Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Maggio - Anno Quinto

1. Nemesi

C'e` un aspetto triste nell'avanzare della primavera: la scomparsa del cielo notturno invernale. Almeno per quelli che vivono nella zona temperata boreale, il cielo d'inverno riserva spettacoli migliori di quanto riescano a fare le notti della bella stagione. Sirio brilla d'un azzurro irritante nel Cane Maggiore e, subito sopra di lei, Orione trionfa. Dire che Orione e` la piu` bella costellazione del cielo e` un po` come dire che Bach era un bravo canzonettista: e` talmente ripetuto e ovvio, il concetto, che rischia seriamente di venire a noia. Ma, come spesso accade con i luoghi comuni, il fatto che sia risaputo nulla toglie al fatto che sia vero.

Anche chi non e` abituato a guardare il cielo di notte, rapidamente nota le tre stelle che formano la "cintura di Orione". Ravvicinate, quasi esattamente in linea, equispaziate, e quasi della medesima luminosita`. Anche chi non riconosce Orione, una volta che gliele si indichi e riveli, ammette in genere di aver gia` notato le tre stelle della cintura. A quel punto basta poco per passare dalla cintura all'abito che quella cintura stringe: una tunica, quasi impossibile non vederla, subito dopo. Con la rossa Betelgeuse (la "Spalla") e Bellatrix a disegnare la parte superiore, e Rigel biancazzurra (il "Piede") a delimitare la parte inferiore. Non che ci sia da aspettarsi un disegno perfettamente antropomorfo, ma una volta individuata la cintura, il resto viene da sé: poi, cominciano le sorprese. Appesa alla cintura Orione ha la Spada, e difficilmente possono immaginarsi spade piu` belle di questa: e` qui che dorme la Nebulosa di Orione, forse la piu` spettacolare tra quelle visibili ad occhio nudo. Quello che invece molti non vedono e` l'Arco. Orione e` il cacciatore per antonomasia, e se si seguono anche le stelline di magnitudine minore, si vede che un po` in alto, a destra rispetto a Bellatrix, Orione sta tendendo un arco di stelle.

Una costellazione e` quanto di piu` impalpabile esista. Anzi, e` cosi` tenue che anche parlare della sua esistenza e` rischioso. Il gruppo di stelle che arbitrariamente raggruppiamo in una costellazione e` tale solo per i nostri occhi ancorati alla Terra, e solo dopo che abbiamo prospetticamente schiacciato lo spazio tridimensionale in una inesistente "volta celeste" bidimensionale. E` totalmente arbitrario, ma e` bello. Contiene anche l'arroganza massima, quella di antropomorfizzare le cose infinitamente piu` grandi dell'uomo. Abbiamo bisogno di aiuti, mappe, storie. Cosi', ad esempio, ci basta ricordare l'arroganza del cacciatore Orione che dichiaro` baldanzosamente di essere in grado di uccidere qualsiasi animale, per ritrovare Antares.

Seguendo la trama romanzesca, e` facile ricordare che la Terra (Gea) si adiro` per la tracotanza di Orione e gli mando` contro uno scorpione che lo trafisse e uccise. Grazie ad Esculapio Orione resuscitò, ma rimase con una forte (e comprensibile) antipatia per gli scorpioni. A che serve ricordare l'aneddoto mitologico? Ad esempio serve a capire perché Orione e Scorpione sono costellazioni opposte nel cielo, il piu` lontano possibile l'una dall'altra, e tali che se una sta sorgendo ad Est, l'altra sta tramontando ad Ovest. Cosi', se volete trovare Antares, la fiammeggiante alfa dello Scorpione, sapete che dovete cercarla dalla parte opposta di dove vedete Rigel.

Per quanto affezionati estimatori della razionalita`, noi di RM abbiamo anche compassione dell'astrologia. E` spudoratamente falsa in ogni sua previsione, ma e` un gran bel gioco intellettuale, se fatta a dovere. Come altri metodi di divinazione, parte dal presupposto che l'intero Universo sia in relazione con gli eventi individuali. Come i bastoncini dell'I Ching, come il volo degli uccelli o le crepe su un osso calcinato della scapulomanzia. Solo che, come effetto collaterale, potrebbe insegnare un po` di astronomia sferica, e raccontare un po` di storie che fanno parte dell'infanzia dell'uomo. Non ci vuole molto ad associare Venere all'amore, Giove alla potenza, Plutone alla parte piu` oscura del carattere, se si e` gia` sentita raccontare la soap-opera dell'Olimpo: e diventa allora facile cercare quei caratteri dominanti di amore, potenza e lato oscuro degli uomini in concordanza con la posizione di quei pianeti nel cielo al momento della nascita. Da qui in avanti basta proseguire; ancora arbitrariamente, certo, ma in maniera quasi ovvia e naturale: la "congiunzione" e` positiva da che mondo e` mondo, e sfido chiunque a non vedere nelle congiunzioni astrologiche qualche parentela con congiunzioni assai piu` terrestri. L'opposizione, per contro, deve avere una valenza diversa, ma non totalmente negativa: due opposti sono nemici ma simmetrici, e in genere complementari. Invece, quasi a celebrare un principio geometrico, e` quasi sempre la "quadratura[1]" ad avere la connotazione peggiore: quella che in geometria e` l'ortogonalita`, l'indipendenza lineare, la non-visibilita`. E` Marte il vostro pianeta guida, e adesso e` in quadratura con Venere? Rinunciate all'idea di invitare al cinema la brunetta del secondo piano[2].

Anzi, non rinunciate, fatelo! Invitatela, la brunetta. Le previsioni sono false, ma il gioco di immaginare relazioni e legami tra il cielo e i nostri ormoni e` appassionante. Ed e` importante saper calcolare il moto di un pianeta. L'astrologia non e` la voce alla

[1] Siate geocentrici e tolemaici, e immaginatevi la Terra al centro delle orbite dei pianeti. Se in un dato momento due pianeti sono piu` o meno nella stessa zona del cielo (prospetticamente visti dalla Terra) si dice che sono in congiunzione. Se sono a circa 180 gradi l'uno dall'altro, in opposizione. La quadratura si ha quando sono a circa 90 gradi, e il trigono a 120.

[2] Come al solito, "la brunetta del secondo piano" e` un luogo dello spirito, piu` che un personaggio reale. Cambiatela pure con "il fusto biondo che fa il garzone dal macellaio", o con "quel gran coccodrillo squamoso dal sorriso brillante", a seconda dei vostri gusti.

radio che dice: "Toro: attenti alle stringhe delle scarpe". E` qualcosa di molto diverso, anche se niente affatto migliore come strumento previsionale: ad esempio, dopo cena, potrete chiedere alla brunetta di che segno sia. E` vero che questo lo chiedono proprio tutti, ma volete mettere l'effetto, dopo che lei ha gorgheggiato la risposta "Gemelli...", se gli mostrate in cielo il grosso rettangolo a sinistra delle Pleiadi? Se poi gli indicate esplicitamente Castore e Polluce, magari concionando un po` sugli insoliti costumi della loro mamma Leda, il successo e` assicurato. La mitologia e` quanto di piu` lontano dal metodo scientifico possa esistere, e per questo torna sempre utile per introdurre qualsiasi argomento. Come piccolissimo esempio, considerate questo: e` certo che la Leda sopra citata sia stata sedotta da Giove, per l'occasione travestito da cigno. Ma anche se quasi tutti concordano che i Dioscuri (nome d'arte dei summenzionati Castore e Polluce) sono gemelli, alcuni affermano che siano entrambi figli di Zeus, altri invece dicono che solo Polluce avesse cotanto papa`, mentre Castore dovrebbe essere disceso dal seme di Tindaro. Ci vorrebbe un biologo molecolare, per capirci qualcosa.

Però, ecco: Leda e il Cigno li trovate ritratti in molti quadri (e se la brunetta e` un'artista, si puo` a questo punto passare ad invitarla a vedere la splendida riproduzione del Tondo Doni che avete in soggiorno), e se invece non avete ancora scoperto quale cosa accende di piu` la sua passione, passate ad altro. Non avete a disposizione il cielo invernale e il suo magico splendore? (Meglio, in fondo... d'estate fa piu` caldo, a star fuori a contar le stelle...) allora su, nelle calde notti estive: verso lo zenit, a rimirare il grande Triangolo Estivo. E` li che sta il Cigno di Leda, e la stella di coda, Deneb, e` uno dei tre vertici del triangolo completato da Vega e Altair. Se la fanciulla adora gli sceneggiati, presentarle la costellazione che fa da "papa`" al suo segno zodiacale e` un autentico "coup de teathre".

E se invece alla fanciulla piace la matematica?

Beh, e` un po` piu` difficile, ma non impossibile. Restate pure sul Cigno che incanto` Leda; tralasciate i due gemelli, e parlatele della loro celeberrima sorella: Elena di Troia. La bellezza per antonomasia, la passione che scatena le guerre. Elena pure e` figlia di Leda, secondo la maggior parte delle fonti, anche lei nata dall'uovo del Cigno. Ma qui le fonti moltiplicano le versioni, e si puo` scegliere quella che piu` aggrada. Una versione del mito dice infatti che Leda, regina di Sparta, si limito` a ricevere in regalo l'uovo fecondato da Zeus, mentre colei che cedette le proprie grazie al padre degli dei travestito da pennuto (e che depose l'uovo famigerato) fu un'altra donna. Anzi, una dea.

Nemesi.

Fu lei a deporre l'uovo del Cigno, dal quale nacquero poi Castore, Polluce, Elena e Clitennestra. Fu la Giustizia. Ma una giustizia punitrice, non regolamentatrice: Nemesi e` anche sinonimo di "vendetta"[3]. E se e` piacevole notare come la suprema bellezza di Elena sia vista come figlia della Giustizia, e` assai meno rassicurante leggere nei dieci anni della guerra di Troia un lungo susseguirsi di vendette. Ma, non appena afferrata la Nemesi, la giusta vendetta, possiamo guardare negli occhi la brunetta del secondo piano, lasciare che si spengano i riflessi[4] di Deneb e di Albireo, e cominciare a raccontarle il dramma di Gottlob Frege.

[3] "Nèmesi – s.f. Espiazione fatale di una colpa; vendetta | *Nemesi Storica*, ipotetica giustizia che, attraverso la storia, colpisce nei discendenti le ingiustizie dei progenitori." – Dizionario Garzanti OnLine

[4] Quello che dei tre redattori fuma la pipa ha da tempo immemorabile un progetto nel cassetto: scrivere un libro sulla "Astronomia ad Occhio Nudo". Se l'idea vi piace, scrivetegli e fategli una ramanzina sollecitatoria, a quello sfaticato.

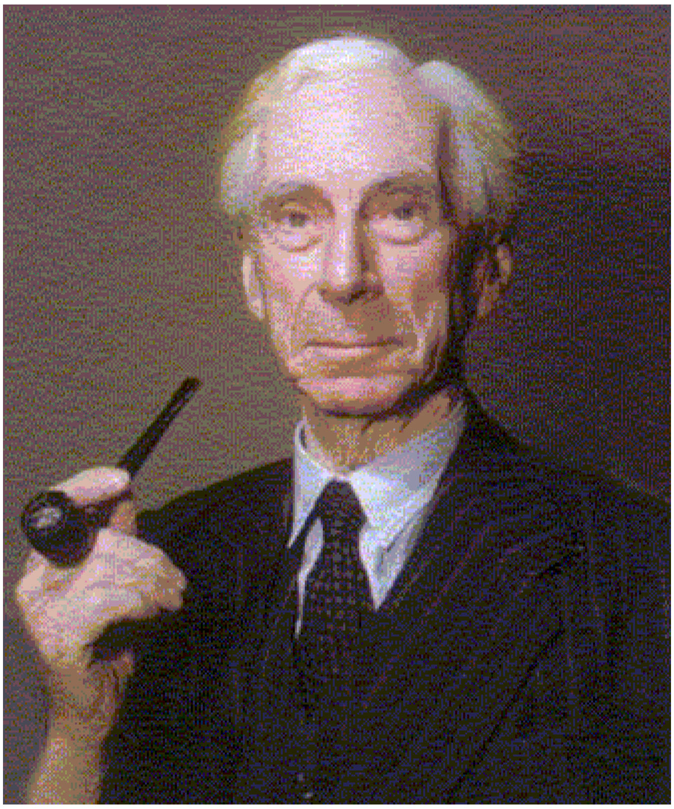
Esistono dei momenti storici in cui una disciplina sembra particolarmente "matura", e solitamente in questi momenti gli studiosi sono tentati di riassumere in un grande compendio, quando non addirittura in una vera e propria opera di fondazione, tutto lo scibile della disciplina stessa. Tra la fine del diciannovesimo e l'inizio del ventesimo secolo si ebbe uno di questi momenti per la matematica. Basta scorrere velocemente la cronologia delle pubblicazioni: Peano nel 1889 tenta l'assiomatizzazione dell'aritmetica; nel 1900 Padoa pubblica la sua "Introduzione Logica ad ogni Teoria Deduttiva"; Hilbert, nel 1904, si cimenta con i "Fondamenti della Logica e dell'Aritmetica" e nello stesso anno cominciano ad essere pubblicate una serie di fondamentali memorie di Zermelo; e la cosa continuava e cresceva, alimentata da lettere e osservazioni di nomi quali Dedekind, Cantor, e altri. Da dove veniva una tale pletora di scritti che miravano alla rifondazione delle scienze dei numeri? Cosa aveva scatenato una tale ricerca dei fondamenti?

