messaggio scientifico fosse stato in essa nascosto. Facendo le opportune ricerche in rete, abbiamo scoperto l'estratto di un libro assai curioso: "I giardini cifrati" di Carlo Fabretti, Edizioni Diabasis, in cui la storia degli anagrammi di Galileo e` ben raccontata, e che abbiamo barbaramente saccheggiato per scrivere queste pagine. Il libro non lo abbiamo ancora comprato, ma ci ripromettiamo di farlo: forse anche solo per curiosita` sull'autore, che e` un matematico italiano, narratore di lingua madre spagnola, nato a Bologna, membro dell'Accademia delle Scienze di New York. Sembra un bel soggetto, no?

6 Gli affezionati lettori di RM ormai lo sanno, e rasenteranno la nausea nel sentirselo ripetere: il tormentone preferito delle prime pagine di RM e` la rituale filippica contro l'idea gentiliana della scuola, ancora in auge, che distingue e separa il sapere umanistico-letterario (da destinare ai rampolli delle classi colte) da quello scientifico-tecnico, con particolare enfasi e malcelato disprezzo verso il concetto di "tecnico", inteso come arido, automatico e ripetitivo, da destinare alle classi sociali meno opulente. Questo, tra le altre cose, spiega anche l'altrimenti inspiegabile atteggiamento snobistico di alcuni intellettuali, che dichiarano di non sapere nulla di matematica, e nel dirlo intendono vantarsi della cosa. L'altro tormentone di RM, di solito ribadito nelle pagine centrali della rivista, e` invece l'esaltazione delle "molte e diverse vie" risolutive che ogni problema sembra accettare, alla faccia di chi pensa che la matematica sia solo, imperlappunto, esercizio arido, automatico e ripetitivo.

La mitologia greca e romana e` poi quasi irrinunciabile, nel ripercorrere la storia dell'astronomia: non solo per seguire le frequenti perifrasi: Venere come dea dell'amore, Cinzia e Diana e Artemide come sinonimi di Luna, Deimos e Fobos (Terrore e Paura) come figli di Marte. Ci sono centinaia di coincidenze, a meta` tra lo scientifico e il narrativo, che rappresentano un aiuto mnemonico eccezionale. Per restare alle avventure di Galileo, la "triplicita`" di Saturno era quanto mai misteriosa, anche perché talvolta spariva del tutto. Questo accadeva quando gli anelli del pianeta erano posizionati "di taglio" rispetto all'osservatore terrestre. Il risultato fu che il vecchio pisano vide prima Saturno come fosse in triplice forma, per poi tornare a vederlo come un piccolo, normale, disco solitario. La cosa e` raccapricciante gia` di per sé, ma diventa assolutamente indimenticabile se si rammenta che il Saturno greco era celebre per mangiare la progenie: "si e` forse Saturno divorato i propri figli?" si chiede infatti Galileo, in un'altra lettera.

Alcune non sono vere coincidenze, perché provocate ad arte: nondimeno, il divertimento e l'aiuto mnemonico rimangono immutati. Se pure Galileo non scopri` i satelliti marziani, scopri` invece i quattro grandi satelliti di Giove, che a differenza di Deimos e Fobos sono di dimensioni planetarie, e quindi visibili anche con un piccolo cannocchiale. E a questo punto si pone il problema: come chiamare questi piccoli e importantissimi astri? Sono importantissimi perché mai visti prima, perché mostrano agli aristotelici che il mondo celeste non e` statico; si muovono, infatti, anche se non si allontanano mai da Giove. Allora, per celebrarne l'importanza con un omaggio ruffiano, i quattro si chiameranno collettivamente "pianeti medicei", e dopo questo battesimo sara` assai improbabile essere costretti a chiedersi se a quel tempo in Toscana governavano i Medici o gli Sforza; poi, per i nomi individuali, si giochera` sulla loro dipendenza e vicinanza a Giove/Zeus e sul fatto che sono nascosti, timidi, difficili a vedersi. Niente di meglio, allora, che scegliere quattro "amori illegittimi" di Zeus come Io, Europa, Ganimede e Callisto[7].

Ma e` un gioco infinito: in tempi di Unione Europea, se ci lascia incuriosire da quel nome "Europa" che figura tra i quattro satelliti galileiani, si finisce rapidamente per incuriosirsi anche della corrispondente leggenda, quella della fanciulla rapita dall'Asia e portata a dorso di toro (sempre il solito Zeus) nel continente che da lei prese il nome. Questo non aiutera` a ricordare curiosita` astronomiche, ma forse lascia capire meglio perché una delle monete recenti piu` belle, quella greca da due Euro, sia fatta com'e` fatta.

E la memoria e` bene aiutarla: chiamare "mesone" (dal greco "mesos", "di mezzo") una particella la cui massa e` quasi a meta` strada tra quella dell'elettrone e quella del protone (da "protos", "primo"), a nostro parere e` una idea feconda e utile; ma e` soltanto un parere, e di ben poco conto. Forse e` solo un parere di parte, espresso da chi fa molta fatica a ricordare (non parliamo poi di distinguere) i colori e i sapori dei quark[8].

[7] Di satelliti, il pianeta Giove ne ha ben piu` di quattro: al momento, ne ricordiamo sedici. Fortunatamente, anche il dio non aveva solo quattro amanti irregolari, e la scelta dei nomi dei satelliti secondo il criterio galileiano non e` stata messa in crisi. *[Spiacente di contraddire, ma in tempi recenti questo* gossip *astronomico e mitologico e` stato messo potentemente in crisi: Giove ha 61 satelliti, 23 dei quali hanno un nome: arrivati pero` ad "Isonoe" e "Praxydike", gli astronomi hanno gettato la spugna passando ad un piu` prosaico "S/2001 J9". (RdA)]*

[8] Up, Down, Strange, Charm, Top (ex-Truth) e Bottom (ex Beauty). Ovvero Su, Giù, Stranezza, Fascino, Sopra (precedentemente chiamata Verita`) e Sotto (precedentemente chiamata Bellezza). I "flavours", a dire il vero, indicano solo differenza di tipologia, ed era effettivamente complesso trovare delle "proprieta`" caratteristiche di ognuno, in modo da legarle al nome. I nomi cosi` fantasiosi, accentuati anche da altrettanta fantasia nella definizione di enti fisici a loro relazionati quali la "nudita`" e la "liberta`", ha condotto a titolare articoli di ricerca in maniera quantomeno imbarazzante: "Dalla schiavitu` infrarossa alla liberta` ultravioletta: il fascino misterioso della bellezza nuda", o qualcosa

La seconda "ragione funzionale" e` invece la lotta per la priorita` della scoperta scientifica. In questo, e nei conflitti a questo associati, la matematica non e` seconda a nessuna scienza. Tre dei piu` famosi matematici italiani saranno perennemente ricordati per la complessa e tragicomica storia della priorita` nella soluzione delle equazioni cubiche, anche perché Scipione del Ferro, Cardano e Tartaglia si giocavano, oltre alla gloria, soldi e privilegi nelle sfide matematiche che ripetutamente si lanciavano. Ma, nonostante l'impegno dei tre italiani, la piu` celebre lotta per la "primogenitura" in matematica riguarda il sommo Newton e uno strano barone tedesco.

