Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 045 - 2002-10

1. Editoriale

Caso mai non ve ne foste accorti, in Piemonte ci sono stati un po` di guai. Uno di questi e` stato il Comitato di Redazione di RM.

Vista la grande capacita` mostrata nella redazione della minuta del passato CdR, all'unanimita` (meno un voto: il suo) Alice e` stata nominata *notetaker*. Guardate un po` cos'e` venuto fuori.

E` una cartellina blu. Ce l'ho qui davanti, e, come tutti gli oggetti di cartoleria in generale, mi piace molto e mi da un certo senso di sicurezza, come se una cartellina blu, con opportuni elastici sia in grado di contenere certamente qualcosa di importante e possa conservare il segreto che contiene o assicurare il contenuto contro la distrazione e le intemperie.

All'interno una penna, una matita, una gomma, un blocchetto dei classici post-it gialli, un paio di elastici ed il vero tesoro. Una cartellina molto professionale, ma dopotutto noi siamo, a modo nostro, molto professionali, anche se il nostro modo non e` sempre facile da capire, almeno per il resto del mondo, che vede tre strani *personaggi seduti ad un tavolo in birreria, con tre cartelline azzurre e una enorme birra davanti.*

Io, per esempio, scrivo ora la minuta del meeting, seduta per terra sul mio terrazzo, su una coperta verde, sotto un improbabile sole di settembre che non si e` visto per tutto agosto. Ma dopotutto il mondo e` strano, anni fa non avrei mai usato un "lappetoppe" per scrivere su un terrazzo, in un caldo martedi` di meta` settembre, mentre un pazzo di sotto taglia rumorosamente l'erba del giardino, eppure in questo momento mi sembra decisamente un'attivita` normalissima, cosi` come mi sembrava normalissimo ritrovare tutta la redazione, piu` un ospite (denominata da qui in poi la "Jafo"), quella sera del sei settembre duemiladue, sedersi intorno ad un tavolo antistante al pub prescelto e ordinare due birre da un litro, una media (per il Doc, che fa il moderato per ricordarsi che deve andare via presto, e poi viene sempre convinto a fare molto piu` tardi di quello che aveva previsto) e una piccola (per la Jafo, ovviamente). Bella sorpresa, invece, e` stata la cartellina.

Il Doc, devo dire, e` arrivato per ultimo, carico di doni, carta e computer... lui e` sempre così, fa lo smemorato, il disordinato, a volte insiste anche sul ruolo di ultimo della classe, poi si presenta con computer e cartelline blu...

Insomma, mi sono tanto dilungata, bisogna che mi decida ad arrivare al punto: la cartellina blu, a parte gli essenziali articoli di cancelleria gia` menzionati, conteneva l'agenda del CdR.

Non che stilare l'agenda del CdR sia normalmente un compito del Doc, la nostra struttura sociale consiste in poche ma importanti regole, tra cui il fatto che l'unico vero lavoratore del gruppo sia il GC (che ovviamente e` arrivato carico di carta, fotocopie super-ridotte e un gran numero di idee, proposte e lavoro da fare, che alla fine fara` lui e di cui la sottoscritta non capira` nulla, mentre Piotr in estatico elogio aggiungera` qualche riga nella sua famosa retorica), il postino e latore di buone e cattive notizie sia il Doc, aka Piotr, e lo scopo principale dei CdR sia bere birra e manifestarci mutuo affetto ed approvazione.

Questa volta l'agenda l'ha preparata Doc, e ci siamo divertiti molto a seguirla, soprattutto la nostra Jafo, che ha spuntato ogni voce, incredula. Due parole su di lei, dato che ci ha sopportato per un certo numero di ore, aiutata da una minima quantita` di birra, ed afferma a tutt'oggi di essersi divertita molto e di voler ripetere l'esperienza. Specialmente quest'ultimo punto mi ha stupito: non abbiamo spesso ospiti ai nostri CdR, anzi quasi mai. Una volta ci ha raggiunto un amico di Piotr e Rudy, incidentalmente RMer da sempre e denominato "Pinguino" per la sua permanenza nelle vicinanze di un polo terrestre. Lui era gia` parecchio stranito nell'osservarci, ma la parte migliore e` arrivata quando sua moglie si e` presentata per prelevarlo, ed ha fatto delle domande significative, come "ma voi, come avete fatto ad incontrarvi?" o "certo che siete un terzetto decisamente atipico..." e "...ma come fate a scrivere e dirvi tutte queste stronzate?" Beh, l'ultima e` la mia traduzione della faccia che aveva quando se ne sono andati.

Invece la Jafo pare essersi divertita, ha anche risolto alcuni complessi problemi proposti dal Doc allo scopo di corteggiarla (mentre spiegava i termini di ogni problema le loro teste si avvicinavano pericolosamente, le penne battagliavano sulla stessa formula...), ci ha persino messi in contatto con un altro RMer (si può approfittare di quest'editoriale per salutarlo?) probabilmente disturbandolo mentre corteggiava delle fanciulle straniere, il tutto rispettando tutte le leggi della privacy... (a proposito: la nostra Jafo ha un acronimo lunghissimo (NACHC: impossibile da usare come nickname...), mentre il RMer in trasferta ha una decina di personalita`...). Giusto per capire come si e` infiltrata, sappiate che l'abbiamo invitata noi, che e` imparentata con Rudy in persona (in una maniera piu` arzigogolata del calcolo della periodicita` dei CdR; forse un giorno il GC ci scrivera` un'appendice di PM), e che e` *giovane e carina: non per niente tutti intorno si chiedevano cosa stesse facendo con noi tre.*

Tornando all'agenda, conteneva tre pagine fitte di ben settantotto punti all'Ordine del Giorno, in una tabella che mostrava chi avesse voce in capitolo (tipo: "sigaretta", solo Piotr, "birra", non c'e` dubbio, tutti), colorati in modo diverso: in rosso le voci alcolico-alimentari, tipo "una birra, per favore" e "patatine o involtini primavera" (che purtroppo non era piu` un'opzione, il Cubana non pare intenzionato a riaprire), in verde i trivia e i punti a bassa priorita` (comprese le sigarette di Piotr, le pipate di Rudy e la riformazione della treccia di Alice - l'ho notato solo dopo averlo fatto che si trovasse al punto numero diciotto e anche un po` piu` in la`), in blu i problemi seri (ebbene sì, ce n'erano anche tanti, rasentavano la dozzina), in nero gli aspetti finanziari (in pratica pagare il conto, se non ci fosse stato in agenda ci saremmo scordati).

Onestamente alcune parti della serata non mi tornano chiarissime alla memoria, un po` a causa della birra, un po` a causa di un paio di fastidiosissimi mosconi ignoranti che, volendo fare colpo sulla Jafo, hanno tentato di accendere la rissa. Il commento piu` gentile l'hanno fatto quando uno di loro ha chiesto "ma non avete di meglio da fare che discutere queste stronzate?" rapidamente seguito da un "ma non avete di meglio da fare che ascoltare cose che non capite e ficcarci il naso?" scivolato tra i miei denti prima che potessi chiudere la bocca, mentre Piotr tentava di raffreddare l'atmosfera e Rudy ripassava mentalmente le motivazioni per non utilizzare una delle altre tante sue abilita` (arti marziali). Mah, non c'e` piu` rispetto per un gruppetto di pazzi che si diverte a fare matematica mentre beve birra... comunque non sono riusciti a funestare la nostra serata, e la Redazione e` comunque riuscita a prendere molte decisioni, malgrado -o forse grazie al fatto che- Piotr fosse seriamente distratto nel corteggiamento della Jafo: tra le piu` importanti, una convenzione per il formato delle mail, una nuova rubrica sui grandi quesiti irrisolti dei lettori e della redazione, la ristrutturazione del sito per il suo compleanno, l'inserzione e formattazione della soluzione del problema degli alieni fornita da uno zelante e paziente RMer, e tanto altro che scoprirete nei prossimi mesi. Anche se questa volta non abbiamo giocato (il tavolo era pienissimo di cartelline, fogli, patatine ed enormi birre da litro, e il GC non ha portato la collezione di monetine), non vi illudete, Rudy ha molto in serbo e utilizza i temibilissimi elementi della sua prole per testare i giochi.

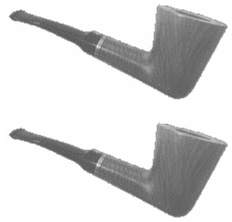
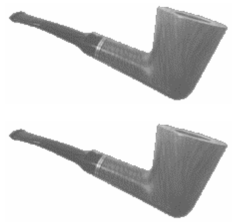
Anche questo CdR e` andato senza grossi incidenti, pronto ad entrare nella leggenda come il primo con un'ospite e un'agenda colorata comprensiva di tutto, dai baci alle birre a fogli intestati (con il nostro logo in testa e un epitaffio per l'occasione a pie` pagina) per gli appunti. Ragazzi, uno di questi giorni vi capitera` di passare per la capitale sabauda e scorgere tre loschi tipi intorno ad un tavolo a bere birra e scarabocchiare fogli... e forse potrete avvicinarvi e dire: "io l'avevo letta questa storia, ma non credevo che succedesse veramente..."

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
TBD			
TBD			

Questi avete *sul serio* un mese per risolverli.

Li ho recuperati (non so se si nota) da una rivista americana, e mi sembrano decisamente carini.

Candy or tricks!

2.1 Sono cavoli vostri...

Preferendo andare al cinema piuttosto che restare in casa ad attendere l'arrivo degli Spiritelli di Halloween, avete fatto infuriare il Grande Cocomero.

Sulla strada di casa vostra vi ritrovate sette Lanterne di Halloween, disposte in cerchio, tutte accese; vostro compito e` spegnerle tutte, ma...

...Ma ogni volta che ne spegnete (o accendete) una, le due vicine si accendono (se sono spente) o si spengono (se sono accese; insomma, cambiano stato. Spero ci arriviate da soli a capire cosa succede se sono una spenta e l'altra accesa, che abbiamo fretta...).

A mezzanotte, da ognuna delle sette che sara` ancora accesa, scaturiranno sette cavalli neri, guidati da sette neri cavalieri, che cavalcheranno sette volte sette attorno alla vostra casa, tirando sette volte sette volte sette uova marce contro le vostre fineste, e ci sara` grande disordine quando i vostri (genitori-figli)/(mariti-mogli)/conviventi torneranno a casa, e nessuno sara` felice, voi inclusi.

La vostra unica speranza e` fare si` che tutte le lanterne siano spente entro mezzanotte.

Vi sedete a pensare, ma... svelti! Odo scalpiccio di zoccoli neri in lontananza...

*Al Grande Cocomero bastera` che le spegniate, ma io vorrei che ci arriviate per **ragionamento**, non per tentativi...*

2.2 Votazioni al Sabba

Il Grande Sabba delle Pesti si e` ritrovato dopo una notte di saccheggio rituale delle dispense del rione; oggetto della discussione tra un Acefalo (Alberto), un Fantasma (Fred), una Hevee (Hymen) e una Medusa (Minh) e` "come dividere le caramelle".

Per prima cosa, viene stabilito un metodo di presentazione delle proposte e l'accordo (non chiediamoci attraverso quali mezzi) e` raggiunto su queste regole:

1. Si propone in ordine alfabetico.
2. Ogni proposta viene votata immediatamente dagli aventi diritto

3. Se la maggioranza e` d'accordo, si procede immediatamente alla divisione senza piu` votazioni; chi vede la propria proposta non accettata dalla maggioranza perde il diritto alla votazione successiva e non avra` nessuna caramella.

Considerato che tutte le Pesti sono completamente logiche e completamente egoiste, come andra` a finire, secondo voi?

3. Bungee Jumpers

1. Trovare un intero di quattro cifre tale che sia un quadrato esatto e che le prime due cifre siano uguali tra loro e le seconde due cifre siano uguali tra loro.
2. Trovare tutti i numeri di due cifre tali che, quando ad essi viene sommato il numero ottenuto invertendo le decine con le unita`, il risultato e` un quadrato perfetto.

4. Soluzioni e Note

Neanche il tempo di dire che era piacevole parlare non sempre e solo del mese prima e arrivano una paccata di soluzioni al numero di luglio.

Ne devo dedurre che nessuno di voi si e` pur lontanamente sognato di portare RM in ferie?

4.1 [043]

Grandi notizie! ***Sam*** e` riuscito a trovare una *soluzione non trigonometrica!*

Allora, tutto e` cominciato quando (il mese scorso) Doc ha chiamato una variabile "*Sam*"; sapevamo che il Nostro aveva intenzione di riposare (e non aveva mandato soluzioni), quindi avevo inserito la battuta che "stava riposando". La cosa deve aver punzecchiato Sam, in quanto a stretto giro di posta ci arrivava la mail seguente, con il commento del postino (sarebbe Doc): "*Stava riposando, eh? Senti un po` come russa...*".

Ancora una nota, prima di darvi la mail: siete liberi di non crederci, ma possiamo assicurarvi che tra i lettori di RM ce ne sono alcuni che (anche se non lo dicono) di matematica (ricreativa e non) ne sanno piu` di noi & voi messi assieme e moltiplicati per tre e quattordici. E allora perché leggono RM? Sospettiamo fortemente che lo facciano soprattutto per scoprire le profonde differenze che ci sono tra l'italiano rigoroso delle pubblicazioni scientifiche e quello prossimo al turpiloquio di RM, visto che la lingua di Dante non e` la loro lingua madre.

Prima che in questi amici nasca la preoccupazione di non aver capito niente, vorremmo chiarire che Sam (siccome i problemi erano troppo semplici) ha deciso di scrivere la risposta in italiano del Seicento, o quantomeno in un idioma che somiglia all'italiano secentesco. Piuttosto divertente, credo, ma piuttosto inutile per i vostri scopi, vero? *[Va detto che anche il resto della rivista, sintatticamente parlando...(RdA)].* Unico problema: Sam ci passa il tutto in bellissimi caratteri, ma non abbiamo il font relativo sulla tipografia. Spiace, cerchiamo di salvare il salvabile. Dunque, questa e` la mail. Una volta tanto, vale anche la pena di citare il subject.

All'eccellentissimo esegeta ed alla Congrega de li Celeberrimi Savii

S'anche solo dell'ingenio de voi, Illustrissimi savii n'avess'io oncia, no'l saria cotal ardua pugna l'esporre et il conclamare lo riverente mio ardore nel sequir l'exemplo vostro ne le materie algebraiche et geometriche, con buon animo e mente lieta sottostando a le quistioni che mi ponete a lor riguardi et celermente - nulla piu` de'l miserrimo tempo che Diana Selene impegna nel circumire l'orbe terraqueo - remittendo a le vostre alte aule la humile replica la qual dissezionata con ferreo stilo ed impietosa arte discopro al giungermi ineluttabile ed esattissimo de lo vostro dispaccio. Cotal agire di certo encomiabile da un qualsivoglia pedagogo cresciuto a la schola de l'ammirevole marchese Donatien-Alphonse-

François di Parigi, lascia intravedere celata dietro veli di durezza - squisito ossimoro- la fervente vostra volonta` di educare e correggere da le errate vie li ingenii de li vostri animosi accoliti. E' dunque cosi` con rinnovato animo e sempre ardente fervore che ripeto , prima che l'ide o la calenda mi colgano in fallacie ritardo, quel ch'ormai e` rito et salutare pratica, senza piu` pormi in dubbio su la teleologia de le chiose vostre, confidando ne la bonta` di superiori menti, saviisime invero, a cui facillimo e` devianze invenire nell'altrui opera, quando lampantemente il loro operare ne e` scevro, come acqua di fonte da polluzioni et intorbidimenti, di inviarvi con questa mia deferente e dimessa, il modesto esito de li sforzi miei, il prelio mio di queste vacanze a dir molto ebdomadarie, nella speranza che risulti a Voi gradita una simile opera, affatto degna di considerazione et di attenzione, ma con il fermo convincimento de le gentili vostre graziose concessioni nell'esaminarla et anco leggerla come s'ea fosse d'homo di scienze studi et ancor si` cultura, da dir chosa che a voi gia` non abbia balenato ne l'intelletto in agostiniana illuminazione.

Rispettosi et humili inchini a voi anchor rivolgo, nel chiudere cotal dimessa epistola, et sperando sempre anchora del buono spirito con cui l'accoglierete, con reverenza vi saluto, su di voi invocando omnem coelestem benedictionem.

Sam.

PS: Avete voluto la rissa?Sam.

PPS: No, non vi preoccupate, non sono scritte cosi` le soluzioni. Sam

PPPS: Almeno non tutte!Sam.

Il secondo Post Scriptum ci ha tranquillizzato, il terzo mica tanto... *[Credo di essere l'unico ad averlo apprezzato... Vorrei farvi notare che c'e`* un unico punto fermo*, in tutto il discorso, e sintatticamente e` perfetto. Quando facevo delle cose del genere nei temi, la mia Prof di Italiano passava il fine settimana a cercare un errore nella* consecutio temporum*, non lo trovava e la settimana successiva ero soprannominato "Proust" (RdA)]*

Tranquilli, quella dei quadrati attorno e` scritta in un italiano quasi normale.

4.1.1 I Quadrati Attorno

Dopo RM 43 mi era venuta voglia di scrivere le soluzioni in latino, ma visto che non sono un tipo rissoso... *[Non dategli retta: e`* poco *rissoso, infatti un po` di latino ce lo rifila comunque... (RdA)].*

["Omissis" della soluzione trigonometrica (RdA)]

Per la vostra (sto dando del voi al GC o mi riferisco alla Redazione tutta? Non importa *[alla Redazione tutta: il "Voi" del GC ha la majuscola (RdA)]*)[1] gioia, nemmeno un disegnino in Paintbrush, nonostante io non consideri affatto insana una simile propensione *[E` che quando li ingrandisci vengono degli obbrobri e occupano un mucchio di spazio. Per il resto, ben venga PB[2] (RdA)].*

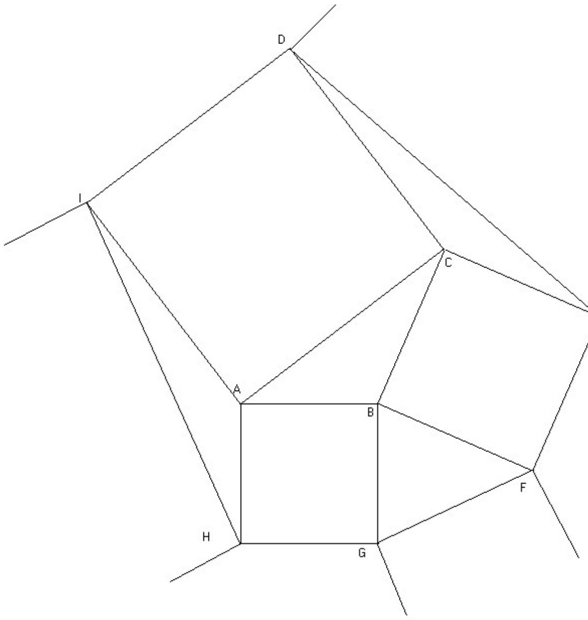
Se per caso vi fosse sgradita la trigonometria, questa dimostrazione può essere trasferita nella geometria elementare sostituendo all'applicazione del teorema di Carnot due successive applicazioni del teorema di Pitagora e trattando separatamente i due casi in cui si trovino triangoli ottusangoli o non ottusangoli. *Autem hanc marginis exiguitas non caperet nec mihi placeret scribere. (Orpo. E se invece gli piaceva, cosa sarebbe successo ? [P.R.S.])*

[1] Anche se RM ha la velleità di essere una rivista di matematica, questa frase è una frase e non una formula. Ci sono tre livelli di parentesi, credo sia un record da Guinness dei Primati (nel senso di scimmie, non di record).[P.R.S.]

[2] Giusto per fare un esempio che casca a fagiolo: non so in che formato fossero i disegni, ma il passarli in JPEG ha permesso di risparmiare 4 MByte sul file Word.

Sed altera solutio, facilior pulcherrimaque invenire possumus, si non de quadratibus cogitamus, sed vero de lateribus et ab eius mediis ad verticem ulteriorem lineis euntibus. Si quadrata abessent, si tria externa triangula adiacentes essent ad latera primum triangulum...

La tentazione di andare avanti e` forte, ma il fatto di non avere il vocabolario e` un buon deterrente *[Incredibile! Sam non se lo e` portato in ferie! E come fa a leggersi il Migne? Dal trentasettesimo volume diventa pesantino, senza vocabolario... (RdA)]*.



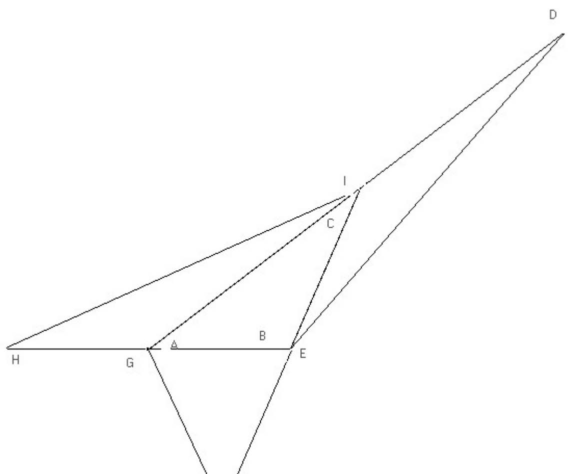
Comunque dicevo che possiamo trovare un'altra soluzione, piu` facile ed assai elegante, se invece di considerare i quadrati, facciamo finta che essi non ci siano e ruotiamo i tre triangoli esterni fino ad ottenere la seguente figura (sì, lo so, ma senza disegno non ci si capiva niente *[Per motivi editoriali dobbiamo ridurla: speriamo si vedano ancora le lettere]*):

Se ruotiamo il triangolo ***CDE*** attorno a ***C*** di ***90°***, ***E*** coincidera` con ***B*** e i punti ***A***,***C***,***D*** saranno su di una stessa retta, poiché ***DCE + <ACB=180°*** e cosi` avviene per ***FBG*** attorno a ***B*** e ***HAI*** attorno ad ***A***. Allora possiamo dire che, nel triangolo ***EAD***, ***EC*** e` mediana di ***AD***, poiché per costruzione ***AC=CD*** e cosi` per ***CG*** in ***CEH*** e ***GE*** in ***FGI***.

Ora, il Teorema della mediana afferma che il doppio del quadrato costruito sulla mediana e` pari ai quadrati costruiti sui lati che essa non biseca diminuiti della meta` del quadrato costruito sul terzo lato *[Anche se a tutta prima sembra una brutta bestia, con un paio di applicazioni del Teorema di Pitagora si aggiusta tutto, ma se lo chiediamo a Sam ci passa il riferimento agli "Elementi" di Euclide in greco (RdA)]*. Ovvero:

$$2BC^2=ED^2 + BA^2 \quad 2CA^2$$

$$ED^2=2BC^2+2CA^2 \quad BA^2$$



e dunque questa relazione vale per tutti i lati dei quadrati esterni, in funzione dei lati interni, quindi, sommandole si ottiene il risultato precedente:

$$ED^2=2BC^2+2CA^2 \quad BA^2$$

$$HI^2=2CA^2 + 2AB^2 \quad CB^2$$

$$FG^2=2BA^2+2BC^2 \quad AC^2$$

$$ED^2 + HI^2 + FG^2 = 3(AB^2 + AC^2 + BC^2)$$

Perciò il rapporto e` 3.

Quod **E**rat **D**emonstrandum.

*Ora, piu` che "*Valete et Plaudite*", cosa volete dire? (Io gli direi "Mitto tibi navem prora puppique carentem", ma figuriamoci se Sam non si ricorda i giochetti verbali di Cicerone...[P.R.S.])*

4.1.2 Il codice dell'armadietto

Si, questo era facile e risolto gia` il mese scorso. Pero` la soluzione di Sam e` letterariamente valida e ***Noi*** abbiamo deciso che deve esserci. Inoltre, inserisce un grazioso punto che nessuno aveva analizzato.

Le loro Signorie richiedono ora che si trovi un ignoto numero permutando le cui cifre, non necessariamente in omne maniera, si ritrovino altre sconosciute quantita` che godano della medesma mirabolante proprieta` che consta nell'essere un di meno de la risultanza della moltiplicazione di due numeri di cui uno sia l'altro dell'unita` aumentato ossia quel che l'encomiabile studioso di scienze numeriche dal Nuovo Mondo Martino Gardenio* [Piccola nota per quelli che hanno la bocca aperta: andate a cercare "Gardner" sul vocabolario] *appella hex-numeri. Ordunque la soluzione, in verita` semplice e diretta consiste nell'ire a consultare un quodlibet tomo di Teoria dei numeri in sulla pagina che favella de li numeri figurati e ricercare fino ad invenirvi una tabella che riporti l'elenco de li numeri suddetti, confrontando le cifre che compongono ciascheduno e ritrovandole piu` avanti od indietro nell'elenco, a seconda che la repetitione sia ulteriore o posteriore:* **127**; **169**; **217**; **271**; **331**; **397**; **469**; **547**; **631**; **721**; **817**; **919**. *Quand'anche non si potesse in tempi ammissibili procurarsi cotale in strumento, si potra` pur sempre applicare la formola trovata dallo studioso suddetto che cosi` recita: $3n^2+3n+1$. *Si vede dunque che le possibili combinazioni sono* **127 217 271 721**.

Et hac finis est nostrarum demonstraziones. Magis nobis non est sciendum de geometriae quistionibus vel de numerorum ; hoc mittimus, sperantes hoc sufficiat magnis Redationis saviis.["nostrarum demonstraziones" ? Uh... devo andare a spolverare il vecchio Badellino-Calonghi, ma mi sembra che qui ci siano un paio di cosucce che non m'avrebbero lasciato correre, ai bei tempi del ginnasio... e pure su "quistionibus" avrei qualcosa da dire. Si', lo so che non riesco a coglierlo in castagna sulla matematica, dannazione: in qualche modo bisognera` pure mettergli un freno, no? [P.R.S.]*).*

Avete atque valete.

E siccome ormai il Castiglioni-Mariotti (o il Badellino-Calonghi, fate voi) e` sul tavolo, "*Quaerendo Invenientis*": se volete saperne di piu` sui numeri esagonali, andate a riprendervi RM021 e 025: nel primo si spiega cosa sono, nel secondo si spiega come calcolarseli.

4.2 [044]

Sam ha deciso che le soluzioni del numero di settembre ce le manda in lingua tagalog, altrimenti non e` divertente. Quindi per adesso (e` il ventisei) abbiamo solo una soluzione (molto bella e piu` completa della mia) al secondo problema da parte di ***PuntoMauPunto***. Vi passo comunque la mia soluzione per quanto riguarda la roulette generosa.

4.2.1 La roulette generosa

Ammetto che la domanda era piuttosto balorda: siamo tutti abituati a cercare le probabilita` e ogni tanto ci dimentichiamo che esiste il "valore atteso" (Confesso, ho fatto anch'io confusione tra i due di recente. Filippo ne sa qualcosa).

La probabilita` di vincere un qualsiasi colpo e` $p = \frac{18}{38}$

Supponiamo ***n*** sia il numero di tiri che massimizzano la vincita..

Definiamo come numero delle vittorie, tra questi tiri, ***w***.

La probabilita` di ***w*** vincite in ***n*** tiri e` $\frac{n!}{w!*(n-w)!}*p^{w}*(1-p)^{n-w}$

[Confessate, questa non ve la ricordavate, Eh? No, neanch'io. Ho dovuto scomodare la polvere dei secoli, per ritrovare il testo di Probabilita`... Scommetto che Alice non ci ha neanche pensato (RdA)]

La vincita attesa su ***n*** tiri e`

Se $w>\frac{n}{2}$***, allora*** $\sum_{w=0}^{n}\frac{n!}{w!*(n-w)!}*p^{w}*(1-p)^{n-w}*(2w-n)$

altrimenti $\sum_{w=0}^{n}\frac{n!}{w!*(n-w)!}*p^{w}*(1-p)^{n-w}*\left(w-\frac{n}{2}\right)$

E il vostro amato Excel vi dice:

Giocate	Guadagno atteso	Giocate	Guadagno atteso
1	0.210526	16	0.171295
2	0.171745	17	0.182001
3	0.257618	18	0.144822
4	0.219182	19	0.152868
5	0.273977	20	0.115815
6	0.235800	21	0.121605
7	0.275100	22	0.084671
8	0.237137	23	0.088519
9	0.266779	24	0.051698
10	0.229003	25	0.053852
11	0.251903	26	0.017138
12	0.214296	27	0.017797
13	0.232154	28	-0.018813
14	0.194700	29	-0.019482
15	0.208607	30	-0.055994

Quindi, il massimo si raggiunge con ***7*** giocate.

4.2.2 Pregasi generalizzare

La mia soluzione era una cosina veloceveloce, ma la sacrifico volentieri perche`* **PMP** *e* **Enrico** *ci permettono di ripassare alcuni concetti che probabilmente sono coperti da polvere cerebrale in molti di noi. Alla fine trovate la mia, che e` un po` piu` breve anche se molto "tagliata per i campi". Adesso facciamo parlare PMP, che e` "arrivato primo".

Ammesso che non sia troppo tardi provo a scrivere la rispostina al problema delle freccette, che ritenetti essere il piu` divertente. Peccato che (dopo che mi ero congratulato con me stesso per avere risolto in un attimo il problema, ottenendo come valore aspettato ***3*** lanci) mi sia messo per puro scrupolo a scrivere un programmino Perl *[Lo trovate al fondo: se volete provarci, fate pure: io l'ho riscritto in "C", che lo capisco meglio (RdA)]* per verificare il risultato. Bene, mi era chiaro che il valore ***3*** non era quello giusto: era anche sufficientemente ipotizzabile che il valore corretto fosse in realta` ***e***, il che dava un tocco di classe ma doveva naturalmente essere dimostrato.

Trovare il mio errore e` stato banale: partivo dal presupposto che, lanciando due dadi, ottenere ***2*** oppure ***7*** fosse equiprobabile. Trovare la vera probabilita` non e` stato cosi` semplice: c'era una vocina che cercava di riesumare ricordi universitari, con parolone tipo "densita` di probabilita`" e "convoluzione"... Ho cercato fino in fondo di trovare un sistema piu` semplice, ma alla fine mi sono arreso e sono passato a usare quei cannoni, o meglio a ricostruirmi tutto il cannone visto che non ricordavo assolutamente nulla *[Qui PMP le spara grosse, con i suoi cannoni... In realta`, se c'era la vocina qualcosa doveva ricordarsi (RdA)].*

Per prima cosa, in spregio alla generalizzazione del problema sono tornato alla formulazione originaria, immaginando che i valori casuali fossero tra ***0*** e ***1*** *(e hai fatto bene. In realta` la nota che il problema originale era tra* **0** *e* **1** *e` stata una richiesta di Doc, ma vedo che e` servita (RdA)].* Inizio dunque a spiegare cos'e` una **densita`** di probabilita`, per tutti i fortunati che non hanno mai avuto a che farci *[Alice, prendi appunti! (RdA)].* Quando si parla di probabilita` con un insieme infinito di eventi diversi possibili, si preferisce fare l'integrale (da **-**∞ a **+**∞) di questa probabilita`, e ottenere una funzione ***K(x)*** che e` sempre non decrescente, e varia da ***0*** a ***1***, e ci dice la probabilita` cumulativa di ottenere al piu` ***x***. Nel nostro caso, ecco nella Figura 1 *[Una rabbia, ragazzi... Perche` a PMP le figure stanno a posto e a me no??? (RdA)]* la densita` di probabilita` che si può ottenere con un lancio.

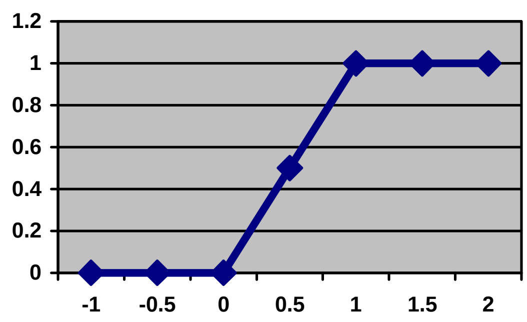


Figura 1 - densita` di probabilita` nel caso di un lancio

La curva e` molto semplice, naturalmente: e` impossibile ottenere meno di zero, e` certo ottenere meno di uno, e tra zero e uno la densita` aumenta linearmente. Piu` difficile e` ottenere la densita` di probabilita` con un numero maggiore di lanci: la Figura 2 e` una approssimazione nel caso di quattro lanci. Che la figura sia fatta in maniera completamente diversa da quella precedente non e` un caso, ma il segno della mia incapacita` a creare grafici: ammettete almeno che ci ho tentato. Inutile dire che anche in questo caso la curva prosegue nelle due direzioni, inchiodata rispettivamente a zero e a uno.

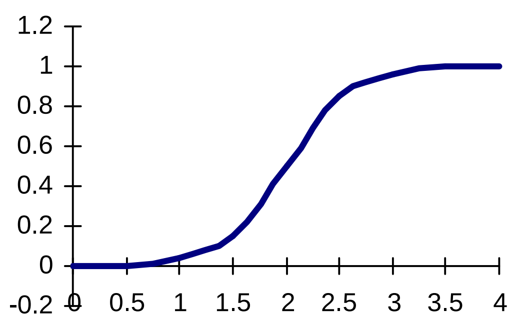


Figura 2 - densita` nel caso di quattro lanci

Ora comincia il divertimento: se chiamiamo $K_n(x)$ la funzione di densita` per *n* lanci, sappiamo che per definizione si ha

$$K_{n+1}(x) = \int_0^x K'_{n+1}(t)dt \qquad \textbf{[001]}$$

(sì, devo installare l'Equation Editor, ho capito!) *[No, perche`? Se sono costretto a riscriverle, almeno devo fare lo sforzo di capirle... A parte il fatto che il mio Word si rifiuta di considerare l'integrale un carattere (RdA)]* . E il valore della derivata e` per l'appunto la **convoluzione** della densita` per ***n-1*** lanci e di quella per un lancio. In pratica, perché il totale sia ***t*** occorre che (se nei lanci precedenti si era ottenuto ***y***) nell'ultimo lancio si ottenga ***t-y***. In formula,

$$K'_{n+1}(t) = \int K'_n(y)K'_1(t-y)dy \qquad \textbf{[002]}$$

Ora arriva il colpo di genio *[Sempre modesto, il nostro amico... Comunque, una volta tanto possiamo anche essere d'accordo (RdA)]*. Avendo fatto un po' di simulazioni al calcolatore, ho avuto l'intuizione che se ***x*** non supera ***1*** allora $K_n(x) = x^n/n!$ *[Attenzione che il punto esclamativo non e` estatica ammirazione per il proprio incommensurabile genio... (RdA)]*. La parola "intuizione" ricorda subito "induzione", il famoso sistema per trovare se la risposta che si sa e` giusta. E in effetti, $K_1(x) = x$, e (nel secondo passaggio, ricordate che $K'_1=1$, nel nostro intervallo):

$$\begin{aligned} K'_{n+1}(x) &= \int_0^x \left(\int_0^t K'_n(y)K'_1(t-y)dy \right) dt = \\ &= \int_0^x \left(\int_0^t K'_n(y)dy \right) dt = \\ &= \int_0^x K_n(t)dt = \frac{\left(\frac{x^n}{n!}\right)}{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned} \qquad \textbf{[003]}$$

A questo punto, il nostro armamentario e` completo, e possiamo finalmente calcolare il valore atteso di quanti lanci ci vogliano per superare il totale di ***1***. E` immediato che la probabilita` di farcela in un solo lancio e` ***0*** (il che non significa che sia impossibile, ma ci vuole molto piu` che il culo di Sacchi per trovare l'unico valore possibile in un continuum!). In generale la probabilita` di farcela in ***N*** lanci e` pari a quella di avere superato ***1*** in ***N*** lanci, meno quella di averlo gia` superato in ***(N-1)*** lanci, e cioe`

$$\begin{aligned} &\sum_{N\geq 2} \left(N\left((1-K_n(1)) - (1-K_{n-1}(1)) \right) \right) = \\ &= \sum_{N\geq 2} \left(N \left(\frac{1}{(N-1)!} - \frac{1}{N!} \right) \right) = \\ &= \sum_{N\geq 2} \left(\frac{N(N-1)}{N!} \right) = \\ &= \sum_{N\geq 2} \left(\frac{1}{(N-2)!} \right) = \\ &= \sum_{M\geq 0} \frac{1}{M!} = e \end{aligned} \qquad \textbf{[004]}$$

Semplice, no?

Cerchiamo di tornare tra le menti semplici, e vediamo com'era scritto il programma che ha generato il tarlo del dubbio nel Nostro: lo trovate di seguito

```
#!/bin/perl

use vars qw (@ris $sum $try $i $tot $n);
$n=100000;

for ($i=0; $i<$n; $i++) {
   $sum=0; $try=0;
   while ($sum < 100) {
      $try++; $sum += rand(100);
   }
   @ris[$try]++;
}

$tot=0;
for ($i=1; $i <=$#ris ; $i++) {
   print "$i tentativi $ris[$i] volte\n";
   $tot += ($i*$ris[$i]);
}
$tot /= $n;

print "Valor medio: $tot\n";
```

Adesso vi racconto una cosa.

Ai tempi dell'Universita`, ad un esame, al collega prima di me era stato chiesto il metodo di risoluzione delle equazioni differenziali omogeneee (ultima domanda dell'esame). Prima domanda al sottoscritto: risoluzione dei sistemi di equazione differenziali omogenee[3].

Ecco, mi sono sentito nelle stesse condizioni quando e` arrivata la soluzione di* ***Enrico****: decisamente simile a quella di PMP, ma (spero PMP non me ne vorra`) un pochino piu` chiara in alcuni punti. Non solo, ma ha usato Equation Editor, **lui***!*

Se la densità di probabilità di fare x con un tiro è distribuita secondo la legge $f(x)_1$ tra 0 e X, allora, per n tiri, avremo la seguente densità di probabilità di fare il punteggio x:

$$f(x)_n = \int_0^x f(t)_{n-1} \cdot f(X-t)_1 dt \qquad \textbf{[005]}$$

Ma $f(x)_1$ la conosciamo, infatti è uniforme:

$$f(x)_1 = \frac{1}{X}\left(x = 0..X\right) \qquad \textbf{[006]}$$

Poiché $f(x)_1$ è costante, la precedente si può riscrivere così:

$$f(x)_n = \frac{1}{X}\int_0^x f(t)_{n-1} dt\,(x = 0..X) \qquad \textbf{[007]}$$

[3] Piccola nota per coloro che lo hanno dimenticato: la dimostrazione e` esattamente la stessa, ma nel caso dei sistemi si parla di matrici anziche` di scalari, e quindi si usano le maiuscole: la dimostrazione era ancora sulla lavagna, e l'ho riscritta un passaggio per volta (Eh? Ma sarete curiosi... Ventisette, lo scritto non era un gran che).

Da cui si deduce che $f(x)_n$ è in (0..X) un polinomio di grado n-1.

$$f(x)_n = k_n x^{n-1} \quad \textbf{[008]}$$

In particolare si può dire:

Quindi, tenendo anche conto che $k_1 = \frac{1}{X}$:

$$\begin{aligned} f(x)_n &= k_n x^{n-1} = \frac{1}{X}\int_0^x k_{n-1} t^{n-2} dt \\ k_n x^{n-1} &= \frac{1}{X}\frac{k_{n-1}}{n-1} x^{n-1} \\ k_n &= \frac{1}{X}\frac{k_{n-1}}{n-1} \Rightarrow k_n = \frac{1}{X^n}\frac{1}{(n-1)!} \end{aligned} \quad \textbf{[009]}$$

La probabilità di fare in n tiri un punteggio minore di x è data da:

$$P(x)_n = \int_0^x f(t)_n dt \quad \textbf{[010]}$$

Poiché a noi interessa il punteggio X si ha:

$$\begin{aligned} P(X)_n &= \int_0^X f(t)_n dt = \int_0^X \frac{1}{X^n}\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{X^n}\frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{n} X^n = \frac{1}{n!} \end{aligned} \quad \textbf{[011]}$$

Chiamiamo quindi P_n la probabilità di fare meno di X in n tiri. Dal teorema della probabilità condizionata si ha:

$$(P_n | P_{n-1}) \cdot P_{n-1} = P_{(n)AND(n-1)} = P_n \quad \textbf{[012]}$$

Quindi:

$$(P_n | P_{n-1}) = \frac{P_n}{P_{n-1}} \Rightarrow (\overline{P}_n | P_{n-1}) = 1 - \frac{P_n}{P_{n-1}} \quad \textbf{[013]}$$

Quello che ho trovato adesso è la probabilità di superare X al tiro n, condizionata al fatto di non averlo superato al tiro n-1. Lo spazio degli eventi è formato proprio da termini del tipo: Non ho superato X al tiro (n-1) e lo supero al tiro n. La probabilità di superare X all n-esimo colpo, senza averlo superato prima è:

$$\begin{aligned} PS_n &= (\overline{P}_n | P_{n-1}) \cdot P_{n-1} = \left(1 - \frac{P_n}{P_{n-1}}\right) P_{n-1} = P_{n-1} - P_n = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{n! - (n-1)!}{(n-1)!\,n!} = \frac{n-1}{n!} \\ PS_n &= \frac{n-1}{n!} \end{aligned} \quad \textbf{[014]}$$

Poiché voglio il valore medio di tale distribuzione, tale valore N sarà:

$$N = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot PS_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad \textbf{[015]}$$

Posso capire che la matematica di PMP e Enrico non sia proprio a livello di comprensione delle due pesti, ma e` decisamente bella. La mia soluzione viaggiava un po` piu` per i campi, ma puo` darsi che vi dia una traccia per seguire quanto detto sopra. Coraggio, che bastano poche righe:

Ci serve almeno un numero, questo mi sembra ovvio; se il primo numero e` minore di ***x*** ce ne servira` un altro generato *esattamente come il primo*, eccetera; in pratica, generalizzando a ***x*** il ***valore atteso*** (sempre lui!) e`:

$$E(x) = 1 + \int_0^x E(y)dy \qquad \textbf{[016]}$$

Prendendo la derivata di entrambi i membri,

$$E'(x) = E(x) \qquad \textbf{[017]}$$

Spero ora vi ricordiate quale funzione e` la derivata di se stessa; per il nostro caso particolare, $e^x\Big|_{x=1} = e^1 = e$.

Adesso rivedetevi le due soluzioni sopra, che l'unico pregio della mia e` che usa meno elettroni...

5. Quick & Dirty

Q: *Sul vostro ufficio c'e` scritto : "**S**postamento **P**ietroni s**Q**uadrati - **R**esponsabile", e il vostro lavoro e` muovere i blocchi per la costruzione delle piramidi dalla cava al sito; causa pero` uno sciopero dei Levitatori Telecinetici, non e` possibile fare nel solito modo.*

Ad un tratto, avete la luminosa idea di piazzare dei rulli sotto i pietroni e di far rotolare il tutto.

*Se i rulli hanno un raggio di **2** cubiti, quanta strada fara` il macigno in un giro di rullo?*

Facilefacile, ma quanti hanno detto "quat...no!"? Se volete la formulazione piu` corretta che abbia mai trovato della risposta:

> ***A:*** Il rullo rotola in avanti (rispetto al terreno) di $4p$ cubiti, ma rotola anche indietro (rispetto al masso) di $4p$ cubiti.
>
> Totale, $8p$ cubiti.

6. Zugzwang!

6.1 Realm

Visto che si avvicinano i piovosi fine settimana della brutta stagione, qualcosa di complicato: se per le prossime vacanze al mare sarete diventati degli esperti, liberi di occpare l'intero arenile. Il gioco (e trovare i pezzi) non e` semplice e ha una storia dietro di se`.

La storia

Il gioco e` stato inventato da Philip Orbanes e da Sidney Jackson, i due mitici fondatori della *Gamut of Games*[4]; purtroppo, tempo fa chiuse, Orbanes passo` alla Parker Brothers e (causa conflitto di interessi) non sviluppo` piu` "Reami"; il ruolo di Cavaliere Bianco in questo caso e` giocato da William Mikulas e Stanley Levin, che acquistarono i diritti del gioco e (producendone alcune copie) provarono a proporlo ai "big" del settore. Nonostante un certo qual interesse mostrato da alcuni, nessuno ha deciso di produrlo e quindi il gioco e`, per cosi` dire, "nel limbo".

Quindi, non so se sto violando un copyright. Se si, stampate il tutto su una meringa e poi inghiottite le prove, prima della perquisizione.

Realm	Reame
Board	Impero
Squares	Province
Center	Capitale
Border Space	Confine
Base	Castello
Power	Potere
Enforcer	Guardiano
Immobilized	Immobile

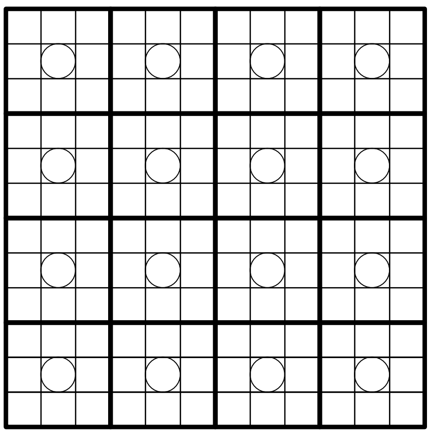
La traduzione

Una cosa che ho fatto e` stata quella di tradurre i termini utilizzati; per riconoscimento verso gli inventori, qui di fianco vi metto i termini originali e la mia traduzione. Liberissimi, poi, di dirmi che la mia traduzione fa schifo e usarne altri termini (su un paio, sono d'accordo con voi).

Equipaggiamento

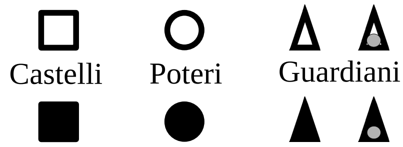
Nella figura da qualche parte vedete la scacchiera (Se non vi piace "scacchiera", chiamatela "Impero": fatela piu` grossa di cosi`, io sono stato limitato da problemi tipografici), di 144 caselle che formano 16 ***Reami*** di nove ***Province*** ciascuno; al centro di ogni reame c'e` una ***Capitale*** (indicata dalla Provincia Cerchiata), le altre otto province formano il ***Confine*** di un Reame.

Per i pezzi, la cosa si fa un po` complessa: vi servono, per ogni giocatore (Bianco e Nero), ***3 Poteri***, ***8 Guardiani***, ***12 Castelli***. Per quanto riguarda i Castelli (quadrati) e i Poteri (rotondi) niente di grave, bastano le solite monete diverse; il guaio sono i Guardiani, che devono avere due caratteristiche particolari: tanto per cominciare, devono essere in grado di ***puntare in una direzione***, e poi deve essere possibile distinguere quando sono ***Immobili*** (triangoli isosceli, sul retro hanno un puntino grigio: nel disegno ci sono due copie per ogni colore dei Guardiani, e la seconda ha un puntino grigio: si vede?); se trovate delle idee migliori per farli ditecelo, sono approvate sin da adesso.



Inizio - Prima Fase

Stabiliamo (nell'originale non e` specificato) muova per primo il Bianco; a questo punto, *il Bianco deposita un Castello nella Capitale di un qualsiasi Reame.* e il Nero effettua una mossa simile, posizionando *un Castello nella Capitale di un qualsiasi Reame Vacante* (ossia senza Castelli).



Nella seconda mossa (che segue la stessa logica della prima) *il bianco* ***non*** *puo` mettere un Castello in una Capitale che sia in posizione di torre con un suo Castello*; e` possibile invece se il

[4] Dire "GoG" a un amante dei giochi intelligenti e` come dire "Apple" a un informatico...

Castello e` dell'avversario.

La terza mossa segue la stessa logica; a questo punto, ogni giocatore ha ***tre Reami Amici*** nell'Impero.

Inizio - Seconda Fase

Successivamente, i due giocatori iniziano a posizionare i Poteri: *E` possibile posizionare un Potere su una Proviincia di Confine di qualsiasi Reame Amico*. Ossia sulle caselle che restano libere di ogni Reame precedentemente occupato da un Castello. *Durante questa fase, si puo` avere solo un Potere per ogni Reame Amico*. Il Potere puo` essere posizionato su qualsiasi Provincia di Confine di un Reame Amico.

Dopo tre mosse di questo tipo, chiaramente, termina la seconda fase. Per il seguito, e` necessario sapere come muovono i pezzi.

Movimenti

I ***Castelli*** sono *immobili*; una volta piazzato su una Capitale, non si puo` muovere.

I ***Poteri*** si muovono come delle torri: ortogonalmente, di quanto vogliono, sono bloccati da un qualsiasi altro pezzo (nella Provincia precedente: non gli vanno "sopra"). Un Potere puo` passare su una Capitale di un Regno Vacante, ma *non puo` fermarsi sulla Capitale di un Regno Vacante*.

I ***Guardiani*** muovono nello stesso modo dei Poteri, ma *possono muovere solo nella direzione in cui sono puntati*. Inoltre, *prima di muovere un Guardiano* ***puo`*** *ruotare di un quarto di giro in qualsiasi direzione*. Quindi, in pratica il Guardiano puo` muoversi in qualsiasi direzione tranne quella da cui proveniva. Quando un Guardiano termina la mossa, resta puntato nella direzione in cui si trovava.

I ***Guardiani Immobili*** non possono muovere.

Eventi Speciali

Quando un qualsiasi pezzo ha terminato il suo movimento, puo` causare un evento speciale:

- ***Un Potere fonda un Castello***: Quando un Potere termina il suo movimento in un Reame Vacante e non ci sono Poteri Nemici nel Reame, viene creato un Castello (Amico), che viene posizionato nella Capitale.
- ***Un Potere genera un Guardiano***: Quando un Potere termina il suo movimento in un Reame Amico in cui non si trova nessun Guardiano Nemico (Mobile), viene creato un Guardiano Amico, che viene posizionato in qualsiasi Provincia (di Confine) Vacante del Regno e posizionato nella direzione desiderata. Se *non esistono Province di Confine Vacanti, il Guardiano non viene generato*.
- ***Un Guardiano immobilizza un Guardiano Nemico***: Se un Guardiano si ferma in un Reame nel quale esistono uno o piu` Guardiani (Mobili) Nemici, uno dei Guardiani Nemici e` Immobilizzato e immediatamente girato (a mostrare il puntino). Se nel Reame ci sono piu` Guardiani Nemici, va indicato quale si intende immobilizzare. *Anche il Guardiano Attaccante diventa Immobile,* ***a meno che*** *nel Reame vi siano piu` Poteri Amici che Poteri Nemici*.
- ***Un Guardiano cattura un Castello Nemico***: Quando un Guardiano si ferma in un Reame contenente *un Castello Nemico*, ***nessun*** *Guardiano Nemico Mobile*, ***piu`*** *Poteri Amici che Poteri Nemici*, allora il Castello Nemico viene catturato. Il Castello viene rimosso dall'Impero e trattenuto dal giocatore che l'ha catturato

sino alla fine del gioco[5]. *Se c'e` solo un Potere Amico piu` che Poteri Nemici, il Guardiano diventa Immobile*; se i Poteri amici sono almeno due in piu`, il Guardiano resta Mobile.

Gioco

Muovendo i pezzi come indicato, ad ogni turno *il giocatore decide* ***che tipo di mossa compiere***: esistono tre tipi di mossa:

- ***Dispersione***: e` possibile muovere un qualsiasi numero di pezzi che si trovino in un Regno verso uno o piu` altri Regni; *il Regno di partenza deve essere unico, i Regni di arrivo possono essere vari (devono essere diversi dal Regno di partenza).*
- ***Concentrazione***: e` possibile muovere due o piu` pezzi da un qualsiasi punto dell'Impero verso un singolo Regno; *il Regno di arrivo non puo` essere uno dei Regni di partenza.*

Sia nella Dispersione che nella Concentrazione, ogni volta che si muove un pezzo si verifica se da` origine ad Eventi Speciali e, prima di muovere il prossimo pezzo, si risolve l'Evento Speciale (sembra quindi meglio muovere *prima* i Poteri, *poi* i Guardiani...).

- ***Posizionamento***: un giocatore puo` riposizionare come crede (variando anche la direzione di un Guardiano come preferisce) i pezzi all'interno di un Reame, inclusi i propri Guardiani Immobili (che rimangono pero` Immobili); ***non*** puo` riposizionare i pezzi avversari che si trovassero all'interno di quel Reame; questa "mossa" si svolge tutta *all'interno dello stesso Reame*, e non causa Eventi Speciali.Un giocatore ***non*** *puo` riposizionare lo* ***stesso*** *Reame* ***tre*** *volte di seguito.*

Obiettivo

Il gioco termina quando un giocatore ha fondato tutti i suoi Castelli o si vede che non e` possibile fondare altri Castelli da parte di nessun giocatore; in questo caso la vittoria e` del giocatore che controlla il maggior numero di Reami; se entrambi controllano lo stesso numero di Reami, si verifica quale giocatore ha piu` Guardiani (Mobili) e Guardiani non generati; se anche qui siamo pari, e` patta.

Variazioni

Chi piu` ne ha, piu` ne metta... In realta`, l'unica che mi pare interessante e` quella del ***Sacrificio dei Poteri***: un Potere puo` sacrificarsi rendendo nuovamente Mobile un Guardiano Immobile del Reame in cui si trova. Essendo una variazione, non aspettatevi eccessivi dettagli; fate voi, se si tratta di una Mossa o di un Evento Speciale e se potete rigenerare il Potere (inventandovi un altro Evento Speciale) o no. Io non ci gioco, quindi fate voi.

7. Pagina 46

In genere, i numeri scritti cosi` hanno altre interessanti caratteristiche...

Prima Parte

Se N e` l'intero cercato, esso e` esprimibile come:

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100a + 10b + b = \\ &= 1100a + 11b = \\ &= 11(100a + b) \end{aligned} \qquad \mathbf{[001]}$$

[5] Insomma, se l'avversario fonda un altro Castello non puo` usare quello li`. Deve prenderli dalla sua "riserva", e se non ne ha piu` non fa niente. Stessa cosa per i Guardiani: se sono Immobili, non si muovono piu` per tutta la partita e quando ne generate uno prendete dal mucchio.

E quindi il numero cercato e` un multiplo di ***11***.

Essendo pero` un quadrato perfetto, deve essere multiplo di ***11²=121*** e, in particolare, deve essere un multiplo di ***11*** anche ***(100a+b)***.

Inoltre, $a,b \leq 9$ e $a > 0$; quindi $1 \leq a + b \leq 18$ e questo implica che $a + b = 11$. Allora, sara`:

$$\begin{aligned} 100a + b &= 11 * 9a + 11 = \\ &= 11 * (9a + 1) \end{aligned} \qquad \textbf{[002]}$$

e

$$\frac{N}{121} = \frac{100a + b}{11} = 9a + 1 \qquad \textbf{[003]}$$

Ma se ***N*** e` un quadrato, anche $\frac{N}{121}$ deve essere un quadrato e, se ***a*** varia tra ***1*** e ***9***, l'unico multiplo di ***9*** che aumentato di ***1*** dia un quadrato perfetto e` ***7***, quindi $9a + 1 = 64 \Rightarrow N = 121 * 64 = 7744 = 88^2$

Seconda Parte

Sia ***a*** la cifra delle decine del primo numero (e delle unita`del secondo numero), e ***b*** la cifra delle unita` del primo numero (e delle decine del secondo numero).

La condizione imposta dal problema si puo` scrivere come:

$$\underbrace{10a + b}_{(1)} + \underbrace{10b + a}_{(2)} = k^2 \qquad \textbf{[001]}$$

ossia

$$11(a + b) = k^2 \qquad \textbf{[002]}$$

Dove ***k*** e` un intero positivo; quindi, tutti i numeri in questa formasono divisibili per ***11***.

Segue che ***k²*** deve essere divisibile per ***11*** (e quindi che deve esserlo ***k***, non essendo ***11*** un quadrato). E quindi, essendo il secondo membro un quadrato, anche ***(a+b)*** deve essere divisibile per ***11***.

Siccome pero` deve essere $(a + b) \leq 18$ (in quanto sono cifre, qundi minori di ***10***), allora l'unica possibilita` e` ***a+b=11*** e quindi $k^2 = 121$.

Gli unici numeri di due cifre per cui la somma delle cifre vale ***11*** sono:

29, ***38***, ***47***, ***56***, ***65***, ***74***, ***83***, ***92***.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Suppergiu` Platonicamente Perfetto [001]

Questa volta il problema non e` solo mio, in parte e` anche di Doc (sarebbe Piotr; ormai dovreste saperlo).

Anzi, i problemi sono "un po`".

1. Ogni tanto, oltre alle riunioni, ci sono anche delle telefonate noiose, e li` bisogna stare piu` attenti, ma uno vorrebbe fare qualcos'altro, almeno con le mani.
2. I frugoletti (miei e di Doc) stanno cominciando geometria.

3. Doc disegna quasi bene come il sottoscritto.

Bene, vi sfido a trovare un legame tra questi problemi, considerato che saranno l'argomento di questo PM e, sperabilmente, di qualcuno a venire. Proviamo a introdurre il concetto con una citazione. John Baez inizio` un articolo, parlando dei gruppi di simmetria, con le seguenti parole: "*Prendete, comprate, fatevi prestare, rubate un icosaedro...*". A prescindere dall'eticita` dell'ultimo consiglio, dove lo prendo un icosaedro? Lo sguardo del droghiere vi illumina immediatamente sul suo amore per la geometria, e ben che vada vi dice "Li ho finiti, ma domani passa il fornitore".

Il tentativo di disegnare venti triangoli equilateri uguali e poi di farli stare assieme con lo scotch si risolveva praticamente in una cosa che non avrebbe sfigurato come comparsa nel bar di Guerre Stellari, ma che ha ben poco a che fare con la geometria euclidea.

Beh, come si fa a costruire i solidi platonici?

Grande e` stata la mia felicita` quando ho trovato un modo (un po` meno quando di modi ne ho trovati due... Ma di questo parliamo un'altra volta) quasi-semplice e basato su qualcosa che conoscevo gia`. La prima idea era che non ve ne fregasse niente, ma forse sono riuscito a cavarci fuori qualcosa di divertente.

Sempre per parlare d'altro, parliamo d'altro.

Tempo fa, alcuni di voi (non vi diciamo chi) ci avevano scritto confessando, a proposito di alcuni problemi: "*Quando c'entra la geometria, vado in crisi...*". Beh, vi capisco; anch'io (l'unica persona tra di noi che si ritrovi a proprio agio con la geometria di qualunque ordine e grado e` Alice), comunque la cosa mi secca molto (parlo di me, non di voi); mi viene in mente la gente che sostiene che "*La matematica* (o la fantascienza, o la filosofia...) *non la capisco*". Tutte frottole, se mi permettete lo sfogo; se ve l'hanno spiegato male, anche il gelato al pistacchio diventa una cosa insopportabile...

Rudy, e questo cosa c'entra? Semplicemente, nel seguito troverete alcune parti in corsivo *da dimostrare*; dato che l'ambiente e` un po` diverso rispetto al solito piano euclideo, i metodi bisogna inventarseli di sana pianta; nonostante si trattasse di geometria, mi sono divertito da matti. In sostanza, si tratta di *dimostrare che le costruzioni sono corrette*.

Fine del prologo.

Spero vi ricorderete che i solidi platonici sono fatti di triangoli (tetraedro, ottaedro, icosaedro), di pentagoni (dodecaedro) e di quadrati (cubo - ma questo lasciamolo perdere).

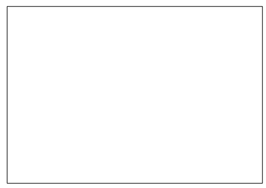
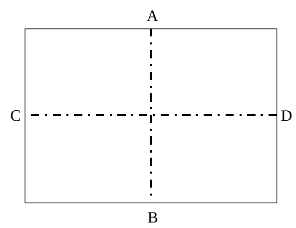
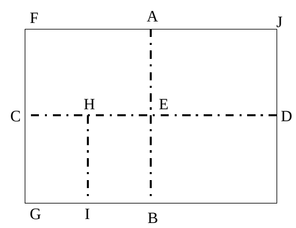
Scopo della prima parte del gioco e` costruirli attraverso l'***origami***.

Cominciamo con qualcosa di facile; per prima cosa, ci serve un aggeggio che sia in grado di formare delle facce triangolari. La grande idea e` quella di costruire un ***modulo*** (anzi due: uno speculare rispetto all'altro) che sia in grado di formare alcune facce.

In particolare possiamo dire che dal punto di vista strettamente pratico il nostro aggeggio definisca piu` di una faccia (piu` che altro per garantire una certa qual solidita`), mentre (visto che ci servono dei numeri pari di facce e la volta che ce ne servono di meno ce ne servono quattro), vorremmo ne definisse meno di tre.

Non credo sia un problema neanche per voi dedurre quindi che il nostro modulo debba essere in grado di definire ***due*** facce; da cui, spero ci arriviate a capire che ci serviranno due moduli per il tetraedro, quattro per l'ottaedro e dieci per l'icosaedro (oltre al cubo, lasciamo perdere anche il dodecaedro, OK? Ne parliamo la prossima volta, che li` si segue tutta un'altra strada).

Per prima cosa, procuratevi un numero abbondante (da ognuno ricaveremo un modulo, piu` le prove da buttare quando vi accorgete che avete sbagliato tutto, piu` quelli che mi servono per gli altri... diciamo una ventina, a occhio e croce) di fogli formato Ax (per $x<3$, sgombrate il salotto[6]). Poi cominciamo a piegare, ottenendo il corretto numero di moduli; di seguito, trovate la sequenza delle piegature necessarie per avere il modulo base bitriangolare[7] (*e, in corsivo, qualche interessante problemino*). Non fate caso ai numeri tra parentesi, servono a me per recuperare i disegni.

1	Partire da un foglio Ax (038_01).	
2	Piegare a meta` in verticale e riaprire (***AB***), piegare a meta` in orizzontale e riaprire (***CD***) (038_02)	
3	Piegare ***F*** su ***A***, ***G*** su ***B***, ***C*** su ***E*** in modo da ottenere ***HI***: serve solo la piegatura inferiore (038_03)	

[6] Allora, come dice il signor ISO:

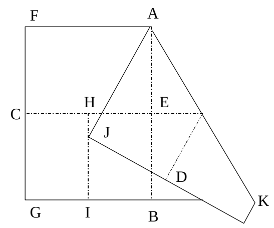
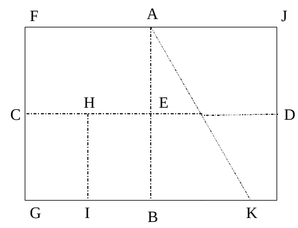
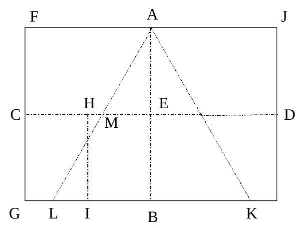
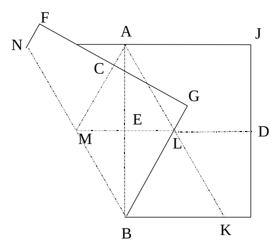
1. Le misure dei lati sono approssimate al millimetro.
2. A0 e` un metro quadro.
3. I lati sono in rapporto $1:\sqrt{2}$ (suppergiu`: mm+, mm-)
4. Quest'ultimo implica che se tagliate un formato (x) a meta` dei lati lunghi, ottenete un formato (x+1)

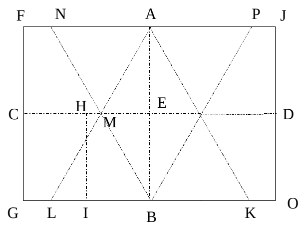
Caso mai questo non vi bastasse:

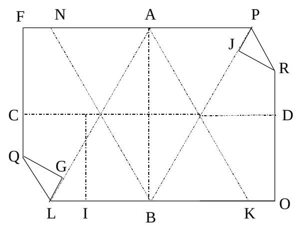
1. Il formato B(x) ha i lati che sono la media geometrica tra i lati corrispondenti delle serie A(x-1) e A(x)
2. Il formato C(x) ha i lati che sono la media geometrica tra i lati corrispondenti della serie A(x) e B(x)

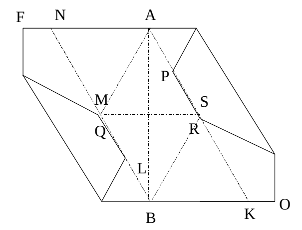
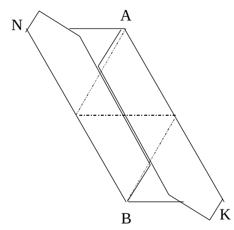
Tra l'altro, potete anche lavorare con dei "B" o dei "C". l'importante e` che siano imparentati con la radice di due.

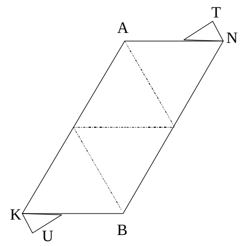
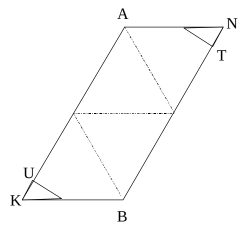
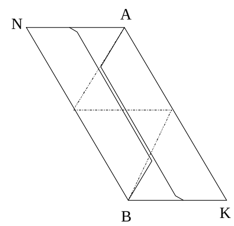
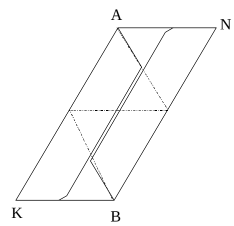
[7] Queste costruzioni sono opera di **Helena Verril**, facolta` di Matematica dell'Universita` di Hannover.

4	Portare il punto ***J*** su ***HI*** in modo tale che la piegatura passi per ***A*** ottenendo il punto ***K*** (038_04). *Quanto vale l'angolo* **BAK***?*	
5	Riaprire (il disegno e` di riepilogo) (038_05)	
6	Portando la linea ***AF*** su ***AK***, si ottiene la piegatura simmetrica ***AL***; riaprire. (038_06) *Non dovrebbe essere un problema dedurre il valore degli angoli* **KAL** *e* **LAF**.	
7	Piegare per ***B*** e per ***M*** (038_07) e riaprire. *In questa operazione, sono di aiuto i fatti che* **ML** *si porta sulla retta* **ED** *e che* **MC** *si porta sulla retta* **MA***; riuscite a dimostrarli?*	

<table>
<tr><td>8</td><td>Portare BO su BN, ottenendo BP; riaprire (038_08).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Portare GL su LA e JP su PB, ottenendo le piegature QL e RP e mantenendole (038_09)

Per ottenere i moduli speculari (si veda alla fine), iniziare da qui portando FN su NB e OK su KA.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Portare Q a coincidere con M e LQ sulla linea BM, mantenendo la piegatura. (038_10) e portare R a coincidere con S e PR sulla linea AS, mantenendo la piegatura.

Per ottenere i moduli speculari, le linee di riferimento sono AM per la prima operazione e BS per la seconda.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Piegare verso l'interno lungo le linee BN e AK, tracciate precedentemente (038_11)</td><td>
</td></tr>
</table>

12	Rivoltare (038_12)	
13	Piegare l'aletta ***U*** secondo la linea ***KB*** e l'aletta ***T*** secondo la linea ***NA*** (038_13).	
14	Rivoltare; questo e\` il ***Modulo Base Triangolare 1 (MBT1)*** (038_14).	
15	Lo speculare e\` il ***Modulo Base Triangolare 2 (MBT2)*** (038_15)	

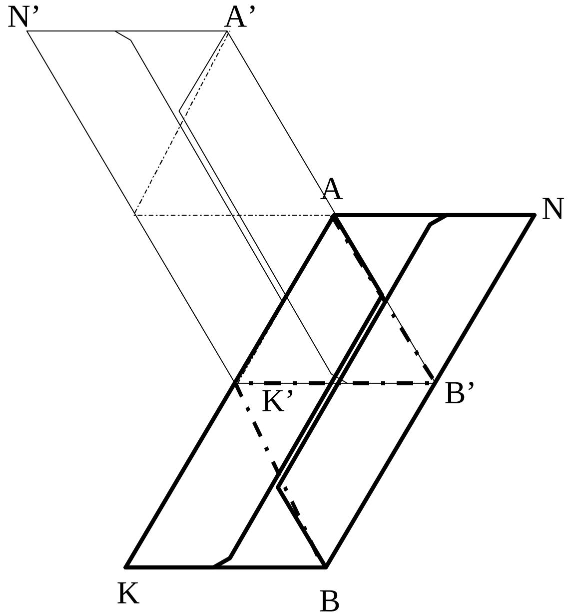
...La prima cattiva notizia e\` che per l'icosaedro di questi aggeggi ve ne servono dieci; per il momento, limitiamoci a due (di diversa parita\`) e incrocchiamoli in qualche modo.

Se avete notato, i nostri moduli hanno una parte "liscia", che sopra abbiamo visto al passo 13 (piu\` o meno: ci sono le orecchie in ***K*** e ***N***) e sono formati da quattro triangoli equilateri. Le costruzioni utilizzano *solo i due triangoli centrali* come facce dei solidi, gli altri due servono come orecchie da incastrare nel retro degli altri moduli.

Per quanto riguarda il tetraedro, l'incastro e\` una cosa del tipo indicato qui da qualche parte (come sempre, problemi con Word).

In sostanza, il nostro aggeggio si incastra con la punta ***B'*** nella falda dello speculare (***B'*** risulta all'interno, ***K'*** all'esterno).

Successivamente, ***AN*** si incastra in ***AA'*** (portando ***AB'*** a coincidere con ***AA'***) e a questo punto meta` del lavoro e` fatto; il prossimo incastro "chiude" il tetraedro. Rudy, ma ci resta un'orecchia fuori! Beh, quella va incastrata all'interno. Non e` facile, tant'e` che io[8] uso, per far stare assieme il tutto, del nastro biadesivo sulle orecchie (ho provato con la colla, ma e` molto piu` scomodo; consigliato quello sottilissimo e leggerissimo, e a questo punto un curapipe e` una meraviglia per schiacciare "dal di dentro").



Voglio sperare che, appena costruito il tetraedro, vi lanciate entusiasti nella costruzione degli altri solidi; beh, qui non sperate mi metta a fare i disegni; e` terribile, soprattutto se si cerca di essere un minimo chiari. Cerchero` di cavarmela con una tabella (che finira`, come al solito, chissadove...).

Per l'ottaedro, si tratta di arrivare a due supermoduli uguali, a forma di piramide (a base quadrata) con due ali che fanno da paraorecchie di fianco (come i colbacchi della Mongolia, avete presente?); quindi, bisogna incastrare le orecchie dell'uno nelle falde (dove non ha le orecchie) dell'altro. Anche qui il biadesivo aiuta, ma a me non viene mai molto bene.

Modello	**MBT1**	**MBT2**	**Note**
Tetraedro	1	1	
Ottaedro	2	2	Possono essere anche tutti dello stesso tipo
Icosaedro	5	5	Quelli dello stesso tipo vengono incastrati tra loro (lasciando due triangoli di "ali") chiudendoli (in questo modo diventa 3D) e poi incastrando i due supermoduli tra di loro.

Per l'icosaedro, e` probabilmente piu` facile farlo che dirlo (e farlo e` complicato). In sostanza, vi trovate cinque moduli incastrati uno nell'altro, tutti piu` o meno passanti per il punto ***K'*** della figura precedente; se ne incastraste un altro sempre nello stesso modo (non fatelo), ***K'*** sarebbe il centro di un esagono. A questo punto chiudete una delle orecchie nella falda dove avreste dovuto mettere il sesto modulo (qui, piu` che la colla, consiglio la saldatrice); a questo punto, se girate il tutto, dovreste riuscire a riconoscere un vertice dell'icosaedro. Stessa cosa sull'altro supermodulo, e poi i due aggeggi vanno incastrati tra di loro.

Attenti a non restare chiusi dentro...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[8] Origami fans: ***FLAME ON!!!*** Lo so, non bisognerebbe, ma al momento a me interessa la geometria, non la filosofia giapponese.