Il punto di inizio di tutto era stata la pubblicazione di *"Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens"* ("Notazione Concettuale, un linguaggio formale sul modello di quello dell'aritmetica, per il pensiero puro") di Frege, la cui prima edizione vide la luce nel 1879. L'opera di Frege e` il primo tentativo di riduzione della matematica alla logica. Era un'opera prima, ma decisamente rivoluzionaria: nel tentativo di celebrare il definitivo matrimonio tra matematica e filosofia (la Logica era considerata una delle colonne della filosofia gia` da Aristotele), Frege introduce il calcolo proposizionale, che consente di trarre derivazioni logiche solo in base alla forma notazionale, svincolandosi dal contenuto. I suoi debiti con la notazione di Boole erano evidenti, ma lo scopo era decisamente piu` alto; mediante l'utilizzo di pochi assiomi e di regole di implicazione, negazione, generalizzazione e sostituzione, Gottlob riusci` a ricondurre a pura logica la matematica.

Beh, quasi.

Tra il 1879 e il 1902, Frege lavoro` quasi esclusivamente alla seconda edizione della sua opera. Ventitré anni di lavoro dedicati totalmente al raffinamento, revisione, estensione e stesura definitiva di quella che sentiva essere un caposaldo della matematica, oltre che l'opera definitiva di una vita di lavoro. Nel 1902, dopo quasi un quarto di secolo dall'inizio della revisione, consegna le bozze in tipografia e corona il suo sogno professionale. Mentre il libro viene macinato dalle rotative, il cinquantaquattrenne matematico tedesco riceve una lettere d'un trentenne collega gallese. Piu` tardi, Frege commento` la sensazione che gli provoco` quella lettera con queste parole, rimaste famose:

"Non c'e` niente di piu` spaventoso, per uno scienziato, che scoprire che i fondamenti del suo lavoro sono stati spazzati via proprio quando ha appena terminato l'opera d'una vita. Io sono stato messo in questa situazione da una lettera del signor Bertrand Russell.



Bertrand Arthur William Russell nasce il 18 Maggio 1872 a Ravenscroft, e non si puo` certo dire che le sue origine fossero plebee. La famiglia fa parte della nobilta` inglese, e il nonno paterno di Bertrand e` Lord John Russell, che ricopri` per ben due volte la carica di Primo Ministro durante il regno della Regina Vittoria; la qual cosa lo ha probabilmente reso l'uomo piu` potente del mondo, per un certo periodo. Ma le nobili origini non garantiscono un'infanzia felice: Bertrand perde la madre quando ha solo due anni e il padre nel 1876, quando ne ha appena quattro. Affidato alle cure dei nonni (per continuare la serie delle buone notizie, perdera` poi il nonno all'eta` di sei anni), viene educato prima da precettori privati, per entrare infine al celeberrimo Trinity College di Cambridge. Qui si diploma sia in Matematica che in Scienze Morali, ed e` probabilmente proprio l'etica ad appassionare maggiormente Russell: la sua carriera accademica inizia brillantemente e gia` nel 1908 raggiunge l'alloro dell'ammissione alla Royal Society, ma viene repentinamente stroncata nel 1916, quando Bertrand si oppone con tutte le sue forze alla Grande Guerra. Fu processato per attivita` pacifiste, e condannato a sanzioni amministrative: nel 1918, recidivo, fu nuovamente processato e condannato, stavolta al carcere, dove sconto` sei mesi di reclusione[5]. E, avendo fondato il Movimento per il Disarmo Nucleare, venne ancora condannato nel 1961 a due mesi di carcere commutati (visto che si trattava di un ragazzino di 89 anni) in una settimana di reclusione nell'ospedale della prigione.

Come si capisce anche dal poco detto finora, e` difficile dare una sola etichetta a Bertrand Russell. Fu certamente uno dei piu` grandi logici di tutti i tempi, e questo lo classifica inevitabilmente come filosofo. Lui amava definirsi "neopositivista logico", e non esiste manuale di filosofia che non dedichi a lui e al neopositivismo logico ampie pagine. Come si e` visto, era fortemente impegnato sul fronte delle liberta` sociali ed etiche, al punto da finire in galera per questioni di principio: ma era anche e soprattutto un matematico. Non vinse mai la Medaglia Fields o il Premio Wolf, a dire

[5] Come dice il proverbio, non tutto il male viene per nuocere: per ingannare il tempo, Russell in galera scrive "Introduzione alla Filosofia Matematica". Se non trovate mai il tempo di scrivere (cfr. nota precedente),provate a rapinare una banca: se vi va bene, potrete vivere di rendita e dedicarvi alla scrittura; se vi dice male, beh, si puo` sempre provare ad imitare Bertrand.

il vero[6]: pero` fu uno dei pochi matematici ad essere insigniti del Nobel. Anche in questo caso brilla la sua straordinarieta`, comunque: prendete una qualsiasi storia della matematica, e scoprirete con facilita` che diversi nomi degni di essere ricordati come matematici di rango vinsero il premio svedese: quasi tutti si accaparrarono quello per la Fisica, anche se negli ultimi anni (anche perché prima non esisteva) i matematici sembrano raccogliere piu` facilmente il Nobel per l'Economia[7]. C'e` un solo grande matematico che vinse il Nobel in una disciplina ancora diversa: Bertrand Russell vinse nel 1950 il Nobel per la Letteratura[8].

Nulla di tutto questo e` in grado di scalfire la radicata identita` di matematico di Bertrand Russell. La lettera che getto` Frege nello sconforto conteneva, anche se in maniera diversa da come lo si racconta colloquialmente, i principi di quello che oggi e` noto come "Paradosso di Russell". I Fondamenti di Frege utilizzavano il concetto di insieme, e il paradosso di Russell mette in crisi alcuni aspetti fondamentali dell'insiemistica. Si puo` esporre in moltissime forme diverse, e, da quando l'autoreferenza e` diventata di moda, lo si ritrova spesso anche dove meno ce lo si aspetta. Una delle forme piu` semplici per raccontarlo, potrebbe essere questa:

1. Si chiami "normale" un insieme che non contiene sé stesso. Il fatto di chiamarlo "normale" discende dal fatto che normalmente gli insiemi non contengono sé stessi come elementi: un gregge di pecore non e` esso stesso una pecora, l'insieme dei triangoli non e` un triangolo. Esistono pero` insiemi (che potremmo chiamare "speciali[9]") per cui la cosa si verifica: "l'insieme di tutti gli insiemi" e` il classico esempio per questa classe, ma, rinunciando ad un po` di rigore e prendendoci qualche liberta`, potremmo portare l'esempio del "catalogo di tutti i cataloghi", che, qualora volesse davvero registrare al suo interno tutti i cataloghi esistenti, dovrebbe essere abbastanza preciso da citare anche sé stesso.
2. Chiediamoci ora se l'insieme costituito da tutti gli insiemi "normali" sia un insieme "normale" o "speciale". Si vede subito che se e` normale, non puo` contenere sé stesso, e quindi (visto che tutti gli insiemi normali sono in esso contenuti) non e` normale. Non resta che concludere che si tratti allora di un insieme "speciale", tale cioe` da includere anche sé stesso come elemento: ma, per definizione, uno "speciale" non puo` rientrare nell'insieme di "normali", e quindi il paradosso prende trionfalmente il volo.

Non sembra poi cosi` terribile, il famoso paradosso: ma basto` a distruggere gran parte dei teoremi dell'opera di Frege; quel che e` peggio, ne distrusse l'intenzione di generalita` che l'autore perseguiva. Frege riusci` a correggere alcune parti della sua

[6] Fu insignito comunque della Medaglia Sylvester della Royal Society nel 1934 e della De Morgan nel 1932.

[7] Il premio Nobel per le Scienze Economiche non è, almeno tecnicamente, un "premio Nobel": istituito solo nel 1969 dalla Banca di Svezia, e` denominato "premio alla memoria di Alfred Nobel", ed e` quindi un po` diverso dagli originali premi dedicati alla Chimica, Fisica, Medicina, Letteratura e Pace. Sia come sia, i soldi che arrivano in tasca ai vincitori sono esattamente gli stessi delle altre discipline.

[8] Da matematico, Russell aveva difficolta` a vincere il Nobel per la Matematica, che non esiste: da matematico "teorico", aveva poche speranze a vincerlo per scienze come la Fisica o la Chimica, e men che mai per la Medicina. A noi sarebbe sembrato invece il candidato ideale al Nobel per la Pace, ma sembra che quest'ultimo eviti accuratamente di finire nelle tasche di chi si oppone troppo palesemente al potere costituito, forse perché e` inevitabilmente il piu` "politico" dei Nobel. L'ultima scappatoia era la Letteratura, anche se sembra la strada piu` difficile da percorrere, per un matematico. Infatti, lo vinse come filosofo: l'opera citata nella motivazione dei saggi di Stoccolma e` la sua "Storia della Filosofia Occidentale".

[9] Alcuni testi chiamano gli insiemi di questo tipo "insiemi-R", dove la "R" ricorda proprio il nome di Russell.

opera, dopo aver conosciuto la critica russelliana, ma il risultato finale ebbe comunque l'effetto di un uragano su un villaggio vacanze.

Lo stesso Russell intraprese poi il progetto grandioso di un'opera di "fondazione"; anzi, probabilmente il suo progetto fu di dimensioni maggiori di quelle dello stesso Frege. Insieme ad Alfred North Whitehead, Russell scrisse negli anni che vanno da 1910 al 1913 un'opera davvero monumentale, dal titolo non meno ambizioso: i "Principia Mathematica". A differenza di quella di Gottlob Frege, che tutto sommato ebbe bisogno di essere scoperta e valorizzata con il passare del tempo, i Principia si presentano immediatamente sulla scena matematica come strumento di importanza capitale, pietra miliare di tutte le future argomentazioni nel campo. In fondo, l'argomento sembrava ormai davvero maturo, e Russell era anche corazzato dagli errori formali dei predecessori: non a caso, era stato lui stesso lo scopritore delle maggiori debolezze del sistema.

Quella che segue, dal 1910 al 1930[10], e` una escalation quasi senza precedenti di pubblicazioni e memorie fondamentali. I nomi di Wiener, Lowenheim, Skolem (con un numero incredibile di note), Post, Fraenkel, Brouwer, Von Neumann, Hilbert, Kolmogorov, Weyl e altri ancora si susseguono nell'attacco alle sorgenti della matematica e della logica. Ma il momento cruciale e` datato 1930.

Gli occhiali tondi e spessi celavano lo sguardo di un giovane di Brno, in quell'anno. Kurt Godel era infatti nato nel 1906, in quella che era allora terra austroungarica. E se Frege aveva 54 anni, quando il trentenne Russell demolisce la sua opera, e` adesso un Russell quasi sessantenne che deve sostenere gli attacchi di un brillantissimo ventiquattrenne. Il titolo della Nemesi russelliana suona così: "*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme",* ovvero "Su proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e sistemi correlati". In altre parole, era il teorema di Godel che vedeva la luce: il teorema che, a tutt'oggi, resta il punto di arrivo della ricerca dei fondamenti della matematica. Ai matematici si apre lo spettro delle proposizioni indecidibili, un intero universo logico che risiede oltre i familiari concetti di "vero" e "falso". Ai ricercatori del sistema definitivo, si mostra con logica stringente, figlia essa stessa della matematica, che tanto piu` un sistema e` universale tanto meno puo` essere completo, e viceversa.

E Bertrand Russell si deve essere sentito in una maniera non troppo diversa da come si era sentito Frege ventotto anni prima.

Nemesi. La spietata genitrice di Elena di Troia, disegnata nel fumo della pipa di Lord Bertrand Russell. A voler essere ottimisti, bisognerebbe aggiungere che, per qualche ragione, le rivoluzioni in matematica sono quasi sempre piu` dolci di quelle di altre scienze. Un sistema fisico, quando crolla, crolla in genere per intero, e quello che si salva si salva solo come artificio didattico. In matematica, spesso i "percorsi verso i risultati" rimangono validi, anche quando i risultati non lo sono più. Nei Principia Mathematica di Russell e Whitehead c'e` una quantita` enorme di buona matematica, anche se il sistema non e` completo come i suoi autori speravano e credevano. L'opera di Frege rimane un capolavoro, nonostante i vizi scoperti da Russell: anzi, in parte, fu proprio Russell a pubblicizzare l'importanza del lavoro del matematico tedesco[11].

[10] Per chi ama curiosita` e coincidenze ed e` propenso a credere ai marziani, uno spunto promettente per un romanzo potrebbe essere il fatto che i primi trenta anni del Novecento sono stati assolutamente rivoluzionari sia per la Matematica che per la Fisica (basti citare il piccolo capolavoro di Gorge Gamow "I trent'anni che sconvolsero la Fisica", che racconta proprio le rivoluzioni succedutesi tra il 1900 e il 1930): anche il famoso meteorite siberiano di Tunguska dovrebbe essere ben inserito nel periodo, quindi... .

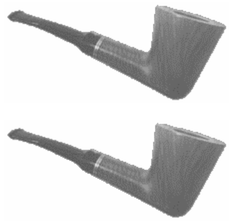
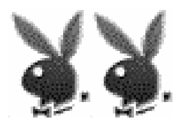
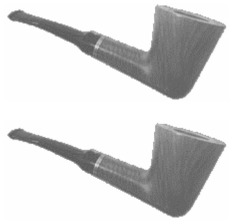
[11] "*In spite of the epoch-making nature of Frege's discoveries, he remained wholly without recognition until I drew attention to him in 1903.*"- (Nonostante l'importanza epocale delle scoperte di Frege, egli rimase del

Forse, arrivare a Godel attraverso Russell e Frege, partendo dal Triangolo Estivo, dal Cigno e dalla Nemesi, e` un percorso troppo lungo e complesso, anche se alla brunetta piace la matematica. Forse e` assai meglio un buon film e un'ottima birra: di solito, le matematiche adorano le medie rosse doppio malto e le commedie brillanti. Se pero` volete provarci lo stesso, beh... il triangolo si vede facile: Vega e` quella che brilla di più, e si trova spesso quasi esattamente allo zenit, specie se abitate tra i 40 e 45 gradi di latitudine nord. Deneb e` la piu` brillante del Cigno, che si vede bene, perché e` a forma di croce, tanto che qualcuno la chiamava addirittura "la Croce del Nord", in contrapposizione alla piu` famosa e brillante Croce del Sud. Da qui ai Gemelli, Castore e Polluce, Elena, Zeus e Nemesi, la strada la conoscete gia`. Tanto per completezza, ricordate che il terzo vertice del triangolo e` Altair, che e` la stella piu` brillante dell'Aquila[12]. A questo punto, non resta altro che imitarla, l'aquila, e volare veloci in picchiata all'attacco.

tutto senza riconoscimenti, finché io non lo portai all'attenzione generale nel 1903) – Bertrand Russell, "Storia della Filosofia Occidentale".

[12] Aquila che, a ben vedere, ha un ruolo tutt'altro che trascurabile proprio nella storia della seduzione di Zeus/Cigno con Nemesi/Leda. Ma, perdiana, questa e` una rivista di matematica, mica il Kerenyi: cercatevele da soli, le altre cose divertenti.

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Al Ristorante Cinese			
La Vecchia Pendola!			

2.1 Al Ristorante Cinese

Allora, bisogna andare un po' per tentativi, ma io mi sono divertito.

Al ristorante cinese hanno un menu` con ***9*** piatti, e siamo in ***5*** a mangiare. Ordiniamo quindi cinque piatti, non necessariamente distinti.

Il cameriere ci porta in silenzio i piatti, li posa in mezzo al tavolo e se ne va. A questo punto (come sempre al ristorante cinese) ciascuno comincia a "pescare" dai piatti comuni. Individuare il contenuto dal gusto e`, come sempre in questi casi, una pia illusione, pero` dall'aspetto dei piatti possiamo trarre delle conclusioni (ad esempio, se due hanno ordinato "scarafaggi fritti con formiche caramellate", gli altri tre si sono lanciati su piatti diversi tra loro e vediamo due piatti uguali, siamo in grado di capire).

Sopravvissuti alla prima esperienza, siamo tornati altre due volte al ristorante e, avendo ordinato almeno una volta ogni piatto, siamo in grado di capire cosa e` cosa nel menu`.

Ora, quello che vorremo sapere e`: *cosa abbiamo ordinato ogni volta* (chiamate i piatti A,....I, per favore)?

Ma secondo voi, se il menu avesse contenuto ***10*** piatti, ci saremmo riusciti?

2.2 La vecchia pendola!

Ve la ricordate, si', la pendola di Doc, quella matta? Bene, partiamo dal principio funzioni bene.

Quali e quante sono le posizioni tali che, scambiando la lancetta delle ore con quella dei minuti e viceversa, si abbia ancora una posizione ***reale***?

Attenzione: per "reale" intendo che potrebbe prodursi per movimento proprio dell'orologio.

3. Bungee Jumpers

Trovare tutti i triangoli con lati interi per cui il perimetro e` pari all'area.

Grande Sagra del **Pesce Algebrico -** Frazione Calde` di Castelveccana
(Luino sul Lago Maggiore)
2-3 Agosto 2003

Difendere i Lettori dal Deviazionismo dei Lavori in Corso! [RdA]

Nella foto di repertorio, il Comitato di Redazione spiega ad un gruppo di disorientati lettori di RM la Via per la Sagra del Pesce Algebrico.

4. Soluzioni e Note

Come (forse non) vi abbiamo detto, stiamo riorganizzando l'ufficio postale. Tra le altre cose, vorremmo evitare le (giuste) lamentele del tipo "Non avete neanche scritto che vi ho mandato la soluzione!". Allora, oltre alle ricevute di ritorno che il GP (Grande Postino) vi manda, vorremmo sintetizzare qui lo stato della corrispondenza del mese. Se non vi ritrovate, e` perche` anche con i migliori metodi qualcosa riusciamo comunque a perdere.

Num.	Data-Ora Mail	Allonimo	Soluzioni	Note
1	1/4/03 12.14	Gas	RM051 - 2	Gas annoiato a lezione...
2	1/4/03 13.45	Pmp	RM051 - 2	.mau. molto impegnato in trasloco.
3	1/4/03 15.29	Roberto	RM051 - 2	con algoritmo ricerca, in copia a BraMo.logicar
4	2/4/03 10.13	Luca	RM051 - all	solo risultati
5	2/4/03 10.29	Roberto	RM051 - 2	Roberto strikes back, piu` completo del primo.
6	2/4/03 11.07	TNT	RM051 - 2	Esplicita dalla formula del giovane Gauss... :-)
7	2/4/03 11.25	Pmp	RM051 - 1	Solo risultato. 22 minuti dopo, il programma
8	2/4/03 13.43	BraMo logicar	RM051 - 2	Proposte di generalizzazione
9	2/4/03 15.27	Viggio	RM051 - 1	...ma e` merito dell'Italiana in Algeri di Rossini
10	2/4/03 23.54	Desmatron	RM051 - 1	ovvero Lourdes come alternativa ai polsi del croupier
11	2/4/03 23.42	BraMo logicar	RM051 - 2	Espansioni...
12	3/4/03 10.45	Roberto	RM051 - 2	e controespansioni al millennium bug...
13	3/4/03 13.08	Desmatron	RM051 - 2	Esatto il calcolo, sbagliato il latino
14	3/4/03 16.59	Chiqua`	RM051 - all	Pulci e superpulci...
15	3/4/03 22.00	Filippo Pinna	RM051 - 2	Fulminante.

16	4/4/03 9.19	BraMo logicar	RM051 - 2	Ancora sulle espansioni
17	4/4/03 18.21	Luca	RM051 - all	Dalla necessita` alla sufficienza
18	7/4/03 11.20	BraMo logicar	RM051 - 2	Errata-corrige (...ma avevamo capito!)
19	7/4/03 11.34	BraMo logicar	RM051 - 2	Bramo dixit. Fine espansioni (finalmente!)
20	7/4/03 18.09	TNT	RM051 - 1	Sei cicli for-next e voglia di generalizzare...
21	8/4/03 0.33	Icewolf	RM051 - 2	"...purtroppo, hanc marginis exiguitas..." TZE!
22	8/4/03 11.25	Roberto	RM051 - 1	Perche` non tutti i dadi hanno SEI facce...
23	8/4/03 15.00	Sam	RM051 - 2	Di corsa, che ha un sacco di cose da fare!
24	8/4/03 16.20	Pmp	RM051 - 1	Il Determinismo Ironico e il Ciclo di Stirling
25	9/4/03 0.52	Icewolf	RM051 - 2	Oh, bene. Si e` allargato il margine.
26	12/4/03 10.03	Gas	RM051 - 2	Errata corrige della fine del millennio
27	19/4/03 20.41	Hannibaal	RM051 - all	Last but not least, a new entry!

...commenti a cura della GO (Grande Organizzatrice). Ci sono tutti? Bene, veniamo ai contenuti.

4.1 [051]

4.1.1 Dura molto?

Allora, la prima risposta (tanto per cambiare) ci arriva da ***PMP***, anche se non e` che sia piaciuta molto. Infatti, il Nostro ha scritto un grazioso programmino in *perl* che gli ha fatto tutti i conti. Come ama dire un nostro amico americano (uno dei pochi fumatori rimasti *on the wrong side of the Pond*), "Good, but no cigar!". Comunque, quantomeno ci ha tranquillizzato sull'esatteza dei nostri calcoli; infatti, ottiene un luminoso ***23***. Ora, come ha argutamente risposto Doc, cosi` non vale...La base dell'algoritmo e` presto detta:

> Dopo un lancio, ci sara` necessariamente uno e un solo valore apparso.
>
> In seguito, al lancio ***n***
>
> - Sara` apparso un solo valore con probabilita` $\left(\frac{1}{6}\right)^{(n-1)}$, quindi ricorsivamente dividendo per ***6*** il valore precedente;
> - Saranno apparsi ***k*** valori se nel caso prima ce n'erano ***k-1*** e ne abbiamo uno nuovo (probabilita` $\frac{7-k}{6}$ rispetto al caso precedente) oppure ce n'erano ***k*** e non ne abbiamo nessuno nuovo (probabilita` $\frac{k}{6}$ rispetto al caso precedente).

L'unica cosa che lo salva dai nostri strali e` il fatto che si sta scontrando con una delle peggiori applicazioni del Teorema del Punto Fisso (sta facendo trasloco, e in questi casi qualcosa rimane sempre dov'era prima...).

Il buon ***Viggio***, invece, si mette un po' piu` di impegno e ci rifila il seguente calcoletto, che ha suscitato l'orrore di Alice (vi ricordate, vero, che a lei il Calcolo delle Probabilita` non piace?):

> la probabilita' che dopo ***n*** tentativi sia uscito almeno una volta un ***1*** e' *uno meno la probabilita` che non esca mai* **1** *in* **n** *tentativi, ossia:*

$$P(1,n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \qquad [004.001]$$

...e lo stesso vale per il ***2***, per il ***3***, eccetera.

Ma i singoli eventi sono *indipendenti*, percio` la probabilita` che escano tutti i numeri almeno una volta in ***n*** tentativi e`

$$P = P(1,n)^6 = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^6 = 0.9 \qquad [004.002]$$

e, risolvendo rispetto a ***n***:

$$n = \frac{\ln\left(1 - 0.9^{\frac{1}{6}}\right)}{\ln\frac{5}{6}} \approx 22 \qquad [004.003]$$

mmm... ci avviciniamo.. forse c'e` un vago sottofondo di ottimismo, ma cominciamo a vedere delle formule.

Cosa che invece non va proprio giu` a ***Desmatron***: infatti, dopo alcune interessanti elucubrazioni sul gioco di polso del *croupier* (Desmatron, se e` veramente bravo, hai la certezza in sei tiri, tutte le volte...) arriva a un:

tra i quindici e i trenta tentativi....

C'e` di nuovo ***Luca***! Bentornato! Siamo felici del tuo ottimismo, ma diremmo che hai trovato il *croupier* amico di Desmatron, a occhio e croce... Comunque, a dadi con te non abbiamo intenzione di giocarci. Sembra un po' troppo pericoloso. Come vedremo dopo, ci sono alcune condizioni che non hai considerato...

A rimettere ordine ci ha pensato ***TNT***; il suo ragionamento e` piuttosto interessante:

Dunque, cominciamo:

Poniamo, su ***N*** lanci, di fare: ***a*** volte ***1***, ***b*** volte ***2***, ***c*** volte ***3***, ***d*** volte ***4***, ***e*** volte ***5*** ed ***f*** volte ***6***, ESATTAMENTE *[piccola nota... Perche` quest'enfasi? sono indipendenti...(RdA)]* in quest'ordine, la probabilita` di ottenere questa combinazione e` (essendo ***a+b+c+d+e+f=N***, ovviamente):

$$\frac{1}{6^{a+b+c+d+e+f}} = \frac{1}{6^N} \qquad [004.004]$$

si tratta, "soltanto" di trovare tutte le possibili combinazioni e disposizioni (poniamo siano ***C***) di ***a***,***b***,***c***,***d***,***e***,***f>0*** che soddisfano la condizione ***a+b+c+d+e+f=N***.

A questo punto, ponendo $\frac{C}{6^N} = 0.9$ si trova ***N***.

Come fare?

Data una certa combinazione di ***a***,***b***,***c***,***d***,***e***,***f*** il numero di possibili permutazioni degli uni, dui, trei, quattri, cinqui e seii *[La Redazione ha particolarmente apprezzato il plurale del sei. I nostri puristi della lingua italiana devono ancora riprendersi adesso (RdA)]* e` ovviamente ***N!***; questo dato va pero` diviso per il numero di ripetizioni dei singoli valori, e quante sono? semplice, $a!*b!*c!*d!*e!*f!$

Quindi, per una certa combinazione di ***a***,***b***,***c***,***d***,***e***,***f*** il totale dei termini è:

$$\frac{N!}{a!*b!*c!*d!*e!*f!} \qquad \texttt{[004.005]}$$

Ora mancherebbe di sapere quanti sono i possibili valori che ***a***,***b***,***c***,***d***,***e***,***f*** possono assumere (in base al vincolo **a+b+c+d+e+f=N** e ***a***,***b***,***c***,***d***,***e***,***f*** ***>0***), non lo so *[male! (RdA)]* pero` e` stato facile scrivere un programmino che li enumera *[peggio! (RdA)]*

Insomma, il Nostro scrive un programmino in VisualBasic per calcolare i valori; quello che proprio ci sta sul gozzo e` che termina con un:

...era piu` comodo del *C*; la funzione `fatt(n)` calcola il fattoriale, ve la risparmio per pudore...

...male, perche` in *C* avresti avuto l'occasione di scrivere una bellissima funzione *ricorsiva*, che avrebbe fatto la gioia nostra e di PMP[13].

Un piccolo messaggio per ***Roberto***: siamo sempre in attesa dell'allonimo, quando ti sara` passato il forte mal di testa causato dallo sforzo cerebrale che ti ha portato a proporre il fantasioso e sino ad allora inimmaginabile "Bob". Spiacente, e ` gia` occupato...

Molto interessante la sua soluzione, anche perche` *generalizza il numero delle facce del dado*; e` vero, non avevamo detto quante erano... Vediamo:

Il problema non dice quante facce abbia il dado; pertanto diciamo che ha ***F*** facce, che per il momento e` sufficiente. Se noi prendiamo questo dado e lo lanciamo ***N*** volte, andiamo a definire una stringa ***S*** composta da ***N*** lettere, una per ogni lancio: i casi possibili dopo ***N*** lanci sono tutte le possibili stringhe di ***F*** valori, che si esprimono banalmente con F^N.

Quindi il numero di casi possibili dopo N lanci e`:

$$C_p = F^N$$

Andiamo ora alla ricerca dei casi favorevoli. I casi favorevoli sono tutte quelle stringhe dell'insieme C_p, che contengono tutti i valori almeno una volta.

Cio` premesso, supponiamo di lanciare il dado ***N*** volte.

Otterremo quindi F^N casi possibili di cui ***K*** sono quelli favorevoli e ***K'*** quelli non favorevoli; lanciando il dado ancora una volta succede che le ***K*** stringhe favorevoli di prima diventano ***FK*** e sono ancora tutte favorevoli: il lancio in piu` e` ininfluente in quanto esse contenevano gia` tutti i valori. Le ***K'*** stringhe diventano ***FK'***, ma stavolta alcune di esse diventano favorevoli, mentre altre restano sfavorevoli.

Quindi la domanda a cui rispondere e`: quali sono le stringhe di valori che diventano favorevoli con l'N+1 lancio? *[Non so voi, ma io sento puzza di Markov... (RdA)]*

Per rispondere a questa domanda facciamo qualche passo indietro e lanciamo il dado la prima volta. Otteniamo F casi possibili, ma nessuno ancora favorevole.

Lanciamo il dado la seconda volta. Otteniamo F*F casi possibili, di cui F hanno ripetuto il valore del primo lancio e F(F-1) hanno due valori distinti. Definiamo quindi il concetto di ***distanza*** dal caso favorevole come: quanti valori mancano per raggiungere il caso favorevole.

Dopo il primo lancio ho ***F*** casi a distanza $F-1$

[13] Non penserete mica di utilizzare la `nfatt(n)` della libreria, ***vero????***

Dopo il secondo lancio ho ancora ***F*** casi a distanza $F-1$ e $F*(F-1)$ casi a distanza $F-2$.

Ora possiamo rispondere alla domanda di prima lasciata in sospeso: *quali sono le stringhe di valori che diventano favorevoli con l'***N+1** *lancio?* Sono quelle stringhe che al ***N*** lancio erano a distanza ***1*** e con l'***N+1*** lancio hanno acquisito il valore mancante.

Poniamoci ora un'altra domanda: *quante sono le stringhe che dopo* **N** *lanci sono a distanza* **D** *dal caso favorevole?* E qui deduciamo la risposta dal concetto precedente: sono quelle stringhe che erano a distanza ***D+1*** al lancio precedente e sono migliorate piu` le stringhe che erano a distanza ***D*** al lancio precedente e non sono migliorate. E qui possiamo contarle facilmente: diciamo ***S*** il numero delle stringhe a distanza ***D*** dopo ***N*** lanci del dado a ***F*** facce.

Col lancio ***N+1*** queste ***S*** diventano ***SF*** di cui ***SD*** migliorano (quelle a cui si aggiunge uno dei ***D*** valori mancanti) e $S*(F-D)$ non migliorano (quelle a cui si aggiunge uno dei $(F-D)$ valori gia` presenti.

Dopo tutte queste considerazioni, possimo definire la funzione che esprime univocamente quanti sono le stringhe a distanza ***D*** dopo ***N*** lanci di un dado a ***F*** facce, e la definiamo ricorsivamente:

$$Q(N,D,F)=Q(N-1,D+1,F)*(D+1)+Q(N-1,D,F)*(F-D) \qquad [004.006]$$

[L'avevo detto, io! Chi si ricorda i due PM sui nodi di cravatta? Gli somiglia moltissimo! (RdA)] vale a dire il numero di tali stringhe e` dato dalle stringhe che al lancio precedente erano a distanza ***D+1*** e sono migliorate piu` le stringhe che al lancio precedente erano a distanza ***D*** e non sono migliorate.

Tal funzione che nel caso particolare di ***N=1*** vale ***F***, ed e` significativa per $D<F\leq D+N$ mentre per valori di ***F*** esterni vale sempre ***0***.

Ora che abbiamo lo strumento per calcolare la risposta al problema dato, cerchiamo la risposta. Data la natura dello strumento, funzione ricorsiva, mi riesce difficile trovare una sua inversa per poter esprimere il risultato richiesto in funzione di F che e` quanto mi sarebbe piaciuto fare, pertanto devo rassegnarmi ad un approccio piu` empirico ed esaustivo.

Insomma, arrivati qua il Nostro scrive un programmino in VisualBasic *[masochista... (RdA)]* che fa tutti i calcoletti, e ci dice "tra ventidue e ventitre`". Siccome siamo buoni, apprezziamo il fatto che l'output e` veramente ben impaginato.

Alla formula sopra (scritta in un modo un po' diverso, ma non stiamo a sottilizzare) ci arriva anche il buon ***PMP***, nel suo terzo messaggio. Gia` pregustavamo una delle sue interessantissime disquisizioni sulla ricorsivita` ma, per motivi sicuramente giustificati (il trasloco, ricordate?) ma piuttosto deludenti per noi, il Nostro decide di generare i primi valori e poi andarsi a cercare la sequenza... Uffa! comunque, scopre alcune cose interessanti: ad esempio, che i risultati si chiamano *Numeri di Stirling di Seconda Specie*; in particolare, $S_2(N,K)$ e` il numero di partizioni di un insieme di ***N*** elementi in ***K*** sottoinsiemi non vuoti.

A questo punto probabilmente doveva spostare il trumeau, perche` si limita ad un laconico

$$7776*6^n+15625*5^n+10240*4^n+2430*3^n+160*2^n-1>0.9*6^{n+5} \qquad [004.007]$$

E, testuali parole sue, "...da cui si ricava *immediatamente*...". No, non ci abbiamo neanche provato.

Anche perche` intanto e` arrivata una bellissima soluzione da parte di ***ChiQua***, New Entry di questo mese e fine polemista (preferisce la mazzaferrata al fioretto, ma non si puo` avere tutto...). Se volete sapere chi e`, e` quello che ha comprato la sesta copia dello Schroeder in italiano, delle sette vendute. Un club molto esclusivo.

Tra l'altro, ci ha mandato anche un problemino, del quale basti dire che Alice (che non ama le operazioni crittografate) ha detto "carino". Siccome l'abbiamo risolto, prima o poi ve lo rifiliamo.

Allora, il Nostro (reduce da un liquorino alla liquerizia *[Non voglio sapere... (RdA)] [Io invece si! (PRS)]*) ci dice:

> Faccio una serie di ***N*** lanci del dado, e mi interessa la probabilita` che in questa serie escano tutti e sei i numeri. L'approccio brutale e` di enumerare tutti i casi possibili, che sono 6^N e quelli favorevoli. La probabilita` e` il rapporto tra i casi favorevoli e quelli totali. Faccio variare ***N*** fino a quando supera il ***90%.*** Bene. Pero` mi sa che e` piu` semplice enumerare i casi sfavorevoli, calcolare la probabilita` di sfiga e fare ***1–sfiga***. Allora, su ***N*** lanci, quanti ***non*** contengono mai il numero ***1***? Sono 5^N. Quanti non contengono il ***2***? Sempre 5^N, e cosi` via per il ***3***, ***4***, ***5*** e ***6***. Sommando la sfiga ho $6*5^N$. Pero` cosi` **sopravvaluto la sfiga** *[Punto cruciale! Alcuni di voi, con una visione un po' troppo pessimista del mondo, si sono fermati qui (RdA)]*, perche` ad esempio, conto *due volte* i casi in cui non compaiono mai *ne` l'***1** *ne` il* **2**. Oppure ***1*** e ***3***, oppure ***2*** e ***6*** etc.. Quindi ce li devo rimettere dentro. Quanti sono i casi in cui ***1*** e ***2***, ad esempio, non compaiono mai? 4^N. Ho ***15*** di questi casi e quindi la sfiga va corretta
>
> $$6*5^N-15*4^N \qquad \textbf{[004.008]}$$
>
> Stavolta pero` ho esagerato nell'altro senso, e devo rimetterci dentro i casi in cui non compaiono **3** *simboli*. Quanti sono questi casi? $20*3^N$. Guarda caso *[mai parola fu piu` inappropriata... (RdA)]* sono i *coefficienti del triangolo di Pascal/Tartaglia*. Comunque, si continua cosi` e la formula della sfiga e`
>
> $$(6*5^N-15*4^N+20*3^N-15*2^N+6)/6^N \qquad \textbf{[004.009]}$$
>
> Siccome mi interessa il complementare della sfiga, (1–sfiga), un giro veloce sul Mathematica et voila`...

Interrompo un attimo, prima che salti su il solito a dire "Oeu, Excel no e Mathematica si???". Obiezione. ChiQua stava facendo questo calcoletto alle undici e mezza di sera, quindi e` ampiamente ammesso l'uso di Mathematica, soprattutto perche` e` arrivato alla formula semplice e corretta. Nel caso vi interessi, comunque, la tabella qui sotto e` fatta con Excel; basta avere l'accortezza di esprimere i termini come singola potenza di una frazione, anziche` come due potenze separate (come nelle intestazioni delle colonne, per intenderci), altrimenti schizzano su un po' troppo veloci.

Lancio	$6*\left(\frac{5}{6}\right)^N$	$15*\left(\frac{4}{6}\right)^N$	$20*\left(\frac{3}{6}\right)^N$	$15*\left(\frac{2}{6}\right)^N$	$6*\left(\frac{1}{6}\right)^N$	**Probabilita`**
1	5	10	10	5	1	**0,000000**
2	4,166666667	6,666666667	5	1,666666667	0,166666667	**0,000000**
3	3,472222222	4,444444444	2,5	0,555555556	0,027777778	**0,000000**
4	2,893518519	2,962962963	1,25	0,185185185	0,00462963	**0,000000**
5	2,411265432	1,975308642	0,625	0,061728395	0,000771605	**0,000000**
6	2,00938786	1,316872428	0,3125	0,020576132	0,000128601	**0,015432**
7	1,674489883	0,877914952	0,15625	0,006858711	2,14335E-05	**0,054012**
8	1,395408236	0,585276635	0,078125	0,002286237	3,57225E-06	**0,114026**
9	1,162840197	0,390184423	0,0390625	0,000762079	5,95374E-07	**0,189043**
10	0,969033497	0,260122949	0,01953125	0,000254026	9,9229E-08	**0,271812**
11	0,807527914	0,173415299	0,009765625	8,46754E-05	1,65382E-08	**0,356206**
12	0,672939929	0,115610199	0,004882813	2,82251E-05	2,75636E-09	**0,437816**
13	0,560783274	0,077073466	0,002441406	9,40838E-06	4,59394E-10	**0,513858**
14	0,467319395	0,051382311	0,001220703	3,13613E-06	7,65656E-11	**0,582845**
15	0,389432829	0,034254874	0,000610352	1,04538E-06	1,27609E-11	**0,644213**
16	0,324527358	0,022836583	0,000305176	3,48459E-07	2,12682E-12	**0,698004**
17	0,270439465	0,015224388	0,000152588	1,16153E-07	3,5447E-13	**0,744632**
18	0,225366221	0,010149592	7,62939E-05	3,87176E-08	5,90784E-14	**0,784707**
19	0,187805184	0,006766395	3,8147E-05	1,29059E-08	9,8464E-15	**0,818923**
20	0,15650432	0,00451093	1,90735E-05	4,30196E-09	1,64107E-15	**0,847988**
21	0,130420267	0,003007287	9,53674E-06	1,43399E-09	2,73511E-16	**0,872577**
22	0,108683555	0,002004858	4,76837E-06	4,77995E-10	4,55852E-17	**0,893317**
23	0,09056963	0,001336572	2,38419E-06	1,59332E-10	7,59753E-18	**0,910765**
24	0,075474691	0,000891048	1,19209E-06	5,31106E-11	1,26626E-18	**0,925415**

Se ci provate, vi accorgete che il mai abbastanza vituperato Excel da` dei risultati sensati sin quasi al duecentesimo lancio.

E bravo il ChiQua...

4.1.2 Il problema del Millennio

La gentile richiesta di Alice e` stata "***Questo** *lo commento io"*[14]*. Insinuazioni di bassa lega dicono sia per il motivo esplicitato nel secondo paragrafo. In realta`, e` un po' di tempo che io e Doc abbiamo dei problemi di tempo, quindi fa tutto lei (RdA).

C'e` da dire che il titolo di questo problema e` evocativo. Quando il Capo ha mandato la prima edizione di RM051 a me e Piotr, il mio commento e` stato: si', il primo problema e` la solita porcheria probabilistica, mi astengo anche solo dall'idea di provarci, ma il secondo e` bellissimo. E` uno di quei problemi sui numeri e basta, per cui non sono necessarie grandi conoscenze di matematica avanzata, solo un minimo di buona volonta` e un po' di immaginazione.

[14] Lei nega, ma abbiamo le prove.

Ovviamente ho mandato una mia prima soluzione (sbagliata), Piotr mi ha seguito con lunghe ed elaborate teorie, finché ad un certo punto ci siamo accorti entrambi della soluzione e... l'abbiamo inviata al Capo nello stesso momento. Divertente, vero? No, non ve le racconto, le nostre soluzioni. Il Capo mi ha detto di raccogliere le vostre e ho intenzione di provarci... sperando di non fare danni. La prima volta che ho commentato altrui soluzioni ho fatto arrabbiare tutti i poveri abbonati. In realta` i nostri solutori sono tutti tanto piu` bravi ed intelligenti di me che farli arrabbiare mi da un certo piacere, ma non vorrei mai che il Capo decidesse di licenziarmi...

Dopo aver spulciato tutte le soluzioni arrivate, ho rinominato il problema in "Millennium Bug", anche perché molti sono convinti che il duemila non sia stato nulla informaticamente in confronto a quello che sara` il duemilaquarantotto, potenza di due. Ebbene si', ci sono arrivati quasi tutti, questa era la soluzione.

Se vi sentite pronti, ora vi racconto com'e` andata.

Il piu` veloce

Il primo classificato e` stato ***Gas***, che ha raggiunto la Redazione con una mail alle 13.12 del primo aprile. Ecco che cosa ci ha scritto, tra una lezione e l'altra:

> Appena ho letto il titolo mi sono detto: E chi sono per poter risolvere addirittura il problema del millennio? Sara` per caso l'ipotesi di Rienman o forse la piu` facile congettura di Goldbach? Speriamo che non sia l'irraggiungibile ipotesi di Friederich (si me la sono appena inventata ma non suona troppo male *[Esiste sul serio, si riferisce a Fred (mio figlio): "Nell'ipotesi che ci siano dei cioccolatini, sono miei" (RdA)]*) e meno male che Wiles ha gia fatto la sua parte per il teorema di Fermat. Ma poi mi sono detto che il millennio e` appena cambiato e che quindi il problema di questo millennio potrebbe essere piu` facile di quelli del passato e cosi` eccomi qui.

La soluzione e` giusta, anche se in un primo momento era incompleta: verso meta` mese Gas ci ha inviato la dimostrazione che 2048 non puo` scomporsi. Bravo.

> Giusto per nominarlo, ***Puntomaupunto***, che normalmente non ci da` il tempo di respirare dalla spedizione di RM alle sue prime soluzioni, e` arrivato in ritardo di un'ora e mezza. Il poveraccio sta traslocando, la soluzione di tre righe come al solito contiene due o tre sinonimi di "e` evidente", ma c'e` un aggettivo che ho usato anch'io: "bellissimo".

La piu` bella

Pubblichiamo questa, perché e` sintetica e, come il problema, "bellissima". Ovviamente e` il mio parere, ma questo pezzo lo sto scrivendo io, per cui...

> La somma dei numeri interi consecutivi da n a N e` data da:
>
> $$S=\frac{(n+N)(N-n+1)}{2} \qquad \texttt{[004.010]}$$
>
> I due termini al numeratore non possono essere entrambi pari, quindi almeno uno dei due deve avere un fattore primo diverso da 2.
>
> La conseguenza e` che S non puo` essere del tipo 2^n
>
> L'unico anno, tra il ***2000*** e il ***2999***, che non puo` essere espresso come somma di numeri interi consecutivi e` percio` ***2048***.

La formula scritta qui sopra e` nota come formula "del piccolo Gauss" qui tra noi della Redazione. Bravo ***Filippo***, continua così. Complimenti anche al nostro ***Sam***, che al ritorno dalla gita ci ha mandato qualcosa di molto simile.

Tutti gli altri...

Ragazzi, quanto avete scritto!

Complimenti a tutti quelli che sono arrivati alla soluzione in una decina di modi diversi, come ***TNT***, che si e\` ricordato la formula del giovane Gauss, ***Desmatron***, che ha risolto il problema per numeri piccoli e poi applicato al range richiesto, ***Chiqua***, il nostro nuovo lettore che eleggeremo presto a correttore di bozze, ***Luca***, a cui diamo il bentornato e che ha nominato gli aggettivi "*necessario e sufficiente*" - terribili spauracchi di allievi di Liceo, ***Icewolf***, che ha trovato formulette eleganti (se lo dice da solo) e ci augura lunga vita:

> Quindi, quando su RM 12.015 riproporrete questo gioco per il IV millennio la risposta sara\`: "nessuno!"

Roberto [*se non si decide a trovarsi un allonimo gliene affibbiamo uno noi d'ufficio, e poi che ci provi, a lamentarsi (RdA)*] si e\` concentrato su qualcosa di diverso: voleva a tutti i costi trovare un metodo per trovare, per ogni numero che non e\` una potenza di due (si', dopo un paio di mail e\` giunto alla conclusione che le potenze di due non erano scomponibili), la scomposizione in somma di interi consecutivi. Non ci e\` riuscito, ma ha risolto il problema. Visto che ci ha chiesto "*ho vinto qualche cosa?*" la risposta e\` sicuramente no: la maggior parte delle volte essere pubblicati su questa prestigiosa rivista di matematica corrisponde ad essere preso in giro dalla redazione, che non si puo\` considerare come un guadagno.

Le espansioni

Quando il Capo ha scritto questo problema, aveva gia\` in mente parecchie generalizzazioni, che pensava di proporre qui al termine, come compito a casa per la prossima volta. Una di queste era la seguente: *quali anni non possono essere scritti come sequenze di numeri che differiscano di due?* Ai piu\` affezionati l'abbiamo proposta, e per primo ***Roberto*** e\` rimasto affascinato dalla soluzione, proprio come noi:

> Questa pensavo che fosse una spiritosaggine quando l'ho ricevuta in mail, invece mentre ero in metropolitana, ci ho pensato e sono emerse notevoli simmetrie con il problema [1] (Il problema [1] e\` quello del Millennio, nella sua generalizzazione a tutti gli interi). Nel problema [1] ogni dispari puo\` essere rappresentato con somme delta 1:
>
> $$2a+1 = a + (a+1)$$
>
> In questo ogni numero pari puo\` essere rappresentato con somme delta 2:
>
> $$2a = (a-1) + (a+1)$$
>
> Nel problema [1] ogni numero 3a puo\` essere rappresentato con somme delta 1:
>
> $$3a = (a-1) + a + (a+1)$$
>
> In questo ogni numero 3a puo\` essere rappresentato con somme delta 2:
>
> $$3a = (a-2) + a + (a+2)$$
>
> Stesso discorso vale per i numeri divisibili per 5, 7, e via dicendo... Bella simmetria vero! Cosa manca? Nel problema [1] mancavano i numeri pari non divisibili per un dispari che abbiamo visto essere di tipo 2^n. In questo mancano i numeri dispari non divisibili per un dispari, che per definizione sono i numeri primi.
> E qui mi sono venuti in mente i numeri primi del tipo 2^n-1 e per un momento ho pensato che se salta fuori una relazione che coinvolge solo quelli sarebbe emersa una simmetria che ha dello sconvolgente. E invece niente.
> Comunque, procedendo analogamente al problema [1] dimostriamo che non esiste alcuna somma delta 2 che dia come risultato un numero primo.
>
> Ammettiamo pure che esista un primo P tale che:

$$P = a + (a+2) + (a+4) + (a+6) + ... + (a+2n) = (n+1)a + \sum_{i=1}^{n} 2i \qquad \texttt{[004.011]}$$

Porto fuori il 2 dalla sommatoria e sostituisco con Gauss

$$P = (n+1)a + 2\frac{n(n+1)}{2}$$

Il 2 va via. Pongo N = n+1

P = Na + N(N 1)

P = N(a+N-1)

E qui si giunge all'assurdo: se P fosse primo non potrebbe per sua definizione essere esprimibile come prodotto di interi. Abbiamo pertanto dimostrato che nessun numero primo e` esprimibile come somma di interi delta 2.

E qui pensavo di aver finito, quando invece mi e` venuto in mente che il numero 3 e` divisibile per 3, pertanto e` di tipo 3a e quindi puo` essere scritto come:

`3 = -1 + 1 +3`

Quindi esiste una sommatoria delta 2 che puo` esprimere il 3. OK, pero` c'e` quel -1 che e` negativo. Se la domanda del GC si riferisce ai soli interi positivi, il 3 e tutti i primi sono automaticamente esclusi, se invece consente l'uso di termini negativi nella sommatoria, allora anche i numeri primi ne fanno parte e non ci sono soluzioni al problema. L'identita` finale che avevo indicato come assurda:

P = N(a+N-1)

in realta` non lo e` se uno dei due termini e` uguale a 1.

Cosa ne pensate? L'altro nostro famoso generalizzatore e` il buon ***BraMo logicar***, che ci ha intasato la mail questo mese, e lo ringraziamo di cuore. Ecco le sue prime elucubrazioni:

Che generalizzazioni possiamo fare questa volta? Beh, credo sia semplice:

- rilassiamo (italianismo orribile per "relaxation", ma tant'e`) l'ipotesi degli interi positivi, oppure no, cioe` distinguiamo i due casi: i numeri della sequenza possono essere a) interi b) naturali(evitiamo altro per pudore...)
- rilassiamo il vincolo 2000 <= n <= 2099 e poniamo n qualunque naturale
- chiediamoci altre cosette

In sostanza vedo le seguenti domande, a cui penso sarebbe carino rispondere, e ci proveremo. Distinguiamo quindi subito il caso a) i numeri della sequenza sono genericamente interi oppure b) sono naturali, cioe` interi positivi. E nei due casi poniamoci le seguenti 2 * 3 = 6 domande:

- per quali valori di n esiste (o non esiste) una sequenza di naturali/interi consecutivi?
- per un dato n, quante sono le sequenze possibili? Cioè, se s(n) e` il numero di sequenze di naturali consecutivi e S(n) e` il numero di sequenze di interi consecutivi che sommano a n, quanto vale s(n) e S(n)?
- dove si trova il max delle funzioni s(n) e S(n)? Cioè, quali interi hanno il maggior numero di possibili rappresentazioni come somma di interi/naturali consecutivi?

Credimi: per ora ho solo qualche idea pensata nei luoghi e modi piu` atipici: prima di addormentarsi, sul tram o in ascensore o in tutti gli altri casi in cui hai qualche neurone nullatenente. C'e` un altro caso tipico, ed e` forse quello piu` prolifico, ma forse possiamo evitare certe cadute di stile, tanto hanno capito tutti.

E noi su quest'ultimo facciamo finta di non capire. Passa qualche ora, ed ecco il Nostro pronto a rispondersi da solo:

i quesiti

1. quali valori di n sono ottenibili come somma di interi/naturali consecutivi?
2. in quanti modi diversi un intero n e` ottenibile come somma di una sequenza di interi/naturali consecutivi?

Effettivamente [...] il problema 1. sembra risolto. Nello spirito pero` dei RM, dove mi sembra che uno dei punti che piu` interessa lo staff sia quello di avere piu` soluzioni agli stessi problemi, talvolta molto diverse, *[qui si puo` citare il Capo, quando dice "I know my chickens" (A.R.)]* vi mando una mia elucubrazione che risolve il 2., e in cui e` poi evidente la soluzione dell'1., che confermo. Resterebbe solo la 3., che sembra la piu` ostica.

le soluzioni

Dunque, partiamo. Ovviamente occorre cercare le soluzioni del tipo

$$n = a + (a+1) + (a+2) + ... + (a+k) = \sum_{i=0}^{k} a + i$$

ed e` altrettanto ovvio che, con semplici passaggini, si ha (***k*** intero non negativo, ***a*** intero)

$$2n = (k+1)(2a+k) \qquad \texttt{[004.012]}$$

Ora, i due termini a destra dell'uguale sono di parita` diversa: se ***k*** e` pari, il primo e` dispari e il secondo e` pari; se ***k*** e` dispari viceversa. ***a***, per ora, puo` anche essere negativo; poi faremo fuori anche questa grana. Ci chiediamo ora semplicemente: in quanti modi e` possibile fattorizzare ***2n*** in due fattori, uno pari e uno dispari? Se rispondiamo a questa domanda, il gioco e` fatto. Gia` che ci siamo chiamiamo ***P*** e ***D*** i due fattori (ovviamente non sappiamo se ***P*** o ***D*** sono il primo o il secondo della **`[012]`**).

Scomponiamo quindi in fattori ***2n***. Si ha

$$2n = p_0^{q_0} p_1^{q_1} p_2^{q_2} ... p_m^{q_n} \qquad \texttt{[004.013]}$$

dove p_i e` l'i-esimo numero primo ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$, ...) e i q_i gli esponenti (ordini) nella fattorizzazione.