Gottfried Wilhelm von Leibniz nacque a Lipsia il 1° Luglio 1646, e gia` questa brevissima notizia richiede alcune precisazioni: innanzitutto, la grafia dei nomi sassoni non era, a quel tempo, del tutto stabilizzata, vista che alcune fonti perseverano nel chiamarlo Leibnitz, con una "t" in penultima posizione; in secondo luogo, noi siamo molto soddisfatti di vederlo ascritto tra i nati di Luglio, anche perché questo mese e` un po' avaro di compleanni celebri, ma avremmo avuto anche la possibilita`, quasi senza barare, di festeggiarlo il mese scorso. Leibniz celebrava infatti il suo genetliaco il 21 Giugno, perché quando, nel 1582, papa Gregorio XIII decise che il giorno successivo a giovedi` 4 Ottobre sarebbe stato venerdi` 15 Ottobre, non tutte le nazioni furono entusiaste dell'idea, e accettarono la riforma papale con un certo ritardo: tra queste, la Sassonia protestante e luterana di Leibniz[9].

E` assai difficile definire il barone von Leibniz, perché fu molte cose al tempo stesso. Come molti geni del passato rimase orfano precocemente, perdendo il padre a soli sei anni: e si dedico` a studiare quasi ogni cosa che fosse stampata sui numerosi libri della biblioteca paterna. Pare che padroneggiasse il latino e il greco a dodici anni, che poco dopo si imbattesse in Aristotele, non trovandolo del tutto soddisfacente per le sue esigenze. Si interesso` quindi di metafisica, e alla fine, da maturo quattordicenne, entro` all'Universita` di Lipsia per studiarvi filosofia. Vi si laureò, ormai vetusto diciassettenne, nel 1663, quando decise di restare all'universita` per accaparrarsi un

del genere. Anche per questo, Truth e Beauty sono stati ricondotti a piu` neutri "Top" e "Bottom" (con l'accortezza di salvaguardare le iniziali delle parole primitive, per non dover riscrivere valanghe di formule...)

[9] Secondo un autentico "classico" del Web, le FAQ calendaristiche di Claus Tondering, Leibniz era ancora in vita quando la longa manus di papa Gregorio gli rubo` undici giorni di vita: saltò, nel 1700, dal 18 febbraio al 1° Marzo.

dottorato in giurisprudenza: scoperto che per averlo da quella Universita` sarebbe stato costretto ad aspettare un anno di più, ando` a farselo dare ad Altdorf.

Ma rivisitare la formazione di Leibniz non aiuta a cogliere la passione essenziale della sua vita, che era quella di riunire tutta la conoscenza umana. Non e` possibile immaginare una Storia della Matematica che non citi il suo nome, non fosse altro che per l'invenzione del calcolo infinitesimale, cagione del suo scontro con Newton. A prescindere dalla pura primogenitura, e` senza dubbio a Leibniz che vanno ascritte alcune parti importanti, quali la notazione dei differenziali (i cari vecchi "dx" e "dy"), l'invenzione del simbolo di integrale (a forma di "esse allungata") e, soprattutto, la visione delle derivate non solo come "velocita`", e quindi legate unicamente alla variabile tempo, come fece Newton, ma in un senso piu` generale.

Se e` impossibile scrivere una storia della matematica senza citare Leibniz, e` ancora piu` improponibile scrivere una storia della filosofia senza nominarlo: fu, semplicemente, il piu` grande filosofo tedesco del diciassettesimo secolo, e marco` indelebilmente la scuola germanica di filosofia dei secoli successivi. Ma quel che piu` sorprende e` che le sue attivita` di filosofo e matematico erano comunque ben lontane da esaurire il suo orizzonte di lavoro. A puro titolo di inventario, ricordiamo alcune delle cose che intraprese nei suoi settanta anni di vita, cambiando di volta in volta ruolo e attivita`: come matematico e filosofo, si e` gia` detto; come scienziato e fisico, lotto` perché fossero utilizzati soprattutto l'osservazione e gli esperimenti, anziché le dotte critiche[10]; come storico pose l'attenzione sulla necessita` di accedere per quanto possibile alle fonti dirette e ai documenti dell'epoca; come filologo dette contributi alla storia della lingua tedesca, focalizzando la necessita` degli studi filologici comparativi; come politico (fu a lungo diplomatico e segretario dell'Elettore di Magonza) e teologo, combatte` tutta la vita al fine di riunificare la chiesa cattolica e quella protestante.

I suoi contemporanei restavano allibiti nello scoprire che, oltre ai numerosissimi trattati su ogni branca dello scibile umano, avesse una corrispondenza continuativa con circa seicento persone. E questo, in un periodo in cui le lettere si scrivevano a lume di candela con le penne d'oca e viaggiavano a dorso di cavallo: non e` facilmente calcolabile cosa avrebbe potuto fare il filosofo di Lipsia in epoca di posta elettronica.

Fu in parte proprio la lentezza delle poste, unita allo scarso fascino che i lettori inglesi trovavano nella scrittura scientifica, la causa della contesa sulla priorita` della scoperta del calcolo infinitesimale. Lo sviluppo del contenzioso e` troppo lungo e complesso per essere qui riportato, e alla fin fine una risposta certa su chi per primo abbia scoperto le croci e delizie del calcolo ancora non c'è: con l'esclusione di qualche accanito partigiano inglese o tedesco, in genere si tende a riconoscere l'indipendenza dei risultati dei due grandi scienziati. Ma a cercare di rileggerne la storia, si scopre uno Newton che accusava di essere stato derubato di informazioni, attraverso lettere che Leibniz era riuscito a vedere; anche se pare che il tedesco riuscisse a dimostrare che la lettera in questione era riuscito a leggerla solo nove mesi dopo la sua spedizione, mentre ai risultati significativi era giunto assai prima. D'altro canto, e` quasi certo che Newton fosse in grado di usare il suo "calcolo delle flussioni" assai prima del 1675, anno in cui Leibniz dichiara di aver scoperto il calcolo differenziale; ma il grande Isaac pubblicava controvoglia, con un trentina d'anni di ritardo rispetto alla stesura delle opere: sembra che questo dipendesse in parte dal fatto che il suo predecessore sulla cattedra lucasiana, Barrow[11], avesse inopinatamente pubblicato un

[10] "Preferisco di gran lunga un Leeuwenhoek che mi dice che cosa vede (*attraverso il microscopio che l'olandese privo di studi accademici inventò, NdR*) a Cartesio che mi dice cosa pensa."

[11] Isaac Barrow, famoso fra gli astronomi per una lente, e` un protagonista di prim'ordine nella corsa alla scoperta del calcolo: il suo "triangolo differenziale" introduce il metodo delle tangenti, e approccia, senza esplicitarlo, il concetto di limite

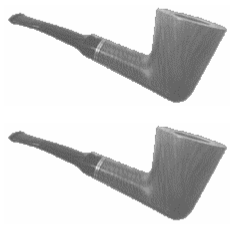
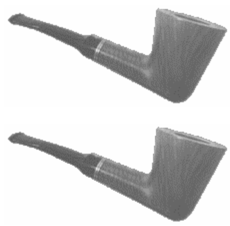
testo di matematica che fu un fiasco colossale per l'editoria accademica inglese, e i tipografi vedevano allora come fumo negli occhi tutti i testi infarciti di formule. Non che la cosa sia cambiata molto, se ancora oggi si dice che ogni formula presente in un libro ne dimezza la tiratura.

