Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 050 - 2003-03

1. Questione di attributi

"Nomen-omen": nonostante anni di celebrato liceo classico e una piccola passione per i giochi di parole, per molto tempo non sono riuscito a ricordare cosa significassero queste due parole, che da sole fanno un mezzo scioglilingua, o uno "scarto di iniziale", se siete fan della famiglia Bartezzaghi[1]. "Nome-destino", ovvero il fato gia` scritto nel nome: come dire che se vi chiamate Guido Piano non avete alcuna speranza di diventare bravi come Schumacher, il quale per altro dovrebbe aver maggior successo come calzolaio che come pilota. Come quasi tutte le affermazioni che tirano in ballo la

[1] P.(ietro?)Bartezzaghi ha abitato per decenni la pagina numero 41 della Settimana Enigmistica, tradizionale residenza dello schema di parole crociate piu` fetente della settimana. Suo figlio A.(lessandro?) orbita piu` frequentemente intorno a pagina 33 e 37, ma non disdegna talvolta la paterna 41. Stefano (altro figlio di P.) scrive per Repubblica e per Einaudi. Indovinate su quale argomento.

parola "destino", il motto non e` particolarmente intelligente, anche se ogni tanto qualche coincidenza lascia di stucco. Prendete l'ultimo imperatore romano: Roma ha brillato in modo particolare in forma repubblicana, ma e` stata anche una monarchia e soprattutto un impero. Il primo re si chiamava Romolo, il primo imperatore Augusto; era facile capire che, se ti chiami Romolo Augustolo, hai buonissime probabilita` di diventare anche il tu "il primo" qualchecosa di qualcosaltro. E infatti Odoacre fece fare una brutta fine a Romolo Augustolo, che divento` seduta stante il primo non-piu'-imperatore del non-piu'-esistente Impero Romano. E adesso, di Romolo Augustolo ci si ricorda sempre, quando si parla della fine dell'Eta` Antica e dell'inizio ufficiale del Medio Evo.

A ben vedere, gli storici seri sono i primi a dire che ha poco senso tracciare delle rigorose demarcazioni, quasi a voler inscatolare la storia in compartimenti stagni che, in ultima analisi, non sono affatto stagni e non sono neppure compartimenti. Sono solo dei nodi al fazzoletto, aiuti mnemonici, poco altro: si prende un evento non particolarmente significativo ma sufficientemente simbolico, come un ad esempio un capopopolo erulo che prende a calci nel sedere un ragazzino che ormai solo i parenti piu` stretti chiamano Imperatore d'Occidente, e si decide che per questo fatterello il 476 d.C. e` uno spartiacque della storia. Però, se la cosa e` davvero solo una convenzione, si potrebbe forse scegliere anche qualche altro evento, magari ancor piu` simbolico: e io personalmente devo al fondatore di una celeberrima[2] rivista di matematica ricreativa l'osservazione[3] che, almeno per i cultori della scienza dei numeri, il 415 d.C. potrebbe essere una scelta assai migliore, rispetto al 476.

Ad Alessandria d'Egitto, nel 415, alcuni fanatici cristiani ammazzano Ipazia.

A voler cercare dei simboli, se ne trovano a bizzeffe. Alessandria d'Egitto e`, incontestabilmente, il centro culturale per eccellenza di tutta l'Eta` Antica; e` una citta` greca in ogni senso (se si esclude il fatto del tutto contingente che *adesso* si trova entro i confini di una nazione che peraltro facciamo ancora fatica a considerare "africana"), e la Grecia e` il faro della cultura antica d'Occidente. La scienza greca per eccellenza e` la matematica, e Ipazia e` una matematica, ed e` figlia di Teone, il maggiore matematico del periodo. Infine, buona parte dell'Evo Antico e` noto per aver ospitato truculenti massacri di cristiani, che in precedenza erano stati a lungo perseguitati dai pagani: e un evento caratterizzato da monaci cristiani che invertono la tendenza, cominciando loro ad ammazzare i pagani, contiene un'altra, forte, connotazione simbolica. E si potrebbe continuare... i simboli basta cominciare a cercarli che spuntano subito come funghi. E` pero davvero impressionante quanti ce ne siano: dopo l'assalto dei monaci seguaci di san Cirillo, Alessandria viene abbandonata dagli studiosi e non si riprendera` mai piu', almeno come sede culturale e scientifica: il cristianesimo comincia proprio in questo periodo ad insediarsi nei posti del potere politico, cosa che caratterizzera` definitivamente il trend politico dei successivi mille e passa anni; la ragione dell'assalto alla biblioteca di Alessandria[4] pare fosse che i monaci del monastero di Nitria (e probabilmente non solo loro) identificavano la scienza e l'insegnamento filosofico con il paganesimo (il che, a posteriori, spiega anche perché per tutto il Medio Evo l'Europa sia rimasta sostanzialmente ferma nel progresso scientifico), e cosi` via.

[2] Nessuna autoironia nella scelta del superlativo: accurate indagini statistiche confermano che il 100% dei lettori di quest'articolo conoscono la rivista cui mi riferisco.

[3] Rudy d'Alembert – Comunicazione personale.

[4] Una buona notizia, se vi state intristendo troppo alla scena della biblioteca in fiamme. La Nuova Biblioteca e` pronta (cfr. http://www.bibalex.gov.eg/).

Ma vallo a spiegare agli storici... e poi, ormai il guaio e` fatto, e a fare da spartiacque resta il 476, con buona pace del 415: un po` come l'inno di Mameli, che si e` fatto ormai una tale esperienza come "inno provvisorio" che e` improponibile l'elezione di un nuovo "inno definitivo". Così, Romolo Augustolo trovera` sempre spazio in tutti i libri di storia, anche in quelli delle elementari, mentre di Ipazia non si parlera` quasi mai, a meno che qualcuno, improvvisamente, non ritiri fuori la sempiterna domanda: "Perdindirindina, ma e` possibile che non ci sia neanche una matematica donna?".

La domanda e` cretina per una folta schiera di motivi, e spero che tutti, dalla femminista piu` pasionaria al piu` bieco maschilista, siano in grado di capirne i motivi. Una delle prove piu` eclatanti della stupidita` della domanda sta nel fatto che il sottoscritto, matematicamente stupido e probabilmente stupido tout-court, se l'e` posta spesso; per altre evidenze, basta considerare che, guarda caso, esistono anche poche donne nella storia dell'astronomia, della filosofia, della politica, della strategia militare, dell'architettura: e la fisica e la chimica possono ringraziare una piccola polacca moglie d'un francese, se di solito non figurano insieme alla matematica tra le scienze considerate misogine. Il che e` tutto dire: una sola fanciullina che salva due delle discipline piu` illustri, solo perché ha vinto il Nobel in entrambe le materie. O forse perché e` un rarissimo doppio-Nobel, per di piu` sposata ad un Nobel, madre di un'altra Nobel e suocera di un altro Nobel ancora. Troppa roba per non essere evidentemente un'eccezione, no? Al punto da oscurare anche celebri colleghe: tutti conoscono il nome di Maria Sklodowska[5], ma pochi, anche tra gli acculturati di scienze, riconoscono con eguale facilita` il nome della grandissima Lise Meitner. Insomma, la domanda e` stupida perché e come chiedersi per quale ragioni esistono cosi` pochi matrimoni tra donne eschimesi e uomini bantu. Non hanno avuto molte occasioni di incontrarsi, tutto qui: né le eschimesi con i bantu, né le femminucce con la matematica, e non per colpa loro. Adesso le cose stanno cambiando un po', per fortuna.

Sia come sia, di Ipazia si parla poco, ma pare assolutamente obbligatorio parlarne quando si affronta lo spinoso tema delle "donne nella Matematica". E` un argomento canonico di discussione, nei salotti matematici[6]. E si svolge di solito secondo una linea cronologica ormai consolidata: si dice che di matematici donna non ce n'e` quasi nessuna, poi si comincia comunque a tirar fuori qualche nome dal cappello. Si parte inevitabilmente da Ipazia d'Alessandria, poi si arranca un po` alla cieca; qualche erudito si ricordera` della sorella del famoso astronomo Herschel, e in Italia e` quasi immancabile la citazione di Maria Agnesi e della sua "versiera[7]"; si sorride poi ricordando la temeraria Sophie Germain, quindi si arriva alla grande Sofia Kovalevskaya, la cui vita fa impallidire quelle dei protagonisti dei film di Bruce Willis. E poi, finalmente, si arriva trionfalmente alla piu` grande di tutte, alla donna matematica che celebriamo in questo primaverile mese di Marzo.

---

[5] Se non la riconoscete al volo, e` un altro punto a favore della tesi che stiamo argomentando: la famelica cultura occidental-maschilista ha concesso alla Sklodowska di passare alla storia solo tramite il cognome del marito. Stiamo parlando di Marie Curie.

[6] Al punto che, incredibile dictu, persino in italiano e` possibile trovare qualche libro che ne parli. Violando tutte le sacre abitudini protezionistiche di RM, citiamo en passant il breve saggio di Gabriele Lolli, "La crisalide e la farfalla", Bollati-Boringhieri, otto euro scarsi.

[7] Con tutto il rispetto, la cosa piu` intrigante della versiera (una cubica) sembra essere il nome. In italiano ci si e` accapigliati perché il termine esatto (almeno se si prende il latino come guida) dovrebbe essere "versoria", nome di una fune marinaresca che fa girare le vele. Ma la Agnesi diceva proprio "versiera", e bisognera` almeno riconoscerle il diritto di chiamare la sua curva come meglio le pare. Gli anglofoni sono addirittura piu` imbarazzanti: chiamano la versiera "witch" – strega – e poi si chiedono stupiti da dove verra` mai questo strano nome per una curva. Ora, io non voglio certo piccarmi di essere un filologo, ma andatevi a vedere com'e` fatta la versiera: anche se non lo fate durante Halloween, mi sembra davvero improbabile che non notiate la spudorata somiglianza tra la curva e il classico cappello delle streghe.

Non avrete mica pensato che fosse Ipazia, la star di questo mese, no? Diamine, di Ipazia e di tutti i matematici antichi non conosciamo la data di nascita[8], quindi non possiamo dedicar loro la celebrazione mensile! E` un problema niente male non poter parlare di Archimede e di Euclide, ma finora non vi siete mai lamentati per non aver trovato i loro nomi nel calendario, quindi non cominciate a farlo adesso. Per ora ci arrangiamo con personaggi un po` piu` recenti, e questo pezzo, che ormai ha almeno una cosa in comune con la Settima Sinfonia di Beethoven[9], e` tutto per Emmy Amalie Noether.

E se questo mese celebriamo Emmy, l'intenzione vera e` quella di denunciare un delitto ancora in corso.

Ogni discussione sulle donne in matematica inizia con Ipazia e finisce con Emmy Noether. Ipazia la prima, Emmy la piu` grande. E se di Ipazia la leggenda celebra la femminilita` raccontando che fosse "gentile, garbata, modesta e di bell'aspetto", di Emmy dice cose assai diverse, anche se la sua "condizione femminile" permea in maniera quasi didascalica la sua vita. La citazione piu` celebre su di lei e` quella spietata e onnipresente di Hermann Weyl: "Ci sono state solo due matematiche nella storia: Sofia Kovalevskaya e Emmy Noether: la prima non era una matematica, la seconda non era una donna", alla quale si accoppia quella, non si sa bene quanto involontaria, di Lev Landau: interrogato da un giornalista che gli chiedeva di confermare che la Noether fosse la piu` grande matematica vivente, sembra abbia risposto: "Posso confermare che e` un grande matematico, non posso confermare che sia una donna". Chissa` se il buon Lev voleva semplicemente puntualizzare al giornalista che il concetto di conferma e` una cosa seria, almeno in matematica e fisica, o se davvero non conosceva il sesso di Emmy: la cosa non e` poi impossibile, visto spesso ci si riferiva a lei come a "il Noether".

Se Ipazia era figlia di Teone, Emmy era figlia di Max Noether, docente di matematica ad Erlangen: un matematico di tutto rispetto e abbastanza famoso ai suoi tempi (e tenete presente che i "suoi tempi" erano i tempi di Hilbert, tanto per fare il nome d'un connazionale), che probabilmente non si sarebbe mai aspettato di diventare famoso

[8] Alle volte, però, potremmo quasi arrivarci. Il GC si diletta coi calendari e, tanto per dirne una, anche se non e` riuscito a determinare il giorno di nascita della bella alessandrina, e` almeno riuscito a scoprire in che giorno e` morta. Le cronache dicono che i Nitriani fecero lo scempio il giorno prima di Pasqua, e questo gli e` bastato per scoprire (con gli ausili del metodo di Gauss e della chiesa ortodossa) che Ipazia mori` Sabato 10 Aprile 415 AD.

[9] Come qualche lettore sa molto, molto meglio di me, la struttura canonica di una sinfonia (anzi: in genere, di ogni singolo movimento) prevede almeno un "tema" principale preceduto da una introduzione, e poi un seguito di esposizioni, variazioni, e altra roba ancora. Nella leggendaria Quinta, Ludwig fa il rivoluzionario e cassa del tutto l'introduzione, destinando cosi` all'immortalita` il subitaneo, esplosivo e fatale tema del destino che bussa alla porta con solo quattro note esplosive. Nella Settima, fa (quasi) tutto il contrario: una introduzione lunghissima, larghissima, con un sacco di suspense, al solo scopo di introdurre trionfalmente il tema. Tema che, a mio modestissimo parere, e` una delle cose piu` belle mai composte. Ma io sono sordo come la classica campana, quindi non fidatevi troppo dei miei gusti musicali.

come "il padre di Emmy"[10]. Emmy e` la prima di quattro figli, nasce nel 1882 e da brava fanciulla borghese di fine Ottocento studia le cose che sono adatte alle ragazze di buona famiglia: lingue. A diciotto anni ottiene il diploma per insegnare francese e inglese nelle scuole secondarie femminili bavaresi. Fin qui, niente di speciale.

Ma ricordatevi che siamo esattamente nel 1900, e che Emmy Noether e` femmina, ebrea[11] e pacifista. Un melange perfetto, per il luogo e il periodo. Senza che nessuno in famiglia se lo aspettasse, Emmy dichiara di aver intenzione di assistere alle lezioni di matematica dell'universita`, anziché insegnare francese alle ragazzine. "Assistere" va inteso in un senso un po` speciale: gli studenti universitari seguivano le lezioni con pieno diritto, ma lo status di "studente" non era riconosciuto alle donne. Emmy Noether poteva "assistere" alle lezioni, ma non era uno studente ufficiale. Dopo due anni in cui e` facile immaginarsela nascosta nell'angolo in fondo a destra dell'aula per non farsi notare troppo in quella specie di caserma, fu sottoposta ad un test che supero` brillantemente, diventando cosi` ... uno studente.

Fa quasi impressione ricordare che siamo gia` nel ventesimo secolo, nel cuore dell'Europa colta: ma questa situazione di palese handicap dovuto al fatto di non avere gli attributi (nel senso piu` triviale del termine) la accompagnera` sempre: altri cinque anni, e Emmy diventa la prima femmina laureata in matematica dell'Universita`. Nel frattempo (1903-1904) Emmy era andata a farsi le ossa a Gottingen, dove insegnavano nomi quali Hilbert, Klein e Minkowski; e nel 1907, tornata a Erlangen, arrivo` addirittura al dottorato, lavorando sotto Gordan. Dopo il dottorato, l'abilitazione: almeno, questo doveva essere l'iter standard. Ma e` pura chimera: una donna docente non era assolutamente proponibile.

Siamo molto contenti che un film sulla vita di Nash abbia avuto un grosso successo di pubblico: ci stupisce solo che ancora nessuno abbia deciso di farlo sulla vita della Noether: qualsiasi sceneggiatore di medio livello avrebbe di che infarcire la trama con un mucchio di colpi di scena. I "blocchi" dovuti al fatto di avere l'inguine arredato in maniera diversa da Euclide sono un'infinita`, ed Emmy li fronteggia uno a uno senza quasi preoccuparsene. La Germania del Kaiser non lascia alle donne la possibilita` di insegnare all'universita`? Emmy passa dieci anni ad aiutare il padre, senza che l'imperiale accademia di Erlangen le passi un marco. La Repubblica di Weimar si mostra un po` meno sessista? Oh, solo un po'... ma sara` seguita dal Terzo Reich, che nel 1933 proibisce l'insegnamento agli ebrei, e nel 1934 alle donne.

Un continuo frapporre ostacoli, un continuo superarli con timidezza e, ci piace immaginare, con un sorriso paziente: il vangelo dell'algebra moderna del XX secolo si intitola (con la solita, somma fantasia dei matematici) "Moderne Algebra", libro fondamentale in due volumi firmato da Van der Waerden. Il secondo volume e` integralmente opera di Emmy Noether. Nel commemorarla Weyl, quello dell'aforisma sulle due sole donne in matematica, raccomanda di non valutarla sulla sola base delle sue pubblicazioni, perché le idee della Noether stanno in tutti i lavori della foltissima schiera di algebristi che formo` prima a Gottingen (venivano anche dalla Russia, per studiare con lei) e poi a Bryn Mawr (USA), dove mori` nel 1935. E si` che le sue pubblicazioni non sono poche: negli anni venti scrive opere fondamentali di algebra astratta, di teoria degli anelli, di rappresentazione dei gruppi e di teoria dei numeri. Il suo nome e` legato all'anello noetheriano, ai gruppi noetheriani, alle equazioni di Noether, ai moduli di Noether.

---

[10] "Sì, sono il padre di Emmy, ma questo non mi da alcuna precedenza su di lei: nella nostra famiglia, e` sempre stata Emmy l'origine delle coordinate". Citata a memoria, ma il senso dovrebbe essere salvo.

[11] Quantomeno, "di genitori ebrei", come dicono educatamente quasi tutte le fonti. Non ci sentiremmo di scommettere molto denaro sull'ortodossia ebraica di Emmy.

Ma era femmina: quando Auguste Dick si interroga su quale possa essere la ragione per cui Emmy Noether non raggiunse un grado di carriera accademico elevato, domandò: " Com'e` possibile che la sua carriera accademica non sia mai andata oltre il grado di *nichtbeamteter ausserordentlicher Professor*[12]*?* Forse perché era ebrea? Ma c'erano molti professori ordinari ebrei, a Gottingen. Forse perché era un membro del partito socialdemocratico? O era la sua arcinota posizione di pacifista, a bloccarla?". Non cita il sesso di Emmy, compiendo un gran bell'esercizio di retorica[13]: si tace la caratteristica che si vuole evidenziare.

Nel mirabile anno 1915, Hilbert e Klein riescono a far giungere Emmy Noether a Gottingen, dove lavorera` fino al 1933: e se lei si adattera` docilmente a tenere le lezioni sotto falso nome (non potendo ufficialmente insegnare, il corso era ufficialmente tenuto da Hilbert *con l'assistenza del professor Noether*), Hilbert e Klein devono comunque faticare moltissimo, per spuntarla con il senato accademico: alla fine, sembra che i misogini che orripilavano all'idea di avere una donna a far lezione siano stati tacitati dallo stesso Hilbert che, spazientito, sbottò: "Diamine, signori: queste solo aule universitarie, non bagni pubblici!". Così, gia` da quell'anno, Hilbert poté avvalersi dell'aiuto di Emmy. Ma perché il 1915 e` un anno mirabile?

Perché e` l'anno del delitto.

Dieci anni prima, un altro ebreo tedesco con cittadinanza svizzera era diventato famoso, pubblicando tre articoletti sugli Annalen der Phyisik. Negli anni che vanno dal 1905 al 1915, Einstein prova a navigare nei meandri della matematica tensoriale per trasformare la sua teoria della Relativita` da Speciale a Generale, ma le difficolta` sono tante: la gravitazione e` una brutta bestia da trattare, e Albert ha gia` rimediato un paio di brutte figure pubblicando articoli con errori. Poi, finalmente, alla fine del 1915, le fondamentali equazioni della Relativita` Generale vedono la luce. Non e` una cosa molto nota, ma Einstein fu anticipato da Hilbert nella pubblicazione di quelle equazioni, e nella Germania gia` impegnata nella Grande Guerra poteva nascere anche una piccola guerra di priorita`; e, forse, non e` detto che ad Hilbert sarebbe andata poi male: tedesco di cittadinanza tedesca, matematico di fama mondiale, con dimostrata priorita` di pubblicazione su un non-ancora-cosi` famoso ebreo di cittadinanza svizzera, con alle spalle anche delle pubblicazioni sbagliate sull'argomento. Ma Hilbert era un vero signore: "Che c'entra la priorita`" – disse – "le equazioni giuste le avro` anche scritte io, ma chi le ha immaginate e` stato Einstein. E` tutto lavoro suo"[14].

Adesso, lasciate correre la fantasia... Emmy e` arrivata da qualche mese a Gottingen, e lavora con Hilbert. E` famosa per la maniera in cui "vede" l'algebra, per il suo approccio non convenzionale. E poco dopo il suo arrivo, Hilbert sforna le equazioni della Relativita` Generale. Ah, quanto ci piacerebbe essere degli scrittori di libri gialli, adesso! A dire il vero, non abbiamo alcun elemento per affermare che sia stata la Noether ad arrivare per prima a quelle equazioni, e non ci sogniamo di farlo. Ma uno sceneggiatore di Hollywood, potrebbe, dannazione, no? E non pensate che sia un'idea del tutto peregrina: Emmy restera` per tutta la vita una grande esperta di Relativita` Generale. E non pensate che ci sia troppo poco tempo per farlo: Emmy e`

[12] Evitiamo la traduzione letterale, per paura che suoni troppo ridicola e trasmetta un che di fantozziano a tutto il pezzo. Poi, non serve conoscere il tedesco: "ausserorden" fa difficilmente pensare a qualcosa che rientri nei ranghi dell` "ordinario", e certamente quel "nicht" iniziale sancisce l'assenza dello stipendio. Era un incarico non retribuito.

[13] La figura retorica in questione dovrebbe chiamarsi "reticenza".

[14] Anche questa citata totalmente a memoria: se questo fosse un articolo scritto per una rivista seria, non potremmo permetterci certe liberta`. Ma, qui su RM, fra amici, spero vi fidiate...

veloce. Lo dimostra il fatto che, sempre nel 1915, sempre a Gottingen, anche se e` appena arrivata, Emmy ha gia` confezionato una cosa. L'arma del delitto.

Ah, le universita`... adesso sono (almeno in questa parte del mondo) piene di ragazzi e ragazze, barbe incolte e minigonne, e le equazioni differenziali sui libri di testo possono permettersi il sacro privilegio di risultare macchiate sia da dopobarba che da rossetto, senza suscitare piu` scandalo. E a settembre, le universita` rigurgitano di ragazzi neodiplomati che spulciano programmi e bacheche alla ricerca del corso di laurea migliore. Poeti e tecnocrati, politici e sognatori, premi Nobel e impiegati alle poste: quasi tutti passano un periodo della loro vita col naso attaccato alle bacheche.

Quelli che poi si scontrano con le delizie della matematica superiore sono diversi: i futuri ingegneri, disposti a lottare con le equazioni a patto che queste possano poi tradursi in tecnologia e, vivaddio, anche in una carriera rispettabile. I matematici, che apprezzano le equazioni per quello che sono, trovando quasi blasfemo la necessita` di applicarle a qualcosa; i neo-arrivati[15] informatici, e i fisici. Questi ultimi stanno diminuendo vertiginosamente, tra l'altro[16]; perché per iscriversi a Fisica bisogna essere soprattutto dei romantici. E` quasi sempre una questione di fascino, attrattiva, e quasi mai una scelta che mira al "lavoro dopo l'universita`". Diciottenni affascinati dalla misteriosa Relativita` e dall'ancor piu` misteriosa Meccanica Quantistica. Irritati dal fatto che non sia superabile la velocita` della luce, stupefatti dalla ancora non trovata Grande Teoria del Tutto[17]. Sanno gia` parlare di Modello Standard e dell'Invarianza Locale di Gauge, e se finiscono con l'iscriversi e` perché, sotto sotto, vogliono vincere il Nobel.

Così, cominciano a dannarsi sulla fisica classica ("Orpo, la facevo piu` semplice...") e su Analisi Due ("se davvero serve questa roba, per capire il seguito, quasi quasi rinuncio subito..."). E finisce che, piano piano, assai prima di fare finalmente la conoscenza con il Principio di Indeterminazione di Heisenberg o con il paradosso relativistico dei due gemelli (che li fa sempre irritare moltissimo, quando lo vedono spiegato *nella maniera sbagliata* nei programmi divulgativi alla TV), incominciano a conoscere i veri mostri sacri della fisica. L'incredibile fatto che si possa usare la matematica per mostrare che il cielo e` azzurro, ad esempio. O gli onnipresenti principi di conservazione.

Aspettate quei diciottenni con il naso attaccato alla bacheca fuori dall'aula dove, anni dopo, hanno appena consegnato loro un pezzetto di carta variopinta con il loro nome scritto in caratteri gotici. Ditegli che hanno appena dimostrato al Fermilab che la relativita` generale e` sbagliata, e alzeranno un sopracciglio sospettoso dicendo "Ma va?". Ditegli che la cromodinamica quantistica e` stata demolita da un teorico boemo. "Possibile?", risponderanno con aria stupita. Anni di fisica inducono una gran quantita` di cinismo anche nelle menti inizialmente piu` devote e entusiaste. Ma ditegli invece che non valgono piu` i grandi principi di conservazione: massa-energia, momento angolare, e via dicendo. Li vedrete esibire cortesemente un sorriso di compassione, spostarvi educatamente e cercare con gli occhi gli amici che li aspettano per festeggiare in birreria.

Eppure, e` possibile (non certo, forse neanche probabile: ma possibile lo e` di sicuro: qui si parla per esperienza diretta) che quei ragazzi che ormai sono disposti piu`

[15] Non troppo "neo", ormai. Ma ancora "neo" su scala storica, no?

[16] Almeno in Italia: non abbiamo dati su altri paesi, ma il calo delle immatricolazioni nei corsi di laurea in Fisica e` molto elevato, a quanto ci risulta, nel nostro paese.

[17] TOE: Theory of Everything. Non e` un'invenzione di Douglas Adams, la stanno davvero cercando disperatamente. Hanno anche una candidata (la M-Teoria), che pero` e` molto, molto lontana dall'essere sacramentata come vera TOE.

facilmente a credere a Cappuccetto Rosso piuttosto che rinunciare alla conservazione del momento angolare, non sappiano cosa ci sia "dietro" quei principi. Cosa quei principi significhino, o, meglio, cosa quei principi implichino, e da che cosa siano implicati.

Dietro quei principi c'e` Emmy.

Perché Emmy, appena arrivata a Gottingen, dimostra (o "scopre"?) il Teorema di Noether. E` un teorema che parla dei principi di conservazione e di invarianti, e lo sceneggiatore di Hollywood potrebbe di nuovo notare che la Relativita` Generale e` tutta una ricerca di invarianti. E li mette in relazione con le simmetrie: e lo sceneggiatore potrebbe anche far fare una zoomata sulla fisica contemporanea, gauge e superstringhe, e raccontare come nei laboratori di fisica, all'inizio del terzo millennio, non si faccia quasi altro che cercare simmetrie. E, se fosse spiritoso, potrebbe giocare ancora di piu` sul giallo Einstein-Noether, tirando in ballo il giochino del "Nomen-omen". In fondo, ad Albert dovrebbe adattarsi meglio il cognome "Noether", visto che la sua negazione dell'esistenza dell'etere ("no ether") e` stato per lui l'inizio di tutto[18]. E forse il cognome "Einstein" sarebbe potuto servire di piu` ad Emmy, per ricordare a tutti che anche lei e` "ein stein", "una pietra" miliare nella storia della fisica.

Perché il Teorema di Noether, in poche righe di matematica, dice delle cose che dovrebbero aver generato fiumi di parole nei testi di filosofia della scienza. Il Teorema di Noether dice che ad ogni principio di conservazione corrisponde una simmetria. La conservazione del momento angolare? Discende dalla simmetria dello spazio. La conservazione della massa-energia? Discende dalla simmetria del tempo. Guardate un quasar al telescopio, e se riuscite a capire che il suo momento angolare e` conservato, saprete anche che vive in un universo spaziale non dissimile dal nostro. Il suo spettro ci fa capire che l'energia e` conservata? Allora, anche se la sua luce e` vecchia di miliardi di anni, sappiamo che vive in un tempo che ha le stesse caratteristiche del nostro.

E vale anche il contrario. C'e` una simmetria strana e inaspettata, in quell'esperimento? Cerca bene, da qualche parte c'e` una grandezza che si conserva.

E` di una potenza sovrumana, il Teorema di Emmy. Ed e` davvero inspiegabile che sia cosi` poco famoso. Famoso tra la gente comune, intendo, perché dovrebbe esserlo: la divulgazione abbonda di argomenti, ma non mi sembra che il Teorema di Noether, che pure e` cosi` evocativo e bello, sia argomento molto frequentato dai divulgatori. Un teorema nato integralmente dalla matematica, che misura l'universo nel suo insieme, su scala temporale e spaziale: molto piu` bello, molto piu` romantico del paradosso sui due gemelli. E perfino spiegabile a parole, senza sfiorare le equazioni.

E` questo il delitto. Almeno, e` la prima parte del delitto, la sua scena, il movente, il mandante. Perché e` un delitto uscire dalla facolta` di Fisica, per quanto si possa essere cattivi studenti, senza aver incontrato il nome di Emmy Noether. Dovrebbe essere impedito, in qualche modo: e la stessa cosa dovrebbe essere impedita anche ai laureati in filosofia.

Ma e` solo la prima parte del delitto, quella piu` generale: del delitto piu` meschino ci siamo macchiati anche noi, fino a questo momento. Il nome di Emmy Noether ha rimbalzato in queste pagine legato a doppio filo alla sua femminilita`. Era una signora grassa e probabilmente simpatica, e sembra che avesse un atteggiamento materno con i suoi studenti. Era timida e riservata, e quando morì, appena un paio di anni dopo essere arrivata negli Stati Uniti, tutti rimasero sorpresi dal fatto. Ma non

[18] Cognome che starebbe benissimo anche sulle carte di identita` di Michelson e Morley, peraltro.

perché la sua morte fosse improvvisa come quelle causate da attacchi cardiaci: Emmy era in realta` malata da tempo. Ma non lo si sapeva: Emmy non aveva parlato a nessuno, della sua malattia.

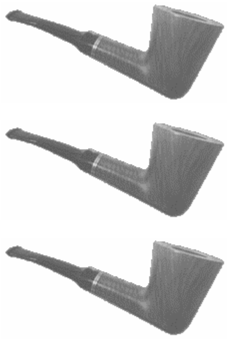
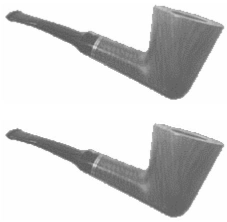
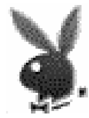
Eppure, non abbiamo parlato della Noether come uno dei matematici grassi piu` famosi della storia. O come uno dei matematici piu` amati dai suoi studenti. No. Il delitto e` troppo attraente, ed e` quasi inevitabile non ripeterlo.

Entrate nel primo bar sotto casa, cercate un capannello di persone che discutono di calcio, mettete su l'aria esperta e fate la seguente affermazione: "Credo che Pele` sia il miglior giocatore di colore che il Santos abbia prodotto negli anni Sessanta". Vi guarderanno come si guarda un idiota. Oh, avete detto una verita` incontrovertibile, eppure vi guardano da idiota. Gli appassionati di calcio lo sanno: si puo` discutere se il piu` grande calciatore della storia sia Pele` o Maradona, e troverete anche qualche originale che vota per Platini o per Schiaffino. Ma che senso ha dire "di colore", "degli anni Sessanta", "prodotto dal Santos"? La gloria di Pele` ne esce vergognosamente ridotta, da queste esattissime precisazioni.

Emmy Noether probabilmente non e` il piu` grande matematico mai esistito. E neppure il piu` grande fisico, certamente. Ma parlarne solo quando si parla di "matematica e donne" e` davvero un delitto. Perché parlarne cosi` poco, lasciare che il suo nome e le sue opere siano cosi` poco celebrate sarebbe comunque un delitto, anche se invece che Emmy si fosse chiamata Wolfgang, e avesse avuto genitali accordati a quel nome.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Inseguimento!			
Quattro "mattimatici"			

Non date troppo retta alla valutazione del primo. E` inettudine da parte mia e di Alice. Se volete qualcosa di "pesantino", vi ricordo che e` ancora aperto il gioco del "13"...

2.1 Inseguimento!

Piuttosto sanguinario, come problema, ma matematicamente e` molto carino.

Avete lo scheletro di un cubo e, su un vertice, una formica immobilizzata dalla paura, in quanto si e` appena accorta che sul vertice opposto c'e` un ragno.

Il ragno (che sa che da qualche parte c'e` una formica) e` cieco e dotato di scarsissimo senso dell'orientamento.

Quanti movimenti da uno spigolo all'altro ci si aspetta che faccia, per "pescare" la formica?

2.2 Quattro "mattimatici"

In alcuni isolati corridoi dell'Universita`, non e` infrequente imbattersi in dialoghi di questo genere:

Abel: "Sono matto"

Bernoulli: "Sono un teorico"

Cantor: "Sono un applicativo"

Descartes: "Non sono matto"

Abel: "Cantor non e` matto "

Bernoulli: "Descartes e` matto"

Cantor: "Bernoulli e` un applicativo"

Descartes: "Cantor non e` matto ".

Quello che voi sapete, e` che:

I matematici teorici dicono quello che pensano

I matematici applicativi dicono il contrario di quello che pensano

I matematici sani di mente pensano il vero

I matematici matti pensano il falso.

Riaccompagnate questi quattro ai rispettivi Dipartimenti e/o stanze imbottite, per favore...

3. Bungee Jumpers

Sia n un naturale primo con **10**.

1. Provare che le tre cifre meno significative di n^{101} sono le stesse di n.
2. Supponendo inoltre n *pari*, che cifra compare nella decima posizione di n^{20}, e quale nella centesima posizione di n^{200}?

Grande Sagra del **Pesce Algebrico -** Frazione Calde` di Castelveccana (Luino sul Lago Maggiore)

9-10 Agosto 2003

Cavalcare il Vento e Fendere le Onde per Raggiungere la Sagra del Pesce Algebrico [RdA]

Nella foto di repertorio, un gruppo di entusiasti lettori di RM si reca alla Sagra del Pesce Algebrico.

4. Soluzioni e Note

4.1 [011]

4.1.1 Problema da un altro Rudolph

Il terribile **Sam** *e` andato alla ricerca, sul sito, di qualche problema difficilotto... E guardate un po` cosa e` saltato fuori.*

Suite in R(e) **M**(aggiore)

[Foyer]

Beh, prima di entrare, pagate il biglietto... E, quando siete in sala, schiaritevi la voce con quegli "hahehem..". che si sentono sempre quando calano le luci. Alias, vi ripetiamo il testo del problema, perche` e` molto probabile che qualcuno di voi se lo sia dimenticato.

> Si, lo so che e` un nome poco diffuso, tant'e` che al paesello (600 abitanti) ce ne sono solo tre.
>
> Uno di questi (che per comodita` chiameremo R.) e` un appassionato di modellismo, e si diverte a montare (tra le altre cose) aeroplanini (il terzo e` un geometra, quindi non conta).
>
> Questi aeroplanini hanno una caratteristica particolare: in ogni scatola di montaggio, oltre all'aeroplanino, sono presenti **due** serie complete delle cifre da 0 a 9.
>
> Il Rodolfo R. (che e` molto ordinato) ha deciso di spiccicare un numero di serie su ognuno degli aeroplanini, usando queste cifre (solo quelle necessarie) e tenendo le cifre restanti per la numerazione dei prossimi modellini. Per intenderci meglio: il primo aeroplanino e` marcato "**1**" (e vi restano una serie completa piu` le cifre 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per i prossimi modellini), il secondo e` targato "**2**" (e vi restano tre serie nuove -due dal nuovo modellino piu` quella di prima- e le cifre 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), il centesimo e` targato "**100**" (e vi restano...). Insomma, nessuno zero davanti. Inoltre e` da notare che sin quando non ha finito un modello (numerazione compresa) non apre la scatola del successivo.
>
> Ora, il problema che ci si pone e`: *qual'e` il primo aereoplanino che non posso numerare?*
>
> Il mio consiglio e` di trovare una formula generale e poi di procedere per tentativi, comunque fate voi

Shhhh! sta entrando il "Vecchio Bach"....

Preludio

Ebbene, dopo aver letto del Problema Degli Alieni mi e` balenata in mente una domanda: "Da dove cavolo arriva?". Cosi` ho dato una attenta occhiata al sito di RM ed ho scoperto i Duri da Cuocere. Solo due ? Ma comunque, avendo tempo, carta e inchiostro, mi sono stampato il numero con il problema degli aeroplanini. Volevo scaricare i due numeri con le soluzioni di Piotr e Alice, ma non ho potuto e poi volevo vedere dove arrivavo per conto mio.

Quindi se le pagine che seguono sono scempiaggini, baggianate o affermazioni lapalissiane, abbiate la clemenza di comunicarmelo non dalle pagine del prossimo numero, ma via e-mail e che rimanga *inter nos*.

Probabilmente non avrei mai tentato di risolvere questo problema, visto che non ho particolare simpatia per quei problemi in cui le difficolta` di calcolo sormontano quelle di ragionamento, ma poi ho capito che il maggiore scoglio era a livello intellettuale e cioe` trovare un metodo per aggirare i calcoli.

Complici una verifica di Matematica sulla derivazione inaccettabilmente facile e breve e l'ora seguente, passata a cercare di capire quali differenze passassero, secondo Hegel, tra il sistema fichtiano e quello schellinghiano, mi sono dato alla soluzione del problema, che credo di aver trovato, a meno di errori di calcolo (non avevo voglia di verificare i passaggi con Excel, mi piace troppo fare i conti a mano!).

Il vero problema a questo punto e` mettere per iscritto, secondo un preciso ordine di tesi antitesi e sin... no!, di ipotesi dimostrazione e tesi, quel ragionamento contorto e intuitivo che ho svolto sulla copertina del Reale-Antiseri, senza prendere tanto la briga di giustificare formule e passaggi ed ho paura di capirci poco io stesso, ora come ora. Ma immagino che se vi dessi il risultato nudo e crudo vi offendereste, vero? E poi non voglio privarvi della gioia di trovare esattamente quale freccia di implicazione materiale e` al posto sbagliato.

Allemanda

La prima indicazione che trovo sulla suddetta copertina e` la seguente:

$$F\left(10^{n}-1\right)=n*10^{n-1} \qquad \texttt{[004.001]}$$

ebbene, prima di giungere a tanto dobbiamo affrontare qualche scoglio deduzionale (bella vero?): innanzi tutto e` chiaro che la prima cifra a venir meno al nostro appassionato modellista sara` l'uno, poiché e` la prima cifra ad essere usata; inoltre e` parimenti chiaro che a noi serve un modo per determinare quante cifre di un tipo e specificatamente quanti uno sono stati usati per formare i numeri da 1 a N incluso, qui subito convenendo che tale mezzo sia una funzione e che, detto N il numero, essa sara` F(N).

Ora sorge il problema di determinare F. Compito arduo invero, ma qui ci viene in aiuto la tendenza della matematica a studiare i casi particolari qualora non sia possibile quello generale (piu` tardi scopriremo che la funzione, sotto certe condizioni, ammette la seguente proprieta` F(A+B)=F(A)+F(B)+G(B) dove B<A, ma non corriamo troppo).

Cerchiamo di calcolare la funzione quando N sia potenza di 10: nella posizione delle unita` ogni cifra compare 1 volta su 10, se si scorrono ordinatamente i naturali; mentre nella posizione delle decine abbiamo 10 1 susseguentisi ogni 100 numeri e cosi` via, il rapporto e` sempre di 1/10. Quindi per trovare il numero di volte che 1 occupa una particolare posizione in N numeri mi bastera` calcolare N/10. Da cio` ricavo che per calcolare F su una potenza di 10, posso sommare il numero di volte che 1 e` unita` al numero di volte in cui e` decina e cosi` di seguito, tenendo presente che 10 alla ennesima e` formato da n 0 e un 1 e quindi n+1 cifre *(Il logaritmo e` decimale: se fosse naturale, sarebbe scritto "ln" [RdA])*:

$$F(N)=\frac{N*\log(N)}{10}+1=n*10^{n-4}+1 \qquad \texttt{[004.002]}$$
$$\left(N=10^{n}\right)$$

Quell'uno aggiunto e` la cifra d'inizio di N: io posso calcolare il numero di 1 in unita`, decine, centinaia, etc. fino all'ordine di 10^{n-1}, ma non oltre.

Quindi vale la relazione suddetta.

Corrente

Ora preoccupiamoci di questa considerazione: se F(N)=A, F(2N)=?. Viene la tentazione di portare il 2 fuor di parentesi, ma non e` il momento di fare le persone spiritose, come direbbe il mio insegnante di matematica; piuttosto ragioniamo.

Dunque, per quel che riguarda le comparse dell'1 come unita`, etc. fino alla (n-1)esima posizione non ci dovrebbero essere problemi, si tratta solo di duplicarne il numero, ma bisogna considerare che stavolta alla ennesima posizione abbiamo per $10^{n}-1$ numeri lo 0 (non scritto) e per altri 10^n numeri l'1, mentre il $2*10^n$ numero inizia con un 2. Quindi dobbiamo sommare al totale degli 1 queste 10^n apparizioni nella ennesima posizione. Si noti che in esse e` incluso anche il solitario 1 che prima avevamo sommato al totale e che non e` piu` necessario sommare. Inoltre si puo` generalizzare la cosa, calcolando $k*10^n$ con $0< k <10$, che equivarra` a k volte gli 1 tra 1 e $10^n - 1$ piu` 1 se k=1 o piu` 10^n se k>1:

$$F(k*N) = k*F(N-1) + 10^{\delta(k)*n}$$

dove

$$\delta(a) = \begin{cases} 0 & se \quad a < 2 \\ 1 & se \quad a \geq 2 \end{cases}$$

[004.003]

Sarabanda con abbellimenti

Proseguiamo con i casi particolari: pensiamo di voler calcolare $F(N_0+N_1)$ dove $N_0=10^n$ e $N_1=10^{n-1}$;ora, noi siamo in grado di calcolare i due valori separatamente, per cui possiamo iniziare dicendo che di certo le comparse degli 1 si sommeranno tra loro; inoltre bisogna considerare che quei 10^{n-1} numeri che noi aggiungiamo saranno tutti preceduti da un 1 e quindi alla somma delle due funzioni dovremo sommare 10^{n-1}. Immaginiamo ora di sommare un $N_2=10^{n-2}$ all'argomento: sommeremo ancora $F(N_2)$ e terremo conto degli 1 che precedono i nuovi 10^{n-2} numeri aggiunti, ma stavolta ogni numero sara` preceduto da 2 uno. Quindi possiamo generalizzare come segue:

$$F(N_0 + N_1 + \ldots + N_a) = \sum_{j=0}^{a} \left[F(N_j) + j*N_j \right]$$

con

$$N_0 = 10^n$$
$$N_x = 10^{n-x}$$
$$a \leq n$$

[004.004]

Ma a questo punto una mente perversa (provate a studiare l'Idealismo Tedesco pre-hegeliano[19] e ditemi se non vi "pervertite" anche voi) potrebbe pensare "Ma perché non mettiamo un bel coefficiente davanti a ciascuna di quelle N?". La risposta potrebbe essere semplicemente perché no!, ma purtroppo non mi e` venuta in mente al momento giusto, e quindi...Consideriamo dunque una serie di coefficienti k_0, k_1, etc. tutti diversi da 0 e minori di 10 e pensiamoli moltiplicati per i corrispondenti N. A questo punto qualche spiritosone potrebbe suggerire una funzione di funzione...pensateci bene...fatto?... se c'e` ancora qualcuno convinto di questa boiata micidiale puo` anche smettere di leggere! Bene, basta scherzare: se a k_0*N_0 (su cui gia` sappiamo calcolare F) aggiungiamo $k_1*N_1$ per calcolare la F di questa somma dovremo sicuramente aggiungere alla F del primo addendo la F del secondo e in piu` sommare gli eventuali 1 che si trovano in ennesima posizione nei k_1*N_1 numeri aggiunti. Ma attenti bene: se k_0 e` maggiore di due non avremo nulla da aggiungere, poiché in ennesima posizione avremo k_1*N_1 due. Questo vale per ogni N: dovremo aggiungere $k_x*N_x*\mu(x)$ dove $\mu(x)$="quanti k da k_0 a k_{x-1} sono uguali a 1". Quindi possiamo generalizzare e dire che:

$$F(k_0N_0 + k_1N_1 + \ldots + k_aN_a) = \sum_{j=0}^{a} \left[F(k_jN_j) + \mu(j)*k_jN_j \right]$$ **[004.005]**

[19] Non ce l'ho con la filosofia, anzi, mi piace molto, ma certe volte non si riesce a reggere per un ora ascoltando qualcuno che parla ininterrottamente di Io non-Io, unita` indifferenziata, colpi di pistola, vacche nere di notte, etc.(Non sto impazzendo, quelli sono commenti di Hegel sui sistemi dei suoi predecessori).

con

$$N_0 = 10^n$$
$$N_x = 10^{n-x}$$
$$a \le n$$

Bourree` I e II

E` facile ora dire che, giunti a qualunque N il numero di 1 trovati nelle scatole sara` 2N. Quindi possiamo impostare una equazione in un numero indeterminato di incognite, poi calcolarne gli zeri ed esaminare l'intorno di questi per trovare il primo punto in cui la differenza tra uno trovati e uno utilizzati diventa negativa. Se vi piacciono le matrici, le aspirine ed aspirate (gioco di parole!!) al suicidio, questa e` la strada che fa per voi, basta che poi non diano la colpa a me del vostro addio al mondo crudele. Se invece siete almeno un poco sani di mente (la sanita` totale e` esclusa dall'essere invischiati con RM) pazientate ancora un poco e seguite il resto delle considerazioni teoriche.

E` probabile che la diminuzione di uno disponibili (la differenza accennata sopra) sia graduale e nettamente distinguibile dalla fase di aumento. Quindi la cosa piu` logica da fare e` calcolare per quale valore di N si trova o il primo 0 o il primo valore non crescente. Ovviamente non sto pensando a qualunque N, ma a quei valori di N che si scrivono come $k*10^n$ e di cui sappiamo calcolare F. Le possibilita` sono due:

1. troviamo uno zero e indaghiamo nell'intorno sinistro per scoprire se la funzione veniva da valori positivi o negativi e calibriamo di conseguenza;
2. troviamo un valore non in crescita e ne analizziamo i successori per vedere dove si esaurisce la diminuzione.

Una volta fatto questo, andremo ad aggiungere ad N un valore N_1 di ordine n-1, ripeteremo i calcoli e cosi` via fino ad avere elementi sufficienti per trovare il primo numero in cui il numero di uno disponibili (che indicheremo d'ora in poi con Δ) sia negativo.

Inoltre e` assai scomodo rifare i calcoli ad ogni aggiunta, percio` noi lavoreremo tramite Δ, aggiungendovi e togliendovi ogni volta il necessario.

Possiamo infine affermare che, nel caso vi siano piu` zeri, si dovra` prendere in considerazione quello che comporta il valore di n o di k piu` piccolo; ovviamente la prima equazione ci aiutera` a determinare n, mentre le seguenti serviranno per determinare le cifre del numero cercato.

Si dia dunque inizio alle danze!!

Giga

Diciamo subito che, per $F(10^n)$ possiamo scrivere $2*10^n=n10^{n-1} + 1$ che si risolve per n=20 se non consideriamo l'uno sommato a secondo membro; tuttavia se noi facciamo assumere a k un valore maggiore di 1 l'equazione cambia: $2*k*10^n=kn*10^{n-1} + 10^n$ e dividendo tutto per 10^{n-1} otteniamo $n=20 – 10/k$ che quindi crescera` col crescere di k, il cui valore minimo e` due, per cui n=15. Dunque troviamo che, arrivando al numero $N=2*10^{15}$, Δ e` uguale a 0.

Ora fermiamoci a pensare: il numero precedente(assolutamente[20]) era composto da un 1 e quindici 9, quindi da Δ_{N-1} e` stato sottratto 1. ma e` stato aggiunto 2 (i due uno trovati

[20] Cioe` che non lo precede per ordine di grandezza, ma che e` il numero in questione diminuito di 1. Il concetto solito di precedente, insomma.

nella scatola) quindi tale differenza doveva essere –1. Allora consideriamo il numero immediatamente precedente a $2*10^{15}$, limitatamente al quindicesimo ordine, che e` 10^{15}.

Possiamo dire che $\Delta 10^{15}=2*10^{15}-15*10^{14}-1$ lasciamo perdere l'uno (ma ricordiamoci che e` li` in un angolo accucciato) e scriviamo $\Delta 10^{15}=5*10^{14}$.

Ora vediamo di aggiungere a 10^{15} $k*10^{14}$, con k tra 1 e 9. Vediamo subito che il valore di k che minimizza Δ (poiché e` questo che dobbiamo cercare) e` k=9:

(chiamando Δ_{14} il valore che Δ assume per $10^{15}+k*10^{14}$) $\Delta_{14}= \Delta_{15} + 2*k*10^{14}-k*14*10^{13} - 10^{14} - k*10^{14}$ ben si vede che ha il valore piu` basso per k=9; quindi $\Delta_{14}=4*10^{13}$.

Si puo` proseguire così, trovando, sempre con k=9, $\Delta_{13}=3*10^{12}$, $\Delta_{12}=2*10^{11}$, $\Delta_{11}=10^{10}$.

Bene, ora sappiamo che $k_0=1$, $k_1=9$, $k_2=9$, $k_3=9$ $k_4=9$ e che n=15. Ma, se proviamo ad andare avanti ci accorgiamo che Δ_{10} si annulla per tutti i valori di k tranne che per k=1. Ora, se vi ricordate ancora di quel povero 1 escluso, questo e` il momento di riconsiderarlo. Prendiamo il piu` piccolo valore di k che annulli il delta, ovvero 2; in realta` il delta cosi` calcolato e` –1. Il[21] numero che precede (assolutamente) quello per cui abbiamo calcolato il delta contiene due 1 e tutti 9, e cosi` i suoi predecessori i cui delta quindi valgono –2: il numero per cui abbiamo calcolato $\Delta_{10}=-1$ contiene un 1 e quindi, avendo noi dal precedente a questo tolto 1 uno e aggiunti 2, il delta del precedente era –2 e cosi` per quelli che precedono, in cui vengono utilizzati esattamente gli uno che si trovano nella scatola, fino a quello che finisce per 1(cioe` il numero di partenza per cui abbiamo eseguito il calcolo del delta meno 9): esso contiene 3 uno e quindi il delta del suo predecessore deve essere -1 (-2= -1 – 3 + 2), come i suoi 9 predecessori, fino ad un numero che abbia ancora 1 come unita`: il predecessore di questo numero avra` $\Delta=0$. E` quindi ragionevole concludere che esso e` il numero che stiamo cercando e se facciamo un po` di conti... dunque, siamo andati indietro di 9 numeri, poi di uno e poi ancora di 9, quindi –19... potremo scoprire che esso e` $199992*10^{10}-19$ ovvero:

```
1 999 919 999 999 981
```

e` il primo numero che non puo` essere composto.

Certo questo metodo lascia aperto il dubbio che ci sia qualche altro numero per cui valga la stessa condizione. Bene, se volete possiamo riprendere con il procedimento precedente da dove avevamo interrotto per divagare.

Lo facciamo[22]? Ma sì!

Allora se $k_5=1$, $\Delta_{10}=10^{10} + 2*10^{10} - 10*10^9 - 1 - 10^{10}$, ricordando le formule precedentemente accennate.

Se dunque accantoniamo un altro –1 (facendo –2!!) troviamo che $\Delta_{10}=\Delta_{11}=10^{10}$.

Ora possiamo continuare il ragionamento come abbiamo fatto all'inizio:

$\Delta_9= \Delta_{10} + 2*k*10^9-k*9*10^8 - 10^9 - 2*k*10^9$ (ricordiamoci che gli uno davanti sono 2) che come al solito si minimizza per k=9 e da` $\Delta_9=9*10^8$. Proseguendo si otterranno, sempre con k=9, questi risultati: $\Delta_8=8*10^7$, $\Delta_7=7*10^6$; $\Delta_6=6*10^5$, $\Delta_5=5*10^4$, $\Delta_4=4*10^3$, $\Delta_3=3*10^2$, $\Delta_2=2*10^1$.

Sì, mi sono fermato, smettetela subito di insultarmi, tanto non vado avanti: il prossimo delta varrebbe 1!!

[21] Da qui in poi il testo (quello che state leggendo) e` un po` confuso. Pensate cosa stesse per questo paragrafo sul mio libro!! Ho dovuto praticamente rifare il ragionamento ex novo per capire qualcosa delle cifre e delle lettere greche che ingombravano ormai non solo la copertina, ma anche l'indice analitico.

[22] Ovviamente e` una domanda retorica: non crederete che il ragionamento precedente possa stare in piedi?!? Sì, lo so che allora non avrei dovuto farlo, ma era per far capire che con un poco di intuito si puo` anche arrivare alla soluzione evitando calcoli noiosi e ripetitivi. Inoltre, non avrei mai perso l'occasione di confondervi le idee.

Come "e allora?" !?! Vi siete gia` dimenticati quel –2 ringhiante accucciato in un angolo? Oppure l'algebra non e` il vostro forte (perché state leggendo allora?)? Vi informo ufficialmente che e` da poco stato stabilito con sicurezza che 1-2=-1 e quindi per noi sarebbe gia` troppo tardi.

Dunque, cerchiamo di evitare l'inconveniente: poniamo l'ultimo k=8 e vediamo cosa salta fuori[23]: $\Delta 1=\Delta 2 + 2*k*10^1-k*9*10^0 - 10^1 - 2*k*10^1$ e quindi $\Delta_1=2$ che meno 2 fa 0!!! E dunque , meraviglia delle meraviglie, il numero che lo segue, per cui si dovranno utilizzare 3 uno pur trovandone solo 2, non sara` possibile comporlo. E questo numero e`

```
1 999 919 999 999 980 + 1 = 1 999 919 999 999 981.
```

Signori, il gioco e` fatto, la campanella suona la ricreazione

Postludio

Sì, lo so che non esiste il postludio in una suite, ma non potevo resistere alla tentazione di salutarvi. No, non e` solo per questo. Infatti volevo anche spiegarvi il perché delle formule: in teoria avrei voluto controllare il risultato tramite quelle formule, ma non mi ha retto il cuore al pensiero di vedere un altro 10 alla e quindi ho rinunciato.

Non so bene perché abbia dato ai paragrafi i nomi dei pezzi delle Suite Inglesi di Bach, forse perché le sto ascoltando mentre scrivo, forse perché l'ultimo pezzo assomiglia proprio ad una giga, lungo, monotono e con un falso finale nel bel mezzo.

Inoltre voglio precisare che non ho usato excel neanche una volta, anche perché i calcoli sono molto semplici; spero che nei due numeri che non ho letto non ci fosse qualche richiesta aggiuntiva, ne ho davvero abbastanza di modellini e numerazioni.

Ebbene, in tutta franchezza devo dire che risolvere questo problema mi ha divertito e spero che possa essere io l'ultimo a ridere.

No. Gli ultimi a ridere siamo stati noi. L'idea della "Suite in RM" ci ha divertito molto.

4.2 [045]

4.2.1 Sono cavoli vostri...

*Liberi di non crederci, ma c'e` gente che su questo problema ci sta costruendo un newsgroup. L'ultima notizia arriva da **BraMo logicar** che, non pago di conoscere gente della genia di PMP, cerca di tirare dentro altri. Non siamo sicuri che questi metodi di cooptazione (che, conoscendo BraMo, supponiamo violenti) portino effettivamente ad un entusiasmo per la matematica ricreativa, ma comunque giunga il nostro saluto a **Devan** e a **Roberto** (quest'ultimo, se ci legge, e` pregato di cercarsi un allonimo...). Comunque vediamo cos'e` saltato fuori: il newsgroup privato e` moderato da BraMo (BraMo "moderatore"... Un po` come Dablyu con la bandiera della pace il 15 febbraio[24]...). Comunque, cediamo alla prorompente retorica di BMl...*

Ahhhh, ed un grido triplice (perche' in tre forse ricordate il problema *(Posso confermare che e` stampato ormai a caratteri di fuoco nella memoria di tutti noi... [RdA])*) si levo' nella notte. No, non e' detto che leggiate questa di notte, comunque, ebbene si', il problema generalizzato delle lanterne non e' ancora stato risolto ma ... sfiga vuole che qualche giorno fa ci abbia pensato ancora un po' su, e che abbia raccontato la pensata a Devan, un altro dei pazzi a cui piacciono queste cose (non ancora iscritto?).

[23] Sì, sarebbe piu` corretto porre un equazione e studiare per quale valore di k il delta vale 2, ovvero 0, ma tant'è. So gia` la risposta, quindi perché perder tempo a girarci in giro? Non sara` rigoroso, ma e` molto comodo.

[24] Approfittiamo di questa occasione per prendere posizione e dire al Pinguino che abbiamo visto le foto. Grande!

Dunque, volevo ricordarvi il punto della situazione.

1. In estrema sintesi, si vorrebbe sapere se, data una stringa di 0 e 1, infinita, e dato il solito criterio di switchare tra 0 e 1 (cioe' quello di cambiare tre bit consecutivi ogni volta), e' possibile determinare le configurazioni raggiungibili partendo da quella nulla. Una volta si diceva "identicamente nulla" ma mi sembra tanto come dire "esco fuori". *[Apprezziamo la finezza linguistica, ma ci limitiamo a far notare che "switchare" in italiano si dice "commutare" (RdA)]*

Il problema inverso, ma del tutto analogo, e': data una sequenza binaria infinita, come si puo' determinare se tale sequenza e' "spegnibile" o meglio "raggiungibile", cioe' in pratica "le spengo tutte le lanterne"?

Qui un piccolo chiarimento: ovviamente la sequenza si puo' considerare infinita ma, okkio, ovviamente c'e' il vincolo che la distanza tra i due bit `1' piu' lontani deve essere finita. Alias: all'infinito, sinistro e destro, ci sono solo `0'.

2. Roberto ha un algoritmo per risolvere uno dei due problemi, ma non l'altro. Io ribadisco il mio pensiero: un conto e' un algoritmo, un altro e' una formula. Nel caso di una formula ad esempio risolvere entrambe le forme. Supponiamo di averla, e chiamiamola L(x) dove L(.) sta per "lanterna" e x e' la sequenza di bit. Il problema diretto si risolve semplicemente citando L(.): "le configurazioni raggiungibili sono tutte quelle caratterizzate da L(.)". Il problema inverso si risolve banalmente applicando L(.) alla stringa.

Altra convenzione: possiamo rappresentare la sequenza infinita tralasciando gli zeri nei due rami infiniti della pseudo-retta, cosi'

`x = 101` sta per `x = ...000101000...`

Ed ecco la piccola elucubrazione. Facciamo un'ulteriore generalizzazione. Ahh, dira' qualcuno. Tra un po' cerchiamo di spegnere lanterne nell'iperspazio !

Non e' fine a stessa, ma l'ho pensato dicendo tra me e me: proviamo a vedere che capita se n != 3, cioe' se non devo girare tre bit alla volta, ma 2 o 4 o 7.

Vediamo due casi.

n = 2

Qui la cosa e' veramente molto semplice. Se ci si pensa 5 secondi, ma forse meno, ci si rende conto che ogni mossa di questo tipo "mantiene la parita'", cioe' se ho un numero di `1' pari, continuero' ad averlo, idem per dispari. Dunque possiamo dire che:

condizione necessaria affinche' una stringa sia valida, o generabile, o raggiungibile, ma si' chiamiamola valida, **e' che contenga un numero pari di `1'.**

Ma la condizione e' anche sufficiente? Cioe' qualunque stringa con un numero pari di `1' e' valida?

La risposta e' si': se applichiamo l'algoritmo di Roberto ce ne rendiamo conto velocemente.

Dunque, per n = 2, il problema e' del tutto banale:

```
         | 1 se count1(x) e' pari
  L(x) = |
         | 0 se count1(x) e' dispari
```

n = 3

Ma perche' si complica tutto cosi' maledettamente?

n = 4

E qui, anche se di poco, la cosa si risemplifica un po', anche se non a sufficienza per risolvere il caso. Possiamo cioe' dire che:

condizione necessaria affinche' una stringa sia valida e' che il numero di `1' sia pari.

E' abbastanza semplice verificare infatti che, voltando 4 bit adiacenti alla volta, la parita' si mantiene.

Purtroppo NON si mantiene la divisibilita' per 4, che ci avrebbe fatto sperare di risolvere il tutto. Se consideriamo ad esempio il seguente passaggio:

00**0000**000
001**1110**00
001000100

vediamo che il numero di `1' e' 0 -> 4 -> 2.

Un'ultima considerazione, e un'ultima pensata (per oggi): proviamo ora a non considerare solo `0' e `1', ma numeri naturali. No, no, non e' un'altra generalizzazione. E' solo un altro modo, come quello precedente di modificare n, di arrivare a risolvere il problema originale.

Supponiamo cioe' di mantenere, per ogni elemento della stringa (non piu' bit), il numero di switch effettuati dallo stesso. Un esempio per chiarire. Facciamo gli stessi tre passaggi su una stringa nulla:

originale	nuovo
000**000**000	000**000**000
0**001**11000	0**001**11000
01**101**1000	01**121**1000
010101000	012321000

E' del tutto evidente che il nuovo metodo ci da' qualcosa di piu', e che e' banale convertire una stringa siffatta nel vecchio sistema: un numero pari e' uno `0' e uno dispari un'`1'. Qui pero' emerge una condizione necessaria:

condizione necessaria affinche' una stringa sia valida e' che la somma dei valori di tutti gli elementi sia un multiplo di 3.

Il perche' e' del tutto banale. La domanda che viene in 2 secondi e': la condizione e' anche sufficiente? Ebbene NO. La semplice stringa

030

ne e' la prova.

C'e' pero' un'altra condizione necessaria, un po' meno ovvia della precedente:

condizione necessaria affinche' una stringa sia valida e' che ogni elemento sia minore o uguale della somma dei due elementi adiacenti.

Pensandoci bene e' banale. Prendete come esempio la stringa ..373.. (dove `.' sta per "qualunque carattere", a la grep). Come si spiega il 7? Non si spiega.

Da qui viene in mente, e poi basta, di applicare ancora l'algoritmo di Roberto. Qui non ci ho ancora pensato bene ma ve la butto li': se applichiamo l'algoritmo abbiamo una diminuzione continua dei numeri fino a farli azzerare. Se qualche numero diventa negativo, allora la stringa NON e' valida. Dovrebbe funzionare. Ma allora da questo non si puo' tirar fuori una regola generale? E poi si riesce a calare il tutto ai vecchi bit? Domande troppo elevate per pensarci ora.

E sapete qual e' la prossima mossa? Pensavo: e perche' dobbiamo soffrire solo noi? Mandero' il problema al gruppo di news Internet `rec.puzzles', a cui partecipa il mondo intero, e magari anche a `it.hobby.enigmi', a cui partecipa qualche italiano.

L'originale e` ben noto in ambiente internazionale. Le elucubrazioni no. Siete sicuri che il mondo sia pronto, a questo?

4.3 [048]

4.3.1 Q&D

Nota di servizio: il buon **Sam** *ci fa notare che c'e` un errore di stampa nella risposta (quelli che in inglese si chiamano "typo" e in italiano "refusi": di quando le linotypes erano vere linotypes... Va bene, la smetto). E aggiunge considerazioni interessanti.*

Avevo sbagliato a digitare la risposta 102 in base 4 =) 210 in base 4 e cioe` 18 (=16+2) e 36(=32+4). Ammetterai che e` ancora piu` dirty: in base $n^2$ un numero che finisca con n e tale che portando n a sinistra se ne ottenga l'ennesimo multiplo e` sempre lungo 3 cifre ed ha forma 10n, poiché:

XXXXXXN x   NxN=10 in base N^2, quindi
N =
XXXXXXX

XXXXXX0N x   XXXX10N x
N =   Nx0=0 +1 di riporto =1 =>   N =
XXXXXX0   XXXXX10

e quindi, con l'ultima moltiplicazione si ottiene che 10N * N = N01 in base N^2.

4.3.2 Zugzwang!

Il gioco del 13, ve lo ricordate? Avevo detto un'asinata, fortunatamente moderata da un "mi sembra". Prontamente, **Sam** *mi corregge.*

Solo una precisazione, cioe` che il primo non puo` vincere se il secondo gioca simmetricamente, poiché per vincere deve completare una linea e di conseguenza avrebbe dovuto porre il terzo pezzo la mano prima ed il secondo avrebbe completato lui la linea, lasciando perdere la simmetria per la vittoria. Non e` possibile nemmeno che il secondo gliela abbia inavvertitamente preparata, poiché avrebbe potuto farlo, nel rispondere per simmetria, se alla mossa prima lo avesse fatto anche il primo,ma allora, come sopra, il secondo anziché giocare simmetricamente avrebbe fatto lui la mossa vincente.

4.4 [049]

4.4.1 Basta meloni!

Qui vi siete scatenati... No, per non fare ingiustizie (o meglio, per il Teorema di Arrows, per farla verso di tutti tranne la Redazione) ci limitiamo a qualche commento. Cercate di capirmi, devo ancora mettere le soluzioni all'altro problema e il contapagine segna gia` ventisei!

Allora, la prima soluzione (in ordine cronologico) arriva a tre ore dalla pubblicazione della rivista, chiaramente da parte di **PMP** *che, per farci vedere che aveva letto* tutto, *ci manda anche una nota sul fatto che Hardy in realta` era un ottimista: e se fosse affondata anche la nave che portava la cartolina? Logicamente, il Nostro non perde occasione per battibeccare un po` con la Redazione, iniziando dai casi "patologici" (tipo zero monete e/o zero teste...) e dichiarandosi "un matematico atipico". Non possiamo che condividere, anche perche` l'espressione "matematico tipico" puzza di ossimoro lontano un miglio.*

Soluzione anche da **Sam***, che liquida il tutto con un* "nulla di complicato e trascendentale..." *Vero, ma vi siete abbastanza "lanciati", in particolare qualcuno di cui parleremo dopo. Ammette, comunque, che non e` il suo tipo di problema. Proveremo a smentirlo, dopo.*

Viggio *ci manda un'interessante soluzione con un buon lavoro sulle sequenze e, logicamente, se la prende con noi perche` abbiamo detto che questo problema era facile e il prossimo no, mentre per lui e` vero il contrario. Approfittiamone per chiarire un attimo il problema, si?*

Esistono una serie di criteri generali:

Se c'entra la Trigonometria, di sicuro ci sono un mucchio di pipe: non che non mi piaccia, ma non me la ricordo mai. "Quando avro` tempo" (cioe` verso il trentun febbraio, probabilmente) mi rimettero` a studiarla per bene; per adesso, me la cavo con una vetusta copia del Rossotti che, dovendo essere sfogliata con rispettosa delicatezza, porta via un mucchio di tempo.

Se invece entra in ballo la Teoria della Probabilita`, potete stare tranquilli che la valutazione sara` annegata in un mare di birre; in compenso vedrete pochi coniglietti e abbastanza poche pipe.

Quando invece il numero dei coniglietti vi fa capire perche` in Australia li considerino un problema, allora c'entra il Calcolo. In compenso, se c'e` di mezzo la logica, l'analisi della parita` o "evidenti ragioni di simmetria" (questa e` una frase che fa andare in bestia Doc: potreste dirla piu` sovente, per favore?) allora i coniglietti rischiano l'estinzione.

Questi sono i criteri che il Grande Capo segue nella "pre-attribuzione"; poi Alice e Doc dovrebbero dire "si, d'accordo" o "no, cambiala". La presenza del condizionale nella sua piu` sfrenata forma ipotetica dovrebbe chiarirvi cosa succede in realta`...

Andiamo avanti, che e` meglio.

Ci e` arrivata una bellissima e dettagliatissima soluzione da parte di* **Petra**, *che e` una new entry (non fatevi trarre in inganno dall'allonimo: e` un maschietto, anzi quasi due ingegneri) che* non *pubblichiamo, pur riconoscendo che e` la miglior soluzione arrivata: questo per i seguanti motivi:

1. *E` lunga nove pagine*
2. *E`, anche se molto piu` dettagliata, equivalente alla redazionale*
3. *E` in PDF*

In particolare, l'ultimo punto e` da un po` di tempo oggetto di discussione: RM viene inviato in PDF per comodita`, ma l'editing avviene tutto in Word (l'unica cosa che abbiamo e` un taroccamento di alcune DLL di Acrobat Reader che ci permettono di stampare su file). Inoltre, il Nostro in questo caso particolare inserisce il proprio indirizzo di mail e sito; le ferree leggi sulla privacy che ci siamo imposte ci impediscono di pubblicare dati di questo genere (e anche la pigrizia... se ve li risolvete per posta tra voi, poi dopo ordinare le soluzioni diventa impossibile...) e quindi l'unica soluzione sarebbe stata quella di copiare tutto "a manina". Siccome c'erano dei bellissimi disegni e la nostra inettitudine nel ramo e` notoria, per non rompere l'amicizia abbiamo deciso di sorvolare.

Avremmo comunque un consiglio, visto il dettaglio della soluzione: se vi applicate allo Zugzwang! *del numero 48, se riuscite a fare l'analisi e ci mandate il tutto in Word, garantiamo la pubblicazione in Bookshelf.*

Bene, probabilmente vi abbiamo tenuto abbastanza sulla corda... Di seguito, per scontentare tutti, la soluzione redazionale.

In qualsiasi posizione mettiate le monete, e` abbastanza evidente che la ***prima*** mossa (che sara` sempre possibile *tranne nei casi patologici brillantemente analizzati da PMP*) ***cambia la parita` delle teste***. Quindi, possiamo ritrovarci in tre casi:

T=0: in questo caso, niente da fare: non possiamo piu` giocare e abbiamo "perso".

T=2M+1 (ossia ci restano un numero ***dispari*** di ***teste***). In questo caso, scegliamo una ***testa*** con un numero ***pari*** di teste per ogni parte e giochiamo su quella; in questo modo, avremo *due* catene (disgiunte) ciascuna delle quali avra` un numero ***dispari*** di ***teste*** e su ognuna di queste catene potremo fare lo stesso giochetto, visto che la situazione e` identica al caso in esame (si noti che "pari" puo` anche valere zero).

T=2M (ossia ci restano un numero ***pari*** di ***teste***). Qualsiasi moneta scelga, dopo l'applicazione delle regole restera` un numero ***pari*** di ***teste*** per ogni sottocatena, rendendo la giocata impossibile.

Quindi, il gioco e` risolubile ***se e solo se*** all'inizio ho un numero di ***teste pari e maggiore di zero***.

...e perche` Rudy e Alice lo hanno considerato difficilotto? Beh, ci siamo incaponiti sulla ***posizione*** delle monete indicanti testa e sul ***numero totale***. Pero` ci e` piaciuto molto quando, gentilmente, il nostro esperto in calcolo della parita` (Doc: lui sostiene che e` perche` sa contare solo fino a due) ci ha fatto notare l'assoluta inutilita` di questi dati...

4.4.2 Torneo

Alberto e` molto arrabbiato con voi; sperava qualcuno gli chiedesse le regole del gioco.

Per punizione, ve lo spiego lo stesso: scacchiera, fila di pedoni in prima riga, lancio un dado e muovo un pedone di quante caselle indica il dado nella direzione che voglio (ammessi zigzag e diagonali). Scopo del gioco e` arrivare in ultima riga con tutti i pedoni. I pedoni non si "mangiano" tra di loro ne` si saltano, ma si possono urtare*, cedendo parte del proprio punteggio ad un pedone avversario e muovendolo delle opportune caselle. Siccome mi ricordava da matti gli urti delle molecole in un gas, come potevo chiamarlo, se non "Boltzmann"?*

Sia ben chiaro: io e mio figlio siamo i primi a renderci conto che per trasformarlo in un successo tipo "Monopoli" e` necessario ancora un bel po` di lavoro, ma l'importante e` cominciare. Tra l'altro (sono serio, adesso) qualcuno ha delle idee?

La prima soluzione arriva da una new entry, Frank Lewis in bilico, *detto* **FLiB***: anche qui, attenzione a dove mettete le maiuscole*[25].

*Il nostro conclude con un "*ok, non so ne` quanto sia chiara la spiegazione *(ragionevolmente chiara)* e dubito sul procedimento....*(no, e` corretto)* ma insomma... ditemi dove e` l'errore!!!!!*" Semplice: e` quello che quando gli uomini erano... (Eh? Ah, si, va bene... insomma, ai tempi dei "flib") era noto come JFO-E: "Just For One" Error. Ossia, hai contato uno dei miei figli in meno (vorrei farlo anch'io, certe volte...). Posto che vi interessi, il nome dell'errore deriva dal fatto che secoli fa il primo elemento di un vettore era A[1], mentre con il linguaggio "C" si e` cominciato ad avere A[0]. Era facilissimo sbagliare.*

Chi non sbaglia (potevamo dubitarne?) anzi ci rifila un po` di italiano aulico e` **Sam***, che trova il problema "*facilino*". A me la sua soluzione piace, perche` trova un paio di scorciatoie niente male. Pubblichiamo di seguito.*

Abbiamo ***A***, ***F*** e ***n*** insulsi pareggiatori. Poiché il torneo e` all'italiana, la somma dei punti di tutti corrisponde al numero di partite disputate. Sappiamo dunque che vi sono $n+2$ giocatori e che hanno totalizzato in tutto $8+nh$ punti dove ***h*** e` tale che $0 \le 2h < 16$ senza uguale poiché il frugoletto inventore e` anche manigoldo. Il numero di partite e` la somma dei numeri naturali tra ***1*** e ***n+1***. Da qui in poi e` tutto ovvio:

---

[25] Sentite, magari qualche vecchietto con la memoria migliore della mia riesce a confermare un mio vago ricordo... Parlo dei tempi quando i video grafici erano un lusso per la versione 1.0 di AutoCAD e si andava avanti sostanzialmente a caratteri ASCII. Mi pare di ricordare un "gioco" per PC in cui su un pianeta delle creature si evolvevano (avevano un corredo genetico che variava in maniera casuale) e, per semplicita` di movimento sul video, anziche` sferico il pianeta era *toroidale*... "E cosa c'entra?" Beh, mi pare che quei simpatici cosini verdi che si muovevano pigramente sul mio 8086 monocromatico fossero chiamati "flib"...

$$\begin{aligned} & 16+2nh=(n+2)(n+1) \\ & \Rightarrow n^2+n(3-2h)-14=0 \\ & \text{dove } n=\frac{1}{2}\left(\left[2h-3\right]\forall\sqrt{\left(\left[2h-3\right]^2+56\right)}\right) \end{aligned} \qquad [004.006]$$

scusate le parentesi, ma sono inderogabili *(Piu` che le parentesi, tenderemmo a criticare un utilizzo piuttosto anarchico dei quantificatori... Comunque, si, ci abbiamo messo solo mezz'ora a capirla...)*: ora, ***n*** e` intero, a meno che il genialoide autore non giunga alla mutilazione per assicurarsi la palma del trionfatore, percio` $\left(\left[2h-3\right]^2+56\right)$ dovra` essere un quadrato e cioe` ***56*** dovra` essere visto come somma di dispari consecutivi (formalmente e` una boiata, ma si capisce quel che voglio dire, no?). Ora, $56=7*8$ e quindi potra` essere visto come somma di ***2*** o ***4*** dispari. Vediamo che

$$\begin{aligned} & 56=27+29=2*14-1+2*15-1 \\ & 56=11+13+15+17=2*6-1+2*7-1+2*8-1+2*9-1 \end{aligned} \qquad [004.007]$$

Ora, nel primo caso $2h-3=13$ per ovvi motivi legati al fatto che $n*n$ e` la somma dei dispari tra ***1*** e $2n-1$, e quindi ***2h=16***, caso escluso prima. Nel secondo caso $2h-3=5$ e quindi ***2h=8***, ***h=4*** accettabilissimo. Risulta dunque che il radicando vale ***81*** e la radice ***9***. Il segno meno davanti e` pura formalita` accademica e va levato, lasciando come unico incontestabile risultato ***n=7***. Ti e` andata ancora bene: devi preparare ***9 brioches***, se invece la tua prole non avesse avuto alcuno sleale istinto sopraffattore e fosse andata incontro a meno fausto destino, avresti dovuto approntare ben 16 cornetti (o quant'altro sfornino le panetterie li` in zona) per saziare la giusta fame di 14 vincitori a pari merito (15 se il suddetto infingardo avesse anch'egli totalizzato gli 8 punti di cui si fregia in somma con Federico, che allora miserello n'avrebbe fatti punto).

Carina, vero?

Una "soluzione quantistica" (nel senso di un pezzo qui e un pezzo la`, sparsa attraverso un paio di mail che parlano d'altro...) arriva da **PuntoMauPunto**. *Alla fine si chiede (ma non si risponde) se il meccanismo viene inficiato da condizioni del tipo "*...A ha battuto B, B ha battuto C, C ha battuto D e D ha battuto A..." *Beh, a occhio direi che funziona lo stesso, almeno sinche` ci limitiamo al girone all'italiana... Ma questa e` un'altra storia.*

A proposito di quest'altra storia: Sam, la Redazione tutta (leggasi: Rudy) sta lavorando al PM su tu-sai-chi. Comparira`, non disperare.

Anche il buon **Viggio** *ci manda una soluzione, permettendoci pero` di chiarire un grande mistero: infatti, scrive "* l'ho risolto un sabato pomeriggio durante le code ai semafori della statale SS11*". Certo che, con Viggio che brucia i semafori sulla Statale 11 e PMP che risolve problemi di traverso sul cavalcavia di Monteceneri, le ragioni dell'eterno ingorgo di Milano diventano lampanti...*

Per quanto riguarda la valutazione delle difficolta`, beh, si, ne abbiamo gia` parlato...

Un'altra new entry, nota in questi poco raccomandabili ambienti come **Icewolf**, *ci manda una soluzione decisamente semplice e apprezzabile (anche perche` mi risparmia la solita mezz'ora di Formula Editor...).*

Allora, per cominciare buttiamo giu` un po` di definizioni e simboli, giusto per darci un tono:

Per prima cosa enunciamo le Ipotesi del Torneo all'Italiana (senza ritorno):

a) Ognuno gioca una sola volta con ogni altro

b) Ogni partita e` giocata tra due soli giocatori

c) Ogni partita mette in palio un punto, che puo` essere diviso o in maniera perfettamente simmetrica : $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, o in maniera perfettamente asimmetrica: $(1,0)$ oppure $(0,1)$.

Poi numeriamo progressivamente i giocatori in questo modo: Alberto=1, Federico=2, e gli altri sconosciuti seguono. Sia inoltre ***n*** il numero di giocatori totale.

Definiamo la funzione ***P(n)***, che fa corrispondere ad ogni giocatore il suo punteggio. Tale funzione assume valori in ***N*** ed ha il codominio sottoinsieme di ***C*** che definiamo così:

$$C = \left\{ x : x = \frac{a}{2} \right\}_{a \in \mathrm{N}} \qquad \texttt{[004.008]}$$

Insomma il punteggio di ogni giocatore deve essere una frazione a denominatore 2.

Infine chiamiamo q il numero di partite giocate.

A questo punto i vostri disgraziati amici sono in una situazione che possiamo descrivere così:

$$\begin{aligned} &P(1) + P(2) = 8 \\ &n \geq 3 \Rightarrow P(n) = c \in C \\ &P(1) = \max P(n) \leq 8 \end{aligned} \qquad \texttt{[004.009]}$$

Come ci dice il calcolo combinatorio (ma siccome io sono ignorante in questo argomento ci ho pensato 20 minuti prima di essere sicuro) il numero delle partite giocate da ***n*** giocatori è: $q = \frac{n(n-1)}{2}$, e ogni giocatore gioca $N-1$ partite. Sappiamo che sono stati vinti almeno ***8*** punti, quindi sono state giocate almeno ***8*** partite, il che richiede un minimo di ***5*** giocatori: $n \geq 5$.

Gli $N-2$ anonimi a pari merito devono equispartirsi (esiste? Word non lo riconosce *(Abbiamo qualche dubbio sulla prima esse, ma ci siamo capiti*) i rimanenti $q-8$ punti. In formule: $\frac{q-8}{n-2} = c \in C$. Riferendo tutto al numero di giocatori:

$$\frac{n^2 - n - 16}{2n - 4} = c \in C \qquad \texttt{[004.010]}$$

Poiché quel furbacchione di Alberto, in un modo o nell'altro, ha vinto con un punteggio non superiore a ***8***, gli sconosciuti devono avere un punteggio non superiore a ***7,5***. Possiamo cosi` porre un limite superiore al numero dei giocatori:

$$\frac{n^2 - n - 16}{2n - 4} \leq \frac{15}{2} \qquad \texttt{[004.011]}$$

Risolta la (2), si vede che il piu` grande numero intero che soddisfa la condizione e` 15.

A questo punto e` fatta: dobbiamo solo trovare un numero compreso tra ***5*** e ***15*** che inserito nella `[004.010]` ci dia un valore accettabile per ***c***. Quelli che sanno trovare tutti e soli i numeri che hanno queste caratteristiche possono risparmiarsi qualche passaggio, siccome io non faccio parte di questo club, ho provato tutti gli interi nell'intervallo e ho trovato come unica soluzione accettabile ***n=9***

Con ***n=9*** viene ***q=36*** e ***c=4***. Fate i miei complimenti a Federico per essere risuscito a classificarsi ultimo dopo 7 secondi posti (infatti il suo punteggio non puo` essere superiore a ***3,5***).

Anche **Max e Katia** *(Tollereremo la gestalt per motivi parentali...), nella confessata speranza di arraffare qualche brioche, mandano una interessante soluzione:*

Dati N giocatori, in totale verranno giocate $\frac{n*(n-1)}{2}$ partite.

Dato che ogni partita assegna 1 punto, in totale verranno assegnati $\frac{n*(n-1)}{2}$ punti.

Siccome ***8*** punti vengono fagocitati da ***A*** e ***F***, agli altri giocatori rimarranno $\frac{n*(n-1)}{2}-8$ punti, da spartirsi equamente.

Ognuno dei parimerito avra` dunque $\frac{\frac{n*(n-1)}{2}-8}{n-2}$ punti; tale punteggio deve essere ottenibile sommando solo ***1*** e ***0,5***.

Facendo la tabellina si ottiene

N	$\frac{n*(n-1)}{2}$	$\frac{n*(n-1)}{2}-8$	$\frac{\frac{n*(n-1)}{2}-8}{n-2}$
5	10	2	0,667
6	15	7	1,750
7	21	13	2,600
8	28	20	3,333
9	36	28	4,000
10	45	37	4,625
11	55	47	5,222
12	66	58	5,800
13	78	70	6,364
14	91	83	6,917
15	105	97	7,462
16	120	112	8,000
17	136	128	8,533
18	153	145	9,063

....

Da qui si ottiene che ***N*** puo` essere solo ***9***, infatti per gli ***N=16*** o successivi, si ottiene che i giocatori parimerito hanno un punteggio superiore al massimo ottenibile da ***A (N-1)***.

E qui si vede il profondo abisso tra la matematica e la realta`... Perche` mancano venti brioches???

5. Quick & Dirty

Ci siamo finalmente decisi a fare le pulizie nella redazione (virtuale) di RM. Ora, quello che sappiamo e` che:

Alice e Doc ripuliscono il tutto in ***6*** ore.

Rudy e Doc ripuliscono il tutto in ***3*** ore.

Alice e Rudy impiegano per fare lo stesso lavoro ***1*** ora e ***12*** minuti.

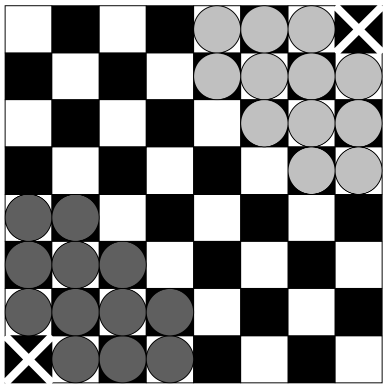
Quanto impieghera` Alice se deve pulire tutto da sola?

6. Zugzwang!

6.1 Archimede

Allora, anche di questo gioco abbiamo gli inventori: trattasi di *Scoot Marley* e *Philip Cohen*.

Prima, come al solito, un po` di storia. Il gioco nasce dalla leggenda secondo la quale Archimede costrui`, per difendere Siracusa, gli specchi ustori con i quali bruciare le navi nemiche; vostro scopo e` fare la stessa cosa, considerando pero` che i vostri specchi sono *mobili*...



Cominciamo, con il materiale: vi serve una normale scacchiera 8x8 con le pedine della dama (12 per parte, si?); se poi avete qualcosa (adesivi dei pokemon, macchie di gelato, medaglie Fields....) per marcare le due caselle barrate (d'ora in poi denominate "***porti***") va meglio, ma non e` indispensabile.

La posizione iniziale la trovate qui di fianco (da qualche parte), con pedine grigio chiaro e grigio scuro su caselle bianche e nere: se decidete di giocare con rosso e giallo su una scacchiera verde e blu (o anche tutta viola), va bene lo stesso; anche il solito pacco di cent e pezzi da dieci e` perfetto. Il fatto di partire da un *angolo*, anziche` dal bordo, mi piace da matti.

Allora, i pezzi si chiamano "*navi*", e muovono come la Regina degli scacchi. L'unica cosa che possono fare, a parte muoversi, e` "*bruciare*" una nave avversaria; per essere bruciata, una nave avversaria deve *essere in presa* ***contemporaneamente*** *da parte di* ***tre*** *vostre navi*.

In sostanza, dovete concentrare la potenza di tre specchi (montati sulle navi) su un avversario direttamente visibile (quindi niente pezzi in mezzo) per potergli dare fuoco.

Sono ammesse le prese multiple, ossia se le vostre navi bruciando una nave avversaria espongono un'altra nave nemica al fuoco di tre vostre navi, allora bruciate anche quella e ve la prendete.

Regola base e` comunque che ***nessuna nave puo` stare nel proprio porto*** (nulla vieta pero` di stare nel porto avversario, a parte l'insalubrita` della posizione).

Se il nemico vi ha bruciato delle navi, potete usare una mossa per ***ricostruirne*** una nel vostro porto; in virtu` della regola base, pero`, dovete muoverla immediatamente (e quindi per quel turno non muovete nessun'altra nave). Quindi, potete ricostruire navi solo se avete un po` di spazio libero attorno al vostro porto, per farci finire la nave appena costruita.

Scopo del gioco e` rendere impossibile al nemico di fare la propria mossa con il suo porto libero, portandovi una vostra nave che non possa essere bruciata al prossimo turno.

Se vi ricordate, le antiche battaglie navali si svolgevano in spazi piuttosto ridotti (contrariamente a quelle moderne); trovo, dopo poche mosse, il gioco rappresenti benissimo la buriana di un'antica battaglia...

7. Pagina 46

Prima Parte

Possiamo ridefinire il problema come il provare che $n^{101}-n=n(n^{100}-1)$ deve essere divisibile per ***1000***.

Supponiamo n sia un intero dispari[26]; a questo punto, $n^{100}-1=(n^{50}+1)(n^{25}+1)(n^{25}-1)$ e\` il prodotto di tre numeri *pari* e quindi e\` divisibile per *8*; inoltre abbiamo gia\` visto in un BJ precedente che se $n$ *non* e\` divisibile per *5* $<n^{100}>_{125}=1$ e quindi $n^{100}-1$ sara\` divisibile per *125*. Allora, $<n^{100}-1>_8=<n^{100}-1>_{125}=0$ e quindi il numero dato e\` divisibile per *8*125=1000*. Quindi, l'assunto e\` dimostrato.

Seconda Parte

Essendo ***n*** pari, n^{20} e\` divisibile per ***4***. Inoltre, ***n*** non e\` divisibile per ***5*** (altrimenti andremmo contro le ipotesi del problema che sia primo con ***10***). Allora, come visto al punto (1), possiamo rappresentare ***n*** come $5k\pm 1$ o come $5k\pm 2$.

Il numero

$$(5k\pm 1)^{20}=(5k)^{20}\pm\frac{20*19}{1*2}(5k)^{19}+\cdots+\frac{20*19}{1*2}(5k)^2\pm 20*5k+1$$

fornisce resto ***1*** se diviso per ***25***, cosi\` come

$$(5k\pm 2)^{20}=(5k)^{20}\pm\frac{20*19}{1*2}(5k)^{19}*2+\cdots+\frac{20*19}{1*2}(5k)^2*2^{18}\pm 20*5k*2^{19}+2^{20}$$

e come $2^{20}=(2^{10})^2=1024^2=(1025-1)^2$.

Allora, se N^{20} da\` resto ***1*** dopo la divisione per ***25***, vuol dire che puo\` terminare solo per ***01***, ***26***, ***51***, ***76***. Siccome per\` deve essere anche divisibile per ***4***, allora puo\` terminare solo per ***76***. Questo significa che nella decima posizione deve esserci il valore ***7***.

Per quanto riguarda la seconda parte del problema, come visto sopra il numero N^{200} deve essere divisibile per ***8***. Allora, siccome ***N*** e ***5*** sono primi tra loro, N^{100} da\` resto ***1*** se diviso per ***125***.

Allora, se $N^{100}=125k+1$ anche $N^{200}=(125k+1)^2=(125k)^2+250k+1$ dara\` resto ***1***. Allora, gli unici possibili valori delle ultime tre cifre di $N^{200}$ sono ***126***, ***251***, ***376***, ***501***, ***626***, ***751*** e ***876***. Dovendo pero\` essere divisibile per ***8***, l'unico valore accettabile e\` ***476***. Quindi, la cifra in centesima posizione e\` ***7***.

[26] Qui, a chiarezza ci vogliono gli antinebbia... Se ***n*** e\` pari, e\` divisibile per ***2*** e quindi quando lo elevo alla centesima potenza sara\` divisibile un centinaio di volte (almeno) per ***2***. Quindi in questo caso e\` sicuramente divisibile per ***8***. Se invece e\` dispari, scompongo come mostrato e ottengo tre numeri ***pari***, quindi e\` divisibile per ***8***.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 La Foresta di Stern-Brocot [002]

Allora, se siete sopravvissuti al brutto colpo della puntata precedente (cioe` che gli alberi di Stern-Brocot formano uno spazio vettoriale), non dovrebbe essere un grosso problema sopportare l'introduzione di due *operatori* (lineari, tra l'altro...) ***S*** e ***D*** per cui:

$$[x, y]S = [x, x + y] \\ [x, y]D = [x + y, x] \qquad \texttt{[001.001]}$$

Queste simpatiche bestioline che ci permettono di creare l'albero (o meglio, i due alberi...) ammettono come ogni operatore lineare una ***rappresentazione matriciale***:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \texttt{[001.002]}$$

Arrivati a questo punto, possiamo definire la ***somma diretta*** di spazi vettoriali; giusto per complicarci un po` la vita, consideriamo il secondo elemento della somma come spazio non dei numeratori ma dei *denominatori*; inventandoci l'opportuno simbolo per la somma diretta, possiamo dire che:

$$[x_1, y_1] \oplus [x_2, y_2] = \left[\frac{x_1}{y_2}, \frac{x_2}{y_1}\right] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \qquad \texttt{[001.003]}$$

che, in realta`, e` piu` semplice di quanto sembra.

I nostri operatori si estendono facilmente allo spazio "somma":

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_2 & y_2 + x_2 \end{bmatrix}$$

e $\texttt{[001.004]}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & y_1 \\ y_2 + x_2 & x_2 \end{bmatrix}$$

Per inciso, notiamo che il ***determinante*** di queste graziose matrici vale ***1***; se tornate alle caratteristiche del mediante, la cosa non e` difficile da dimostrare e dovrebbe permettervi di capire "cos'e` successo" (almeno, a me ha chiarito un po` di simboli ostici).

Ora, nello spazio somma, l'albero di Stern-Brocot e` rappresentato da $t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; se questi calcoli vi divertono, e` facile vedere che $tSDSS = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ il che vuol dire, nel disegno-tabella-megliononrifarlo che se girate a sinistra, poi a destra, poi due volte a sinistra (insomma, se scegliete prima il semialbero sinistro, poi il semialbero destro, poi per due volte il semialbero sinistro), quello che vi resta e` un semialbero definito dalle frazioni $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$, il cui termine zeresimo (vi ricordate la numerazione balorda delle righe, si?) e` $\frac{1+3}{2+5} = \frac{4}{7}$. Possiamo insomma dire che ***SDSS** codifica* il nostro valore.

Gia`, pero` qui abbiamo prima inventato una codifica e poi calcolato il valore... sarebbe carino, data una frazione, riuscire a determinare l'espressione codificata.

La cosa e` piu` veloce in "C" (o in "perl", come preferisce qualcuno) che in italiano, pero` possiamo provare a spiegarci.

```
finche` m ≠ n
    se m<n
        allora scrivi "S"; sostituisci "n" con "n-m"
        altrimenti scrivi "D"; sostituisci "m" con "m-n"
```

ad esempio, con ***m=4*** e ***n=7***, abbiamo:

m	4		4		4-3=1		1		1	
n	7		7-4=3		3		3-1=2		2-1=1	
stampa		S		D		S		S		S

E qui il processo termina, in quanto ***m=n***. Prego notare che, siccome ogni frazione compare una e una sola volta nel nostro albero, la rappresentazione e` unica (indubbio pregio rispetto alle frazioni egizie...). La dimostrazione dell'algoritmo, se provate a seguire l'albero "al contrario", e` abbastanza immediata.

Il nostro alberello comincia ad avere una chioma piuttosto folta; infatti, se si insiste abbastanza, contiene tutti i razionali. Se ricordiamo che ogni numero puo` essere approssimato da un razionale, possiamo dare delle buone espressioni dei numeri "rompiscatole"; ad esempio[27], si ha che (le potenze indicano ripetizione, non fate domande sulla zeresima):

$$DS^0DS^2DS^4DS^6DS^8DS^{10}\cdots = e \qquad \texttt{[001.005]}$$

che, trovo, e` decisamente carina: "Scusi, per ***e***?" "La prima a destra, la zeresima a sinistra,...". Anche la piu` lunga delle riunioni finisce prima di aver trovato l'espressione per $\dfrac{314159265358979}{100000000000000}$ (o qualunque altra forma vi ricordiate).

Se poi guardate l'algoritmo che abbiamo descritto precedentemente, vedete che se ***x*** e` una sequenza (condizione necessaria e sufficiente):

$$Sx = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x = \frac{m}{n-m}$$

o, equivalentemente, `[001.006]`

$$\frac{1}{Sx} = \frac{1}{x} + 1$$

Se qualcuno di voi e` convinto che l'algoritmo sopra somigli scandalosamente alla formulazione originale dell'algoritmo di Euclide, ci ha azzeccato.

Se applichiamo ad esempio l'algoritmo alla frazione $\dfrac{22}{87}$, otteniamo (attenti ai numeri in bold):

87=**3***22+21

[27] Anche in merito esiste un algoritmo, ma estremamente insoddisfacente: infatti non si ferma, in quanto la sequenza e` infinita.

`22=`**`1`**`*21+1`

`21=`**`21`**`*1`

Adesso, o fate i conti o ci credete; $\frac{22}{87} = S^3 D^1 S^{20}$.

Per fare i conti aiuta il fatto che (si vede facilmente per induzione)

$$S^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e `[001.007]`

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

Tornando al nostro calcolo, sarete d'accordo che la similitudine tra i coefficienti e lo sviluppo nell'albero di Stern-Brocot e` a dir poco sospetto; c'e` quel "20" che in realta` dovrebbe essere "21", pero` se si fanno un altro po` di prove si vede che succede sempre. Se vi ricordate, l'algoritmo ha un certo campo di applicazione: con i numeri che abbiamo usato, possiamo dire che:

$$\frac{22}{87} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{21}}} \qquad \texttt{[001.008]}$$

Questo significa che i nostri aggeggini hanno espressione:

$$S^{a_1} D^{a_2} \ldots S^{a_k} = [a_1, a_2, \ldots a_k + 1]$$

oppure `[001.009]`

$$D^{a_1} S^{a_2} \ldots D^{a_k} = [a_1; a_2, \ldots a_k + 1]$$

Prego notare che, siccome la seconda comincia con ***D*** e quindi e` maggiore di ***1***, il primo termine e` separato dal punto e virgola.

Forse, qualcuno di voi ricorda una cosa, a proposito delle frazioni continue:

$$[a_1, \ldots, a_k] = [a_1, \ldots, a_k - 1, 1] \qquad \texttt{[001.010]}$$

Nell'albero di Stern-Brocot, la frazione che ha queste due rappresentazioni sara` da qualche parte e, come tutti gli elementi dell'albero, avra` due figli, un destro e un sinistro; considerate le espressioni `[009]`, in un caso bisognera` aggiungere un "giro a destra", nell'altro caso un "giro a sinistra"; ma le due espressioni viste in `[010]` *gia` finiscono in questo modo*; quindi, possiamo trovare le **espressioni in frazione continua dei figli** *aggiungendo* **1** *agli ultimi termini*:

$$[a_1, \ldots, a_k + 1]$$

e, usando il secondo membro: `[000.011]`

$$[a_1, \ldots, a_k - 1, 2]$$

(Voglio sperare sia chiaro che, aggiungendo uno ad un termine di una frazione continua in entrambi gli sviluppi, ottengo degli sviluppi che ***non*** sono piu` uguali).

Non sarebbe finita qui, ma avete l'aria di Pollicino quando le formiche gli hanno mangiato le briciole, quindi meglio uscire dalla foresta...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms