Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 053 - Giugno - Anno Quinto

1. I lati di Dio

Da qualche parte del Midwest americano, in anni neanche troppo remoti dell'appena trascorso Novecento, si verifico` una strana convivenza tra il Darwinismo e il Creazionismo. Per quanto le due teorie sull'origine dell'uomo possano sembrare inconciliabili, erano le stesse persone che se ne facevano portavoce: alternavano dotte lezioni in cui si esponevano le idee del barbuto inglese che trascorse mezza vita a bordo della Beagle, ad accalorate difese dei versetti della Bibbia.

Quello che cambiava non erano i docenti, ma l'uditorio. Gli studi di Darwin sull'evoluzione venivano riservati alla popolazione nera, mentre la visione della Genesi era riservata alla sola popolazione bianca. Bisogna riconoscere agli autori della pensata una ottima capacita` di adattamento, oltre che una stupefacente crudelta` mentale: se un filosofo inglese sostiene che l'uomo discende dalle scimmie, intende riferirsi solo a quegli umani di rango inferiore per i quali una tale ipotesi e` tollerabile; non certo ai bianchi, che sono ovviamente fatti ad immagine dell'Onnipotente[1].

Per quanto orripilante, l'aneddoto non dovrebbe stupire troppo. La teoria dell'evoluzione ha sempre avuto vita difficile negli USA (e non solo negli USA); si e` dovuto attendere la meta` degli anni Sessanta perché il Tennessee decidesse che essere darwiniani non e` reato. D'altro canto, e` invece abbastanza recente, sempre negli USA, la reintroduzione del Creazionismo come materia di studio nelle scuole, con pari dignita` rispetto alla Teoria dell'Evoluzione.

Ma il duello tra scienza e religione, tra fede e ragione, e` vecchio quasi quanto l'uomo. Non sempre le due contendenti sono sembrate inconciliabili; nei primi anni del dodicesimo secolo Abelardo si scontro` con Bernardo di Chiaravalle, in difesa della ragione come alleata della fede. Fu sconfitto, ma da quello scontro nacque il maggior tentativo della chiesa cattolica di "riconciliare" la filosofia (e la filosofia naturale) con la teologia, grazie all'opera di Tommaso d'Aquino.

Il tomismo aristotelico basto` pero` solo per qualche secolo, poi Fede e Ragione ripresero la battaglia. A ben vedere, bisognerebbe prima di tutto cercare di capire perché siano cosi` spesso in contrasto. Entrambe hanno come proposito istituzionale quello di spiegare alcuni interrogativi fondamentali: entrambe si interrogano sulla natura dell'Universo e dell'Uomo; per l'indagine scientifica, questo e` l'obiettivo primario, per la religione invece coesiste con altri moventi (etici, metafisici, sociali), ma e` comunque un campo d'indagine fondamentale anche per essa. E i contrasti sono inevitabili.

La differenza di metodo di indagine e` radicale, e porta rapidamente all'incomunicabilita`. La religione[2] si basa sul concetto di rivelazione, la scienza sul metodo scientifico di deduzione/induzione e verifica sperimentale. Dopo qualche schermaglia dialettica, e` inevitabile ritrovarsi in una impasse: con i suoi metodi di indagine lo scienziato agnostico continua a non vedere alcuna evidenza di un Creatore, mentre il teologo credente non e` convinto da alcuna prova scientifica perché, in ultima analisi, Dio avrebbe potuto benissimo creare l'intero Universo dieci minuti fa, esattamente cosi` com'è, con tanto di "evidenze scientifiche" che raccontano storie diverse, se avesse avuto l'imperscrutabile voglia di farlo.

Un po` piu` drammatico e` il confronto quando i partigiani della Fede interpretano in modo letterale le Scritture, e contrappongono precisi elementi di dottrina ad altrettanto precisi elementi di teoria scientifica. E i toni del dramma salgono quando questi detengono anche il potere politico. Galileo va sotto processo per il suo appoggio ad un polacco che ha spostato la Terra dal centro dell'Universo, Darwin viene assimilato al diavolo per aver negato l'origine speciale dell'uomo rispetto agli altri animali del Creato. Come spesso succede nelle grandi tragedie, c'e` sempre un aspetto ironico: la cosmologia non si e` fermata dopo Copernico, e dopo la Terra ha spostato dal centro dell'Universo anche il Sole, e poi anche la Galassia; ma nel far

[1] L'audience delle trasmissioni radiofoniche e` piu` o meno complementare a quella delle televisive, e le trasmissioni TV piu` seguite sono i telegiornali della sera. Forse e` per questo che la radio di Stato riserva ad alcune delle sue rubriche migliori la fascia oraria che va dalle 20.00 alle 20.30: l'aneddoto citato proviene appunto da una trasmissione radiofonica chiamata "Alle Otto della Sera", che (al momento in cui scriviamo) parla della storia della scoperta del DNA tramite la voce di Giulio Giorello, forse il maggiore degli epistemologi italiani.

[2] Parlare di "religione" in senso lato, senza specificare di "quale" religione, e` ovviamente rischioso, ancorché impreciso. L'intenzione e` quella di parlarne in generale, cercando di enunciare solo caratteristiche "comuni" di approccio alla filosofia naturale da parte delle maggiori religioni, ma non e` detto che questo protegga da errori marchiani. Senza contare che per gli europei l'interferenza che fa tendere ad identificare la "religione" con il Cristianesimo e` inevitabile, e per gli italiani vale anche l'interferenza specifica del Cattolicesimo.

questo ha reso la nostra coscienza del Creato assai piu` sofisticata. La visione dell'universo di un Inquisitore del Seicento era infinitamente piu` misera e riduttiva di quella che possono avere un credente o un agnostico del Duemila. Il firmamento intero era poco piu` che lo spazio impacchettato da un telo nero punteggiato di lucine attorno alla Terra, abitato da una mezza dozzina di pianeti, anche questi immaginati come piccole luci erranti. Rigido e quasi statico, faceva della sua immutabilita` la propria grandezza, al punto che una piccola cometa o una nuova stella erano viste come segno di infinita sventura. E l'uomo era solo polvere e fango, seppure animato dalla scintilla di Dio.

Adesso, credenti e non credenti devono fare i conti con un cosmo di dimensioni inimmaginabili, con una dinamica continua di eventi e rivoluzioni, con stelle di quasi infinite forme e dimensioni, galassie e ammassi di galassie in corsa sempre accelerata l'una lontano dall'altra, e con mostri inspiegabili come i buchi neri, e con misteri antichissimi come i quasar. Nel contempo, la biologia ha mostrato livelli di complicazione profondissimi nei meccanismi della vita, artifici biochimici e complessita` ancora ben lontane dall'essere avvicinate dall'opera dell'uomo, livelli di organizzazione ai limiti del possibile e in gran parte ancora ignoti.

Quando crede in Dio, uno scienziato in genere non crede in un Ente che regolamenta e governa ogni aspetto della vita umana ma, affascinato dall'estrema meraviglia che l'Universo gli procura, decide di credere che tale meraviglia sia un atto di volonta` di Qualcuno. Ma anche quando uno scienziato si dichiara agnostico, lo fa avendo una visione del mondo estremamente piu` meravigliata e stupita di quella che poteva avere un cistercense del Medio Evo. Non vede la necessita` di un Creatore, ma la sua meraviglia non e` per questo minore.

E` quindi strano e ironico che, pur non credendo, uomini che mostrano quanto e` complesso e grande e meraviglioso il creato siano a volte perseguitati da coloro che nel sommo fattore credono; paradossale che persone credano che la scintilla divina possa abitare il mucchio di fango e sabbia che era Adamo prima del soffio divino e non invece quella meraviglia assoluta che la biologia molecolare ci mostra essere ogni essere vivente. E se infine si scoprisse, con rigoroso metodo scientifico, che il "vivente" discende dalla materia "non vivente", non sarebbe questa una meraviglia ancora maggiore?

Eppure, gli scontri ci sono sempre stati, ed e` facile prevedere che continueranno ad esserci. La fisica e` scesa in lotta da tempo, la biologia lo fa ormai da piu` di un secolo. Gli scienziati continuano ad essere chiamati a confrontare sulla base delle Scritture le loro teorie, non appena queste superano il livello di notorieta` degli addetti ai lavori, e in qualche caso sarebbero ancora messi volentieri a morte da qualche fondamentalista che li giudica blasfemi e pericolosi.

La matematica, come al solito, viaggia in un suo limbo particolare.

Non i matematici, che sono uomini e da uomini si comportano; ma la matematica continua il suo percorso senza essere chiamata a pronunciamenti. Certo, Laplace era un matematico, e l'episodio piu` famoso sembra schierare la matematica come scienza atea. Quando presento il suo "Trattato di Meccanica Celeste" a Napoleone, questi gli disse: "Avete scritto questo gran libro sul sistema del mondo senza menzionare una sola volta l'autore dell'universo". E Laplace rispose con la sua frase piu` famosa: "Sire, era un'ipotesi non necessaria"[3]. Questo e` bastato a far passare Laplace per un "senza Dio", con tutte le connotazioni negative che questo ancora comporta. Laplace era davvero un senza Dio, ma cio` non toglie l'aura di paradosso da tutto l'episodio: lo

[3] Meno noto il seguito della storia: Napoleone racconto` l'episodio al vecchio Lagrange, che sospirò: "Ah, ma che bella ipotesi sarebbe! Spiega un sacco di cose..."

scienziato che afferma di non aver avuto bisogno di ipotesi trascendenti per scrivere un trattato di meccanica celeste passa per essere abietto, e il tizio che immaginava Dio come qualcuno preoccupato soprattutto di dargli la corona da Imperatore, cosicché potesse poi con divino lasciapassare insanguinare tutta l'Europa con un centinaio di battaglie, passa per uomo pio.

D'altro canto, l'episodio complementare puo` essere quello che vede Einstein sentenziare "Dio non gioca a dadi[4]", quando gli viene proposta l'interpretazione probabilistica della Meccanica Quantistica; ma questa era l'espressione di una profonda convinzione personale piu` che una affermazione scientifica. Al punto che, a tutt'oggi, l'interpretazione probabilistica della MQ non e` ancora stata messa in seria crisi.

Ma entrambi i casi coinvolgono matematici che trattano fisica, non la matematica stessa. E non sono affatto pochi i matematici che trovavano comunque opportuno essere credenti. Tra questi, non v'e` dubbio che il piu` devoto sia stato Blaise Pascal.

Pascal nacque trecentottanta anni fa, il 19 Giugno 1623, in quella che al tempo si chiamava Clermont e adesso si chiama Clermont-Ferrand[5], e suo padre gli proibi` la matematica fino all'eta` di quindici anni. Etienne Pascal non era un vero e proprio matematico, ma era un po` piu` che un dilettante: frequentava Mersenne[6], e arrivo` a scoprire anche una curva utile per la trisezione dell'angolo. In matematica aveva dunque le idee chiare, e non riteneva opportuno che la scienza dei numeri invadesse menti troppo giovani, e rimosse ogni libro di matematica dalla casa dove viveva insieme a Blaise. Fu costretto a cambiare idea, però, visto che verso i dodici anni il giovane Blaise comincio` a pensare da solo alla geometria, fino a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo equivale a due angoli retti. A quel punto il genitore gli procuro` una copia degli "Elementi" di Euclide.

Dopo i primi approcci con la geometria proiettiva e un trattatello sulle coniche, a soli diciannove anni Pascal si cimenta nell'opera che lo rendera`, trecentocinquanta anni dopo, famoso tra i cultori della computer-science. Il vero lavoro di papa` Etienne consisteva nel riscuotere le tasse, e i problemi contabili erano ragguardevoli; Blaise

[4] La religiosita` di Einstein, per quanto lontana dall'ebraismo ortodosso, si ritrova in moltissime sue citazioni. Molto esplicita la sua "La Scienza senza la Religione e` zoppa, la Religione senza la Scienza e` cieca". La nostra preferita sul tema rimane comunque "Dio non si preoccupa delle difficolta` matematiche. Lui integra empiricamente"

[5] Clermont era la citta` vescovile, Montferrand la citta` dei conti d'Alvernia. Solo nell'avanzato diciassettesimo secolo le due citta` si sono unite. Forse, il fatto che la parola "mont" fosse ad un tempo la fine del primo e il principio del secondo nome ha risolto facilmente il dubbio su come chiamare la novella citta`.

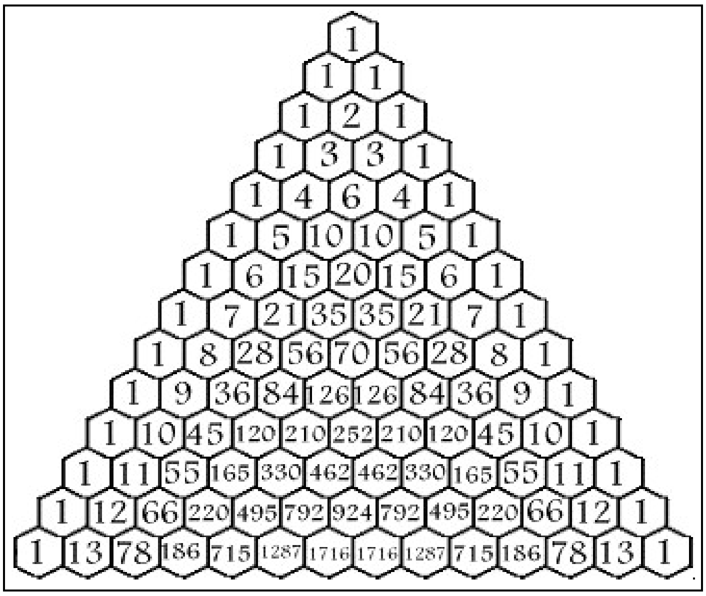
[6] Proprio Marin Mersenne, gran cacciatore di primi, quello che ha dato il nome ai numeri del tipo $\mathbf{2^p-1}$, con **p** primo.

ebbe l'idea che i conti aritmetici potessero essere meccanizzati, e si cimento` nella costruzione di una macchina calcolatrice. Per quell'epoca (correva l'anno 1642) gia` solo l'idea di uno strumento meccanico per eseguire i conti doveva essere arditissima: e se adesso, nel Duemila che semina microchip anche nelle etichette dei pomodori pelati, la cosa puo` sembrare meno fenomenale, ricordiamoci che il sistema decimale non era ancora in voga, ai tempi di Pascal.

La "Pascaline" compiva addizioni e (impostando il "complemento a 9") sottrazioni. Con particolari artifici riusciva anche ad eseguire moltiplicazioni e divisioni: ma era uno strumento contabile, e le quantita` che doveva sommare erano lire. E ogni lira era divisa in 20 soldi. E ogni soldo era diviso in 12 denari: le difficolta` maggiori di Pascal dipendevano da questa fantasiosa ripartizione delle unita` monetarie. Ma vennero superate, e adesso la Pascaline e` una tappa obbligata in tutti i testi di storia dei Calcolatori, e Pascal e` piu` noto come nome di un linguaggio di programmazione che come cognome di un pensatore francese del XVII secolo.

La Pascaline non fu un successo commerciale, comunque, e non fu neanche un primato assoluto, visto che gia` nel 1623 Schickard realizzo` un calcolatore meccanico che ebbe Keplero tra i propri entusiasti utilizzatori. E non fu neanche un primato l'altra cosa per cui il nome di Pascal e` noto tra gli amanti della matematica: il triangolo di Pascal.

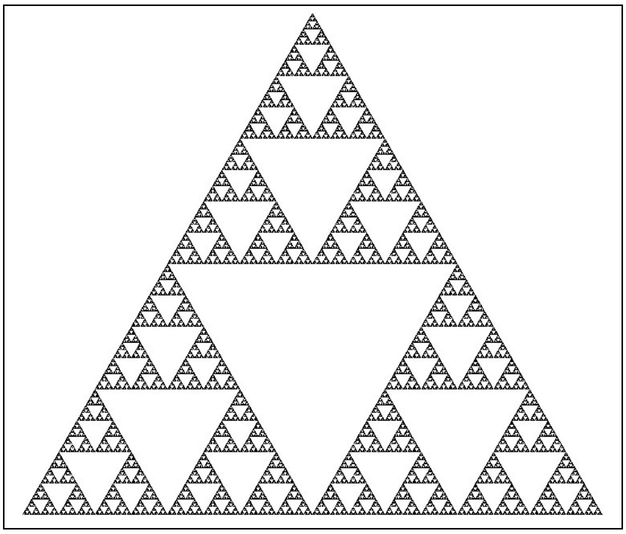
A dire il vero, Pascal non lo rappresentava come in figura: egli lo preferiva a forma di triangolo rettangolo, con un cateto composto da soli "1" e poi, via via sfalsati, la serie dei naturali (che nella figura sopra riportata e` riprodotta nelle diagonali subito sotto le serie esterne degli uno), dei numeri triangolari, e cosi` via. Ma in quasi tutti i libri di testo campeggia la scritta "Triangolo di Pascal" sopra il disegno d'un triangolo numerico isoscele, come quello della figura.



In quasi tutti i libri, non in tutti. In quelli italiani, per esempio, la figura e` la stessa, ma il nome del triangolo e` diverso, visto che e` quasi sempre chiamato patriotticamente "Triangolo di Tartaglia". Ad onor del vero, Niccolo` Fontana detto il Tartaglia, bresciano, venne al mondo cinque quarti di secolo prima di Pascal, e si interesso` del triangolo numerico: la priorita` sembrerebbe spettargli di diritto, ma il fatto e` che il Triangolo precede anche lo stesso Tartaglia. Si trovano eleganti rappresentazioni del triangolo numerico gia` nel 1303, nell'opera del cinese Chu Shih Chieh, e l'orientale non lo presenta neppure come una scoperta originale.

Quel che e` certo e` che il Triangolo affascino` Pascal cosi` tanto che vi dedico` un intero libro, il "Trattato sul Triangolo Aritmetico": e un libro non e` davvero troppo, per esplorare i segreti del magico Triangolo. Di solito, viene introdotto nelle scuole per mostrare come si generino i coefficienti delle potenze dei binomi (lettura diretta delle "righe" orizzontali), ma nel triangolo sono nascoste infinite altre regolarita`.

Si e` gia accennato ai naturali, seconda diagonale (o seconda colonna, nella rappresentazione a triangolo rettangolo di Pascal): ad essa seguono i numeri triangolari, poi i tetraedrici, poi, piu` nascosti, si possono trovare tutti i numeri poligonali. La somma delle righe da` tutte le potenze di due, mentre la serie di Fibonacci giace in diagonali non immediate da vedere. Il Triangolo continua ad esercitare attrazione e interesse, rinnovato di recente quando Mandelbrot ha fatto diventare di moda i frattali . Il triangolo assume infatti una connotazione assai curiosa, ripetitiva e iterativa a piu` livelli, quando viene raffigurato alla maniera di Sierpinski[7]: rappresentando tutti i numeri dispari con un pallino nero e tutti i pari con uno bianco:



Blaise Pascal non vide l'eleganza di questa rappresentazione, perché altrimenti ne avrebbe senz'altro fatto cenno nel suo libro. Ma e` immaginabile che l'avrebbe profondamente colpito, con quel suo continuo ripetersi all'infinito, con ineluttabile e sincronico aumentare della regolarita` e della complessita`.

Fu invece un altro Triangolo a sedurre Blaise, e lo sedusse in maniera definitiva nel Novembre del 1654. Il 23 di quel mese Blaise ebbe una nuova e piu` forte esperienza mistica, e da quel momento in poi dedico` ogni sua forza alla religione cristiana, dimenticando quasi del tutto la matematica. Aveva solo trentun anni, anche se dire "solo" e` un po` crudele, visto che non arrivo` a compierne quaranta. Dal Triangolo Aritmetico passo` a quell'altro Triangolo occhiuto, che una volta si usava per rappresentare la divinita`.

Il Triangolo come simbolo di Dio vale solo per i Cristiani, e solo per quei Cristiani che credono nella Trinita`: sembra essere questa triplice essenza ad aver fatto scegliere la figura geometrica con tre lati quale imago divina.

Blaise Pascal dedico` il resto della sua esistenza a scrivere di filosofia religiosa e teologia[8]. Fu in questo periodo che formulo` la famosa "scommessa di Pascal[9]", per esortare gli indecisi a credere in Dio, e fu in questo periodo che scrisse i "Pensieri", la sua opera maggiore, che sono tuttora considerati un caposaldo della filosofia cristiana. In lui matematica e religione sembravano convivere senza alcuna tensione, anche se, alla fine, l'impeto religioso fu cosi` forte da diventare totalizzante.

"*E` il Cuore a percepire Dio, non la Ragione*", scrive nei suoi pensieri. E forse su questo possono concordare tutti, anche coloro che non sono certi di cosa si intenda con "Cuore", e sono armati solo della vecchia Ragione. Pascal era tutt'altro che imparziale, nel duello tra Fede e Ragione. Ogni sua frase celebre gronda Fede, anche se si capisce che e` scritta da chi conosce i frequentatori della pura razionalita`.

---

[7] Waclaw Sierpinski (1882-1969), matematico polacco.

[8] Ebbe un breve ritorno di fiamma per la matematica nel 1658, ma senza che questa lo distraesse troppo dalla sua attenzione per la religione.

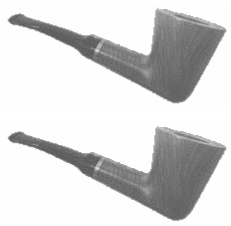
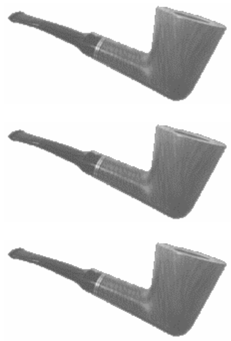
[9] Ne parlammo anche nella celebrazione di Hardy & Littlewood, "Stanlio e Ollio", RM49 Febbraio 2003.

Quelle che non chiamano in causa la religione sono quasi sempre spietate, e difficilmente contestabili: "*Pochi uomini parlano umilmente di umilta`, castamente di castita`, scetticamente di scetticismo*"; oppure "*La contraddizione non e` segno di falsita`, e la mancanza di contraddizione non e` segno di verita`*".

Ma la frase di Pascal che ci sembra piu` significativa, forse perché abbastanza onesta da mostrarne le debolezze, e` un'altra: "*La perfetta chiarezza aiuta l'intelligenza, ma danneggia la volonta`*". Con questo, Pascal forse voleva sancire la superiorita` della volonta`, della Fede, sull'intelligenza, sulla Razionalita`; ma non e` una frase che possa dispiacere anche ai simpatizzanti del puro raziocinio.

Blaise Pascal era devoto alla Fede senza essere per questo un persecutore della Ragione. C'e` da aspettarsi, da uno come lui, che la sua simpatia vada piu` facilmente verso un agnostico che sospende il giudizio finale sull'esistenza di Dio perché davvero incerto di fronte all'enormita` dell'Universo, piuttosto che ai signori di cui parlavamo all'inizio, che riservano la loro proclamata Fede solo a coloro che hanno la pelle dello stesso colore.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Strani calcoli			
Il salto della cavallina			

2.1 Strani calcoli

Dovete sapere che Alberto ha una visione tutta particolare (e, ovviamente, sbagliata) del concetto di generalizzazione: se una cosa funziona in un caso, allora funziona sempre. Anche in matematica.

Al momento, si sta divertendo a trovare alcune "scorciatoie" per fare i conti: appurate alcune regole della moltiplicazione che, si presume, conoscono piu` o meno tutti tipo "la somma delle cifre di un multiplo di nove e` nove" e "un numero divisibile per dieci finisce per zero", si e` messo a crearne qualcun'altra che francamente mi pare piu` complicata del metodo originale (tipo "per moltiplicare per cinque dividi per due, moltiplica per dieci e guarda se era pari". Testuale).

La cosa, di solito, lo tiene buono quasi tutto il pomeriggio.

Al momento, sta cercando di dimostrare che "Per moltiplicare un numero per ... inverti le cifre del numero" (esistesse, farebbe comodo...).

Il guaio e` che il suo metodo dimostrativo e` dire "Potrebbe essere per ***4***". E provare.

Scritto un numero (di cinque cifre diverse tra loro), effettua la moltiplicazione per quattro e guarda il risultato.

La pace del pomeriggio e` infranta da un matto (vestito) che corre per casa gridando "EUREKA!".

Con che numero ha provato?

> *Poco chiaro? OK, poco chiaro, come tutte le cose purtroppo vere. In pratica ha preso un numero di cinque cifre diverse tra loro e lo ha moltiplicato per quattro, ottenendo lo stesso numero con le cifre invertite. Vi si chiede il numero*[10]*.*

---

[10] Questo problema e` dedicato in particolare a quel lettore che ci ha mandato un grazioso problema di criptaritmetica (e se noi diciamo "grazioso" vuol dire che era quasi una meraviglia... e` un ambito nel quale non ci troviamo troppo bene). Volevamo ricambiare, e questo ci sembrava abbastanza carino. No, non vi diciamo chi e`. LUI lo sa.

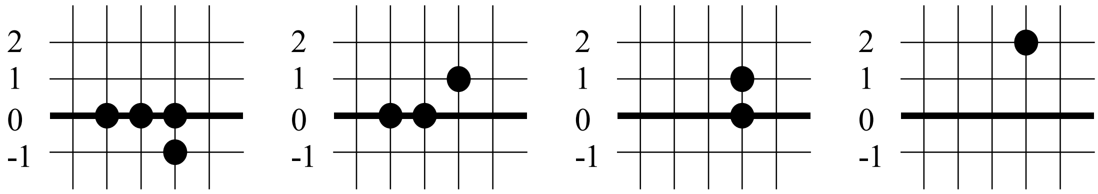
2.2 Il salto della cavallina

Questo gioco va giocato da soli.

Avete a disposizione una scacchiera, virtualmente infinita in tutte le direzioni; una riga ben precisa e` definita *zero*. Inoltre, disponete di un numero infinito di pedine da dama (il colore non importa).

Le pedine possono "mangiarsi" tra di loro (indipendentemente dal colore) saltandosi e atterrando in una casella libera, in orizzontale o in verticale (non in diagonale), ma non possono muovere.

Scopo del gioco e` riuscire a mandare una pedina (saltando) il piu` lontano possibile (riga piu` lontana dalla riga zero), definendo una posizione iniziale minimale di pedine,le piu` avanzate delle quali possono stare al massimo in riga zero. Per intenderci, vi do` la soluzione per arrivare a riga **due**: bastano quattro pedine:



Credo sia abbastanza chiaro.

Quello che ci interessa e` trovare la configurazione ***minimale*** (posto che esista) per arrivare in riga ***3***, ***4***, ***5*** e, se proprio vi diverte, anche le successive... In fondo, con una scorta infinita di righe, colonne e pedine, non dovrebbe essere un problema *(In realta`, il piu` interessante -e cattivo- e` il valore* ***5****...)*.

3. Bungee Jumpers

In quanti modi 2^n puo` essere espresso come somma dei quadrati di quattro numeri naturali?

Grande Sagra del **Pesce Algebrico -** Frazione Calde` di Castelveccana
(Luino sul Lago Maggiore)

2-3 Agosto 2003

Portare Avanti la Soluzione dei Problemi, nel Glorioso Quinto Anno di RM! [RdA]

Nella foto di repertorio, un gruppo di convinti lettori di RM sulla strada per la Sagra del Pesce Algebrico.

4. Summer Contest 2003

Ragazzi, qui vi stiamo viziando troppo. Doveva ancora uscire il numero del mese scorso che gia` ricevevamo una pletora di mail spazianti dal supplichevole al minaccioso il cui contenuto era, all'incirca "*Vero che lo fate anche quest'anno, il problemazzo divertente e lungo?*"

Oeu, ma secondo voi ci parliamo ogni due anni noi, con gli alieni? Che dovremmo metterci, nel secondo messaggio? No. Beh, pero` effettivamente... Qualcosina da fare in spiaggia quando uno e` stufo di leggere il Boyer...

Grumble... Vabbo`, vediamo cosa si puo` fare. Allora, cerchiamo di fare un po` di ambientazione...

> *Stufe di dare fuoco alle cabine, le due pesti (Alberto e Fred) hanno deciso di combinarne un'altra. Sono riusciti a procurarsi un barattolo di vernice verde fluorescente, e la loro intenzione sarebbe quella di collegarlo al tubo della doccia per vedere quanto si arrabbia l'utente medio della medesima.*
>
> *Quello che sanno e` che il tubo che porta l'acqua alla doccia passa in modo rettilineo sotto la spiaggia alla profondita` di 50 cm, ma la posizione precisa e` difficilmente determinabile.*
>
> *L'unica cosa che si sa e` che una giuntura nel tratto rettilineo perde e genera una macchia perfettamente circolare (del raggio di un metro) sulla spiaggia; causa pero` una certa disuniformita` della sabbia, non necessariamente la giuntura e` al centro del cerchio. Comunque, passa sotto la macchia.*
>
> *La prima ipotesi dei due simpatici frugoletti e` allora quella "scaviamo lungo la circonferenza, e quando troviamo il tubo lo seguiamo all'interno della circonferenza finche` troviamo il buco..."*
>
> *Gia`, ma il lavoro va fatto alla svelta, quindi sarebbe bene scavare una trincea di ricerca la piu` breve possibile... Messe alle strette dalla matematica, le nostre anime candide si rivolgono al miglior esperto disponibile* [c'est moi: Cosa pretendete, su una spiaggia, Courant&Robbins??? RdA] *e, in cambio della data del colpo (giusto per fare la doccia da un'altra parte) vorrebbero sapere qual'e` lo scavo di lunghezza minima... Voi cosa ne dite?*

OK, "matematizzando", come dice Doc. Avete un piano euclideo (la spiaggia) sul quale giace una linea retta (la tubatura) la quale e` secante (o tangente) un cerchio (la macchia umida) ma non sapete dove. Dovete riuscire a trovarla scavando il meno possibile.

Prego notare che **non** ho detto "scavate solo dentro il cerchio" o "fate una trincea sola". Inoltre, consideriamo il lavoro concluso nel momento stesso in cui trovate un punto del tubo (non necessariamente sulla circonferenza).

Allora, regolamento del gioco:

Voi ci mandate una soluzione, possibilmente con una costruzione della trincea/trincee, un disegnino e il calcolo della lunghezza dello scavo; noi raccoglieremo, ringraziando, e vi diremo (subito, via mail) se secondo noi si puo` fare di meglio. E` implicito che potete mandare anche piu` di una soluzione: quindi, pensateci tutta l'estate *[Sadico...RdA]*.

A ***ottobre*** (finita l'estate), pubblicheremo le soluzioni, in ordine (decrescente) di lunghezza.

"E perche` non pubblichi la soluzione giusta?" Semplice: non e` dimostrato che quella che oggi e` la soluzione minima sia effettivamente quella ottimale. Se volte provarci a dimostrare che la vostra e` ottimale fate pure, ma il fatto di poter scavare "in tanti posti" e "dentro e fuori" dal cerchio complica tremendamente la cosa. Altrimenti, ve la rifilavo nei problemi e tanti saluti.

Ci risentiamo a ottobre: per intanto, ***non aprite quella doccia!***

5. Soluzioni e Note

Prima una breve nota. Non so se ve ne siete accorti, ma negli ultimi due numeri abbiamo avuto un paio di problemi un po` particolari. Mi riferisco a quei problemi che, a prima vista, sembrano risolubili attraverso una semplice elencazione dei dati ma, ad un'analisi piu` accurata, si vede che esiste un metodo risolutivo; Sono tra i miei preferiti (da *proporre*, non da risolvere...). Adesso ne avevate un paio, con cui giocherellare (il "Problema del Millennio" e il "Ristorante cinese"; voglio sperare che con le zucche di Halloween si sia finito); mi sembra pero` che quello del ristorante cinese vi sia piaciuto pochino... Ma andiamo con ordine; per prima cosa, l'ordine d'arrivo...

Num.	Data-Ora Mail	Allonimo	Soluzioni	Note
1	1-5-03 19:48	PsiNet	RM051 - 2	Soluzione in ritardo del millennio
2	2-5-03 5:15	Lux	RM052 - 2	Primo sulla pendola!
3	2-5-03 9:18	Viggio	RM052 - 1	Primo al ristorante!
4	2-5-03 9:45	GaS	RM052 - 1	
5	3-5-03 12:26	RM_2	RM052 - 1	
6	2-5-03 12:38	PMP	RM052 - 1	
7	2-5-02 2:59	PMP	RM052 - 2	
8	3-5-03 14:40	Sam	RM052 - 1&2	
9	3-5-03 17:51	Desmatron	RM052 - 2	
10	3-5-03 21:23	ChiQua	RM052 - 1	
11	5-5-03 14:43	Hannibaal	RM052 - 1&2	
12	5-5-03 20:30	BlackSky	RM052 - 1	
13	6-5-03 12:28	ChiQua	RM052 - 1	
14	6-5-03 11:45	Filippo	RM052 - 2	
15	11-5-03 3:52	GaS	RM052 - 2	
16	13-5-03 8:48	GaS	RM051 - 2	
17	13-5-03 12:04	IceWolf	RM052 - 1	
18	15-5-03 12:02	Filippo	RM051 - 2	

...piu` un paio di mail che non risolvevano. In merito a una di queste, da ***ChiQua*** (il quale, per deformazione professionale, tutti i mesi ci corregge i compiti) diceva *"Non mi risulta il 'C' o il BASIC contengano la funzione 'NFATT'"*. Verissimo, ma io sono molto piu` anziano di quanto sembra. La conteneva il PASCAL, che tra l'altro credo fosse il primo linguaggio ad ammettere la ricorsivita` (domanda: e` nato prima il Pascal o prima il Lisp? Anche quello era ricorsivo, se non ricordo male...). Tra l'altro, il *mio* "C" (un vetusto Borland 3.0 che genera solo programmi DOS) ha l'"nfatt" nella libreria: ce l'ho messa io (assieme ad un mucchio di altre funzioni utili). Ammetto comunque che questa, come risposta, "non vale".

5.1 [051]

5.1.1 Il Problema del Millennio

Voglio sperare che la si finisca prima del duemilaquarantotto, con questo problema... Comunque, abbiamo ancora un po` di roba. Tanto per cominciare, ci e` arrivata un'altra soluzione di quelle "corte" da parte di ***PsiNet***; non e` stata inserita nello scorso numero perche` arrivata successivamente alla chiusura redazionale[11], ma non aggiunge estensioni.

Chi invece trova un'interessante estensione e` ***GaS*** (dobbiamo scusarci con lui, il mese scorso avevamo messo le maiuscole nel posto sbagliato... Ragazzi, ma chi ve l'ha insegnata la Morfologia? Uno ZX80?), e ci permette anche di parlare di una cosina che non vedevamo da tempo... Cediamogli la parola *[GaS, ti modifico un pochinino la formula... spero non spiaccia (RdA)].*

> Mi piaceva vedere cosa si ottiene se si cercano numeri scrivibili come somma di termini in progressione aritmetica in cui ogni termine e` uguale a quello precedente +1, +2, +3, +4, .... (per es: 25=1+2+4+7+11). Visto che e` venuto fuori qualcosa di carino ho pensato di buttare giu un paio di paginette word e spedirle in redazione, magari non frega niente a nessuno ma forse qualcuno interessato si trova
>
> Vedrai che il problema non e` proprio completo, e` lasciata aperta una piccola congettura che, sinceramente, non ho proprio il tempo di valutare
>
> Sia ***S*** il numero dato dalla somma di n termini in progressione aritmetica partendo da un generico ***a*** (negativo, positivo o nullo):

$$S = a + (a+1) + ((a+1)+2) + (((a+1)+2)+3) + \ldots + \left[a + \frac{n(n-1)}{2}\right] =$$
$$= n*a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i(i+1)}{2} = n*a + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^2+i) = n*a + \frac{1}{2}\left[\frac{n(n-1)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} i^2\right] \qquad \text{[005.001]}$$

> Ricordando poi che la sommatoria dei primi (n-1) quadrati puo` essere scritta come $\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ (io veramente l'ho dovuta trovare, non la conoscevo ma e` cosi` lineare che non saro` mica stato il prima a trovarla[12]).
>
> Sostituendo abbiamo:

$$S = n*a + \frac{n(n-1)}{4} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} \qquad \text{[005.002]}$$

> che svolta puo` essere scritta come (mica vorrete tutti i passaggi?)

$$S = n*a + \frac{n(n^2-1)}{6} \qquad \text{[005.003]}$$

> Sostituendo ad ***n*** i valori da ***1*** a quanto ci pare (lunghezza della sequenza) abbiamo, in funzione di ***a***, i numeri che possono essere scritti nella forma voluta.

---

[11] La "chiusura redazionale" e` arbitrariamente decisa dalla Redazione utilizzando come parametro fondamentale il livello della pressione sanguigna del GC: piu` e` bassa, prima si chiude. Da come si sente adesso, per questo numero le soluzioni dovrebbero chiudere l'anno scorso.

[12] No, non sei stato il primo. Ci eravamo arrivati anche noi, tempo fa. GaS ci fornisce una dimostrazione del fatto (lasciatecelo dire: ineccepibile, ma non emozionante. Quindi, non ve la forniamo). Se non siete convinti, vi suggeriamo un paio di strade.

1. Considerate la somma come un numero piramidale (a base quadrata), e spostate poi le biglie (viene meglio coi cubetti) un "piano" per volta sino a formare un pezzo di cubo (o, se preferite, una piramide con l'altezza coincidente con uno spigolo). Indi, contate quanti cubetti vi mancano per avere un cubo e ricavate la formula.
2. Se volete un metodo generale, andate a riprendervi il numero 25 di quella che consideriamo la piu` interessante rivista di matematica e rileggetevi i Paraphernalia. Prima, un'occhiata al numero 21 potebbe farvi entrare nell'ottica.

-Per ***n=1*** ***S=a*** che e` la soluzione banale con un solo termine.

-Per ***n=2*** ***S=2a+1*** e quindi tutti i numeri dispari

-Per ***n=3*** ***S=3a+4*** multipli di 3 piu` 1

-Per ***n=4*** ***S=4a+10*** multipli di 2 non divisibili per 4

-Per ***n=5*** ***S=5a+20*** multipli di 5

-Per ***n=6*** ***S=6a+35*** multipli di 6 meno 1

-Per ***n=7*** ***S=7a+56*** multipli di 7

-Per ***n=8*** ***S=8a+84*** multipli di 4 non divisibili per 8

...

-Per ***n=11*** ***S=11a+ 220*** multipli di 11

ecc.......

Prendiamo come esempio ***n=5*** e ***a=3***, si ha ***S=5*3+20=35*** ed infatti la soluzione e` ***3+4+6+9+13***, vediamo che ***35*** e` ottenibile anche per ***n=6*** e ***a=0*** ed infatti ***35=0+1+3+6+10+15*** Abbiamo ***35*** anche ponendo ***n=7*** e ***a= -3*** ed infatti

35= (-3)+(-2)+0+3+7+12+18 (Ricordiamo che ***a*** puo` essere anche negativo o nullo)

Abbiamo visto che tutti i numeri dispari ci vanno bene, ma i numeri pari?

Da ***n=4*** si vede che accettiamo tutti i numeri pari che non sono multipli di ***4***, con ***n=8*** incorporiamo i numeri multipli di ***4*** non divisibili per ***8***, facendo i calcoli per ***n=16*** si vede che vengono incorporati i multipli di ***8*** non multipli di ***16***.

La generalizzazione sembra immediata e quindi una buona congettura e` che aumentando n tutti i numeri siano scrivibili nella forma voluta.

Allora, nessuno che voglia provare a dimostrarla? A me pare carina.

Tra l'altro, GaS si scusa per non mandare la soluzione in PDF ma in Word. Scusate se urlo, ma ***va benissimo cosi`!!!*** Se ci mandate qualcosa in PDF dobbiamo copiarlo a manina (il "copy" da Acrobat e` una schifezza), mentre con Word il Taglia&Incolla e` velocissimo.

Anche ***Filippo*** (il quale, a giudicare da come scrive, si e` comprato la stampante a colori) si e` impegnato: il suo interesse era piu` mirato alla "rappresentazione", cioe` trovare nel minor tempo possibile l'espressione di somma del numero; con i dispari abbiamo gia` visto che non e` molto difficile, ma i pari hanno rappresentato il suo cruccio per tutto il mese. Quello che ci e` piaciuto in particolare e` il dubbio *"Ma* **quante** *volte e` pari un numero?"* Se la domanda vi sembra assurda, leggete il seguito.

I numeri pari possono essere classificati come:

2(2n+1) (una volta pari)

4(2n+1) (due volte pari)

8(2n+1) (tre volte pari)

$2^m(2n+1)$ (m volte pari)

Nel campo degli interi (positivi e negativi), e` facile rappresentarli come somma di $2^{(m+1)}$ elementi:

$2^2(2n+1) = (n-3)+(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)$

es. ***n=1*** ***8n+4=12*** (-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5

es. ***n=2*** ***8n+4=20*** (-1)+0+1+2+3+4+5+6

Generalizzando

$$(n+1-2^m) + ... + n + ... + (n+2^m)$$

dove ***n*** e\` il ***2^m^ esimo*** elemento ed e\` $n \geq 1$

se $n < 2^m-1$ vi saranno (2^m-1-n) elementi negativi. E\` intuitivo che ogni elemento negativo della serie avra\` un corrispondente elemento positivo dello stesso valore assoluto, per cui la serie avra\` lo stesso valore di una sua parte, precisamente da 2^m-n sino a 2^m+n

infatti, sostituendo nella famosa formula:

$((2^m+n)+(2^m-n))*((2^m+n)-(2^m-n)+1)/2$

$2*2^m *(2n+1)/2$

$2^m(2n+1)$

E\` ancora interessante osservare che questa serie ha sempre un numero dispari di elementi e che l'elemento centrale vale 2^m

Riprendendo gli esempi precedenti:

8n+4=12 (n=1, m=2)　　(-2)+(-1)+0+1+2+3+**4**+5

8n+4=20 (n=2, m=2)　　(-1)+0+1+2+3+**4**+5+6

ancora:

$1848 = 2^3(3*7*11) = 2^3(2*115+1)$　m=3, n=115

108+109+110+111+112+113+114+115+116+117+118+119+120+121+122+123

$56 = 2^3*7 = 2^3(2*3+1)$　　m=3, n=3

(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+**8**+9+10+11

Riassumendo:

$2^m(2n+1)$ e\` il numero dato

a) se $n < 2^m-1$ prendo la serie da (2^m-n) sino a (2^m+n)

b) se $n \geq 2^m - 1$ prendo la serie di $2^{(m+1)}$ elementi dove ***n*** occupa la posizione 2^m

nota: se $n=2^m-1$, abbiamo un "caso limite" dove il primo elemento e\` zero, e $2^m(2n+1)$ e\` un numero triangolare.

Domanda: qualcuno ha mai parlato di numeri "trapezoidali", con $\frac{(N+n)(N-n+1)}{2}$　(N+n)= base maggiore + base minore; (N-n+1)=altezza?

No, nessuno. Forse perche\` sono "solo" la differenza tra due numeri triangolari...

Come vi avevamo detto, abbiamo trovato qualcosa anche noi. Dicevamo che, a prima vista, questo sembra un problema risolubile "per elencazione" (ossia di quelli che non ci piacciono). Peggio ancora sembra chiedere "ma nel problema originale, in *quanti modi* posso esprimere un numero?" Bene, non serve elencare.

Per ogni ***N***, sia ***f(N)*** il numero dei modi attraverso il quale possiamo esprimere ***N*** come somma di interi positivi consecutivi.; Ad esempio, siccome ***9=2+3+4=4+5*** si ha (anche "9" e\` valido!) ***f(9)=3***.

Noto che la somma degli interi da ***1*** a ***n*** e\` pari a $\frac{n(n+1)}{2}$, quello che stiamo cercando e\` il numero dei modi in cui ***N*** puo\` essere espresso nella forma:

$$N = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} \qquad [005.004]$$

per un intero positivo ***n*** e un intero non negativo ***m***. Risolvendo in ***m*** otteniamo:

$$m = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4[2N - n(n+1)]}}{2} \qquad [005.005]$$

(teniamo solo la soluzione positiva) il che implica che l'espressione sotto radice (se vogliamo avere una soluzione ***intera***) sia il quadrato di un naturale. ossia, *esiste un intero* **a** *per cui:*

$$4n^2 + 4n + 1 - 8N - a^2 = 0 \qquad [005.006]$$

e ***a*** deve essere dispari. Risolvendo in ***n***, si ha:

$$n = \frac{-1 + \sqrt{8N + a^2}}{2} \qquad [005.007]$$

e anche qui richiediamo che sotto radice vi sia il quadrato di un intero, ossia esiste un ***b*** per cui:

$$8N = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \qquad [005.008]$$

e siccome ***a*** e` dispari, anche ***b*** deve esserlo. Allora, possiamo scrivere:

$$2N = \frac{b-a}{2} * \frac{b+a}{2} \qquad [005.009]$$

ossia, stiamo cercando di fattorizzare ***2N*** in due fattori, rispettivamente $A = \frac{b-a}{2}$ e $B = \frac{b+a}{2}$ con ***a*** e ***b*** interi dispari.

Essendo ***b=A+B*** e ***a=B-A***, allora ***A*** e ***B*** devono avere parita` opposta.

Allora, ***A*** e ***B*** saranno soluzione se e solo se ***2N=AB*** e uno e solo uno dei due termini e` dispari.

Questa richiesta e` soddisfatta per *ogni* divisore dispari ***d*** di ***N***, quindi potremo supporre $A = d, B = \frac{2N}{d}$. Di conseguenza, il numero dei modi attraverso cui posso esprimere ***N*** come somma di interi positivi consecutivi e` pari al numero dei *divisori* **dispari** *di* **N** (attenzione che ho detto dispari, non ho detto primi).

5.2 [052]

5.2.1 Al Ristorante Cinese

Beh, la prima parte l'avete risolta praticamente tutti nello stesso modo. E tutti quanti avete fatto la battuta sulla SARS.

Chi sembra pero` abbia cercato di rendere comprensibili le proprie idee e` ***IceWolf***; vediamo cosa pensa:

> L'unico modo di associare ogni pietanza al suo nome e` il confronto visivo. Distinguiamo due tipi di confronto:

confronto diretto: effettuato nell'ambito di una sola ordinazione, in pratica consiste nell'ordinare ogni piatto un numero esclusivo di volte, in modo da riconoscerli tramite questo numero (insomma, proprio come nell'esempio da voi riportato). Siccome la stringa e` da 5, l'efficienza massima di questo metodo si ottiene con ordinazioni del tipo [xxyyy] o [xyyyy]. Noi pero` abbiamo anche necessita` di ordinare tutti i piatti almeno una volta. Mediando l'efficienza con l'esigenza di occupare meno spazio possibile nelle stringhe, si vede che la soluzione migliore e` inserire una ed una sola coppia in ognuna delle tre stringhe. Cosi` si possono identificare tre piatti

confronto indiretto: in questo caso e` necessario prendere in considerazione ordinazioni di giorni differenti. Conviene distinguere due sottotipi:

se ogni coppia di stringhe condivide uno ed un unico valore e` possibile identificare quest'ultimo univocamente. Siccome sono possibili tre coppie (non ordinate) di stringhe, possono essere identificati tre piatti

se ogni stringa possiede in esclusiva uno ed un solo valore, questo puo` essere identificato univocamente. Anche con questo metodo si possono individuare fino a tre piatti.

In definitiva ogni stringa deve essere composta da:

una coppia di valori uguali

un valore posseduto in esclusiva

due valori condivisi, singolarmente, con le altre due stringhe

Quindi le ordinazioni saranno:

1) AABCD

2) BEEFG

3) DFHII

Infatti:

A, E, I , e solo loro, sono stati ordinati in giorni diversi a coppie;

B puo` essere identificato dal confronto tra 1) e 2), D dal confronto tra 1) e 3) e F dal confronto tra 2) e 3);

C e` posseduto in esclusiva da 1), G da 2) e H da 3) e sono gli unici valori non ancora identificati in ogni stringa.

E fin qui, nessun problema. Quello che mi interessava, pero`, era la seconda parte. Infatti, qui erano possibili un mucchio di strade, e sapete benissimo che trovare una strada "diversa" e`, per noi, uno dei grandi piaceri della matematica.

Cominciamo con il liquidare la ***non***-soluzione che avete trovato tutti: "*Il decimo e` quello che non ho mai visto*" non e` valida. Infatti (una volta tanto il GC e` stato attento) il problema statuiva "*abbiamo ordinato almeno una volta ogni piatto*". Alcuni di voi ci hanno mandato questa soluzione, consci della sua insufficienza ma non in grado di proseguire. Tra questi annoveriamo ***Viggio***, ***BlackSky*** (una New Entry! Benvenuta, e complimenti per l'allonimo) e ***RM₂*** *[Non fate domande sull'allonimo. E`il nostro buon Roberto-2, il pedice serve per distinguerlo dall'omonima rivista di matematica]*. Quest'ultimo, tra le altre cose, e` stato il primo ad avere un sospetto che hanno sviluppato anche altri:

Questo gioco mi ricorda un po` il MasterMind

...non ci avevo pensato... altrimenti, una schifezza di titolo tipo "GasterMind" non ve lo toglieva nessuno.

Meritevole di citazione la soluzione "alla Campbell" di ***Hannibaal***: "Non e` possibile risolverlo per 10 piatti perche` se fosse possibile sarebbe piu` difficile che con 9 e avresti messo 10 nella prima parte del problema". Dopo la affronta un po` piu` seriamente, per fortuna, ma e` lui il primo ad ammettere che e` poco chiaro.

Chi trova un buon metodo e` ***GaS***, che si inventa anche una notazione:

> Per poter distinguere i piatti dobbiamo ordinare ognuno di loro in maniera differente: facciamo uno specchietto con le possibilita`. Indichiamo tali possibilita con la forma $[(q_1,n_1),(q_2,n_2),\ldots(q_m,n_m)]$ dove il primo termine e` la quantita` di ordini e il secondo il numero della cena: per esempio ***[(1,1),(2,3)]*** e` un piatto ordinato ***1*** volta la *prima* sera e ***2*** volte la *terza* sera (in realta' io ho una tabella fatta su foglio che non so come riportarvi (per il futuro vanno bene fogli excel? *[AAARGGGHHH!!!! (RdA)]*). Le possibilita' sono, ricordando che ogni piatto e` stato preso almeno una volta:
>
> 1 volta: [(1,1)], [(1,2)], [(1,3)]
>
> 2 volte: [(2,1)], [(2,2)], [(2,3)], [(1,1),(1,2)], [(1,2),(1,3)], [(1,1),(1,3)]
>
> 3 volte: [(3,1)], [(3,2)], [(3,3)], ecc.......
>
> Dobbiamo avere ***9*** combinazioni distinte di questo tipo. Notiamo che avendo ordinato in tutto ***15*** piatti non possiamo fare altro che prendere le prime ***9*** della serie (che in totale ordinano proprio ***15*** piatti, ordinando un piatto ***3*** o piu volte i conti non tornano). Abbiamo cosi dimostrato che non potremmo riconoscere ***10*** piatti; per le ordinazioni non serve altro che distribuire i piatti 5 per sera come qui di seguito:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1°	X			X		X	XX		
2°		X		X	X			XX	
3°			X		X	X			XX

> con ovvio significato.
>
> Naturalmente la soluzione di cui sopra e' generale, scambiando due righe o due colonne della matrice si ricavano altre soluzioni accettabili ma lo schema generale sara' sempre lo stesso.

PMP invece se la cava per il rotto della cuffia, dicendo "No, per banali considerazioni combinatorie..." Si salva in calcio d'angolo proponendo un'estensione:

> ...perché non proponi di vedere qual e` il minor numero di pranzi necessario al crescere della lista e a parita` di commensali; oppure qual e` il maggior numero di commensali possibile a parita` di pranzi e crescere della lista, o a parita` di lista e al crescere di pranzi? Ancora piu` interessante potrebbe forse essere scoprire cosa succede se non possiamo piu` mettere in ordine i nostri pranzi, e abbiamo solo degli scontrini non fiscali e non datati.

Interessante, vero? Beh, a coloro che ci hanno mandato le soluzioni della seconda parte abbiamo inviato questo. In un insospettato afflato di onesta`, abbiamo anche detto che veniva da PMP ("banali"... tse`...).

A ***Sam***, invece, si e` di nuovo rotta la tastiera. A parte il solito tasto del punto fermo che non sappiamo neanche piu` dove si trova, devono essersi rotte la "m", la "e" e la "s" se, anziche` scrivere "mese", deve inventarsi delle cose tipo "*l'ultimo giro di boa della diva Diana*". Le vostre mail le stampo scritte "in piccolo", ma questa mi ha portato via due pagine in formato A4 in cambio di un mal di testa in formato XL. Limitiamoci alla parte "sensata"... Allora, il Nostro costruisce il menu` *[E siccome avevamo detto di usare le lettere, si inventa una serie di piatti uno piu` improbabile dell'altro[13]]*, e poi imposta una formula per il calcolo di quale sia il numero massimo di piatti che si possono provare in un certo numero di cene ed amici.

> [...] tutto ciò, frutto di un sapiente lavoro di squadra, avrebbe altrimenti avuto una probabilita` pari a 0,000003% che mi sembra generoso definire irrisoria. E` stato possibile perché, con ***k*** oggetti in ***n*** sessioni di prova su ***a*** oggetti alla volta, se
>
> $$na-k=k-n=n+n*\frac{n-1}{2} \qquad \text{[005.010]}$$
>
> allora si puo` fare, poiché in tal caso si potranno provare ***k-a*** oggetti *due* volte, ***n*** *due* volte nella *stessa* prova e $n*\frac{n-1}{2}$ tra *due* prove, lasciando ancora ***n*** posti da "solitario". Nel caso ***n=3***, ***a=5***, troviamo ***k*** per cui valgono le relazioni dette:
>
> $$15-k=k-3=3+3*\frac{2}{2}=6\Rightarrow k=9 \qquad \text{[005.011]}$$
>
> Questo e` il caso limite: con ***k>9*** non e` possibile operare un simile riconoscimento completo. Volendo esplorare oltre un simile comportamento, ci imbatteremmo in fatti curiosi, come ad esempio l'apprendere che se si fosse andati ancora una volta al ristorante cinese si sarebbe potuto identificare ogni piatto sempre che in tutto fossero state non piu` di $4+4*\frac{3}{2}=4+6=10$. Ed ecco dunque la risposta al vostro assillante quesito!

Carino, vero? Ringraziate, che vi ho salvato dall'incubo linguistico-sintattico rappresentato dal resto della mail...

Vogliamo sperare che il barbiere non abbia considerato una missione impossibile dare un aspetto decente a ***ChiQua*** *[noi abbiamo visto la sua foto, quindi parliamo con coscienza di causa]*. Comunque, giacche` era li`, anche lui ha risolto il problema. Tra le altre cose, abbiamo anche appurato che a lui la cucina cinese piace piu` che a PuntoMauPunto, perche` si e` impegnato a fare le tabelline (viola). Non solo, ma la sua soluzione e` praticamente identica alla nostra: l'unica differenza e` che ChiQua usa la notazione *ternaria*, noi una notazione che potremmo definire "vettoriale", ma diciamo le stesse cose

> Utilizziamo la numerazione ternaria escludendo lo zero:

I	1	0	0	1	1	0	1	2	0	0	2	2	1	0	1	0
II	0	1	0	1	0	1	1	0	2	0	1	0	2	2	0	1
III	0	0	1	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	1	2	2

> Il problema possiamo rienunciarlo cosi': tra le colonne della tabella, dobbiamo sceglierne dieci, tale che la somma di ognuna delle tre righe dia 5. Aggiungiamo una riga per classificare i diversi tipi di righe in base ai trits (parenti dei bits) e alla somma delle righe di un gruppo di colonne.

[13] Ve la ricordate Minh, l'amichetta di Alberto? Quando ha visto i nomi affibbiati da Sam ai piatti, le sue uniche parole sono state "buona idea..."

I	1	0	0	1	1	0	1	2	0	0	2	2	1	0	1	0
II	0	1	0	1	0	1	1	0	2	0	1	0	2	2	0	1
III	0	0	1	0	1	1	1	0	0	2	0	1	0	1	2	2
Trits		1			2		1		2				6			

Si vede che dovendo selezionare 10 colonne di egual somma sulle righe, posso prendere i primi quattro gruppi di colonne, ma in questo caso la somma delle righe e` 6 e non 5, quindi ho bisogno di 6 amici. Neanche includendo l'ultimo gruppo o un suo sottoinsieme, posso ottenere come somma 5.

Quindi, NO, non e` possibile risolvere il problema con 10 portate con soli 5 amici e 3 uscite al cinese.

E` anche estremamente facile, usando la numerazione a *M* bit risolvere i vari problemi suggeriti da .mau. *[Sarebbe PMP (RdA)]*. Nel caso gli scontrini si guardino a casa alla fine, senza ricordare l'ordine, non si puo` piu` distiguere all'interno dei gruppi di colonne, e quindi potro` al massimo pescarne una per tipo. Quindi con 3 uscite e 4 amici identifico al massimo 3 portate. Con 5 amici ne identifico 4. Quest'ultimo problema e` parente del problema delle partizioni di Ramanujan.

Col che, per cambiare, potremmo andare tutti al ristorante indiano... A chi piace il curry?

5.2.2 La vecchia pendola!

Allora, per prima cosa qualche *reprimenda.*

Desmatron: probabilmente lo sapeva, che la soluzione era sbagliata. Tant'e` che dice "non merito la pubblicazione". Dipende dal significato che dai al verbo "meritare": le due pesti, sovente, si meritano un paio di scappellotti. Comunque, se vi interessa, a lui veniva ***12***.

Stessa sorte tocca a ***Lux***, anche se lui trova un po` piu` di soluzioni: testualmente "funziona quando le lancette sono sovrapposte o opposte" e, per essere sicuro che anche dei tontoloni come noi capiscano, specifica che astrologicamente parlando *[E` una delle cose che piu` detesto. Sul serio, non per finta come Excel (RdA)]* siamo in congiunzione e opposizione. Secondo Lux, abbiamo ***46*** soluzioni. Lo perdoniamo solo perche` erano le cinque e mezza di mattina e stava dando supporto morale.

A risollevare le sorti arriva fortunatamente ***Sam***, con una bella soluzione basata sugli angoli e sul movimento minimo che deve essere compiuto per avere una soluzione (non chiedete "di che lancetta", altrimenti ci arrabbiamo: dovreste arrivarci da soli). Appurato che questo angolo e` di $\frac{360}{143}$ gradi e che mezzanotte e` evidentemente una soluzione, da` il tutto in pasto ad un programmino (o a un foglio Excel? Non lo dice, meglio cosi`) e stampa tutti i valori. Molto carino.

PMP preferisce lavorare con i minuti (e, come suo solito, e` molto piu` laconico di Sam):

Partiamo da mezzogiorno, e immaginiamo siano passati **x** minuti (**x** non necessariamente intero). A questo punto la lancetta delle ore, che viaggia a un dodicesimo della velocita` di quella dei minuti, sara` arrivata all'equivalente di $\frac{x}{12}$ minuti. Ora immaginiamo che siano passate ***n*** ore, cioe` ***60n*** minuti, e la lancetta dei minuti sia nella stessa posizione di quella delle ore all'inizio: siamo cioe` a $60n+\frac{x}{12}$ minuti. A questo punto, la lancetta delle ore sara` nella posizione di

$\dfrac{60n+\dfrac{x}{12}}{12}$ "minuti equivalenti", ma noi vogliamo che questo equivalga al nostro *x*. Insomma, ci troviamo

$$\frac{60n+\dfrac{x}{12}}{12}=x\Rightarrow x=n*\left(5+\frac{5}{143}\right) \qquad \texttt{[005.012]}$$

A questo punto, i valori di ***n*** da ***0*** a ***142*** sono quelli che ci interessano, visto che il centoquarantatreesimo e\` tale per cui **x=720**, sono passate dodici ore, e siamo arrivati a mezzanotte.

Anche ***Hannibaal*** arriva allo stesso risultato (e anche lui ci manda "tutte le ore" accoppiate...); complice un'approssimazione, sorvola sui decimillesimi di secondo, ma si vede che si e\` impegnato.

Filippo fa il raffinato, e per indicare gli angoli va a pescare le lettere con gli accenti circonflessi; la conclusione originale sua e\` che:

> Ci saranno cioe\` 143 posizioni "scambiabili".
>
> 12 per ogni ora, meno una perché mezzogiorno e mezzanotte coincidono.
>
> 11 sono con "lancette sovrapposte".

GaS risolve e termina con un'interessante notazione (pensavamo non se ne accorgesse nessuno):

> Per ***k=143*** abbiamo la soluzione banale di mezzogiorno(mezzanotte). Delle ***143*** soluzioni, ***11*** sono quelle in cui le due lancette sono sovrapposte mentre le altre ***132*** sono doppioni. Le ***11*** soluzioni sovrapposte sono quelle in cui $k_1=k_2$ e quindi sono quelle con ***k=0,13,26,39,52,65,78,91,104,117,130*** *[Prego notare che sono i multipli di* **13** *(RdA)]*
>
> In totale abbiamo ***66+11=77*** soluzioni differenti.

6. Quick & Dirty

> *Credo conosciate tutti il modo inglese per esprimere il concetto di cosa raffazzonata e inadatta all'uso che se ne sta facendo: "A square peg in a round hole".*
>
> *Ma secondo voi, e\` meglio un tappo quadrato in un buco rotondo o un tappo rotondo in un buco quadrato?*

Allora, i conti e i commenti sono di Doc:

Buco Quadro & Tappo Tondo (la piu\` facile...)

> Area Buco = Area Quadrato = 1
>
> Lato Buco = 1 ; Raggio Tappo = ½
>
> Area Tappo = $\pi(½)^2$ = $\boldsymbol{\pi/4}$ (toh!)

Buco Tondo & Tappo Quadro:

> Area Buco = Area Cerchio = 1
>
> Raggio Buco = r = $(1/\pi)^{½}$ (e gia\` questa forma e\` carina...)
>
> Diagonale Tappo = d = 2r = 2 $(1/\pi)^{½}$
>
> Lato Tappo = d/$(2)^{½}$ = (2 $(1/\pi)^{½}$)/$(2)^{½}$

Area Tappo = ((2 (1/π)^{½})/(2)^{½})^2 = **2/π** (bella, eh?)

Il rapporto tra tappi (Tondo su Quadro) da` il bel valore di **π²/8,** maggiore di uno che mostra al volo che il Tappo Tondo chiude meglio.

La differenza da' invece (**π² - 8) / 4π.**

Buffo, tutti questi pigreco e 2, 4, 8....

7. Pagina 46

Ridefiniamo il problema come:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2^n \qquad \texttt{[007.001]}$$

Sia ***p*** la piu` grande potenza di ***2*** che divide ***a***, ***b***, ***c***, ***d***. Ora, dividendo entrambi i membri della `[001]` per $\left(2^p\right)^2 = 2^{2p}$ (che quindi e` una potenza ***pari*** di ***2***), possiamo riscrivere l'equazione data come:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p} \qquad \texttt{[007.002]}$$

In cui almeno una delle basi delle potenze a primo membro e` un dispari.

Ora, se ***uno*** o ***tre*** delle basi a primo membro sono dispari, allora la somma a primo membro dovrebbe essere dispari, ma in questo caso l'equazione sarebbe impossibile (e` eguagliata ad una potenza di due).

Se ***due*** delle basi a primo membro sono dispari, allora possiamo porre:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2k+1 \\ b_1 &= 2l+1 \\ c_1 &= 2m \\ d_1 &= 2n \end{aligned} \qquad \texttt{[007.003]}$$

E questo fa si` che si possa scrivere:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4n^2 \\ &= 2\left[2\left(k^2 + k + l^2 + l + m^2 + n^2\right) + 1\right] \end{aligned} \qquad \texttt{[007.004]}$$

Che e` una contraddizioe, in quanto $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 2^{n-2p}$ non puo` avere un divisore dispari (l'espressione tra parentesi quadre vale ***1*** solo per tutti i termini uguali a zero), il che implicherebbe ***c=d=0***).

Se ***tutti*** gli interi sono dispari, ossia se:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2k+1 \\ b_1 &= 2l+1 \\ c_1 &= 2m+1 \\ d_1 &= 2n+1 \end{aligned} \qquad \texttt{[007.005]}$$

Allora la nostra espressione diventa:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 &= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 + 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 \\ &= 4\left[k(k+1) + l(l+1) + m(m+1) + n(n+1) + 1\right] \end{aligned} \qquad \texttt{[007.006]}$$

Ora, il prodotto di due interi consecutivi (e ne abbiamo quattro esemplari nell'ultima espressione) ***deve essere un numero pari***. Quindi, l'intera espressione tra parentesi quadre deve essere ***dispari*** e quindi (dovendo essere uguale ad una potenza di due), l'unico valore accettabile e` $2^0 = 1$ che implica:

$$\begin{aligned} & n - 2p = 2 \Rightarrow n = 2p + 2 \\ & k = l = m = n = 0 \Rightarrow a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 1 \\ & \Rightarrow a = b = c = d = 2^p \end{aligned} \qquad [007.007]$$

Quindi se ***n*** e` un dispari allora il problema non ha soluzione; se, di contro, ***n*** e` un pari, allora si ha la soluzione:

$$2^{2p} = \left(2^{p-1}\right)^2 + \left(2^{p-1}\right)^2 + \left(2^{p-1}\right)^2 + \left(2^{p-1}\right)^2 \qquad [007.008]$$

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 In media, ho sempre ragione [001]

Mi aspetto, per questo titolo, un'ovazione di "Si, Capo", "Certo, Capo", "Tre hurrah per il Capo!".

In realta`, volevo parlare di medie. Prendiamola dal punto di vista storico, tanto per cambiare.

La cosa risale agli antichi Greci; dati due numeri (positivi, per comodita`: l'enspansione ai negativi e allo zero e` immediata, con un paio di eccezioni di cui non ci cureremo) ***a*** e ***c*** per cui ***a<c***, si definisce ***media*** un terzo numero ***b*** opportunamente calcolato tale che ***a<b<c***.

Sono il primo ad ammettere che come definizione e` una schifezza; aspettate un attimo, c'e` di peggio.

Ai tempi di ***Archimede*** venivano utilizzate ***tre*** medie, che sono poi quelle che utilizziamo anche noi: con la notazione sopraindicata, si ha quanto indicato nella solita tabella da qualche parte.

Media	Valore	Simbolo
Aritmetica	$b = \frac{a+c}{2}$	A
Geometrica	$b = \sqrt{a * c}$	G
Armonica	$b = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$	H

Credo sia abbastanza immediato capire perche` ci siamo limitati ai positivi; ***G*** e ***H***, con valori zero o minori, possono dare dei guai.

Ora, anche se Archimede si trovava benissimo con queste, la storia non si ferma qui; infatti, ***Eudosso*** non resiste e ne aggiunge altre tre.

La cosa nasce dal fatto che l'ipotesi di partenza non era quella di calcolare le medie, ma di trovare un costrutto "esteticamente valido" che giustificasse la fatica dei calcoli. Le formule che utilizzavano all'epoca erano piuttosto diverse da quelle che abbiamo dato qui sopra; in pratica si prendeva un'espressione ben precisa di ***a***, ***b***, ***c*** (in questo caso, l'espressione $\frac{a-b}{b-c}$) e si richiedeva fosse uguale ad un'altra grandezza, quest'ultima funzione della media che si intendeva calcolare. La cosa si esprimeva (simbolicamente: il secondo membro non e` una matrice) in questa forma:

$$\frac{a-b}{b-c}=\begin{pmatrix} \frac{a}{a} & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & \frac{b}{b} & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & \frac{c}{c} \end{pmatrix} \qquad [008.001]$$

Insomma, la nostra espressione viene posta uguale ad un elemento qualsiasi del secondo membro, e in questo modo si ottiene la media desiderata risolvendo in ***b***. Il secondo membro, in particolare, e\` ottenuto mantenendo fisso il denominatore delle frazioni rispetto alle colonne e mantenendo fisso il numeratore delle frazioni rispetto alle righe.

"*Oeu, Rudy, avevi detto sei e sono nove!*". Quelli che hanno parlato per punizione puliranno la lavagna; ogni elemento della diagonale maggiore e\` uguale a ***1*** e, (causa l'espressione del primo membro) si ha anche che $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ , ossia altri due elementi sono uguali tra loro. Il che ci porta a ***sei*** medie. Facendo un po\` di conti, salta fuori una graziosa tabella di questo genere:

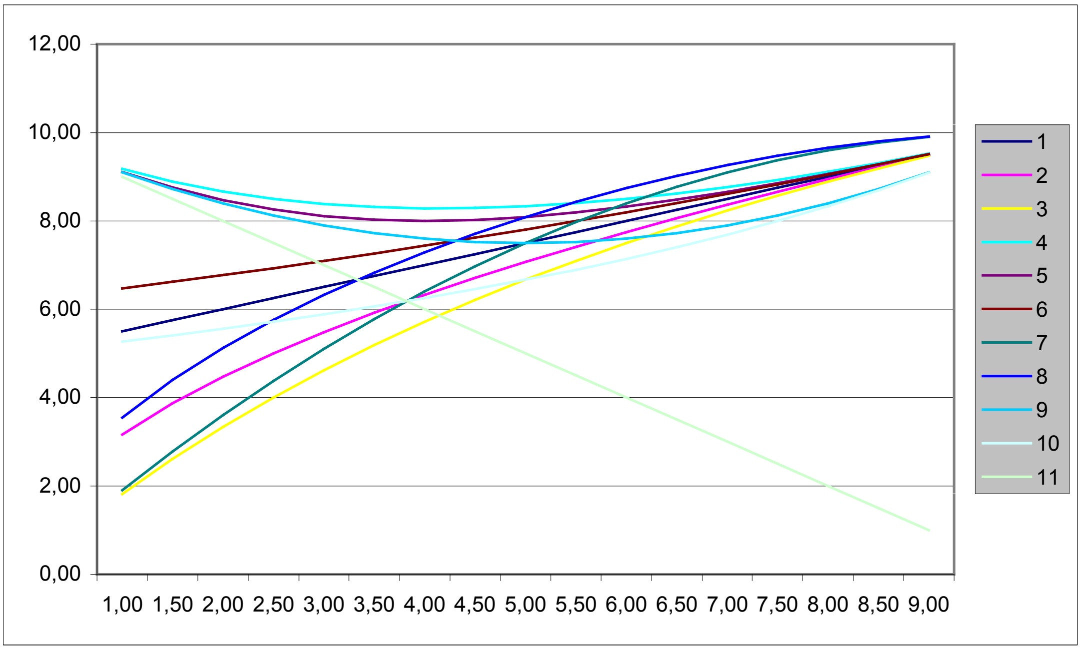
Espressione	**Elementi della "Matrice"**	**Note**
$A(a,c)=\frac{a+c}{2}$	$M_{11}=M_{22}=M_{33}$	Media Aritmetica
$G(a,c)=\sqrt{a*c}$	$M_{12}=M_{23}$	Media Geometrica
$H(a,c)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$	M_{13}	Media Armonica (o Subcontraria)
$K(a,c)=\frac{a^2+c^2}{a+c}$	M_{31}	Media Subcontraria dell'Armonica
$T(a,c)=\frac{a-c}{2}+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+c^2}$	M_{21}	
$C(a,c)=\frac{c-a}{2}+\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+a^2}$	M_{32}	

Visto, a seguire l'"armonia" dei procedimenti, dove si puo\` andare a finire?

E non crediate sia tutto qui; ***Mionide*** e ***Eufranore*** ne hanno aggiunte altre, per arrivare a dieci. In fin della fiera, usando le espressioni "classiche" e quelle "moderne", si ha una cosa di questo genere (le prime sei sono quelle che abbiamo gia\` visto, anche se le espressioni sembrano "un po\`" diverse):

1	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{a}=\frac{b}{b}=\frac{c}{c}$	$b=\frac{a+c}{2}$
2	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$	$b=\sqrt{ac}$
3	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{a}{c}$	$b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}$
4	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{a}$	$b=\frac{a^2+c^2}{a+c}$
5	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{b}{a}$	$b=\frac{c-a}{2}+\sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2+a^2}$
6	$\frac{a-b}{b-c}=\frac{c}{b}$	$b=\frac{a-c}{2}+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+c^2}$
7	$\frac{b-c}{a-c}=\frac{c}{a}$	$b=\frac{2ac-c^2}{a}$
8	$\frac{b-c}{a-c}=\frac{c}{b}$	$b=\frac{c+\sqrt{4ac-3c^2}}{2}$
9	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{c}{a}$	$\frac{a^2-ac+c^2}{a}$
10	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{b}{a}$	$b=\frac{a^2}{2a-c}$
11	$\frac{a-b}{a-c}=\frac{c}{b}$	$b=a-c$

"*Sono undici: secondo voi e` il caso, di dirglielo?*" Beh, si, questa volta avete ragione. Il fatto e` che qui cominciano ad esserci alcuni problemi: infatti, la ***7*** compare in ***Nicomaco*** (ma non in Pappo), mentre la ***10*** compare in ***Pappo*** (ma non in Nicomaco). In compenso tutti e due sono d'accordo a considerare come "media" quella schifezza della ***11*** che, in molti casi non rispetta neanche la regola che ***b*** sia compreso tra ***a*** e ***c*** (provate con ***5*** e ***4***, ad esempio). Siccome oltretutto la cosa sembrava troppo semplice, arriva il mio amatissimo ***Boyer*** che considera solo la lista di Nicomaco, inverte la ***8*** con la ***9*** e esprime la ***7*** e la ***11*** come inversi. E, nella mia copia, sono convinto ci sia un errore di stampa.



Capite che qui possiamo quasi tranquillamente scegliere un valore e poi chiamarlo "media"... Mi sono divertito (beh, quasi. Ho usato Excel) a vedere come si comportano le medie qui sopra: fissato ***c*** a ***10***, ho calcolato le "medie" con i valori di ***a*** da ***1*** a ***10*** e li ho tabulati: la nostra balordissima ***11*** anche qui spicca per il suo comportamento piuttosto eterodosso...

Comunque, lo trovo un risultato carino. Quel grande disaccordo all'inizio (per grosse differenze tra i due numeri) e poi la tendenza verso il valore ***10*** quando i due valori sono uguali, a me piace molto.

Bene, e allora?

E allora potreste fare un po` di esperimenti. Oppure proporre l'abolizione dell'undicesima. O provare a dimostrare queste interessanti proprieta`:

Dato un trapezio di basi **a** *e* **b***,*

1. *La lunghezza del segmento parallelo alle basi che lo divide in due parti di ugual area e` la* media quadratica *tra* **a** *e* **b**.
2. *La lunghezza del segmento parallelo alle basi equidistante dalle due basi e` la* media aritmetica *tra* **a** *e* **b**.
3. *La lunghezza del segmento parallelo alle basi passante per il punto di intersezione delle diagonali e` la* media armonica *tra* **a** *e* **b**.
4. *La lunghezza del segmento parallelo alle basi che lo divide in due trapezi simili e` la* media geometrica *tra* **a** *e* **b**.

Se non vi piace il trapezio, andatevi a vedere il ***PM*** del numero ***038***, che contiene alcuni interessanti problemucci (facilifacili) relativi alla serie armonica e al suo rapporto con le altre serie.

Visto che stiamo reincontrando alcuni vecchi amici...

Giusto per fare un po` di conti, prendiamo un numero (intero e positivo, che viene piu` semplice) e due suoi fattori, ossia $N = r_0 * s_0$, e proviamo a giocarci un po`. Ad esempio, definiamo le due successioni

$$\begin{cases} s_i = \dfrac{s_{i-1} + r_{i-1}}{2} \\ r_i = \dfrac{2}{\dfrac{1}{s_{i-1}} + \dfrac{1}{r_{i-1}}} = \dfrac{2s_{i-1}r_{i-1}}{s_{i-1} + r_{i-1}} \end{cases} \qquad \texttt{[008.002]}$$

Bene, da queste definizioni e\` facile vedere che

$$\forall i, r_i = \frac{N}{s_i} \qquad \texttt{[008.003]}$$

Inoltre, e\` sempre $r_i \leq s_i$, ossia *la media armonica e\` sempre minore o uguale della media aritmetica* e *la successione della media armonica e\` strettamente crescente, mentre la successione della media aritmetica e\` strettamente decrescente.*

Da queste ultime due si ricava quindi che *le due successioni convergono allo stesso valore* e, dalla **`[008.003]`**, si ha che e\`

$$\begin{aligned} & r_\infty s_\infty = K * K = N \\ & \Rightarrow K = \sqrt{N} \end{aligned} \qquad \texttt{[008.004]}$$

Ossia ***le due successioni convergono allo stesso valore che e\` la radice quadrata di N***[14].

Ora, una cosa del genere fa sospettare che ci sia un "di piu\`", ossia che anche le altre portino a qualche valore interessante. Beh, e\` vero "si e no": nel senso che convergere convergono, ma (almeno sino al prossimo ritardo) non siamo riusciti a capire "cosa siano" quei valori.

Se, per esempio, prendete ***a=5*** e ***c=1***, usando Excel (in una ventina di passaggi per ogni calcolo) vi accorgete che si arriva a delle costanti di questo tipo:

H	1.666666					
G	1.920117	2.236068				
A	2.236068	2.604008	3.000000			
C	2.478335	2.817266	3.195671	3.385165		
T	2.752647	3.215031	3.640492	3.834589	4.236068	
K	3.000000	3.370920	3.727765	3.901347	4.285166	4.333333
	H	**G**	**A**	**C**	**T**	**K**

Quindi le convergenze ci sono, tutte e ventuno. Contato che al sottoscritto ci sono voluti quattro anni per trovare il tempo di trovare la formula di una, se aspettate me per il numero millequindici vi do\` l'espressione della altre. *Questo e\` un implicito invito a darvi da fare*[15].

[14] I piu\` affezionati o vetusti lettori riconosceranno quella che avevamo soprannominato "La formula del Ghersi", presentata nel numero ***7*** della rivista. Si ringraziano l'Alitalia per il ritardo di tre ore del Torino-Napoli e la comodissima poltrona della Sala Vip "Vittorio Alfieri" che hanno permesso la dimostrazione.

[15] Beh, in realta\` qualcuna l'abbiamo calcolata (o meglio, l'ha calcolata Alice). Oltre a quella ***H-A*** gia\` vista, e\` facile vedere che la somma delle due medie ***K-H*** e\` costante ad ogni passo, e quindi converge alla media aritmetica tra i due termini. Come al solito, non ve la diamo nei problemi perche\` non abbiamo la soluzione finale.

Posto che la cosa non vi sembri proprio una meraviglia, vi ricordo che, se lavoriamo solo con la Geometrica e l'Aritmetica, ossia se costruiamo le successioni come

$$AG(a_0, c_0) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_{n+1} = A(a_n, c_n) \\ c_{n+1} = G(a_n, c_n) \end{cases} \tag{008.005}$$

allora, ***Gauss*** ha dimostrato che e\`:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2 * AG\left(1, \sqrt{1-k^2}\right)} \tag{008.006}$$

Il che non e\` poco, ammettetelo.

Non solo, ma se ci complichiamo un po\` la vita (attenzione che in uno dei secondi membri c'e\` un indice ***n+1***, facile da perdere di vista), allora ***Gregory*** ha dimostrato che

$$GH(a_0, c_0) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} a_{n+1} = G(a_n, c_n) \\ c_{n+1} = H(a_{n+1}, c_n) \end{cases} \Rightarrow GH(2,4) = \pi \tag{008.007}$$

Come abbiamo visto prima, questi "cosi" hanno l'interessante caratteristica di convergere molto rapidamente (Quanto? Interessante domanda...). Quindi, quello qui sopra e\` un ottimo metodo per calcolare le cifre di pigreco.

E se vi pare complicato, allegria che la prossima puntata e\` peggio.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

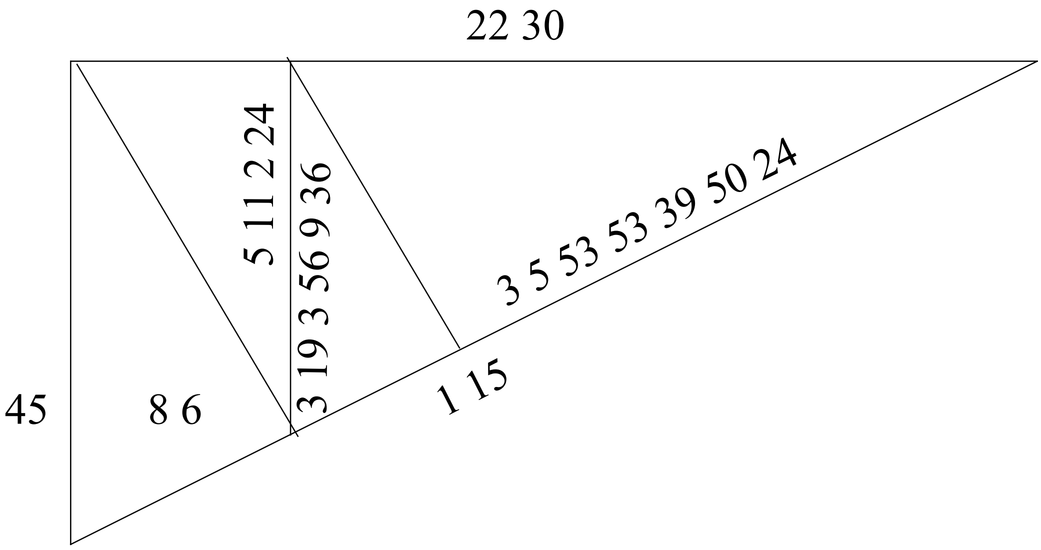
9. IM 55357

Questo pezzo rappresenta le opinioni personali dei redattori e non coinvolge la politica editoriale della rivista. Per questo motivo, le firme compaiono qui sopra e non al termine.

IM 55357 era molto ben conservata: praticamente integra, erano ancora visibili i segni delle dita dello scriba. Il testo era perfettamente leggibile e il disegno in testa molto esplicativo.

Il testo del problema era, approssimativamente:

"*Triangolo 1 lunghezza 1 15 lunghezza maggiore 45 lunghezza superiore 22 30 area totale da 22 30 area totale 8 6 e` l'area superiore 5 11 2 24 area vicina 3 19 3 56 9 36 area 3 5 53 53 39 50 24 circa e` l'area inferiore. La lunghezza superiore la lunghezza inferiore e perpendicolare quali sono?*"



Il testo proseguiva calcolando le aree dei diversi triangoli; il tutto in base sessagesimale e non utilizzando un simbolo per lo zero, ma scrivendo ad esempio ***50 3*** per intendere ***53*** in base ***60***. Rappresentava la prima applicazione nota dei Teoremi di Pitagora e Euclide.

Noterete che parlandone abbiamo utilizzato un tempo passato.

IM 55357 e` stata rubata o distrutta durante il sacco del Museo di Baghdad.

Contrariamente ai pozzi di petrolio, nessuno aveva ritenuto opportuno organizzare un servizio di sorveglianza.