La lotta per la priorita` ando` avanti per anni: Newton non vi prese formalmente parte in maniera diretta, lasciando ai suoi partigiani e estimatori il compito di respingere le pretese del tedesco, anche se certamente la regia della battaglia era tutta sua. Leibniz affronto` invece di persona interrogazioni e inquisizioni. Nonostante i dispiaceri che tutto cio` gli avra` portato, non sembra che il malanimo abbia preso il sopravvento, a giudicare dalle sue parole rimaste alla storia: "*Se consideriamo tutta la matematica dall'inizio del mondo fino a Newton, quello che lui ha fatto da solo e` piu` della meta`*". Forse l'opinione leibniziana tende a ridurre troppo il lavoro dei matematici antichi, ma quantomeno esprime una certa classe nella considerazione dell'avversario.

Leibniz sembra assomigliare molto proprio a quei matematici antichi; ai greci che argomentavano di geometria e filosofia, di politica e di estetica sotto i portici dell'Accademia o del Liceo. E` facile immaginarne la conversazione dotta e amabile, e universale come doveva essere quella degli ateniesi dell'eta` di Pericle. A quei tempi, erano proprio gli "specialisti" ad essere una rarita`: forse e` necessario risalire fino a Pitagora, per trovare il primo vero specialista. Pitagora, che voleva ricondurre tutto al numero, e che fondo` una scuola e quasi un'organizzazione politica sul sapere matematico. L'etimologia stessa della parola "matematica" sembra venire da lui: alle lezioni della sua scuola gli spettatori erano divisi in due classi: i "matematici", gli "studenti interni", che erano a pieno diritto i previsti continuatori della filosofia pitagorica, e gli "acusmatici", cioe` gli esterni che erano ammessi ad ascoltare le lezioni, pur non essendo partecipi della vita pitagorica.

Leibniz sarebbe certo finito tra gli acusmatici, per scelta. In ogni momento della sua vita da` l'impressione di essere piu` un generalista che uno specialista; ma un generalista le cui osservazioni erano spesso cosi` profonde da potersi confrontare da pari a pari con quelle degli specialisti. In ogni campo.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Cinque Pesti			
In fondo a sinistra			

2.1 Cinque Pesti

Siete in una stanza, con cinque delle Pesti.

Questa volta, per farvi dannare, si sono messi d'accordo in questo modo: uno di loro dice ***sempre la verita`***, mentre gli altri quattro rispondono ***alternativamente il vero e il falso*** ad ogni domanda (nel senso che se uno risponde il vero alla prima domanda, lo stesso rispondera` il falso alla seconda domanda). Logicamente, non solo non sapete chi dice il vero e chi sembra un po' schizofrenico, ma non sapete neanche se un certo "quasi mentitore" comincia con il vero o con il falso (in realta`, lo decidono al volo alla prima domanda...).

Vostro scopo e` determinare chi sia veritiero e chi bugiardo alternato. Potete fare ***due*** domande di qualsiasi tipo a chi volete (quindi non necessariamente che richiedano risposte si/no o tutte e due alla stessa persona); che domande fate, e a chi?

...e vi e` andata bene... Quella volta che erano in ***otto***, con un veritiero, ho sudato moltissimo. Secondo voi, quante domande ho dovuto fare?

2.2 In fondo a sinistra

Recentemente,siamo venuti in possesso di un antico documento, che descrive la posizione della tomba di Archimede. Doc (che, come sapete, ha fatto il classico: nessuno e` perfetto...) in sole due settimane e` riuscito a tradurlo in un italiano passabile:

"A Siracusa, parti dall'Ara di Urania e cammina verso il Tempio di Bacco contando i tuoi passi. Giunto al Tempio di Bacco, gira a sinistra e cammina lo stesso numero di passi. Ora pianta un segnale. Ora cammina dall'Ara di Urania verso il Tempio di Minerva, contando i tuoi passi. Giunto al Tempio di Minerva, gira a destra e cammina lo stesso numero di passi. Ora pianta un segnale. Troverai la Tomba di Archimede a meta` tra i due segnali."

Si presume che i "giri" siano ad angolo retto.

Giunti a Siracusa armati di vanghe e di passi, individuato immediatamente il Tempio di Bacco (qualche difficolta` per quello di Minerva... a certe cose non siamo abituati), ci siamo accorti che l'Ara di Urania era presumibilmente stata sepolta da un abuso edilizio.

Alice propone di trasformare l'intera area in una piccola Svizzera (nel senso di riempirla di buchi come il formaggio) ma, siccome intanto guarda me, so gia` chi dovra` scavare...

O prendete una vanga ciascuno (e io coordino) o io piu` di un buco non faccio.

Dov'e` la tomba?

3. Bungee Jumpers

Per quali valori interi di ***k***, con $x, y, z \in N$ si ha che e` $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$?

Piu` in generale, sotto ***1000***, quali sono le triplette di interi la cui somma dei quadrati e` divisibile per il loro prodotto?

Grande Sagra del **Pesce Algebrico -** Frazione Calde` di Castelveccana
(Luino sul Lago Maggiore)

2-3 Agosto 2003

Avanziamo Coraggiosamente verso la Sagra del Pesce Algebrico! [RdA]

Nella foto di repertorio, il Prof. Nando, Sam e un gruppo di collaboratori accolgono i festosi lettori di RM alla Sagra del Pesce Algebrico.

4. Soluzioni e Note

4.1 [053]

Vi siete piuttosto lanciati sul facile, questo mese... "Freddo ai piedi?" Come diceva Tex Willer?

4.1.1 Strani calcoli

Va bene, era facile. Sembra pero` vi siate appassionati, tant'e` che abbiamo ricevuto le soluzioni di ***GaS***, ***PMP***, ***Filippo-1, Filippo-2*** (Non, non sono due con lo stesso allonimo: ha mandato due soluzioni!), ***Desmatron-1***, ***Desmatron-2*** (idem), ***Hannibaal***, ***Annamaria***, ***Max***, ***Mash***, ***Franco il Matefisico*** (caso mai non vi tornassero i conti: sono due New Entry. Il primo sta organizzando un'agenzia di rivendita problemi ai colleghi, il secondo ha fatto una volata incredibile su questo problema perche` ha mandato la soluzione del Ristorante Cinese con venti secondi di anticipo sull'uscita delllo scorso numero. Benvenuti!) e ***Sam***, il quale ci manda la soluzione alle quattro di mattina. Ma e` impegnatissimo in un paio di cose molto importanti (una la vedete qui sopra), e poi svegliare il postino (sarebbe Doc) non e` reato, e` un dovere civico.

Come dicevo, escludendo alcuni particolari secondari, le soluzioni si somigliano decisamente tra di loro. Vero, qui era quasi impossibile trovare altre strade, soprattutto se le volevamo anche carine. Ad esempio, Filippo (2) e` passato da un "sistemino" di questo tipo:

```
40000A+4000B+400C+40D+4E = 10000E+1000D+100C+10B+A
39999A+1330B+300C = 9996E+960D
13333A+1330B+100C = 3332E+320D
A deve essere pari
```

Apprezziamo lo sforzo, ma non la strada che hai fatto. Terribile.

Come sempre, la soluzione piu` ordinata (e che quindi scegliamo: c'e` meno da lavorare a inserirla qui) e` quella di Annamaria. Prima statuisce il problema.

N =

a	b	c	d	e

M =

e	d	c	b	a

N * 4 = M

Osservazioni:

- ***N*** ed ***M*** sono numeri di ***5*** cifre
- Massimo numero di ***5*** cifre e` **99.999**
- Massimo numero di ***5*** cifre che, diviso per ***4*** sia ancora di ***5*** cifre e` **24.999**
- Minimo numero di ***5*** cifre e` ***10.000***
- Quindi $10.000 \leq N \leq 24.999$
- Con:

  $1 \leq a \leq 2$

  $0 \leq b \leq 4$

  $0 \leq c \leq 9$

  $0 \leq d \leq 9$

  $0 \leq e \leq 9$

- Ma ***a*** e` *pari* perché numero finale di ***M***, multiplo di ***4***, quindi **a=2**
- Allora $8 \leq e \leq 9$ in quanto $2 * 4 = 8$ dove certamente **e = 8** (perché $4 * 8 = 32$, e ***2*** e` l'ultimo numero di **M**)
- Risulta che **N** e` cosi` composto:

  N=

2	b	c	d	8

- Osservo che i multipli di ***4*** che terminano con ***2*** sono ***12***, ***32***, ***52***, ***72***, ***92***, ***112***, ... quindi ***b*** e` *dispari* con ***B=1***, ***3***, ***5***, ***7***, ***9***. Ma $\mathbf{0 \leq b \leq 4}$, quindi **b=1, 3.**
- Esamino i primi numeri di N:

2	b

  ... e ***b=3*** non e` possibile perché moltiplicando per ***4*** si avrebbe $3 * 4 = 12$ con un ***1*** da aggiungere ad ***a =2*** **.** Quindi **b = 1**.

Il numero N risulta:

N=	2	1	c	d	8

- Esaminiamo la situazione di **d:** poiché i numeri che compongono ***N*** devono essere diversi, ***d=0, 3, 4, 5, 6, 7, 9***; si deve anche tener presente ***M = 4 * N***

M=	8	d	c	1	2

Moltiplicando ***N*** per ***4*** ..... $4*8=32$, riporto ***3*** sulle decine e solo ***d=7*** procura un numero (***28***) che con l'aggiunta di ***3*** ha come risultato ***31*** e termina con ***1***. Quindi **d=7.**

N=	2	1	c	7	8

- Con un uguale ragionamento risulta che **c= 9**.

Chiaro, no?

Bene, come vi dicevo qualcuno di voi ha, coraggiosamente, provato ad esplorare altre vie. Sia come percorsi risolutivi (con risultati orribili: vedi Filippo (2), ad esempio...) che come... beh, non so come chiamarle. Comunque, piu` che Desmatron non poteva essere.

Il nostro ha trovato ***sei*** soluzioni ***diverse***. Cerchiamo di organizzarle (mi rifiuto di dire "di commentarle"...).

$0*4=0$	Gia`, zero e` soluzione. Poco sportiva, ma e` soluzione[12]
$21978*i^n*4=87912*i^n$	E se vi ricorda qualcosa, aspettate a vedere il seguito
$-21978*4=-87912$	A voler essere pignoli (tanto arrivate secondi: ci ha gia` pensato lui) e` il caso sopra per ***n=2***.
$00101*100=10100$	In binario! Sarebbe ***5***
$00111*100=11100$	Si, anche ***7***...

"E la sesta?" Beh, e` quella che avete trovato tutti. Come la chiama D., quella "Terrestre".

4.1.2 Il salto della cavallina

Duretto, eh?

La strada risolutiva preferita, in questo caso, e` stata "*Devo pensarci*". Apprezzabile come dichiarazione generale di intenti, ma che sinora si e` rivelata scarsamente produttiva.

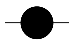
Il nostro Grande Postino ha spiegato a tutti i tentatori di soluzione che, anche se la domanda era piuttosto nascosta, il problema richiedeva di *dimostrare l'impossibilita`* di arrivare in riga 5. Tutti quanti avete trovato interessanti disposizioni relative ai numeri minori, ma dimostrare sul cinque nisba.

Allora, il tentativo piu` eroico arriva da ***Viggio***: ci ha anche fatto una bella serie di disegnini (logicamente assolutamente non esportabili con semplicita`...), comunque, la cosa e` interessante.

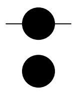
Ecco le mie soluzioni fino al quarto livello:

[12] A proposito di sportivita`: Desmatron e` anche autore degli indimenticabili (purtroppo) versi "*Quando il gioco si fa duro/mi trasformo in un canguro*". Quindi, quando vi dicono che a divertirvi con la matematica dovete essere matti, pensate a Desmatron e dite che voi siete tra i piu` innocui.

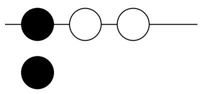
0: richiede 1 pedina (indico col trattino il livello di riferimento, cioe` lo 0)



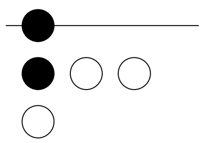
1: richiede 2 pedine ed e` ottenuto dal livello 0 + il livello 0 abbassato di 1, in maniera tale da poter effettuare un salto con le pedine su –1 e 0 in +1



2: richiede 4 pedine ed e` ottenuto dal gruppo di livello 1 (in nero) e da un doppio gruppo di livello 0 (in bianco), che serve a generare un gruppo di livello 0 posto al di sotto della pedina nera che e` stata precedentemente spostata in 1.

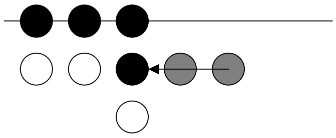


Si poteva ottenere il livello 2 tramite un gruppo da livello 1 (in nero) e un altro gruppo da livello 1 traslato verso il basso, in maniera tale da ottenere la sequenza verticale 0/+1 che portava al +2. Pero` poiche` il gruppo traslato avrebbe gia` una posizione occupata, quest'ultima va generata per spostamento orizzontale e la soluzione non e` minima.

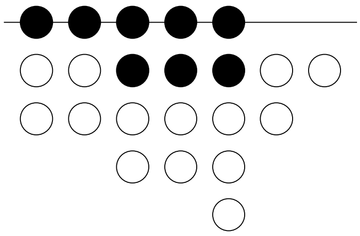


3: richiede 8 pedine, ed e` ottenuto dal gruppo di livello 2 (nero) + un doppio gruppo di livello 1 (bianco e grigio) che serve a generare due livelli 1 come in figura che a loro volta generano il livello 1 sotto il 2:

Si poteva generare il 3 anche partendo da un gruppo livello 2 e un altro gruppo livello 2 traslato verso il basso. Pero` poiche` una posizione e` gia` occupata (quella del pallino nero in basso), occorre generare quest'ultima per spostamento orizzontale delle due palline punteggiate. Cio` richiede 9 pedine e la soluzione non e` minima.



4: richiede 21 pedine. Purtroppo ho perso il foglietto con la soluzione da 21 e mi rimane in mano solo quella da 22 (e` sempre il solito problema: hanc marginis exiguitas non caperet). La soluzione e` comunque molto ostica e si ottiene da un gruppo di livello 3 seguito da un altro gruppo traslato verso il basso che va quasi interamente generato per spostamenti orizzontali. Disegno in basso la sola disposizione iniziale, evidenziando con i due differenti riempimenti la configurazione da 3 iniziale (che va spostata per prima) e quella traslata (che va generata e poi spostata).



5: impossibile, infatti una volta inserita la massiccia struttura per il livello 4, come si fanno a inserire un'altra struttura livello 4 traslata verso il basso oppure due livello 3 affiancate?

Mmmmhhh... Siamo d'accordo con la prima parola dell'ultimo caso, ma francamente non ci pare proprio una "dimostrazione"...

Anche ***PMP*** si e` cimentato nel gioco e, da bravo seguace del modo testo, si e` addirittura inventato una notazione... Nel seguito la riga piu` alta (in grassetto) e` la "Riga Zero"

Come notazione, indico ogni pedina con una lettera: la mossa A-B indica che la pedina A mangia la B, e quindi si pone in una posizione speculare a lei. Come traccia per come ho trovato la soluzione, posso dire che per avere una pedina in posizione (x,0) nel piano cartesiano, debbo avere alla mossa precedente due pedine a (x-1,0) e (x-2,0): la prima la posiziono per induzione dal passo precedente, per la seconda devo remare, tenendo conto dei vincoli che mi impediscono di usare le posizioni occupate dalle vittime sacrificali per raggiungere (x-1,0). Bene: per arrivare a (3,0) parto dalla configurazione qui di fianco e faccio le mosse:

A	**B**	**C**	**E**	**G**
		D	F	H

`D-C, A-B, A-D, F-E, H-G, H-F, F-A.`

Direi che questa e` minimale, visto che ABCD ci servono per arrivare a (2,0), e per arrivare a (1,0), dato che (0,0) e (-1,0) sono gia` occupati, siamo costretti o a riempirli di nuovo o a riempire (1,1) e (2,1): in entrambi i casi occorrono due mosse per riempire, una per finire su (1,0), e la quarta per completare l'opera.

Per arrivare a (4,0) la mia soluzione provvisoria e` quella indicata qui di fianco.

I	**J**	**A**	**B**	**C**	**E**	**G**
			K	D	F	H
		U	L	M	O	P
			S	N	Q	R
			T			

Dopo le prime sette mosse come sopra, proseguo con

`I-J, L-K, N-M, P-O, P-N, T-S, U-T, R-Q,`

`R-U, R-P, I-L, I-R, I-H.`

> Solo ventun pedine, insomma. Non e` impossibile che si possa limare qualcosa, ad esempio lavorando piu` sulla sinistra.

...E fin qui sembra andare d'accordo con Viggio... Solo che, siccome la sua notazione sembrava troppo semplice, il buon PMP ne ha inventata un'altra... guardate un po' a che risultati ci ha portato...

> Accorciamo leggermente, cambiamo notazione e scendiamo a 20 pedine. Per il caso 4 passi. Nello schema a fianco, prima si mangiano tra loro le pedine 1, che mi fanno arrivare a (0,3). Poi si passa a quelle 2, per avere (0,0); le 3 mi danno (-1,0), le 4 (-2,0), le 5 (0,-1). A questo punto le singole pedine 2,3,4,5 rimaste mi permettono di mandare una pedina a (0,2) e questa puo` saltare quella rimasta a (0,3) per arrivare a (0,4).

4	**4**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
		5	5	1	1	1
	3	3	3	2	2	2
			3	2		

Apprezzabile, ragazzi, molto apprezzabile. Svolto questo (sia detto senza alcuna ironia) importantissimo lavoro preliminare (e confermatovi che ***20*** e` il valore minimo per il livello 4), adesso potreste provare a dimostrare *more mathematico* che ***5*** e` ***impossibile***. Vi diamo un aiutino talmente piccolo da risultare infimo: facendo finta di niente, PMP ha detto una cosa che rappresenta un piccolo passo di una luuuunga strada... Comunque, se non arriva niente il mese prossimo pubblichiamo la nostra. Bravi ragazzi.

4.2 Summer Contest

Scusate, ma almeno aspettare che ***cominci***, l'estate? No, eh?

Tanto la soluzione ve la dico a Ottobre. Solo alcune note.

Quelli di voi che si sono cimentati (e alcuni con risultati decisamente lusinghieri) hanno ricevuto da Doc delle mail con svariate incomprensibili percentuali al loro interno; cerchiamo di chiarire il concetto, nelle parole di Doc:

> E` chiaro che la soluzione piu` ovvia e` quella di "scavare su tutta la circonferenza", ottenendo una trincea di lunghezza pari a ***6,28318...***
>
> Definiamo questo come ***soluzione 100%*** ed esprimiamo le altre come percentuale rispetto a questa: la lunghezza della soluzione proposta diviso la lunghezza della soluzione ovvia. Il tutto, logicamente, opportunamente approssimato in quanto alcuni valori "dicono troppo", su come sia costruita la soluzione. Quindi, tutte le soluzioni saranno espresse come valori minori di cento...

Bene, tanto per cominciare qualcuno di voi e` riuscito a smentire l'ultima affermazione di Doc: infatti, ci e` arrivato un ragionamento che utilizzava, come soluzione intermedia, una trincea del ***110%***... Il "solutore" in oggetto e` pregato di non offendersi, anche perche` questa sua soluzione e` un passaggio importante per arrivare a qualcosa di meglio (cui lui e` giunto, tra l'altro).

Un'altra cosa che compare nelle comunicazioni relative e` la sigla ***BKSn***, dove ***n*** e` un numero. Si tratta della cosiddetta "Best Known Solution" (non da voi, in generale) con "n" scavi non connessi tra di loro.

Una congettura in merito (sulla quale pero` in molti non sono d'accordo) e` che la miglior soluzione in assoluto sia la $BKS\infty$, descrivibile solo come frattale. Non pretendiamo arrivate a questo, anche perche` non l'ha ancora trovata nessuno. Tutto quello che si sa e` che il nostro "scavo" avra` sempre una lunghezza $L \geq \pi$ : la dimostrazione (che scende in discreta profondita` nella Teoria della Misura) non da` pero` alcuna indicazione su *come* sia fatto 'sto buco. Probabilmente, la miglior sintesi di questo teorema la si puo` ritrovare nelle parole di un altro partecipante (corsivo nostro):

> "[...] quello che mi lascia insoddisfatto [...] e` che *un mucchio* di linee attraversano *due volte* la trincea."

La cosa e` particolarmente evidente nella soluzione "ovvia" (tutte le linee la attraversano due volte), quindi viene da pensare che meno sono le linee attraversano due (o piu`) volte il nostro tracciato e piu` la soluzione sara` efficiente. "Dimezzando" la soluzione ovvia viene π... Insoddisfacente? Si, ma non e` che la dimostrazione originale sia molto meglio.

Tranquilli, a Ottobre ve lo diciamo, chi sono questi due loschi figuri...

5. Quick & Dirty

Alla guida del vostro vecchio, fido camion vuoto potete passare sul ponte pericolante. Se pero` avete un carico, eccedete il peso.

Considerato che il vostro carico e` composto di canarini, il tenerli in volo (dentro al camion) per il tempo di attraversamento del ponte, vi permette di passare?

6. Pagina 46

Siano $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ tre interi non negativi che soddisfano l'equazione data.

Per prima cosa, dimostriamo che deve essere:

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{kyz}{2} \\ y \leq \dfrac{kxz}{2} \\ z \leq \dfrac{kxy}{2} \end{cases} \qquad \texttt{[006.001]}$$

Ossia che nessuno degli interi alla sinistra dell'equazione data puo` essere maggiore della meta` del secondo membro.

Per dimostrare quanto sopra, data la ciclicita` delle relazioni, supponiamo $z > \frac{kxy}{2}$. Ora consideriamo, anziche` la tripletta delle incognite, la tripletta $(x, y, z_1 = kxy - z)$ che soddisfa la riformulazione dell'espressione data:

$$x^2 + y^2 + (kxy - z)^2 = kxy(kxy - z) \qquad \texttt{[006.002]}$$

Se un qualsiasi intero di questa nuova tripletta e` maggiore del prodotto degli altri due moltiplicati per $\frac{k}{2}$, possiamo continuare con sostituzioni dello stesso tipo sin quando la condizione `[001]` e` soddisfatta.

Supponiamo ora che sia $x \leq y \leq z$. Per prima cosa, siccome sappiamo che $y \leq z \leq \frac{kxy}{2}$, segue che

$$1 \leq \frac{kx}{2} \Rightarrow kx \geq 2 \qquad \texttt{[006.003]}$$

E quindi l'equazione data puo` essere riespressa nella forma:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - z\right)^2 = \left(\frac{kxy}{2}\right)^2 \qquad \texttt{[006.004]}$$

Siccome $z \leq \frac{kxy}{2}$, se nel primo membro ***z*** viene sostituito da $y \leq z$ il valore viene incrementato (o rimane invariato nel caso ***y=z***) e quindi:

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{kxy}{2} - y\right)^2 \geq \frac{k^2x^2y^2}{4} \qquad \texttt{[006.005]}$$

Il che porta alla disuguaglianza:

$$x^2 + 2y^2 \geq kxy^2 \qquad \texttt{[006.006]}$$

E siccome $x \leq y$, si ha a maggior ragione:

$$y^2 + 2y^2 \geq kxy^2 \qquad \texttt{[006.007]}$$

Ossia, $kx \leq 3$.

Quindi, si ha $2 \leq kx \leq 3$, ossia ***kx*** deve valere ***2*** o ***3***.

Ma se ***kx=2***, l'equazione data assume la forma:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + (y-z)^2 = 0 \qquad \texttt{[006.008]}$$

Il che significa ***x=0*** e ***kx=0*** anziche` ***2***. Quindi, deve essere ***kx=3*** e quindi ***k*** puo` assumere solo i valori ***1*** o ***3***.

Per quanto riguarda la ***seconda parte*** del problema presentato, con un ragionamento simile alla prima parte abbiamo che $x^2 + y^2 \geq kxy^2$; siccome ***kx=3***, possiamo riscrivere la diseguaglianza nella forma:

$$x^2 + 2y^2 \geq 3y^2 \qquad \texttt{[006.009]}$$

O, equivalentemente, $x^2 \geq y^2$.

Pero`, noi abbiamo assunto all'inizio $x \leq y$; quindi, deve essere ***x=y***.

Supponiamo ora che nell'equazione data sia ***x=y*** e ***kx=3***. otteniamo:

$$2x^2 + z^2 = 3xz$$

o, equivalentemente, `[006.010]`

$$(z-x)(z-2x) = 0$$

Il che implica ***z=x*** oppure ***z=2x***.

Il che vuol dire che, essendo $z \leq \frac{kxy}{2} = \frac{3y}{2} = \frac{3x}{2}$, e` impossibile che ***z*** sia uguale a ***2x***.

Il che significa che ***z=x***.

Di concerto, affinche` sia soddisfatta la `[001]`, abbiamo che deve essere ***x=y=z*** ma, dovendo anche essere ***kx=3***, allora ***x*** deve valere ***1*** o ***3***, e otteniamo due soluzioni per l'equazione data:

$$\begin{aligned} x = y = z = 1 \quad (k=3) \\ x = y = z = 3 \quad (k=1) \end{aligned} \qquad \texttt{[006.011]}$$

Nella soluzione alla prima parte del problema abbiamo visto che tre interi qualsiasi che soddisfino la condizione data possono produrre altre soluzioni attraverso le sostituzioni (nell'espressione **[001]**) $z_1 = kxy - z$. Ma data questa condizione, se ne ricava che deve essere $z = kxy - z_1$, e quindi ogni soluzione dell'equazione data puo` essere ottenuta per sostituzioni successive della forma $z_1 = kxy - z$. In particolare, si ha che:

k=3		
x	**y**	**z**
1	1	1
1	1	3
1	1	2
1	2	5
1	5	13
1	13	34
1	34	89
1	89	233
1	233	610
2	5	29
2	29	169
2	169	985
5	13	194
5	29	433

k=1		
x	**y**	**z**
3	3	3
3	3	6
3	6	15
3	15	39
3	39	102
3	102	267
3	267	699
6	15	87
6	87	507
15	39	582

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 In media, ho sempre ragione [002]

Se ormai siete partiti a cercare le convergenze delle medie, possiamo anche dirvi che il campo e` "un po'" piu` ampio di quel che sembra; infatti, nello stesso modo col quale abbiamo definito la media composta Aritmetico-Geometrica, possiamo fare un passo in piu` e definire la cosiddetta ***media AGH***, Aritmetico-Geometrico-Armonica:

$$AGH(a_0, b_0, c_0) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_{n+1} = A(a_n, b_n, c_n) \\ b_{n+1} = G(a_n, b_n, c_n) \\ c_{n+1} = H(a_n, b_n, c_n) \end{cases} \qquad \textbf{[007.001]}$$

o, se questa vi sembra troppo semplice, poteste mettere assieme ***tutte e dieci*** le medie e iterare sin quando arrivate ad un risultato sensato.

Nel week-end, quando proprio non avete niente di meglio da fare, ricalcolate tutto "alla Gregory", incrociandole. Mi raccomando, non tenetevi questo emozionante calcolo per voi, fateci sapere.

Torniamo un attimo seri.

Era mia intenzione inserire qui un sarcastico commento relativo al fatto che nessuno aveva pensato alle medie, quando il buon ***ChiQua*** e` arrivato a romperci le uova nel paniere con un'interessantissima mail. Non calcola nessuna delle "convergenze" che vi abbiamo proposto la volta scorsa, ma ci da` alcune notizie su delle medie "strane".

Per prima cosa, il Nostro ci fa notare che abbiamo lasciato per strada qualche media "antica", ad esempio la Media di ***Erone***:

$$\frac{1}{3}(a+\sqrt{ab}+b) \qquad \text{[007.002]}$$

Vero, questa non l'avevamo considerata. A parziale discolpa, possiamo invocare il fatto che eravamo piu` interessati alla "costruzione" delle medie con quella specie di matrice che al calcolo vero e proprio. Esteticamente e` molto carino, ammettetelo. E poi, contrariamente alle altre "medie", questa e` addirittura *utile*... Serve a calcolare il volume della piramide tronca.

Il Nostro ci spiega anche alcune interessanti cose sul concetto di media: Tenetele presenti, che dopo serviranno.

> Diciamo poi che la media n. 11 **non e` una media**. Ci deve essere un errore di stampa. Infatti non rispetta nemmeno il requisito fondamentale che sia compresa tra i due numeri.

Vero. L'errore di stampa che sospetto pero` non e` li`, ma in un'altra. Sono d'accordo che non sia una media, ma all'epoca *lo era*. Ho verificato su altre fonti e "la 11" compare dappertutto. Potremmo chiedere al nostro Classico Postino di controllare in Nicomaco e in Pappo, ma tremo al pensiero di cosa risponderebbe. E, comunque, aspetta a vedere il seguito.

> Modernamente, si preferisce dare una definizione astratta di media. E vi sono varie possibilita'.
>
> Una e', chiamando M(a,b) la "media" tra a e b
>
> $$\min(a,b) \le M(a,b) \le \max(a,b) \qquad \text{[007.003]}$$
>
> $$M(t*a, t*b) = t^n M(a,b) \qquad \text{[007.004]}$$
>
> La prima dice che la media deve stare tra il minimo e il massimo dei numeri. (e qui la *11* non funziona). Questo e` il motivo, ovviamente, per cui nel disegno a pag. 25 le 10 medie convergono.
>
> La seconda condizione richiede che la funzione M sia omogenea ed effettivamente tutte le medie riportate sono omogenee.
>
> Questa definizione di Media pero` e` troppo lasca. Per cui alcuni aggiungono anche
>
> $$M(a,b) = M(b,a) \qquad \text{[007.005]}$$
>
> Cioe` che l'ordine con cui prendi a e b non cambi. Questo e` una proprieta` ragionevole da richiedere, e le medie "solite" la rispettano. Altrimenti la media delle eta` dei figli del Grande Capo dipende dall'ordine con cui si prendono *[ChiQua, guarda che nessuno e` mai riuscito a prenderli tutti e due assieme. In nessun ordine (RdA)].*
>
> Se si richiede la 3, allora molte delle 10 medie "classiche" le buttiamo via, perche` non sono simmetriche rispetto allo scambio tra a e b.

Pienamente d'accordo. Buona parte delle medie gia` viste sono, dal punto di vista della definizione *moderna* di media, pura spazzatura. Pero`, per quanto riguarda la "definizione" di media, mi pare piuttosto difficile mettere d'accordo tutti... Uno che ci ha provato e` ***Holder***. Se volete la definizione difficile, si definisce ***Media di Holder*** una media aritmetica su un dominio isomorfo; per gli umani, chiariremo che, data una funzione ***f*** che si comporti ragionevolmente bene (almeno nell'intervallo dove sono definiti i nostri valori), la media e` definita come:

$$M_f(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \qquad \texttt{[007.006]}$$

Insomma, la media di Holder e` una media (aritmetica) sull'immagine (secondo ***f***) dei valori di cui vogliamo calcolare la media.

Aspettate un attimo, prima di fare la faccia delusa.

In particolare, si definisce una classe di medie di Holder:

$$M_k : f(x)=x^k \qquad \texttt{[007.007]}$$

Ossia si prendono le ***potenze***.

Bene, e cosa ci faccio? Beh, se fate un po' di calcoli, vi accorgete che $\boldsymbol{M_1}$ e` la media ***Aritmetica***, $\boldsymbol{M_{-1}}$ e` la media ***Armonica***, $\boldsymbol{M_2}$ e` la media quadratica (la radice della somma dei quadrati: sveglia!)... e quella geometrica? Beh, qui e` un po' piu` complicato:

$$G=\lim_{k\to\infty} M_k \qquad \texttt{[007.008]}$$

Il che non e` proprio comodissimo da calcolare, ma come definizione ha la sua potenza estetica[13].

Anche qui ChiQua ci fa notare l'esistenza di alcune altre interessanti classi:

...ricordatevi quella di ***Minkowsky***

$$\left(\frac{1}{2}(a^p+b^p)\right)^{1/p} \qquad \texttt{[007.009]}$$

e quella di ***Lehmer***:

$$\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}+b^{p-1}} \qquad \texttt{[007.010]}$$

Che definiscono le nostre tre medie principali per opportuni valori di ***p***.

Mentre cercavamo dati su queste bestie feroci, ci siamo imbattuti in un'altra graziosa definizione di media: la ***Media di Chisini*** (si, e` italiano. Dove abbiamo trovato questi dati spiega anche "pronounced *keeseenee*"...), definita nel 1929.

Data una funzione in **n** *variabili* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *la* **Media di Chisini** *degli* **n** *valori associati a* **f** *e` il numero* **M** *per cui:*

$$f(M,\ldots,M)=f(x_1,\ldots,x_n) \qquad \texttt{[007.011]}$$

Evidentemente, dovete scegliere ***f*** tale che esista sempre e sia unico il numero ***M***. Si verifica (No. Non lo facciamo) che per opportune funzioni le principali medie sono Medie di "*keeseenee"*.

Questo sembra un campo in cui l'invenzione di una nuova media dipende piu` che altro da come uno si sveglia al mattino... Tant'e` che, partendo da una media che ci suggeriva ChiQua e facendo un po' di ricerche, abbiamo trovato la famiglia delle ***Medie di Stolarsky***, definite come (***r*** e` il parametro della famiglia):

---

[13] E` facile notare che potete definire "alla Holder" la media Geometrica piu` semplicemente utilizzando come funzione il ***logaritmo***.

$$L_r(a,b)=\left[\frac{a^r-b^r}{r*(a-b)}\right]^{\frac{1}{r-1}} \qquad a\neq b, r\neq 0,1$$ [007.012]

Che, utilizzando i limiti, puo` essere definita anche per i casi qui sopra esclusi; in particolare, definiamo la ***Media Logaritmica***:

$$L_0(a,b)=\lim_{r\to 0}L_r(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$$ [007.013]

e la ***Identric Mean***[14] (e` quella che ci ha "regalato" ChiQua):

$$L_1(a,b)=\lim_{r\to 1}L_r(a,b)=\frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$ [007.014]

E, a questo punto, ci e` quasi scappato da ridere. Ce ne fosse una che rispetta una qualche regola di quelle che ChiQua ci ha passato poco sopra... Anche se bisogna dire che ci hanno provato. L'unico punto in cui queste cose si comportano in un modo sensato e` per:

$$L_r(a,a)=\lim_{b\to a}L_r(a,b)=a$$ [007.015]

E non e` finita qui: scopo di alcuni e` quello di trovare una media che sia particolarmente "*simmetrica*" e che permetta di generalizzare la media aritmetico-geometrica; giusto per farvi capire in che campo si va a parare, vi faccio vedere la piu` divertente (figuratevi le altre...).

L'idea di base e` di utilizzare delle funzioni particolarmente simmetriche. In questo caso, calcoliamo prima il valore:

$$S_1=x_1+x_2+\ldots+x_n$$ [007.016]

Ed e` piuttosto evidente che questo oggetto, diviso per il numero di elementi, ***coincide con la media aritmetica***.

Scopo del gioco e` definire, (per ***n*** elementi), ***n*** medie. In particolare, l'ultima che definiamo e`:

$$S_n=x_1*x_2*\ldots*x_n$$ [007.017]

e questa, se ne calcolate la radice n-esima, ***coincide con la media geometrica***.

E in mezzo? Beh, l'idea e` di una graduale "transazione" dal "tutto somme" al "tutto prodotti"; ad esempio, $\boldsymbol{S_2}$ e` rappresentato dalla somma dei prodotti di tutti gli elementi tra di loro, presi a due a due. Giusto per fare un esempio, per ***n=4*** si ha:

$$S_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$$ [007.018]

E la media, come la calcolo? Beh, quando avevamo l'addizione dividevamo per il numero di elementi sommati, e quando avevamo il prodotto calcolavamo la radice di ordine pari al numero di elementi che moltiplicavamo tra loro. Per mantenere questa graziosa tradizione, prima dividiamo per sei (abbiamo sei "cosi" che sommiamo assieme) e poi calcoliamo la radice quadrata (ogni "coso" e` un prodotto di due numeri).

[14] Questa ci rifiutiamo di tradurla come "Media Identrica", e per quanto ci risulta siamo i primi a parlarne in italiano. Non ci piacciono gli anglicismi fini a se stessi, ma li preferiamo a termini italiani improvvisati sul momento. Nello sventurato caso comunque in italiano si dica proprio "identrica", non fatecelo sapere.

A questo punto molti di voi sentiranno un potente odore di calcolo combinatorio... Infatti, le medie possono essere definite come:

$$M_k = \sqrt[k]{\frac{S_k}{\binom{n}{k}}} \qquad \textbf{[007.019]}$$

...e non crediate ci si sia fermati qui: a partire da queste, si fa partire un processo iterativo per arrivare alla definizione della media ***supersimmetrica***... Ma lasciamo perdere. Giusto per concludere questa strada, mi limito a dirvi che la media armonica di ***n*** valori in questa notazione e` data da $\frac{nM_n}{M_{n-1}}$ e che da questo fatto si e` ulteriormente generalizzato il concetto di "media simmetrica", portandola ad una famiglia del tipo:

$$R_{kj} = \left(\frac{\left(\frac{M_k}{\binom{n}{k}} \right)}{\left(\frac{Mj}{\binom{n}{j}} \right)} \right)^{\frac{1}{k-j}} \qquad \textbf{[007.020]}$$

Questo permette di definire in un modo piu` "simpatico" la media armonica, ma qui ci fermiamo... Se siete riusciti a capire sin qua, potete benissimo andare avanti per questa strada da soli.

Beh, cambiamo discorso.

Quello che mi lascia perplesso, e` la ricerca di qualcosa che "vada meglio" quando c'e` un mucchio di roba interessante anche piu` vicino a casa... Prendiamo per esempio un numero reale ***x***. Presumo non debba essere per voi un soverchio problema, ormai, svilupparlo in frazione continua aritmetica: supponiamo sia

$$x = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ldots}}} = [q_0; q_1, q_2, q_3, \ldots] \qquad \textbf{[007.021]}$$

Fermi qui; adesso definiamo, avendo uno sviluppo in ***n*** termini, la funzione (attenti che la variabile e` ***n***: qui, tanto per cambiare, ***x*** e` costante):

$$M(n,x) = \left(\prod_{i=0}^{n} q_i \right)^{\frac{1}{n}} \qquad \textbf{[007.022]}$$

...che poi e` la media geometrica dei termini. Presumo che anche i piu` abili di voi, se chiedo loro di calcolare questa funzione, mi mandino bellamente a quel paese...

Bene, un signore di nome ***Kintchin*** ha fatto i conti e ha scoperto che, *a parte per un insieme di misura zero*[15], si ha:

$$\lim_{n\to\infty} M(n,x) = \prod_{k=0}^{\infty}\left[1+\frac{1}{k*(k+2)}\right]^{\frac{\ln k}{\ln 2}} = K = 2.685452001\ldots \qquad [007.023]$$

Ossia, se non ci siete arrivate del vostro, e` una ***costante***, per *quasi* tutti i numeri.

Fate pure la faccia stupita, che siamo in buona compagnia: ad esempio, una delle persone che nel ramo ci capisce di piu` ha detto una cosa del genere: "Siccome la frazione continua aritmetica di un numero non e` altro che un sofisticato sistema di notazione, dietro questa costanza deve esserci qualche profondo concetto sulla natura stessa dei reali." No, non abbiamo capito cosa vuol dire. E, se volete la nostra opinione, neanche lui.

Comunque, anche se tutti i numeri ai quali potete pensare non funzionano, voglio sperare vi rendiate conto della potenza della cosa.

Non solo, ma riprendiamo la Media di Holder, scritta in un altro modo:

$$M(s,n,x) = \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(q_k)^s\right]^{\frac{1}{s}} \qquad [007.024]$$

Ora, e` abbastanza semplice accorgersi che

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ s>0}} M(s,n,x) = \infty \qquad [007.025]$$

Pero`, se esaminate i valori ***s<0***, qui la formula di Kintchin diventa:

$$\lim_{n\to\infty} M(s,n,x) = \left[\frac{-1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty} k^s * \ln\left[1-\frac{1}{(k+1)^2}\right]\right]^{\frac{1}{s}} \qquad [007.026]$$

Sempre, come al solito, per "quasi tutti gli ***x***".

La cosa non e` semplicissima, ma un paio di tipi piu` bravi di voi ad usare Excel hanno scoperto che:

$$K_{-1} = 1.7454056624\ldots$$

$$K_{-2} = 1.4503403284\ldots$$

$$K_{-3} = 1.3135070786\ldots$$

E se a questo punto sentite un potentissimo odore di convergenza a ***1*** per ***s*** che tende a meno infinito, siete in buona compagnia.

Se riuscite a dimostrarlo, vi passiamo i nomi di quelli che lo stanno cercando. Saranno contenti...

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[15] Prima che facciate un salto sulla sedia, alla prossima espressione: l'insieme di misura zero comprende tutti i naturali, razionali, pigreco, *e*, phi, le radici dei razionali,.... Insomma, tutti quelli che hanno uno sviluppo in FCA "ragionevole". Spero pero` vi accorgiate da soli che avanzano *un mucchio* di numeri...