Bene, solo il primo fattore (2^{q_0}) e` pari. Il resto e` una produttoria con termini dispari.

Ora c'e` un passaggio leggermente piu` difficile, o almeno per me per spiegarlo chiaramente, dopodiché e` fatta. Dobbiamo cioe` ora mettere i $q_0+q_1+...+q_m$ numeri che formano il nostro ***2n*** in due scatole, ***P*** e ***D***, in una (***P***) avremo un prodotto pari e nell'altra (***D***) un prodotto dispari. Dovremo inoltre metterceli tutti, altrimenti il prodotto non sara` ***2n***. E` ovvio percio` che i $q_0$ numeri ***2*** li metteremo nella scatola ***P*** (se solo uno ci cadesse in D ... ci rovinerebbe la scatola). Ci restano percio` tutti gli altri primi dispari.

In quanti modi possiamo dividerli? Beh, e` sufficiente contare in quanti modi possiamo riempire la scatola ***D***.

E qui un semplice ragionamento combinatorio che sicuramente si e` gia` visto piu` volte. Posso mettere il numero $p_1$ da **0** a $q_1$ volte, idem per $p_2$ e cosi` via. Il numero di possibili scelte e` quindi

$$(q_1+1)(q_2+1)...(q_m+1) \qquad \texttt{[004.014]}$$

I "***+1***" ovviamente tengono conto del fatto che posso anche scegliere di non mettere nessun fattore di un certo tipo nella scatola D (tutti in P). Tenete anche conto che il caso in cui, ad esempio, p_1 (che e` poi 3) non esista non ci crea problemi: semplicemente sarebbe $q_1=0$.

Dai che ci siamo. Facciamo percio` un riassunto di cio` che abbiamo ottenuto:

- sappiamo che per risolvere il nostro problema originario occorre risolvere la **`[012]`**
- abbiamo ora trovato che il numero di soluzioni della **`[012]`** e` dato dalla **`[014]`**

Ora una piccola grana, che capita spesso quando si parla di combinazioni: come siamo messi con l'ordine dei due fattori nella **`[012]`**? L'ordine conta oppure no? Risposta: l'ordine conta. Se il primo fattore e` pari e il secondo dispari e` un conto, viceversa e` un altro.

un esempio numerico

Fermiamoci un momento e facciamo un esempio. Prendiamo $n=18$, cioe` $2n=36$. Abbiamo

$36 = 2^2 * 3^2$

e dunque la **`[014]`** ci dice che possiamo dividere ***36*** nelle due scatole in ***3*** modi:

(P, D) = (36, 1) (i 3 vanno in P)

(P, D) = (12, 3) (un 3 va in P e uno in D)

(P, D) = (4, 9) (i 3 vanno in D)

Non ci sono altri modi di ottenere ***36*** con un pari e un dispari.

Il primo caso ci da` $k=35$ e $(2a+k)=1$ cioe` $a=-17$. La sequenza percio` e` lunga 36 e parte da -17: (-17, -16, ..., 17, 18). La somma e` 18.

Il secondo caso ci da` k = 11 e a = -4. La sequenza percio` e` lunga 12 e parte da -4: (-4, -3, ..., 6, 7).

Il terzo caso, il piu` interessante, ci da` k = 3 e a = 3 e la sequenza (3, 4, 5, 6).

C'e` pero` una sorpresina, anche se forse non troppo. Ci siamo infatti dimenticati delle tre coppie speculari:

(D, P) = (1, 36)

(D, P) = (3, 12)

(D, P) = (9, 4)

che danno ben altre sequenze:

- il primo caso da` (salto i conticini) la sequenza impropria lunga 1 e formata dal solo numero 18
- il secondo caso da` la sequenza (5, 6, 7)
- il terzo caso la sequenza (-2, -1, 5, 6)

Avrete credo notato una certa somiglianza a coppie. Invertendo i due numeri si ottengono sequenze simili: in una abbiamo solo interi positivi, nell'altra entrano in gioco i negativi, e in modo ben preciso: allungano verso sinistra la sequenza "pura" (quella con i soli positivi) fino ad aggiungere tutti i positivi da 1 al precedente del primo numero della sequenza "pura" e poi annullando tali termini con altrettanti termini negativi.

il dilemma interi o naturali

Da qui possiamo riuscire a dirimere il problema di considerare tutti gli interi, e dunque anche i negativi, oppure solo i naturali, cioe` i positivi.

La prima cosa interessante che si vede e` che se vincoliamo le nostre soluzioni ai soli naturali, beh, sono semplicemente la meta`. Ovviamente non ci basta certo un esempio come dimostrazione, per cui dimostriamolo. Faremo anzi di più: cerchiamo di capire subito se, dati i due fattori P e D, la soluzione "naturale" e` (P, D) oppure (D, P).

Qualcuno forse avra` notato che, nell'esempio precedente, le sequenze "naturali" si ottengono quando il secondo termine della coppia e` maggiore del primo, e in effetti vediamo che e` così.

Per dimostrarlo (e` abbastanza semplice) vediamo intanto il significato dei nostri due amici che troviamo nella parte destra della `[012]`:

- ***(k+1)*** e` semplicemente la lunghezza della sequenza
- ***(2 a+k)=2(a+k/2)*** e` il doppio della media degli elementi, che coincide con l'elemento centrale se la sequenza ha lunghezza dispari e con la media dei due centrali se pari

E' chiaro che se la sequenza e` "troppo lunga" rispetto a tale elemento centrale, la stessa finira` con l'invadere gli interi negativi. Si` ma quanto lunga?

La regola e` semplicissima:

- se il primo amico e` maggiore del secondo, cioe` se ***(k+1)>2(a+k)*** si ha ***a<1/2*** e dunque la sequenza parte dai negativi o dallo zero
- viceversa si ha ***a>1/2*** e la sequenza e` interamente positiva

Ecco fatto: dati i due numeri dobbiamo percio` considerare semplicemente la coppia ordinata: prima il piu` piccolo e poi il piu` grande.

Nel nostro esempio quindi avremmo scelto le coppie (1, 36), (3, 12) e (4, 9) e se verificate avremmo azzeccato.

Concludendo e riassumendo il paragrafo:

- sappiamo che le sequenze "naturali" sono la meta` di quelle "generiche"
- sappiamo come trovare le sole sequenze "naturali", utilizzando il fattore piu` piccolo della coppia come lunghezza della sequenza e il piu` grande come fattore (2 a + k)

conclusione? Quasi

Eh si', abbiamo finito. Un riassunto fa bene credo. Ecco i risultati che abbiamo ottenuto:

1. Abbiamo ricavato il numero di sequenze di interi che sommano ad un numero $\boldsymbol{n}$. Esse sono date dalla `[014]`, dove $\boldsymbol{p_i}$ e` l'i-esimo numero primo ($\boldsymbol{p_0=2}$, $\boldsymbol{p_1=3}$, ...) e i $\boldsymbol{q_i}$ gli esponenti (ordini) nella fattorizzazione del numero $\boldsymbol{2n}$. Qui ovviamente comprendiamo la sequenza impropria di lunghezza 1 che consiste nel numero stesso. Se volete toglierla aggiungete in fondo un bel "`-1`".

2. Sappiamo che il numero di sequenze di interi positivi (naturali) che sommano ad un numero n e` esattamente la meta` di quanto sopra. Vale sempre il poter togliere la sequenza impropria.
3. Sappiamo come ottenere entrambi i tipi di sequenze:
   3.1. Scomponiamo (2 n) in fattori (gia` fatto se abbiamo eseguito il passo 1)
   3.2. Cerchiamo tutte le coppie (P, D) possibili di fattori il cui prodotto e` (2 n) (per farlo usiamo pure il metodo precedente delle scatole: tutti i pari da una parte e i dispari in tutti i modi possibili)
   3.3. Ordiniamo le coppie appena trovate in modo da avere a sinistra il numero piu` basso
   3.4. Per ogni coppia (x, y),
      3.4.1. la lunghezza della sequenza (k + 1) e` uguale ad x
      3.4.2. l'elemento di partenza della sequenza (a) lo ricaviamo dalla relazione 2 a + k = y
4. Abbiamo resistito fin qui

e la domanda 1.?

Da tutto questo, che sostanzialmente e` stato costruito per la domanda 2., e` possibile rispondere, anzi confermare, la soluzione gia` proposta per la domanda 1.?

Ebbene si', e facilmente:

- se n ha almeno un divisore dispari, anche (2 n) ha lo stesso divisore, e dunque almeno uno dei q_i (2 <= i <= m) della **[014]** e` > 0, per cui ci sono almeno 2 sequenze, compresa quella impropria, o 1 sequenza propria che risolvono il problema
- l'unico n che non ha divisori dispari e` il multiplo di 2

cosa manca

Beh, mancherebbero due cose grossine.

La prima e` colpa mia: e` il quesito n 3: quali interi hanno il maggior numero di sequenze? Cioe` quali interi possono essere scritti come somma di interi consecutivi nel maggior numero di modi diversi?

La seconda e` colpa del GC di RM *[Taglio un pezzo qui... ma per dare la colpa al GC ci vuole un sacco di fegato (AR)]* Io, come al solito, generalizzerei (e perché fermarsi al 2) in

1. Quali valori di n sono ottenibili come somma di interi/naturali in progressione aritmetica di ragione fissata r > 1?
2. Quali valori di n sono ottenibili come somma di interi/naturali in progressione aritmetica di ragione qualsiasi r > 1?
3. In quanti modi diversi un intero n e` ottenibile come somma di una sequenza di interi/naturali in progressione aritmetica di ragione r > 1?

Eviterei di passare alle progressioni di altro tipo, agli interi ottenibili come somma di primi o di primi consecutivi (qui c'e` una grossa teoria dietro), ecc.

Tutto qui? No, ovviamente eccolo di ritorno il giorno dopo... taglio parte della premessa, in cui riporta i risultati precedenti, che sono qui solo poche righe piu` su.

In questi giorni vi martello eh? Beh, fate come me, se c'e` troppa carne al fuoco, piuttosto che lasciarla bruciare, toglietela e rimettetecela quando avete fame. Io comunque ve la passo.

Questa notte parliamo di ... il problema del millennio, caro amico. Ehi, questa riga l'ho scritta alla fine: il finale ha sorpreso parecchio anche me. Credo ne valga la pena.

il problema della notte

Ho fatto un po' di elucubrazioni sulla domanda 3 che restava e che vi ribadisco in una forma spero piu` chiara: Quali interi n sono ottenibili nel maggior numero di modi dalla somma di una sequenza di interi consecutivi?
Il problema purtroppo non ha una reale soluzione, nel senso che il massimo della funzione che stiamo cercando non esiste. *[Snip! Taglio tutto tranne che s(n) e` definita dalla* ***[014]*** *(AR)]* Beh, ci arrendiamo così? Forse a qualcuno piacerebbe perche` metterebbe un bel punto al problema e, soprattutto, a questa mail.

Invece:

- la notizia positiva e` che questa mail non e` lunghissima come la precedente
- la negativa e` che non e` finita, perche` qualcosina si puo` dire

la considerazione

Facciamo una considerazione che puo` essere utile. Ovviamente potremmo girare il problema e farlo diventare: fissato un valore limite $\boldsymbol{N}$, quali interi $\boldsymbol{n<N}$ sono ottenibili nel maggior numero di modi dalla somma di una sequenza di interi consecutivi?

In pratica ci chiediamo ad esempio ($\boldsymbol{N=1000}$): quanto vale ***s(n)*** per numeri fino a ***3*** cifre? O fino a ***4***? O, come chiesto nel problema originale, da 2000 a 2999?

Credo pero` che il rapporto (interesse) / (difficolta` di soluzione) sia in questo caso un po' troppo basso. Lascio quindi a qualche (eventuale) volonteroso l'affrontare la questione, o passarla sadicamente a qualche (caro) amico, e direi di considerare esclusivamente il caso citato in RM051, cioe` 2000 <= n <= 2999.

l'idea

Se vogliamo proprio dire qualcosa possiamo dire una cosa ovvia: nella s(n) non ci sono numeri pari (manca $\boldsymbol{p_0=2}$ e le sue potenze) per cui, se proprio vogliamo cercare l'$\boldsymbol{n}$ che massimizza la funzione, scegliamolo almeno dispari, cosi` che $\boldsymbol{q_0}$ sia nullo. Lo rispiego con un esempio: scegliamo ad esempio il dispari 51 (il numero di RM). Per lui vale

$$s(51) = s(3^1 * 17^1) = 2 * 2 = 4$$

compresa la sequenza impropria (51) (che possiamo lasciare qui e negli altri casi). Per i curiosi le altre tre sequenze sono (16, 17, 18), (25,26) e la bella (e volevo vedervi a scoprirla al volo senza il metodo delle coppie della mail precedente) (6, 7, 8, 9, 10, 11).

E` ovvio che anche ***s(51k)=4*** per qualunque k pari, perché la ***s(n)*** non cambierebbe di una virgola, dunque 51 puo` essere considerato "migliore" rispetto ai suoi multipli pari 102, 204, ecc che danno sempre 4.

Ed ecco l'idea: si potrebbe tabulare l'$\boldsymbol{n}$ piu` piccolo che fornisce un certo valore per la funzione $\boldsymbol{s}$. In pratica la domanda è, nel nostro esempio: 51 e` il valore piu` piccolo con 4 sequenze? Credo che questo sia un bel modo forse di affrontare il problema.

il compitino

Credo percio` che il compitino per la prossima mail (e ricordiamoci che restano le domande sulle progressioni aritmetiche) sia di questo tipo (provo a pulire e formalizzare un po' l'idea): data la ***s(n)*** come definita in **`[014]`**, definiamo una sorta di funzione inversa, t(n), come

t(n) = min {m: s(m) = n}

In parole povere, t(n) e` l'intero piu` piccolo che ha esattamente n sequenze. Chiaramente si puo` definire t'(n) l'intero piu` piccolo che esattamente n sequenze proprie, e si avrebbe t'(n)=t(n+1), oppure t''(n) se consideriamo sequenze con interi negativi, o altro. In ogni caso tutto fa riferimento al nostro t(n). Abbiamo percio` scelto, come problema base, sequenze di interi positivi, compresa l'impropria. Mi sembrava la scelta piu` pulita.

Credo che per questo compitino ci sia da scomodare il nostro caro buon PC. E dai che cosi', oltre a sopportarmi per la scrittura delle mail, la cpu che si annoia avra` qualcosa di meglio da fare.

i primi valori

Beh, prima di concludere, possiamo provare a trovare i primi valori di t(n)? Vediamo quanto vale t(1). Costruiamo percio` l'insieme S(1) degli interi con una sola sequenza. Beh, e` facile: sono proprio i multipli di 2! Li avevamo infatti caratterizzati come gli unici numeri che non possono essere rappresentati come somma di interi consecutivi, e quindi l'unica sequenza e` quella impropria, formato dal numero stesso. E' ovvio percio` che t(1) = 1 = 2^0. 1 infatti non e` rappresentabile se non con la sequenza (1).

Ovviamente il valore successivo, forse piu` proprio, e` 2.

Mi permetto di sottolineare la caratterizzazione, gia` del resto scoperta: S(1) = {potenze di 2}.

Passiamo a t(2). Occorre costruire l'insieme {m: s(m) = 2}. Ma, vista la **`[014]`**, s(m) = 2 se esiste un unico p_i e l'esponente e` $q_i$ = 1. Beh, possiamo scegliere come $p_i$ qualunque primo dispari, e otteniamo (si diceva ai miei tempi "resta di stucco e` un barbatrucco")

S(2) = {insieme dei numeri primi dispari} !!!

Scusate ma questa, anche per me, e` una sorpresa. Mi piacerebbe sapere se esiste un'altra funzione (definita direi tra interi e insiemi di interi, il dominio e` N e il codominio l'insieme delle parti 2^n) che da` l'insieme delle potenze di due come primo valore e l'insieme dei numeri primi come secondo. Mi vien voglia di non andare a dormire (ora sono le 2:07) per vedere la funzione S cosa ci riserva piu` avanti. Ed era giusto una funzione d'appoggio per meglio chiarire il ragionamento. Ora e` diventata quasi l'obiettivo della mail, altro che funzione t. Ma non lasciamoci prendere dall'emozione e andiamo avanti, magari finendo domattina. Stavamo cercando il valore t(2). Beh, ora e` semplice: t(2) = 3. E infatti 3 e` esprimibile in due modi: (3) e (1, 2).

Per questa ci e` arrivata anche un'errata corrige, che speriamo di aver applicato correttamente. Ed ecco che il BraMo giunge alle sue conclusioni:

riassunto

Il solito riassunto delle puntate precedenti. *[Questo lo taglio di brutto, basta guardare piu` su (AR)]*

abbiamo definito:

- S(n) = {m: s(m) = n}, cioe` l'insieme degli interi che hanno n sequenze, e
- t(n) = min {m: s(m) = n}, cioe` il piu` piccolo di tali interi Qui abbiamo avuto una sorpresa:
  - S(1) e` l'insieme delle potenze di 2
  - S(2) e` l'insieme dei numeri primi dispari

Ovviamente si ha velocemente t(1) = 1 e t(2) = 3. Ci siamo lasciati qui.

n = 3

Proseguiamo un attimo con il ragionamento precedente, cioe` di cercare di capire come varia la funzione t(n) all'aumentare di n, cioe` quali numeri hanno bisogno di sequenze sempre piu` lunghe.
Ci stiamo chiedendo ora, in pratica, quali interi hanno 3 sequenze (S(3)) e qual e` il piu` piccolo (t(3)).
Occorre costruire l'insieme S(3) = {m: s(m) = 3}. Vista la [1], s(m) = 3 se esiste un q_i = 2 e dunque in presenza di un quadrato di un numero primo. E qui continuano le incredibili novita` (almeno per me prima di queste mail): si cioe` che S(3) e` l'insieme dei quadrati dei primi dispari, e dunque che t(3) = 9.
Una piccola verifica? 2 * 9 = 2^1 * 3^2 dunque s(9) = 3. Per i curiosi le sequenze la cui somma e` 9 sono, in ordine di lunghezza: (9), (4, 5), (2, 3, 4).

E siamo a questo punto:

n	*S(n)*	*t(n)*
1	*le potenze di due*	*1*
2	*i primi dispari*	*3*
3	*i quadrati dei primi dispari*	*9*

n = 4

Il numero 4 e` scomponibile ora in due modi diversi (ritroviamo lo stesso concetto di dover scomporre e contare i modi per ricomporre): 1 *4 oppure 2 * 2. C'e` gia` quindi il sentore che qualche cosa bella possa svanire. Allora, evitando di ripetere l'intero schema:

- nella prima ipotesi (4 = 1 * 4) vi e` un q_i = 3 e l'insieme S'(4) = {cubi di primi dispari
- nella seconda ipotesi (4 = 2 * 2) vi sono due valori di q con q_i = q_i = 1, e dunque l'insieme S''(4) = {interi i cui fattori sono 2 primi dispari}

Dunque t(4) = 3 * 5 = 15. La solita verifica: 2 * 15 = 2^1 * 3^1 * 5^1, s(15) = 4 e le sequenze sono: (15), (7, 8), (4, 5, 6), (1, 2, 3, 4, 5).

n > 4

Qui avevo pensato di proseguire "a manina", ed effettivamente fino a n = 10 o anche n = 20 si puo` anche rischiare. Ma mi sono chiesto: riuscirei a rispondere cosi` alla domanda [3b] Quali intero n compreso tra 2000 e 2999 e` ottenibile nel maggior numero di modi dalla somma di una sequenza di interi consecutivi?
La risposta e` dubbia. Inoltre, dato che l'algoritmo per calcolare s() e t() esiste e non e` complicatissimo, perché non scrivere un programmetto (anzi 3) per:

- calcolare s(n)
- calcolare t(n)
- elencare tutte le sequenze possibili

> Ed ecco percio` che vi beccate la terribile notizia: questa non e` l'ultima mail sull'argomento. Scrivo i tre programmini e ci risentiamo con le ultime risposte.

...che suona decisamente piu` come una minaccia che altro...

5. Quick & Dirty

A occhio, prima: dopo, fate i conti e vedete quanto ci avete azzeccato.

Credo conosciate tutti il modo inglese per esprimere il concetto di cosa raffazzonata e inadatta all'uso che se ne sta facendo: "*A square peg in a round hole*".

Ma secondo voi, chiude meglio un tappo quadrato in un buco rotondo o un tappo rotondo in un buco quadrato?

6. Pagina 46

Dalla ***formula di Erone***, si ha:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 2p \qquad \texttt{[006.001]}$$

dove ***a***, ***b***, ***c*** sono interi positivi e $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Se poniamo ***p-a=x***, ***p-b=y***, ***p-c=z*** la nostra espressione diventa:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z) \\ &\Rightarrow xyz = 4(x+y+z) \end{aligned} \qquad \texttt{[006.002]}$$

in cui ***x***, ***y***, ***z*** possono essere, almeno in prima ipotesi, interi o seminteri.

Notiamo pero` che, dalla seconda espressione di `[006.002]` nel caso di valori seminteri otterremmo una frazione pari ad un intero, e quindi possiamo supporre che tutte le tre variabili siano interi positivi.

Poniamo, senza perdere in generalita`, $x \geq y \geq z$. Si ha:

$$\begin{aligned} &x = \frac{4y+4z}{yz-4} \\ &\Rightarrow \frac{4y+4z}{yz-4} \geq y \end{aligned} \qquad \texttt{[006.003]}$$

Il denominatore della diseguaglianza e` sicuramente positivo (altrimenti otterremmo un valore negativo per ***x***) e quindi l'eliminazione del denominatore non cambia il segno della diseguaglianza.

Riaggiustando i termini, si ottiene:

$$y^2z - 8y - 4z \leq 0 \qquad \texttt{[006.004]}$$

Considerando questa come equazione quadratica in ***y*** avente soluzioni $y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+4x^2}}{z}$ si puo` esprimere la diseguaglianza come:

$$(y-y_1)(y-y_2) \leq 0 \qquad \texttt{[006.005]}$$

Essendo ***x>0***, si ha:

$$
\begin{aligned}
& y_2 < 0 \\
& \Rightarrow (y - y_2) > 0 \\
& \Rightarrow (y - y_1) \leq 0 \\
& \Rightarrow y \leq \frac{4 + \sqrt{16 + 4x^2}}{z} \\
& \Rightarrow yz \leq 4 + \sqrt{16 + 4x^2} \\
& \Rightarrow z^2 - 4 \leq \sqrt{16 + 4z^2}
\end{aligned}
\qquad [006.006]
$$

Dove l'ultimo passaggio discende dalla supposizione $z \leq y$.

Elevando a quadrato si ha:

$$
\begin{aligned}
& z^4 - 8z^2 + 16 \leq 16 + 4z^2 \\
& z^4 \leq 12z^2
\end{aligned}
\qquad [006.007]
$$

Ossia $z \leq 3$.

A questo punto, possiamo considerare i ***tre casi***:

(1) $z = 1 \Rightarrow y \leq \dfrac{4 + \sqrt{16 + 4}}{1}$

Questo implica $x = \dfrac{4y + 4z}{yz - 4} = \dfrac{4y + 4}{4y - 4}$ e, dovendo essere ***y<9***, abbiamo che ***x*** e\` un intero maggiore di zero nei casi:

$$
\begin{aligned}
& y = 5 \Rightarrow x = 24 \\
& y = 6 \Rightarrow x = 14 \\
& y = 8 \Rightarrow x = 9
\end{aligned}
\qquad [006.008]
$$

(2) $z = 2 \Rightarrow y \leq \dfrac{4 + \sqrt{16 + 4 * 4}}{2}$

Questo implica $x = \dfrac{4y + 4z}{yz - 4} = \dfrac{4y + 8}{2y - 4} = \dfrac{2y + 4}{y - 2}$ e, dovendo essere ***y<5***, abbiamo che ***x*** e\` un intero maggiore di zero nei casi:

$$
\begin{aligned}
& y = 3 \Rightarrow x = 10 \\
& y = 4 \Rightarrow x = 6
\end{aligned}
\qquad [006.009]
$$

(3) $z = 3 \Rightarrow y \leq \dfrac{4 + \sqrt{16 + 4 * 9}}{3}$

Questo implica $x = \dfrac{4x + 4z}{yz - 4}$ e, dovendo essere ***y<4***, non e\` mai intero.

In conclusione, si hanno i ***cinque*** casi:

x	y	z
24	5	1

p
30

a	b	c
6	25	29

14	6	1
9	8	1
10	3	2
6	4	2

21
18
15
12

7	15	20
9	10	17
5	12	13
6	8	10

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Sotto il Segno delle Cinque Lune

Beh, il titolo nasce da un thriller piuttosto pubblicizzato, mentre sto scrivendo questo...

Comunque, sono cinque e sono lune.

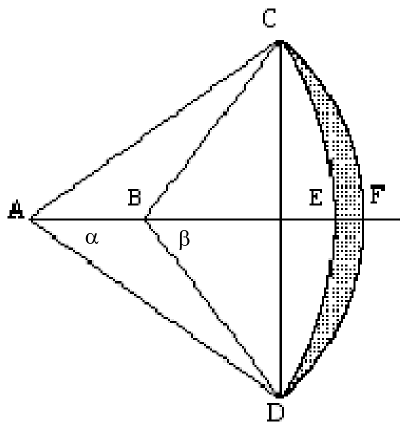
Tempo fa avevamo parlato dell'impossibilita` di quadrare il cerchio con riga e compasso, in quanto gli unici oggetti costruibili con questi due aggeggi (e tenuto conto anche della "stranezza" del compasso: se non ve la ricordate, andatevela a rivedere) sono sostanzialmente le soluzioni delle equazioni quadratiche; quindi numeri razionali, radici quadrate, radici quarte, composizioni delle sunnominate, eccetera.

Dicevamo anche che nonostante la dimostrazione (ragionevolmente semplice) dell'impossibilita` di quadrare il cerchio, esistono ancora molti quadratori in circolazione; ogni matematico serio si chiede, ogni tanto, perche` non siano ancora estinti...

Beh un paio di ragioni ci sono.

La prima liquidiamola subito: spesso si limita a variazioni sul tema che la dimostrazione di impossibilita` sara` pure semplice, ma e` decisamente noiosa.

La seconda e` un po' piu` "seria": in effetti, a guardare bene, *esistono* degli oggetti definiti unicamente da archi di cerchio, che sono *quadrabili*. Giustappunto, le "lune". Ne vedete una generica qui a fianco. Quello cui i nostri quadratori non arrivano, e` che le quadrabili sono solo dei casi particolari...



Non e` difficile scoprire quali siano queste "lune quadrabili"; in generale, consideriamo (come mostrato in figura: *credo* di aver trovato il modo per far stare le figure al loro posto...) l'area grigia, definita da due archi di cerchio puntati in ***A*** e ***B*** e aventi rispettivamente raggi ***R=AC*** e ***r=BC***.

Allora, cominciamo con un po' di storia. Poca roba, tranquilli.

Ippocrate di Chio fu il primo a trovare alcune di queste quadrature, per le "lune". Come risultato finale, oggi sappiamo che solo ***cinque*** lune possono essere quadrate; tre di queste sono state trovate da Ippocrate medesimo, altre due sono state trovate verso la meta` del millesettecento. Queste ultime due sono attribuite (c'era da dubitarne?) ad Eulero (1771), anche se alcuni (ivi incluso l'affidabilissimo Heath) ritengono di trovare la trattazione di tutte e cinque i casi in una dissertazione di Wallenius del 1766. Quello che sappiamo per certo, comunque, e` che Tschebatorew ha dimostrato che queste sono le uniche lune quadrabili.

Ora, quello che ci chiediamo e`: *sotto quali condizioni possiamo risolvere il problema della quadratura con metodi euclidei?* Questo e equivalente al chiedersi sotto quali condizioni possiamo calcolare l'area tratteggiata con l'uso di niente di piu` complesso di equazioni di secondo grado e radici quadrate.

L'area della luna puo` essere espressa come differenza tra le due regioni sulla destra di $\overline{CD}$, ossia possiamo dire (la notazione non e` una meraviglia), se ***A*** rappresenta l'area:

$$A_{Luna} = A_{CFD} - A_{CED} \qquad \text{[007.001]}$$

Per quanto riguarda ***CFD***, possiamo esprimere l'area in questo modo:

$$A_{CFD} = A_{BCFD} - A_{BCD} \qquad \text{[007.002]}$$

Ora, noi sappiamo che, per un cerchio completo di raggio ***r*** e` $A = \pi * r^2$, quindi l'area del settore circolare ***BCFD*** risulta semplicemente:

$$A_{BCFD} = \frac{2\beta}{2\pi}\left(\pi * r^2\right) = \beta r^2 \qquad \text{[007.003]}$$

E, per quanto riguarda il triangolo ***BCD***, si ha:

$$(r\sin\beta)(r\cos\beta) = \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta \qquad \text{[007.004]}$$

e questo discende dall'identita` trigonometrica $2\sin x\cos x = \sin 2x$.

Da cui, l'area della regione ***CFD*** e`:

$$A_{CFD} = \beta r^2 - \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta \qquad \text{[007.005]}$$

e, esattamente nello stesso modo, abbiamo:

$$A_{CED} = \alpha R^2 - \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha \qquad \text{[007.006]}$$

Ora, il trucco usato da Ippocrate era che lui sapeva eliminare i termini *trascendenti* (e quindi non costruibili) βr^2 e αR^2 nelle espressioni *ponendoli uno uguale all'altro*. In pratica, restringiamo il calcolo a quei soli casi per cui:

$$\beta r^2 = \alpha R^2 \qquad \text{[007.007]}$$

In questo caso, l'area della luna risulta:

$$A_{Luna} = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha - \frac{1}{2}r^2\sin 2\beta \qquad \text{[007.008]}$$

Ora, siccome il nostro scopo e` quello di costruire quest'area da una lunghezza unitaria (ad esempio, ponendo ***r=1***) utilizzando solo operazioni quadratiche, la lunghezza di ***R*** deve essere *costruibile*, ossia deve essere

$$R^2 = kr^2 \Rightarrow R = r\sqrt{k}, k \in Q \qquad \text{[007.009]}$$

ossia, quello che ci serve e` che ***k*** sia ***razionale***. Dalla **[007]** segue che deve essere $\beta = k\alpha$, quindi possiamo definire l'area come:

$$A_{Luna} = \frac{r^2}{2}\left(k\sin(2\alpha) - \sin(2k\alpha)\right) \qquad \text{[007.010]}$$

E` altresi` evidente che dalla figura possiamo anche imporre l'eguaglianza delle altezze, ottenendo la relazione:

$$r\sin\beta = R\sin\alpha \qquad \text{[007.011]}$$

che implica:

$$\sin(k\alpha) = \sqrt{k}\sin\alpha \qquad [007.012]$$

Ora, ricordando le identita` trigonometriche:

$$\begin{gathered}\sin(2x) = 2\sin x\cos x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x\end{gathered} \qquad [007.013]$$

possiamo riscrivere l'equazione in funzione di $\sin\alpha$, ossia come:

$$A_{Luna} = r^2 \sin\alpha\left(k\sqrt{1-\sin^2\alpha} - \sqrt{k} * \sqrt{1 - k * \sin^2\alpha}\right) \qquad [007.014]$$

Allora (e questo e` il punto topico), possiamo quadrare la luna se possiamo determinare $\sin\alpha$ risolvendo *niente di piu` complesso di una equazione quadratica*: ora, e` evidente che la **[012]** puo` essere risolta per $\sin\alpha$ solo per determinati valori di ***k***. Infatti, ricordando le identita` trigonometriche:

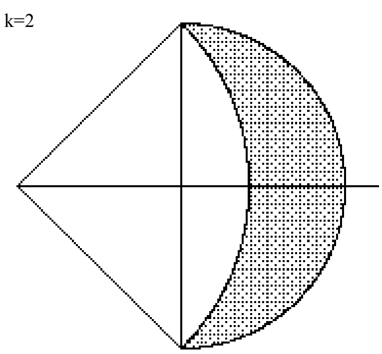
$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2\sin x\cos x \\ \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \sin 4x &= \cos x\left(4\sin x - 8\sin^3 x\right) \\ \sin 5x &= 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x\end{aligned} \qquad [007.015]$$

si vede che, ponendo ***k=2*** nell'equazione **[012]**, abbiamo

$$\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad [007.016]$$

e questo significa che abbiamo $\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Sostituendo nella **[014]**, otteniamo ***A_{Luna}=1***.

Questo fu il primo caso trovato da Ippocrate, e lo vediamo qui di fianco.



Si noti che l'area della luna equivale all'area del triangolo maggiore alla sinistra della linea verticale.

Ora possiamo considerare cosa succede quando imponiamo ***k=3***.

In questo caso, la nostra equazione **[012]** resta un'equazione risolubile.

Abbiamo infatti:

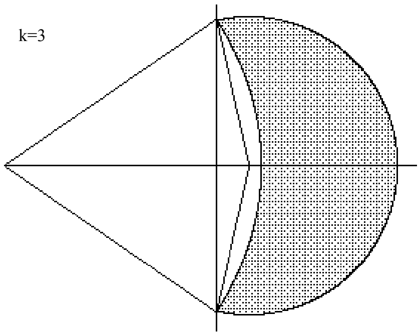
$$3 - 4\sin^2\alpha = \sqrt{3} \qquad [007.017]$$

e da questa

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2} \qquad [007.018]$$

Che e` costruibile e ci fornisce (sostituendo in **[014]**) il valore:

$$A_{Luna} = \frac{\sqrt{18 * \sqrt{3}} - \sqrt{42 * \sqrt{3} - 72}}{4} \qquad \text{[007.019]}$$



Che ci da` la luna qui sotto.

Il passaggio per trovare la ***terza*** luna quadrabile e` un po' piu` complesso; consideriamo infatti cosa succede se imponiamo $k = \frac{3}{2}$.

In questo caso, diventa piu` comodo lavorare con il ***semiangolo*** $\omega = \frac{\alpha}{2}$ in modo da avere $\alpha = 2\omega$ ossia $k\alpha = 3\omega$.

La nostra equazione **[012]** in questo caso diventa del tipo:

$$\sin(3\omega) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin(2\omega) \qquad \text{[007.020]}$$

e quindi, utilizzando le formule trigonometriche di moltiplicazione viste precedentemente, possiamo arrivare alla:

$$3 - 4\sin^2\omega = 2 * \sqrt{\frac{3}{2}} * \sqrt{1 - \sin^2\omega} \qquad \text{[007.021]}$$

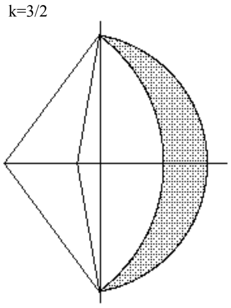
che, elevando a quadrato e semplificando, porta ad un'equazione quadratica

$$\begin{aligned} 16\sin^4\omega - 18\sin^2\omega + 3 = 0 \\ \Rightarrow \sin^2\omega = \frac{9 - \sqrt{33}}{16} \end{aligned} \qquad \text{[007.022]}$$

In cui abbiamo ignorato la soluzione complessa.

Un attimo! in realta` questa e` un'espressione del ***semiangolo***. Ricordando che $\omega = \frac{\alpha}{2}$, dovremo effettuare il calcolo per ottenere l'angolo originale: si ha, allora (nella seconda formula si e` applicata la solita **[014]**):

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8} \\ A_{Luna} &= \frac{3\sqrt{\frac{111 + \sqrt{33}}{2}} - \sqrt{3} * \sqrt{\frac{93 - 13\sqrt{33}}{2}}}{32} \end{aligned} \qquad \text{[007.023]}$$



Siccome so che non disegnerete mai un mostro simile, vi passo il disegno. Il segno **(+)** sta a significare che, in questo caso, abbiamo preso la radice positiva.

A quanto pare, questi tre casi erano gli unici noti agli antichi Greci. In effetti, il caso successivo non e` propriamente una meraviglia di espressione.

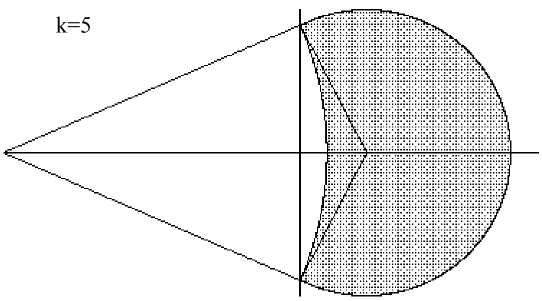
Infatti, il caso successivo per cui la nostra equazione **[012]** si riduce ad una quadratica (e quindi ad un qualcosa di costruibile) rende necessario considerare il caso per cui ***k=5***.

Questo ci porta all'equazione

$$16\sin^4\alpha - 20\sin^2\alpha + 5 - \sqrt{5} = 0 \qquad \text{[007.024]}$$

Che, risolta come sopra in sinquadro, da`:

$$\sin^2\alpha = \frac{5 \pm \sqrt{5 + 4 * \sqrt{5}}}{8} \qquad \text{[007.025]}$$



In questo caso e` la radice col segno positivo che ci porta ad un angolo complesso, mentre la radice negativa ci porta ad un valore "sensato".

Come dice Baez, "non vorremmo privare il lettore della gioia di calcolarsi questo valore da se`".

Comunque, la luna ve la disegnamo qui di fianco.

L'ultimo valore per cui riusciamo a ridurre la **[012]** ad un'equazione quadratica e` $k = \frac{5}{3}$.

In questo caso, l'equazione **[012]** viene espressa come funzione di $\omega = \frac{\alpha}{3}$, il che ci porta all'equazione:

$$5 - 20\sin^2\omega + 16\sin^4\omega = \sqrt{\frac{5}{3}} * \left(3 - 4\sin^2\omega\right) \qquad \text{[007.026]}$$

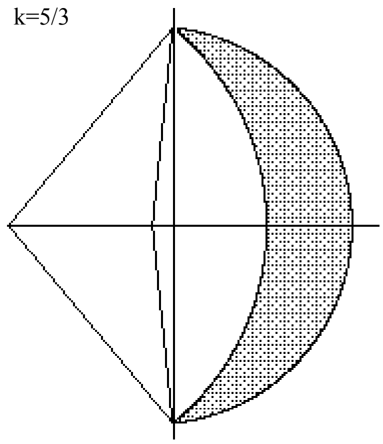
Che, anche se sembra una bruttissima bestia, e` una quadratica risolubile.

L'angolo (o meglio, il ***terzo di angolo***) risulta:

$$\sin^2\omega = \frac{15 - \sqrt{15} \pm \sqrt{60 + 6\sqrt{15}}}{24} \qquad \text{[007.027]}$$

di cui e` significativo solo il valore con il segno negativo.

Questo ci porta alla quinta e ultima luna quadrabile, che vi proponiamo qui sotto.



Tutto qui; se guardate l'ormai consunta equazione **[012]**, vi accorgete che nessun altro valore vi permette di ridurvi ad un'equazione quadratica; quindi, per tutte le altre, siete costretti ad utilizzare altri strumenti per effettuare la quadratura. E quindi, secondo Euclide, non e` valido.

I nostri quadratori (che abbiamo lasciato indietro ormai da tempo) non fanno altro, a giorni alterni, che riscoprire uno di questi casi e presentare (di solito nell'ultima pagina del giornale locale, vicino ai necrologi) la dimostrazione.

C'e` da dire che quantomeno hanno preso la strada di minor resistenza: *nessun* cerchio e` quadrabile, mentre almeno cinque lune lo sono di sicuro... una parte del lavoro e` gia` fatto, no?

A questo punto, di solito, vi chiedono dei finanziamenti per completare le ricerche...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms