Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 046 - 2002-11

1. Editoriale

Non cominciate a lamentarvi che il numero di questo mese e` piccolo; avete un allegato di una cinquantina di pagine, e direi che (anche se ha molte figure) vi ci vorra` un po` di tempo a leggerlo.

Grandi notizie! ***JC ha risolto il problema degli alieni!*** Complice un week-end estivo piuttosto noioso, ci ha fornito un grazioso documento in PDF con la sua soluzione; siccome pero` non resistiamo mai alla tentazione di infilare i nostri commenti, lo abbiamo riscritto e commentato. Se il nostro postino non si piega in due sotto il suo peso (e se le vostre mailbox lo accettano), lo trovate in allegato a questo numero.

Lamentazione novembrina:

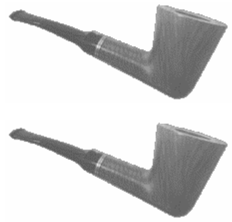
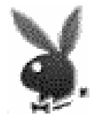
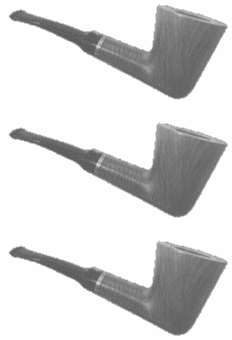
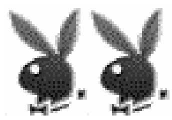
Aarrgghhh! Il calendario e` in ritardo!

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
Un mazzo malandato			
Simpatici Frugoletti			

2.1 Un mazzo malandato

Le Pesti sono passate da questo mazzo di carte, e il miserando risultato e` che ne sono rimaste solo nove; in occasione del prossimo trasloco, probabilmente, troveremo una parte delle altre nei posti piu` improbabili della casa. Vediamo se riusciamo comunque ad organizzare qualcosa che somigli all'emozionante gioco della "carta piu` alta".

Allora, ad occhio e croce sembrano essere rimasti:

2C, 3F, 4P, 5F, 6P, 7C, 8P, 9C, 10F

Tre semi, tre carte per ogni seme e tutti i valori da due a dieci. Bene, forse qualcosa si puo` fare.

Tanto per cominciare, raggruppiamole per semi, ottenendo tre mazzetti; mescoliamo poi ognuno dei mazzi separatamente e mettiamoli sul tavolo coperti; sappiamo che il primo mazzo e` di cuori, il secondo di fiori e l'ultimo di picche.

Siccome so che non vi fidate del sottoscritto quando tocca il mazzo, fate tutto voi.

Per prima cosa, scegliete un mazzo e pescate una carta a caso da quel mazzo, senza farmela vedere.

Io poi vi indico un mazzo e voi pescate la mia carta a caso da quel mazzo; a questo punto giriamo le due carte e chi ha la piu` alta vince.

Direi che stavolta sono stato abbastanza onesto, si?

2.2 Simpatici frugoletti...

...specialisti nel procurare corposi mal di testa. Figuratevi che stavolta ce ne servono *dieci*...

Ve lo ricordate il problema del bivio, con i due tizi (un mentitore e un veritiero), ai quali volete chiedere la strada? Da piccolo ho avuto notevoli problemi a capire come funzionava, ma mi e` sempre piaciuto moltissimo. Grande e` stata la mia gioia quando me ne hanno proposto una interessante variazione.

Allora, questa volta c'e` un incrocio: una strada va a destra, una a sinistra e una tira dritto, e voi dovete scoprire da che parte andare.

All'incrocio, ci sono un anziano signore e le dieci dannazioni del matematico. Data la scarsamente affidabile compagnia in cui si ritrova, possiamo presumere che il signore non sia tutto sul suo, ma sappiamo per certo che fara` il possibile per aiutarci.

La risposta che otteniamo e` una cosa del tipo: "...Si, una di queste strade porta al villaggio, ma non mi ricordo quale. Possiamo chiedere ai bambini. Io mi ricordo che dei dieci, ***cinque*** dicono sempre la verita`, ***cinque*** dicono sempre il falso e solo ***cinque*** sanno la strada. Tra l'altro, ognuno di loro sa di che 'tipo' sono gli altri..."

Per garantirvi il mal di testa di cui sopra, i bambini si mettono ordinatamente in fila e ognuno di loro vi sussurra la sua risposta all'orecchio; il guaio e` che quando vi da` la risposta, quello dopo sente benissimo.

Allora, le risposte sono (nell'ordine):

Alberto: Prendi la strada a sinistra

Beatrice: Prendi la strada a destra

Consuelo: Non prendere la strada in mezzo

Davide: Prendi la strada a destra

Enrica: Non prendere la strada a destra

Fred: Prendi la strada in mezzo

Gigi: Non prendere la strada a sinistra

Hymen: Prendi la strada a sinistra

Isa: Prendi la strada in mezzo

Jole: Non prendere la strada a sinistra

Noto che la farmacia del villaggio e` l'unico posto dove trovare un'aspirina, che strada prendete?

3. Bungee Jumpers

Mostrare che, se $n \in N$ e ***k*** e` dispari, $\left\langle \sum_{i=1}^{n} i^k \right\rangle_{\sum_{i=1}^{n} i} = 0$.

Ho pieta` di voi: se* **k** *e` dispari, la somma dei naturali sino a **n** *elevati alla* **k***-esima potenza e` divisibile per la somma di naturali sino a* **n** .

4. Soluzioni e Note

4.1 [045]

4.1.1 Sono cavoli vostri...

Bene, nessuno ha scelto la via sperimentale (a parte per effettuare alcune "veloci" verifiche...).

La prima soluzione ci arriva da ***Enrico***, lo stesso giorno dell'invio di RM e liquida il problema in poche righe:

*Per ogni "tocco" faccio cambiare di stato tre lampade diverse. Se voglio spegnerle tutte devo farle permutare tutte un numero dispari di volte. Allora basta che "tocchi" una volta ognuna delle lampade. In questo modo ho eseguito 3*7=21 permutazioni distribuite* *equamente tra le sette lampade (il problema e' infatti circolare). In questo modo ogni lampada commuta tre volte e alla fine sono tutte spente.*

Corretto, ma e` una mia impressione o c'e` un certo tono da "Che noia..."?

Invece, ***GreyHawk*** ci spiega per benino i raffinati *tools* che ha utilizzato per arrivare all'idea risolutiva:

Ci ho messo del tempo perche` non avendo zucche in casa (a parte quella di serie, ovvero la mia) ho fatto le prove con i bicchieri, usando pieno/vuoto invece che acceso/spento. Lo so che avevate chiesto un ragionamento, ma dovevo verificare la bonta` della teoria [Dove lo fanno, il "Teoria Rose`"? (RdA)] ... *se volete che sbrodoli quelle quattro scemenze che so in materia, vi dirò che questo problema mi ricorda uno che avete citato nell'editoriale del numero 38 (manco voi ve ne ricordate, scommetto!*[Aime`, ce lo ricordiamo perfettamente. E` uno dei giochi di societa` preferiti dal nostro postino, e ce lo rifila ad ogni riunione... (RdA)]*) sul controllo di parita`. Siccome non so un tubo della teoria del controllo di parita`, per evitare il coma etilico mi sono dato un obiettivo: cercare di spegnere le zucche (vuotare i bicchieri) con una certa regolarita`, visto che ho notato subito che la mossa descritta, se effettuata su uno qualsiasi degli elementi iniziali, modifica tutti e tre allo stesso modo; poi si procede prendendo come base l'elemento contiguo, perche` in questo modo invece si sfrutta la discontinuita` che si e` creata. Lo scrivo che e` piu` facile.*

1) - - - - - - - - - - - - - - - - -

2) + + + - - - - - - - - - - - - - -

3) + - - + - - - - - - - - - - - - -

4) + - + - + - - - - - - - - - - - -

5) + - + + - + - - - - - - - - - -

6) + - + + + - + - - - - - - - - -

Dalla mossa 6 in poi appare chiaro che (a parte i due elementi iniziali, di cui parleremo fra poco) ripetendo questo sistema lo stato di n elementi in mezzo cambia progressivamente a quello richiesto dal problema (e i bicchieri si svuotano e rimangono vuoti). Detto questo ho riflettuto sul fatto che gli elementi sono in circolo, e mi son detto: "Sono in numero dispari: se tanto mi da` tanto il cerchio si chiude". Come in effetti avviene: facendo questo giochetto con tutti e sette i bicchieri rimangono tutti e sette vuoti contemporaneamente in sette mosse. Lo so, e` una spiegazione che fa... acqua (anzi, vino) da tutte le parti. Ma dopo quello che ho bevuto non so fare di meglio. Anzi, qualcuno mi sa dire quanto ho bevuto? Senza rifarlo, ovvio...

Altra soluzione da parte di ***Filippo***, che ha colpito Doc per il fatto di ragionare con i multipli di tre:

Una soluzione generale e` quella di far cambiare stato ogni volta ad una lanterna diversa, sino a toccarle tutte. L'ordine non ha importanza.

Infatti in questo modo ogni lanterna cambiera` stato 3 volte: una quando facciamo cambiare stato direttamente, altre due quando cambiano stato le adiacenti. Alla fine, per "n" lanterne, dopo "n" operazioni nel modo descritto, tutte avranno avuto 3 cambi di stato.

Naturalmente se il numero delle lanterne sara` multiplo di tre, sara` sufficiente un solo cambio stato, scegliendo, p. es., la 1, poi la 4 ecc. sino a n-2.

Allora, quanti bicchieri abbia bevuto GreyHawk (visto che ogni tanto doveva riempirli, per riaccenderli) ci aiuta a calcolarlo ***Sam***:

L'impossibilita` di risolvere il problema operando una sola volta su ogni interruttore e` evidente, per il fatto che 7 non e` multiplo di 3, operare un numero pari di volte su ogni interruttore e` semplicemente inutile e operare un numero di volte maggiore di 3 fara` si` che un interruttore occupi piu` volte almeno due posizioni. Quindi bisogna operare su ogni *interruttore 3 volte, ogni volta inserendolo in una diversa tripletta del tipo* **⟨k-1, k, k+1⟩**$_7$ *(considerando 0 come 7 e convenendo di numerare gli interruttori da 1 a 7)* [noto con piacere che non sono l'unico, a preferire questa notazione per la congruenza... (RdA)] *e quindi premere: 123, 234, 345, 456, 567, 671, 712. Nel nostro caso vuol dire cambiar stato ordinatamente a tutte le lanterne (in senso orario o antiorario dipende da voi, sempre che non siate superstiziosi...).*

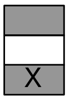
Annamaria, invece, ci manda un ragionamento strutturato molto carino (che chiarisce molto bene "cosa succeda" e cosa c'entrino i multipli di tre. Fatemi fare alcune considerazioni, prima.

Quando ci arriva la soluzione, di solito e` un "pezzo" che va avanti linearmente, un passaggio dopo l'altro, sino alla fine; sono pero` pronto a scommettere che ***non*** l'avete risolto cosi`: e` estremamente probabile che la vostra soluzione sia, in realta`, un foglio con le cose scritte qui e la`, organizzate secondo un percorso (raramente lineare) che vi porta alla soluzione. "E cosa c'entra?" Beh, molto semplicemente, ci e` praticamente arrivato il foglio! Per farmi dispetto, Annamaria mette tutto in Excel. Beh, come traduco le formule dal text mode, riusciro` a riportare un ragionamento da Excel... Proviamo.

Problema delle 7 Lanterne

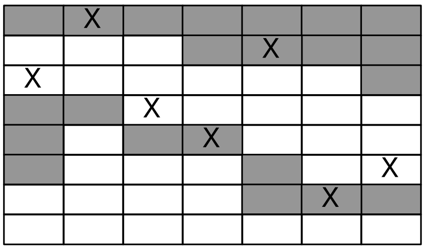
•La disposizione delle lanterne e` lineare e non circolare ma sono rispettate, anche nella casella iniziale e finale, le regole del gioco
•La legenda relativa alla modellizzazioni e` la seguente:

L=Numero Lanterne



Lanterna accesa (A)
Lanterna spenta (S)
Lanterna interessata al cambio stato

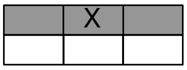
Soluzione



1º PENSIERO: L e` tale che ***L=3*k+h*** con ***k*** in ***N*** e ***h*** in ***{0;1;2}***. Quindi, si possono ridurre le A a zero, a uno o a due

2º PENSIERO: per finire devono rimanere 3 A vicine. Si deducono due cose:
•E` necessario riaccendere (cioe` agire sulle spente) procedendo eventualmente anche in senso antiorario.
•Si devono trovare i modi per spostare le A (o anche le S)

3º PENSIERO: modellizziamo a partire da L=4



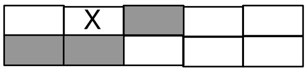
L=3: il modulo di base e di tre caselle consecutive, quindi il problema parte da un modello con ***A=3*** che ha immediata soluzione

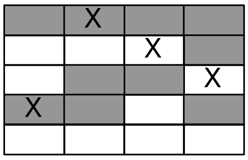
L=3K (con ***k*** in ***N***)***:*** si spengono le lanterne in ***k*** movimenti (spenta la prima se ne saltano due e cosi` via)

Si studia il modello...

Se accendo una lampada dopo quella accesa mi trovo accese le due successive a quella accesa

Se accendo una lampada prima di quella accesa mi trovo accese le due precedenti a quella accesa





L=4

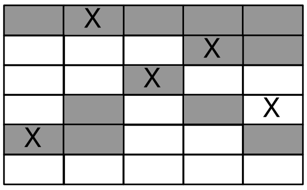
- Si riducono le A a 1 A
- Ne accendo ancora una (non importa se agendo prima o dopo quella accesa) e ancora una per arrivare a 3 A
- Le tre accese sono vicine quindi, con un solo movimento, accendo tutto.

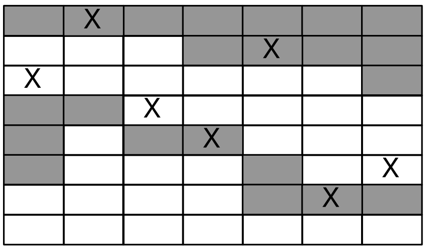
Osservo che

I movimenti sono 4: numero movimenti = numero lampade?
Ho agito una sola volta su tutte le lampade.

L=5

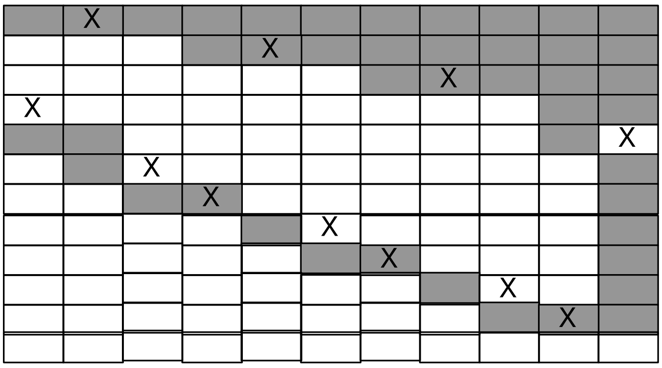
I movimenti sono 5: numero movimenti = numero lampade?
Ho agito una sola volta su tutte le lampade





L=7

I movimenti sono 7: numero movimenti = numero lampade?
Ho agito una sola volta su tutte le lampade



L=11:
I movimenti sono 11: numero movimenti = numero lampade?
Noto che ho agito una sola volta su tutte le lampade.

Conclusione:
Probabilmente sono in grado di risolvere il problema per qualunque numero di lampade usando:

L’esperienza maturata
Separando i casi in cui L/3 abbia resto 1 o 2
Concentrando l’attenzione sulle parti di tabella in cui c’e` la zona con le lampade accese.

Bene, siamo riusciti a pubblicare anche i foglietti degli appunti. Pero`, pensandoci non e` la prima volta Mi pare di ricordare che Doc tempo fa aveva passato allo scanner un foglio a quadretti...

4.1.2 Votazioni al Sabba

Sono contento di voi; un mucchio di soluzioni, e con delle analisi decisamente buone.

La prima mail ricevuta chiedeva se la maggioranza doveva essere "stretta" o se il 50% sarebbe stato sufficiente. Correttamente, il nostro valido postino ha tergiversato.

Tutte le soluzioni arrivate sono corrette e seguono lo stesso metodo; in pratica, il tutto si riduceva a ragionare *al contrario*, e vedere cosa poteva succedere.

Vi ricordo che la votazione si svolgeva in ordine alfabetico.

Cominciamo con ***PuntoMauPunto*** (e ***Enrico***: l'unica differenza tra le due e` che PMP mantiene i nomi. Usiamo questa, senza nulla togliere ad Enrico):

Bene, a questo punto possiamo lavorare "alla rovescia", come e` in genere utile in questi casi* [Direi che il Nostro ha ampia esperienza di furti di caramelle e divisioni surrettizie... (RdA)]. *Per comodita`, supporremo di avere un numero di caramelle abbastanza ampio per dire che chi "prende tutte le altre" ne piglia abbastanza.

*Il caso **"una sola peste"** e` banale: vota da sola, si da` ragione e piglia tutto. Risultato, (R), dove R e` il numero (R)estante delle caramelle che in questo caso coincide con il totale, e la lista tra parentesi indica quante caramelle vengono ottenute dalle pesti in ordine alfabetico.*

*Il caso **"due pesti"** e` altrettanto banale: qualunque sia la proposta della prima, la seconda vota contro, la mozione viene respinta, e a questo punto e` quest'ultima che si vince tutto. Insomma, (0,R).*

Passiamo alle cose piu` serie: con ***tre pesti****, la prima deve avere un alleato: ma le basta elargire una micragnosa caramella alla seconda, che comunque ci guadagna rispetto alla sua speranza di non ottenere nulla nel caso voti contro. Schemino pratico: (R,1,0)*

Finalmente il nostro problema. L'Acefalo deve avere due *compari: ovviamente il Fantasma votera` contro, quindi le elargizioni alla Hevee e alla Medusa devono essere strettamente maggiori di quanto potrebbero guadagnare nel caso la "mozione Acefalo" non passi. Insomma, la risposta e` (R,0,2,1), o se si preferisce Hymen si piglia due caramelle, Minh una, e il resto se lo tiene Alberto.*

Se il GC accetta le mie ipotesi iniziali [Trattasi della maggioranza stretta (RdA)], *e` abbastanza interessante proseguire l'analisi a un numero maggiore di giocatori: si scopre che in generale il primo giocatore deve dare due caramelle a uno solo degli altri, una caramella a un numero sufficiente per ottenere la maggioranza, e si tiene il resto. (Naturalmente le scelte non sono fatte a caso: ma scrivere la dimostrazione completa mi impedirebbe di andare in palestra!) Mi sembra che ci siano molte analogie con il sistema politico, dove il primo vince quasi tutto....*

Insomma, *"Hanc bicipitis exiguitas non caperet*".

Sam costruisce una buona soluzione che (senza nulla togliere alle precedenti), mi pare piu` dettagliata:

Visto che tutti sono perfettamente egoisti, quando rimarranno solo due partecipanti, il secondo a dover votare votera` sempre e comunque contro la proposta del primo (per comodita` pensiamo che ciò succeda anche se il primo propone 0% per sé e 100% per l'altro). Gli ultimi due saranno sempre H e M nel caso si arrivi a questo punto. Perciò H, ben prevedendo la possibilita` votera` sempre e comunque a favore della proposta precedente (quella di F) che quindi avra` a favore H ed F e contrario il solo M, a meno che F non proponga per H lo 0%, nel qual caso H sarebbe indifferente e per una sorta di innata cattiveria voterebbe contro. Quindi F proporra` (chiamando b il bottino) per sé b-1, per H 1 e per M 0: poiché egli non ha bisogno dell'appoggio di M, ma solo di quello di H, a cui, essendo perfettamente egoista, basta qualunque cosa diversa da 0. M deve allora impedire che si arrivi alla proposta di F, votando a favore di quella di A, ma cosi` non c'e` maggioranza su tale proposta, ma parita`. A deve tirare dalla propria parte o F o H. Per convincere F dovrebbe offrirgli almeno (b-1)+1, mentre per convincere H basta offrirgli 2 e per avere M basta dargli 1. Quindi se A offre la divisione A:b-3, F:0, H:2, M:1 M la accettera` perché, sapendo che la proposta di F sarebbe accettata da H e F non potrebbe offrire altrimenti a meno di essere boicottato e ottenere 0 anziché b-1; H accettera` la proposta di A, sapendo che da F, una volta che tocchi a lui proporre, non gli concedera` mai piu` di 1 e che sara` costretto ad accettarlo avendo come alternativa il non ottenere nulla; A votera` ovviamente a favore della propria proposta avendo cosi` 3 voti pro e 1 contro.

E` inutile considerare alleanze e promesse[1], in base all'assunto dell'egoismo di ognuno. La divisione quindi sara`:

A:b-3, F=0, H=2, M=1.

Bella, vero? E questa volta Sam si e` limitato all'italiano corrente. Secondo voi, vuol dire che il problema gli e` piaciuto?

Anche ***Greyhawk*** ha fornito una soluzione (qui senza mangiarsi le caramelle: dopo tutti i bicchierini del problema precedente, la cosa poteva farsi pericolosa). Per prima cosa, cambia il titolo in **Consenso e Democrazia**.

[1] F può promettere ad H di concedergli 3, ma H sa benissimo che, una volta eliminato A, F non manterrà la promessa: non più vincolato dalla paura di ottenere 0 ed anzi sicuro che H dovrà accettare qualunque offerta maggiore di zero.

Ho deciso di ribattezzare così il problema delle caramelle perchè ha degli interessanti punti di contatto con il sistema politico italiano, ma non ho intenzione di fare un comizio quindi mi atterrò ai fatti (o meglio alle teorie). Se vi meraviglia il fatto che sia tornato improvvisamente sobrio, vi dirò che questo problema l avevo risolto per primo (volevo già mandarvelo il 2 alle ore 2.35 del mattino, ora in cui sono rientrato a casa con la soluzione in testa; la soluzione stessa è stata addirittura partorita l 1 verso le 19.15; posso sbobinare i miei engrammi cerebrali se non vi fidate).[Dall'affermazione sopra contenuta possiamo dedurre che dalle 19:15 alle 02:35 si sia svolto il "field trial" sulle lanterne alcooliche. Per quanto riguarda i tuoi engrammi, la mamma ci ha sempre detto di evitare le cattive letture (RdA)]

Sembra un gran casino. Per semplificarlo decido arbitrariamente di provare a ridurre il numero dei giocatori e vedere che succede, visto che devono proporre (e quindi decidere) in sequenza [Il che, come brillantemente mostrato da *PMP*, e` equivalente al "giocare all'indietro" (RdA)]. *Se ci sono due giocatori, per esempio, risulta evidente che con queste regole chi deve parlare per primo rimane fregato: qualsiasi cosa proponga il secondo (e ultimo) giocatore boccerà la proposta (a meno che il primo non proponga di dargli tutte le caramelle, ma il risultato sarebbe lo stesso) escludendolo dalla distribuzione. Sembrerebbe quindi che ogni giocatore che parla dopo abbia interesse a fare ostruzionismo per eliminare i concorrenti, ma visto che le pesti sono intelligenti e calcolatrici saranno in grado di prevedere che questo sistema non fa che favorire (il poker insegna) chi deve parlare per ultimo. Così accade che, se ci sono tre giocatori, il primo a parlare possa mettere in atto un delicato stratagemma che consiste nel tenere tutto per sè meno una caramella da dare al secondo; il risultato è che avrà due voti a favore su tre, il suo se non è schizofrenico e quello del secondo giocatore (che, se venisse bocciata la proposta, non mangerebbe nemmeno una caramella: vedi sopra). L ultimo, si sa, ha interesse a votare contro ma resta uno contro due ed è messo in minoranza. E con quattro giocatori? Io, mettendomi nei panni del primo giocatore, ragionerei così: Se la mia proposta non passa si ricade nel caso in cui chi viene dopo di me prende tutto meno uno, il terzo giocatore uno e il quarto niente. E allora io offro due caramelle al terzo, una al quarto e niente al secondo: con i due voti del terzo e del quarto più il mio passa la mia proposta .*

E fu così che, con la modica spesa di tre caramelle, il primo a parlare (che sembrerebbe a prima vista il fregato per eccellenza) si mangiò il grosso. Morale: complicare le regole per assicurare la maggiore equità (quando sarebbe stato facile dire facciamo parti uguali e se avanza qualcosa si tira a sorte) ha assicurato la distribuzione più ingiusta possibile, e tre persone su quattro si trovano fregate in pieno da ciò che loro stessi hanno voluto approvare.

E` ferma opinione del Comitato di Redazione che dopo i bicchierini del problema precedente Greyhawk abbia guardato il telegiornale.

5. Quick & Dirty

Q: Supponiamo ogni coppia sposata continui ad avere figli sinche` nascono maschi e smetta quando nasce la prima femmina. Alla fine, ci saranno piu` femmine o piu` maschi?

6. Pagina 46

Sappiamo (Gauss, verso i cinque anni) che:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n*(n+1)}{2} \qquad \textbf{[000.001]}$$

Quindi il nostro scopo e` mostrare che se ***k*** e` dispari, allora

$$\left\langle S_k = \sum_{i=1}^{n} i^k \right\rangle_{\frac{n*(n+1)}{2}} = 0 \qquad \textbf{[000.002]}$$

Notiamo che, per ***k*** dispari, $\left\langle a^k + b^k \right\rangle_{(a+b)} = 0$.

Dobbiamo esaminare due casi:

n *e\` pari.*

In questo caso la somma ***S_k*** e\` divisibile per ***n+1***, in quanto ognuna delle somme:

$$\begin{matrix} 1^k + n^k \\ 2^k + (n-1)^k \\ 3^k + (n-2)^k \\ \ldots \\ \left(\frac{n}{2}\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k \end{matrix} \qquad \textbf{[000.003]}$$

e\` divisibile per:

$$(1+n) = \begin{cases} 2+(n-1) \\ 3+(n-2) \\ \ldots \\ \frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right) \end{cases} \qquad \textbf{[000.004]}$$

Non solo, ma ***S_k*** e\` divisibile anche per $\frac{n}{2}$, da cui

$$\begin{matrix} 1^k + (n-1)^k \\ 2^k + (n-2)^k \\ 3^k + (n-3)^k \\ \ldots \\ \left(\frac{n}{2}-1\right)^k + \left(\frac{n}{2}+1\right)^k \\ \left(\frac{n}{2}\right)^k \\ n^k \end{matrix} \qquad \textbf{[000.005]}$$

Sono *tutti divisibili per* $\frac{n}{2}$.

n *e\` dispari.*

Allora ***S_k*** e\` divisibile per $\frac{n+1}{2}$, in quanto

$$\begin{array}{l} 1^k + n^k \\ 2^k + (n-1)^k \\ 3^k + (n-2)^k \\ \ldots \\ \left(\frac{n}{2}-1\right)^k + \left[\left(\frac{n+3}{2}\right)^k * \left(\frac{n+1}{2}\right)^k\right] \end{array} \qquad \textbf{[000.006]}$$

sono divisibili per $\frac{n+1}{2}$.

Inoltre, $\boldsymbol{S_k}$ e` divisibile per $\boldsymbol{n}$, in quanto

$$\begin{array}{l} 1^k + (n-1)^k \\ 2^k + (n-2)^k \\ 3^k + (n-3)^k \\ \ldots \\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^k + \left(\frac{n+1}{2}\right)^k \\ n^k \end{array} \qquad \textbf{[000.007]}$$

sono tutti divisibili per $\boldsymbol{n}$.

7. Paraphernalia Mathematica

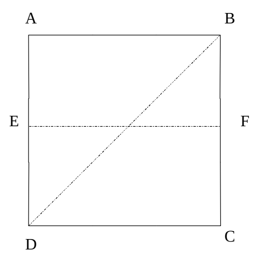
7.1 Suppergiu` Platonicamente Perfetto [002]

Alcuni geni tra di voi, in grado di contare agilmente sino a cinque, a seguito del metodo di costruzione dei solidi platonici con l'origami, hanno fatto notare una cosa: "*Oeu, Rudy, mancano il cubo e il dode!*".

Vero. Ma il cubo non lo so fare[2], e il "dode"(caedro) non e` basato sulle facce triangolari; quindi, per quest'ultimo, ricominciamo da capo.

Qui, pero`, vi serve un foglio ***quadrato*** (vi ricordate come si fa un foglio quadrato? Come per gli aeroplanini, quelli "a freccia").

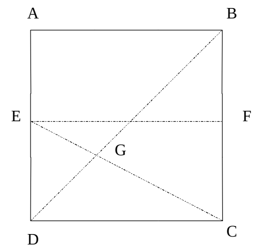
1 Partire da un foglio quadrato; piegarlo a meta` secondo una diagonale (***DB***) e a meta` secondo una coppia di lati (***EF***, portando ***D*** su ***A*** e ***C*** su ***B***) (038_17)



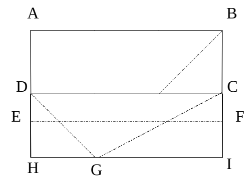
[2] Se qualcuno riesce a trovare un modo di fare un cubo, partendo da due-tre moduli di qualche tipo secondo un metodo che sia suppergiu` filosoficamente in linea con quanto visto sinora, e` pregato di mandarlo; garantiamo la pubblicazione.

2 Piegare su ***CE*** (038_18); la distanza tra il punto di incontro tra ***BD*** e ***CE*** e la base ***DC*** e` un terzo del lato.

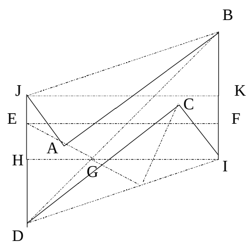
La trovo bellissima; provate a dimostrarla, che e` facile (aiutino: ne abbiamo gia` parlato)



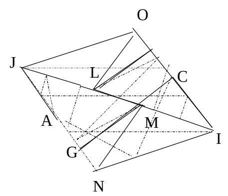
3 Piegare orizzontalmente attraverso ***G*** in modo tale che il punto ***D*** sia su ***AE*** e il punto ***C*** sia su ***BF***. (038_19). Portare poi, da dietro, ***A*** su ***H*** e ***B*** su ***I***, piegando; la piegatura dovrebbe passare per ***DC***.



4 Riaprire e piegare le "ali" ***ID*** e ***BJ*** (038_20)

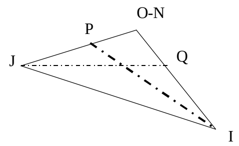


5 Piegare all'interno usando come riferimento ***JA*** portando verso la zona centrale il punto ***D***; Identicamente, con il punto ***B*** usando come riferimento ***CI***. (038_21)



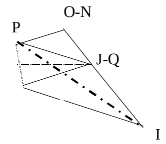
6 Piegare all'interno lungo la linea ***JI***. Per garantire maggiore robustezza al risultato finale, inserire l'aletta ***M*** sotto l'aletta ***OLI***; questo porta ***L*** sotto ***JMN*** (nella figura sono indicate anche le originali pieghe in terzi, visibili all'esterno uno per faccia) (038_22).

L'angolo **JOI** *e` l'angolo di un pentagono regolare con ottima approssimazione (Dimostrare!)*



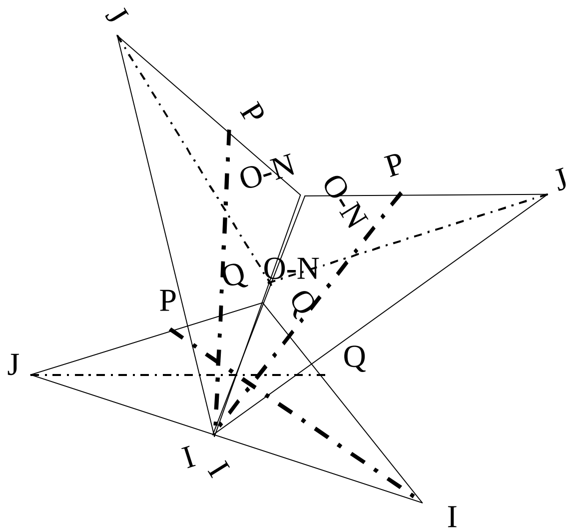
7 Piegando il punto ***I*** sul punto ***P*** e il punto ***J*** sul punto ***Q*** la figura che si ottiene e` un pentagono regolare (038_23). Riaprite queste due piegature.

Dimostrare che il risultato e` un pentagono regolare (con ottima approssimazione)



Non so voi, ma a me pare bellissimo. Da una figura tutta svergola come la quinta, riuscire a far saltare fuori un pentagono e` un'opera d'arte. E anche la divisione in terzi, trovo, non e` male.

Bene, di questi aggeggi ve ne servono *dodici*; ognuno definira` una faccia. Tranquilli, l'incastro non e` molto complesso (tant'e` che anch'io di solito lo faccio senza adesivo). In figura, vedete la costruzione base.



Giusto per chiarezza: le punte ***I*** (o ***J***) di due moduli si incastrano nelle falde del terzo; anche se dalla figura non si vede, le linee ***JI*** passano per i punti ***Q*** (o ***P***); le "orecchie" che avevamo riaperto al settimo passaggio stanno esattamente all'interno delle falde, quindi nel punto ***O*** si incontreranno le tre facce pentagonali del dodecaedro.

E avanti cosi`. Anche se non sembra, e` piuttosto semplice e il risultato piuttosto robusto.

Voglio sperare adesso non facciate domande imbarazzanti del tipo "*E adesso cosa me ne faccio?*". Al momento, la mia scrivania e` trionfalmente occupata da tre dodecaedri, due ottaedri, un icosaedro e un numero imprecisato di tetraedri; i colleghi stanno pensando si riproducano...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms