Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 044 - 2002-09

1. Editoriale

Voglio sperare siate rientrati tutti dalle fatiche estive, anche perche` altrimenti sarei invidioso.

Come anticipato qualche tempo fa, a Glasgow ci sono state le Olimpiadi Internazionali della Matematica; nella classifica per nazioni, l'Italia e` arrivata trentatreesima (con cinque medaglie di bronzo); un buon risultato tutto sommato, visto che l'anno scorso si era cinquantesimi.

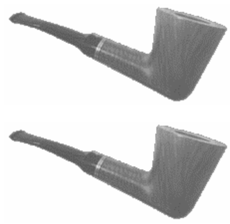
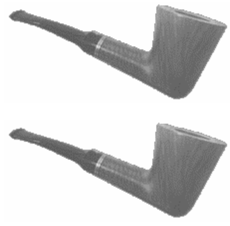
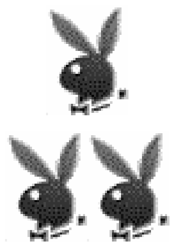
Quest'anno, il materassino, siete riusciti a gonfiarlo?

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	Alice Riddle	Piotr R. Silverbrahms
La Roulette Generosa			
Pregasi Generalizzare			

2.1 Roulette Generosa

Qualcuno di voi mi ha chiesto l'indirizzo del Casino` dell'offerta speciale dell'altra volta; questo mese, ne hanno inventata un'altra.

L'offerta, questa volta, e` di rifondervi ***meta`*** delle vostre perdite, purche` voi giochiate solo sul rosso o sul nero.

La ruota e` americana standard, con lo zero e il doppio zero (non colorati, quindi qualsiasi cosa giochiate perdete, quando escono) oltre ai trentasei numeri colorati, e paga "alla pari".

Inoltre, vi viene richiesto di giocare la stessa cifra ogni volta.

Quante volte dovreste giocare, per massimizzare il guadagno atteso? (Excel verso la fine, anche se sarebbe meglio un programmino... *deterministico*[1], pero`...)

2.2 Pregasi Generalizzare

Il titolo e` questo perche` l'originale usava ***1*** anziche` ***X.***

Dunque, cerchiamo di trovare un'ambientazione adatta al caldo della stagione.

Avete presente quei pub ombrosi, con la birra fresca, la tranquillita` "british" del dopo-ufficio, il gioco delle freccette (insomma, l'esatto contrario del *mare sudoris* in cui mi trovo io adesso)?

Bene, cercate di tenere presente almeno le freccette; come sapete, quando io e Doc prendiamo in mano strumenti del genere e miriamo ad un qualsiasi punto diverso dal bersaglio, un generatore di numeri casuali uniformi e` un ottimo simulatore (e a parte il fuggi-fuggi iniziale, il pub diventa tranquillo come un deserto).

Se ***X*** e` il massimo punteggio ottenibile con un tiro, qual'e` il numero atteso di tiri prima di raggiungere o superare ***X***?

[1] Nel senso che mi e` venuta fuori una robaccia che ho preferito scrivere un proogrammino (in *C*) e vedere i risultati.

Ammessi i decimali[2] (ho detto i decimali, non Excel), anche perche` con certi miei tiri sarebbe meglio fare un tre per uno, cosi` arrivo ad un punteggio decente.

3. Bungee Jumpers

Dimostrare che nel primo miliardo di termini della serie di Fibonacci, almeno uno termina con quattro cifre zero.

4. Soluzioni e Note

Prima una piccola nota: andrebbe in PM, ma questa parte della rivista e` quella maggiormente dedicata alle interazioni con i lettori, quindi...

PuntoMauPunto fa notare in una sua mail che nello scorso PM mi riferisco al "vecchio" calendario greco-ortodosso, e ci dice che "*...e` ancora in uso. Gli anni centenari sono bisestili quando il "secolo" diviso per* **9** *da` resto* **2** *oppure* **6**. *'Casualmente' il* **2000** *e il* **2400** *sono bisestili, la prima differenza ci sara` tra il* **2800** *e il* **2900**".

Non conoscevo la formuletta, grazie (non mi sogno neanche di giustificarla). Quando parlavo del "vecchio" calendario mi riferivo ad un fatto probabilmente correlato con il tuo "Casualmente". Visto che per un po` di tempo le cose continueranno a coincidere, ci si e` messi d'accordo (nel 1923, mi pare, ma non garantisco) su alcune festivita` "comuni"; prima, i calcoli erano decisamente piu` complicati (e davano risultati diversi). Grazie ancora per la formula.

4.1 [042]

E` una grande emozione, per me, scrivere qui un numero che non sia semplicemente il numero precedente... Era un bel po` che non succedeva.

4.1.1 Cisleuthania e Transleuthania

Logicamente, ***PuntoMauPunto*** non ci ha scritto il "pezzo" promesso. Fortunatamente e` intervenuta un po` di gente.

Cominciamo da una delle ultime cose che, come sempre nei miei discorsi, non c'entra niente. Doc, tirando in ballo solo Philip Roth, I libri regalati dai giornali e una scrittura leggermente diversa (Leitania) e` riuscito finalmente a trovare i due posti e devo dire che la mia vista deve essere decisamente calata per non averli visti; infatti, sono piuttosto "grossini". Facciamo parlare lui, che e meglio:

...ho cosi` scoperto che non erano staterelli dell'impero austroungarico, ma erano l'impero austroungarico tout court. La duplice monarchia era a volte idealmente suddivisa in Cisleithania (la zona occidentale, legata alla parte austriaca) e Transleithania (parte orientale, figlia di Budapest e ungherese)[3]*.*

Insomma... la Leitha e` un piccolo fiumiciattolo poco ad Est di Vienna, e dava la "direttrice" di separazione delle due zone dell'impero dell'aquila bicipite. La mia enciclopedia aggiunge che il "confine" (se mai di confine si puo` parlare) attribuiva Trieste alla Cisleithania e Fiume (Rijeka) alla Transleithania. Insomma, spaccava l'Istria in due. Quindi, l'attacco via mare e` possibile....

Insomma, i miei due "staterelli" si mangiavano mezza Europa. Unica consolazione: parlare di von Klausewitz non era proprio una bufala...

[2] Qui Doc inserisce una nota: "Per 'decimali' si intende che il punteggio e` uniformemente distribuito tra zero e 'X'"

[3] Sfoggio anch'io un po` di cultura, si? Mica tanto "idealmente": davanti a qualsiasi cosa statale, ci scrivevano sempre "imperial-regio" (o, se preferite il tedesco, "Koeniglische und Kaiserlische" -sono sicuro di averlo scritto sbagliato, abbreviato **K.u.K.**). Se passate da Vienna, il "cuc" lo trovate da tutte le parti: insomma, l'Impero Austriaco e il Regno di Ungheria erano due aree distinte anche amministrativamente.

Come anticipato, la prima soluzione (arrivata quando RM043 era gia` in macchina) e` di ***Teo***; il quale, partendo dalla premessa di non sapere nulla di calcolo delle probabilita` riesce per via intuitiva a (re-)inventare il concetto di probabilita` totale. Complimenti (parlo sul serio, una volta tanto), ma questo risolve solo la *prima meta`* del problema.

In soccorso di Teo (e di quello sfaticato di PMP: "bravino" te lo dico dopo) e` arrivato fortunatamente Doc, che ha scritto il suo solito trattatello. Ve lo passo tale e quale, senza neanche tradurre le formule (pigropigropigro...).

Non so quale sia il modo piu` semplice di affrontare il problema. La sensazione e` la solita, quella di un problema con "feedback", analogo a quello dei negozi su strada circolare. La strategia di un giocatore influenza quella dell'altro. E con le strategie e il feedback non mi ci trovo... quale caspita di disciplina matematica studia sta roba? La teoria dei giochi? Fammelo sapere, cosi` la evito.

Parto da alcuni presupposti, che ritengo ovvi; il piu` importante e` il seguente: ***"Qualsiasi cosa deducano logicamente i generali della Cisleuthania e` parimenti deducibile anche dai generali della Transleuthania"****, che in fondo non e` altro che la solita asserzione sui "logici perfetti" dei vari giochi con cappelli di diverso colore.*

Detto ciò, si parte con alcune deduzioni "a prescindere dal feedback".

I Cisleuthani (Cis nel seguito) ragioneranno inizialmente così:

Abbiamo certezza di vincere se i Trans (oddio... vabbe`, inutile precisare troppo, si rischiano ancora piu` danni) "sbagliano la difesa". Se invece attuano la difesa "giusta", abbiamo l'80% di probabilita` di vittoria per un attacco via mare e il 60% per uno via terra.

Le due probabilita` di successo (dal punto di vista dei Cis) sono quindi date da:

```
Mare  = (0.5)x(1.00) + (0.5)x(0.8) = 0.90
Terra = (0.5)x(1.00) + (0.5)x(0.6) = 0.80
```

E la totale da:

```
Totale = (0.5)x Mare + (0.5)x Terra = 0.85
```

Attention, please. Ci sono ben sei "0.5" che bisogna studiare: i primi due (quelli che fanno da parametri nella probabilita` "Mare") stanno a significare: "supponiamo che ci sia il 50% di probabilita` che i Trans azzecchino la difesa, e il 50% che la sbaglino", e i secondi due significano esattamente la stessa cosa per la probabilita` "Terra". Gli ultimi due invece significano "... e tiriamo in aria una moneta per decidere se attaccare via Terra o via Mare".

Ma queste sono tutte cose arbitrarie... il giovane colonnello (Cis)Klausevitz fa notare che se invece di tirare la moneta attaccano via mare senza farsi troppi problemi, il calcolo diventa:

```
Totale = (1.0)x Mare + (0.0)x Terra = 0.90
```

Con un bell'incremento del 5%.

La fregatura e` che lo stesso ragionamento lo possono fare i Trans (feedback!) e il loro generale (Trans)Klausevitz arriva graziosa conclusione che i Cis attaccheranno sicuramente via Mare, e pertanto ordinera` che i Trans si difendano "per certo" proprio da un attacco via mare... quindi, il calcolo completo, "ab ovo", ridiventa:

```
Mare  = (0.0)x(1.00) + (1.0)x(0.8) = 0.80
Terra = (0.0)x(1.00) + (0.0)x(0.0) = 0.00
```

E la totale:

```
Totale = (1.0)x Mare + (0.0)x Terra = 0.80
```

E ciò significa che, anziché guadagnare un 5%, i Cis lo perdono.

Questo "primo livello" del ragionamento mostra sostanzialmente due cose; la prima e` che il GC aveva ragione quando nel testo dice "e` abbastanza ovvio che la strategia migliore e` quella di scegliere a caso"... tsè. Sara` stato ovvio per te, GC. Io ci arrivo solo adesso.

La seconda cosa e` invece che quegli "0.5" di cui sopra non solo non bisogna prenderli alla leggera, ma sono interdipendenti; variare uno di essi comporta variazioni sugli altri. Il caso proposto dal colonnello Cisklausevitzon e` ovviamente un "estremo", che fa precipitare i parametri da 0,5 a 0,0 (impossibilita`) o ad 1.00 (certezza), ma anche una variazione meno decisa ha sicuramente implicazioni retroattive e reciproche.

Mi sa che bisogna cambiare notazione... Chiamiamo $\boldsymbol{P_{(m)}}$ *quella che prima abbiamo chiamato verbosamente "Mare" e* $\boldsymbol{P_{(t)}}$ *quella che prima era la "Terra". Sia poi* $\boldsymbol{P_{(tot)}}$ *la "Totale" (Btw, e` proprio la probabilita` di accorciare le targhe).*

Per i pesi... uff. Diciamo di chiamarli così:

```
Difesa Mare Giusta  = Dmg
Difesa Mare Errata  = Dme
Difesa Terra Giusta = Dtg
Difesa Terra Errata = Dte
```

E gli ultimi due:

```
Scelta Attacco Mare  = Sam
Scelta Attacco Terra = Sat
```

Le formulette di cui sopra, riscritte:

$$P_{(m)} = Dme + 0,8\ Dmg$$

$$P_{(t)} = Dte + 0,6\ Dtg$$

E quindi:

$$P_{(tot)} = (Sam)P_{(m)}+(Sat)P_{(t)}$$

Adesso... tutto in una riga sola:

$$\mathbf{P_{(tot)} = (Sam)(Dme + 0,8\ Dmg)+(Sat)(\ Dte + 0,6\ Dtg)}$$

Si notino le seguenti banalita`:

$$Dmg + Dme = 1$$

$$Dtg + Dte = 1$$

$$Sam + Sat = 1$$

...e fin qui abbiamo scoperto l'acqua calda.

Adesso occorre "formalizzare" il concetto di feedback...

*Il punto cruciale e` che la scelta **Sam** (o della complementare Sat) impatta su Dmg e Dme. E, siccome i Cis e i Trans sono logici perfetti, può impattare solo in relazione diretta!*

*Questo implica la fondamentale "**assunzione di feedback**", ovvero che sia:*

$$\mathbf{Sam = Dmg = Dte}$$

E poiché le altre variabili sono tutte "complementi a 1" di queste tre, i sei parametri sono ridotti ad uno solo.

Fissato Sam (anche perché e` l'unico con un nome umano) (Ssst! Ha detto che voleva riposarsi, non fare rumore [RdA])*, avremo:*

$$Sam = x$$
$$Dmg = x$$
$$Dte = x$$
$$Sat = (1-x)$$
$$Dme = (1-x)$$
$$Dtg = (1-x)$$

Con x reale e continua definita solo nell'intervallo (0,1). Uh, come parlo difficile... E allora la P(tot) di cui sopra diventa:

$$P_{(tot)} = (x)((1-x) + 4/5\ x)+(1-x)(\ x + 2/5\ (1-x))$$

Che, semplificata, mi risulta essere:

$$P_{(tot)} = (1/5)(-3x^2 + 4x + 3)$$

Credo sia la prima volta che trovo per RM una funzione che so derivare... incredibile.

Derivo rispetto a x e pongo a zero la derivata per massimizzare la P(tot):

$$-6x + 4 = 0$$

che mi sfodera un bellissimo

$$x_{max} = 2/3$$

La $P_{(tot)max}$ e\` allora:

$$P_{(tot)max} = 13/15$$

*Appena finito di leggere il rapporto del matematico di corte, il generale Cisleuthano dette all'attendente la moneta con cui era solito tirare a "testa o croce" dicendogli: "vammi a comprare un dado. Il giorno **X** lo tireremo, e se viene un numero superiore a due attaccheremo via mare, altrimenti via terra. Aumenteremo cosi\` le nostre probabilita\` di vittoria di ben l\` 1,66667 %". Nello stesso momento, il comandante Transleuthano stava chiedendo in prestito al figlio minore il dado con cui giocava al gioco dell'oca: "Te lo rendo a guerra finita, Deszo[4]: ma mi servira\` per decidere se difendermi via terra o via mare... se viene 5 o 6, ordinerò la difesa terrestre".*

Il giorno X-1, la superpotenza di turno le fece secche tutte e due con un attacco aereo.

Strano... I film sulla Principessa Sissi finivano sempre bene.

4.2 [043]

Dunque, veniamo alle cose serie (qualunque cosa di cui Doc scriva due pagine, cessa di essere seria).

Avevo detto che erano facili, quindi abbiamo avuto svariate soluzioni.

4.2.1 Il codice dell'armadietto

Un mucchio di gente ha mandato la *risposta*, ma poche *soluzioni*... OK, era facile, siamo d'accordo.

La prima risposta arriva da ***PuntoMauPunto*** che "da\` i numeri" e fa notare come la parte di Doc riesca comunque a ridurre il numero dei tentativi da sei a quattro. Vero,

[4] Qui Doc usava un altro nome, ma ho un amico ungherese che legge l'italiano e odia la matematica. Non lo leggera\` mai, quindi mi pare corretto tirarlo in ballo.

effettivamente Doc non e` che faccia proprio *niente*... Ogni tanto qualcosa lo fa. Che poi sia giusto e utile, e` tutto un altro paio di maniche.

La piu` stringata arriva da ***Capitan Strambo*** (ciascuno ha i nickname che si merita: non fate domande) che si limita ad un "*Se le cifre sono* **1**, **2**, **7**, *allora il problema e` proprio da 'Getting Started'!"*. Vero, tant'e` che lo metteremo li`. Doc promette di trovarne altri per questa parte del sito, ma da quando gli abbiamo lasciato posare la prima pietra (leggasi il tormentone del mattonepiumezzomattone) si ritiene soddisfatto.

Fortunatamente, arriva ***Lux*** che tanto per cominciare ci lancia un paio di maledizioni, tipo "*volete combattere l'analfabetismo matematico di ritorno? E allora vi beccate quelli come me*". Lux, fossero tutti come te i lettori di RM... Alcuni che non staremo a nominare non sono neanche partiti, figurasi a tornare, dalla Matematica.

Procede quindi con un'analisi molto carina: "*Doc sa che la combinazione è il prodotto di due numeri consecutivi, triplicato, più uno. Operazione che deve dare per forza un numero dispari*". Infatti, delle sei combinazioni possibili, le due che non vengono considerate sono quelle che forniscono un risultato pari.

Indi, "*Qui l'aspirante aritmetico cede il posto al collaudato ignorante, che si siede al computer e lancia Mariner Calc*" che, a quanto pare, e` il cugino meno famoso di Excel.

Facendo i calcoli per gli opportuni "***n***" si vede che forniscono tre cifre solo quelli minori di ***18*** (Lux considera gli opportuni zeri iniziali, per avere numeri di tre cifre) e a questo punto non c'e` storia, basta guardare quali cifre compaiono piu` sovente.

La parte piu` interessante, comunque, e` un'espansioncella che ci viene proposta da Lux: "*Soprattutto, tra noi, perché non passare a una combinazione a quattro cifre? Con Mariner Calc ho un po' esagerato e potrei fare bella figura, invece di risultare tonto da subito... ma non sarebbe sicura per niente, la combinazione; Doc e Alice ci metterebbero insieme non piu` di sei tentativi... con le cifre 0, 1, 2 e 7. Le stesse di prima piu` lo zero. Sigh. Con cinque e più cifre ci si metta qualcuno che sa usare Perl. Io sono ignorante anche lì.*"

Si butta un po` giu`, il ragazzo, ma la stoffa non manca.

4.2.2 I quadrati attorno

Qui, c'e` da dire, non vi siete lamentati che fosse troppo facile. Comunque, una volta tanto diamo ragione a Doc: lui sostiene che ogni mia frase dovrebbe cominciare con "Fatemi parlare del mio argomento preferito: ***me***".

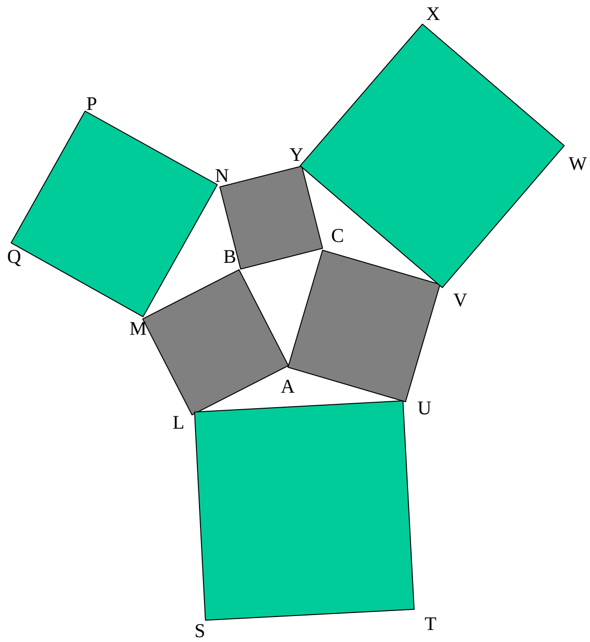
Se andate a rivedervi le valutazioni del problema, vi accorgete che quello di Alice e` scandalosamente bassa; se, colti da un dubbio, provate a fare un po` di analisi sui problemi precedenti, vi accorgete che io considero decisamente pesanti (e Alice "facili e divertenti") tutti i problemi in cui e` coinvolta una qualche applicazione di trigonometria.

Vero, ad Alice piace (e la conosce bene) mentre io se ci riesco preferisco evitarla[5].

Pochi minuti dopo l'invio delle bozze da correggere del numero 044, mi arrivava la soluzione di Alice (*inter nos*, consideriamo questo come il momento di presentazione del problema: solo chi lo ha scritto e` interdetto dal mandare la soluzione). In brevissimo tempo rispetto alla pubblicazione, arrivavano poi le soluzioni di ***PuntoMauPunto***, di ***Filippo*** e di ***Teo***, praticamente tutti e quattro (effettuando l'opportuno shift per il tempo di Alice) a pari merito. Tutte le soluzioni sono corrette e tutte sono molto chiare; piccolo guaio: sono *uguali alla mia*!

Infatti, tutte quante quante si basano sut *Teorema del coseno*, esattamente come la soluzione che (*molto* faticosamente) avevo trovato io. La mia speranza era che trovaste un qualcosa di piu` "geometrico", se posso dire... Complimenti comunque (almeno da parte di

[5] Sia detto per inciso (e per rivalsa): i ruoli si invertono quando si parla di Teoria della Probabilita`.



quelli cui non piace la trigonometria). Spero non vi spiaccia se uso la mia copia (gia` paginata); in particolare a *Teo*, che conclude la sua mail con un *"per il tempo che ho impiegato a fare tutti gli apici, a scrivere le lettere greche e a fare il disegno*": gli apici sono una meraviglia, le lettere greche nelle formule sono elegantissime (*PMP si limita ad uno stringato "/gamma" e sottolinea il fatto che ha saltato pranzo, per passarci la soluzione. No, non ci sentiamo in colpa. Io il pranzo lo salto dal lunedi` al venerdi`, quindi non vedo il problema)*, il disegno e` bellissimo... Pero` le lettere greche nel disegno ricordano i miei primi patetici tentativi di quattrenne con una stilografica[6]. Tutte le lettere sono state pazientemente tracciate col mouse. Teo, non per criticare (apprezziamo lo sforzo) ma... E provare con PowerPoint?

Bene, prima la soluzione. Parliamo dopo delle "cose in piu`".

Diamo un po` di nomi alle cose, altrimenti non e` divertente (e anche cosi`, francamente...).

Di fianco, avete la figura con i nomi.

Inoltre definiamo (no, non ve li metto in figura; e` gia` abbastanza incasinata cosi`) un po` di incognite:

$$\begin{cases} \overline{MN} = x_1 \\ \overline{YV} = x_2 \\ \overline{LU} = x_3 \\ \overline{AC} = x_4 \\ \overline{AB} = x_5 \\ \overline{BC} = x_6 \end{cases}$$

No, non e` finito qui. Definiamo anche qualche angolo (sorry, il simbolo fa schifo... Formula Editor non permette giochini).

$$\begin{cases} \angle MBN = a \\ \angle LAU = b \\ \angle VCY = g \end{cases} \quad \begin{cases} \angle BAC = A \\ \angle ABC = B \\ \angle ACB = C \end{cases}$$

Dalla legge della somma degli angoli in un triangolo e dal fatto che i quadrati sono formati da angoli retti, si ha:

[6] Per quelli che non lo sanno ancora: sono mancino e ho imparato a scrivere con una stilo "diplomatica" quasi piu` grossa di me. Il bagno era un imperativo categorico, dopo tre righe.

$$\begin{cases} a + b = p \\ b + A = p \\ g + C = p \end{cases}$$

*E la **legge del coseno** sostiene che e`:*

$$\begin{cases} x_1^2 = x_5^2 + x_6^2 - 2 * x_5 x_6 \cos a \\ x_2^2 = x_4^2 + x_6^2 - 2 * x_4 x_6 \cos g \\ x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 - 2 * x_4 x_5 \cos b \end{cases} \qquad \textbf{[001]}$$

E per lo stesso motivo si ha che e`:

$$\begin{cases} x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 - 2 * x_5 x_6 \cos B \\ x_5^2 = x_4^2 + x_6^2 - 2 * x_4 x_6 \cos C \\ x_6^2 = x_4^2 + x_5^2 - 2 * x_4 x_5 \cos A \end{cases} \qquad \textbf{[002]}$$

*Dalla **[002]**, sommando si ha che e`:*

$$\begin{aligned} x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 &= 2 * x_4 x_5 \cos A + 2 * x_5 x_6 \cos B + 2 * x_4 x_6 \cos C = \\ &= -2 * x_4 x_5 \cos b - 2 * x_5 x_6 \cos a - 2 * x_4 x_6 \cos g \end{aligned} \qquad \textbf{[003]}$$

*Equivalentemente, dalla **[001]** si ha:*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = {} & 2 * \left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right) \\ & - 2 * x_4 x_5 \cos b - 2 * x_5 x_6 \cos a - 2 * x_4 x_6 \cos g \end{aligned} \qquad \textbf{[004]}$$

*E, usando la **[003]** (seconda forma) si ha:*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 2 * \left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right) + \left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right) = \\ &= 3 * \left(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right) \end{aligned} \qquad \textbf{[004]}$$

*Ossia, **la somma dei triangoli esterni e` tre volte la somma dei triangoli interni**.*

Sorry, ma a me la trigonometria non piace molto. Al primo pomeriggio piovoso, provo a rivedermela.

Comunque, siete stati bravi, lo riconosco (il particolare *Teo*, che ha fatto un ottimo disegno e *PMP*, che ha risolto il problema parlando d'altro, come detto sopra). L'unico pero` che ha provato ad andare un po` avanti e` stato *Filippo*, il quale ha mostrato che la dimostrazione del teorema e` immediata se il nostro triangolo si riduce ad un segmento (con il lato maggiore coincidente e uguale in lunghezza alla somma dei due lati minori. Il Nostro si chiede se *si possa generalizzare questo modo di procedere per altri problemi geometrici*. Filippo, francamente... piu` che tagliare con i campi, questo mi pare come togliere una carie col martello pneumatico. Qualcuno vuole provare a pensare quando, questi "passaggi al limite", sono giustificati?

Posto che vi interessi, comunque, i triangoli piu` grandi formati dai quadrati, si chiamano "fianchi" (flanks, per gli anglofoni), e hanno una serie di interessanti proprieta` geometriche: per dirne una (dimostratevela voi), unite i centri di due quadrati opposti (uno verde e uno grigio), poi misurate i tre segmenti. Di questo (ed altre proprieta`) ho purtroppo solo l'elencazione. Se pero` volete, vi passo l'articolo (in inglese). Chidetelo via mail, posto che interessi.

5. Quick & Dirty

Q: Sul vostro ufficio c'e` scritto : "***S***postamento ***P***ietroni s***Q***uadrati - ***R***esponsabile", e il vostro lavoro e` muovere i blocchi per la costruzione delle piramidi dalla cava al sito; causa pero` uno sciopero dei Levitatori Telecinetici, non e` possibile fare nel solito modo.

Ad un tratto, avete la luminosa idea di piazzare dei rulli sotto i pietroni e di far rotolare il tutto.

Se i rulli hanno un raggio di ***2*** cubiti, quanta strada fara` il macigno in un giro di rullo?

6. Pagina 46

Certe volte, se c'e` piu` roba e` piu` facile...

Consideriamo una serie di Fibonacci in modulo con un primo termine in piu`:

$$F_i = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad i = 0 \\ 1 & \text{se} \quad i \in \{1,2\} \\ \langle F_{i-2} + F_{i-1} \rangle_{10000} & \text{se} \quad i > 2 \end{cases}$$

In cui e stato aggiunto un primo termine zero e i termini generici sono considerati modulo diecimila; avendo aggiunto un termine, il problema puo` essere riformulato come *tra i primi 1000000001 termini di questa serie almeno due valgono zero*; uno e` il valore cercato, l'altro e` il primo termine.

Supponiamo esistano ***n*** e ***k*** per cui:

$$F_k = F_{n+k} \text{ e } F_{k+1} = F_{n+k+1}$$

allora possiamo ricavare che:

$$\begin{aligned} &F_{k-1} = F_{n+k-1} \\ &F_{k-2} = F_{n+k-2} \\ &\ldots \\ &F_0 = F_n \end{aligned}$$

ma poiche` $F_0 = 0$, si ha $F_n = 0$ e quindi *nell'ipotesi suindicata l'***n***-esimo termine della serie originale termina con quattro zeri.*

Ora si tratta di dimostrare che tra le coppie:

$$\begin{gathered} [F_0, F_1] \\ [F_1, F_2] \\ \ldots \\ [F_{999,999,998}, F_{999,999,999}] \\ [F_{999,999,999}, F_{1,000,000,000}] \end{gathered}$$

ne esistono almeno due uguali.

Ognumo dei numeri appartenenti alle coppie e` compreso nell'insieme ***{0, 1, 2, ..., 9998, 9999}***, composto di $10^4$ elementi; e` quindi possibile ricavare $10^4 * 10^4 = 10^8$ coppie diverse; ma essendo le coppie $10^8 + 1$, *almeno due coppie saranno uguali*[7]

7. Paraphernalia Mathematica

7.1 Se gioca Markov, non c'e` sugo!

Siccome per qualcuno (me) l'argomento e` noiosetto, cominciamo con un giochino; non proprio una meraviglia, ma Alberto e Fred si sono divertiti un mucchio, fornendomi anche una buona base dati.

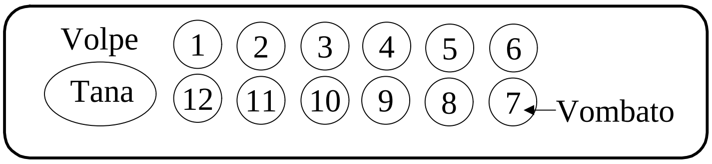
Allora, per prima cosa vi servono un tavoliere come quello indicato qui da qualche parte, un dado a sei facce, una volpe e un vombato[8] (agilmente sostituibili da due monetine diverse).

Allora, regole del gioco.

Si tira il dado; se il risultato e` ***1***, ***2***, ***3*** o ***4*** muove il Vombato, dell'opportuno numero di caselle; se il risultato e` ***5*** o ***6*** muove la Volpe, sempre dell'opportuno numero di caselle.

Il Vombato vince se arriva alla ***Tana*** (anche superandola, se e` il caso), la Volpe vince se raggiunge o supera il Vombato.

Giusto per capirci, visto che dal disegno puo` non essere chiaro: se facciamo ***5***, la Volpe va in ***5***; se facciamo ***2***, il Vombato va in ***9***: insomma, la Volpe parte dalla casella ***0*** e il Vombato dalla casella ***7***.



Non molto appassionante, in effetti; la cosa divertente, trovo, e` che non si sa mai "a chi tocca" sin quando non si tira il dado e che il Vombato si muove piuttosto placidamente, mentre la Volpe corre veloce ma e` svantaggiata dalla distanza e dal muovere piu` raramente.

Stato	**Note**
(0,7)	Devo ancora tirare il dado
(0,8)	Ho fatto 1 e muove il Vombato
(0,9)	Ho fatto 2 e muove il Vombato
(0,10)	Ho fatto 3 e muove il Vombato
(0,11)	Ho fatto 4 e muove il Vombato
(5,7)	Ho fatto 5 e muove la Volpe
(6,7)	Ho fatto 6 e muove la Volpe

Spero abbiate ormai imparato che prima di scommettere, pero`, sarebbe bene farci un'analisi.

Cominciamo con l'analizzare quali siano le situazioni ***possibili*** del gioco; e` abbastanza evidente che dalla posizione iniziale, indicata sopra, dopo il primo tiro potro` trovarmi in un certo numero di condizioni; per prima cosa, definiamo lo ***stato*** del gioco come ***(x,y)***, indicando con questo che la Volpe e` nella casella marcata ***x*** e il Vombato in quella marcata ***y***.

Allora, all'inizio siamo in ***(0,7)*** e si tira il dado; in funzione del risultato, la situazione diventa una di quelle listate qui di fianco.

---

[7] Caso mai vi interessasse, il settemilacinquecentesimo numero della serie di Fibonacci termina con quattro zeri; in merito, esiste una dimostrazione di *Dynkin*, ma lavorando in modulo ci si arriva abbastanza facilmente con Excel... Se trovate la dimostrazione, potete passarmela?

[8] Per questo, chiedete a Paolo, il nostro lettore piu` lontano; trattasi di un piccolo marsupiale australiano, simbolo dell'Australia dell'Ovest, che si nutre principalmente di formiche (Paolo, sai mica il nome scientifico?)

In realta`, e` piu` comodo listare ***tutti*** gli stati, considerando le possibilita` di passaggio da uno all'altro; sappiamo che, data una certa posizione, ci saranno solo ***sei*** possibili cambi di stato (no, stavolta non ho il dado "matto"); sembrano tante, ma bisogna considerare che tutte le posizioni dell'insieme $\{(x,y): x \geq y\}$ sono uno stato solo (la vittoria della Volpe), cosi` come tutte quelle per cui $\{(x,y): y \geq 13\}$ sono la vittoria del Vombato.

Il risultato e` indicato qui da qualche parte (solite rogne con Word, sorry...)

E` abbastanza chiaro, si? Ci tengo a sottolineare che si tratta di ***stati***, non di un albero di gioco; la volpe puo` fare ***5*** o ***6***, quindi puo` finire solo nelle case ***5***, ***6***, ***10***, ***11*** (la ***12*** non e` considerata perche` o ha superato il Vombato o il Vombato ha gia` vinto).

No, il grafo di stato non ve lo faccio; viene una cosa incasinatissima, e poi c'e` di meglio.

Simbolo	**Stato**
a	(0,7)
b	(0,8)
c	(0,9)
d	(0,10)
e	(0,11)
f	(5,7)
g	(6,7)
h	(5,8)
i	(5,9)
j	(5,10)
k	(5,11)
l	(6,8)
m	(6,9)
n	(6,10)
o	(6,11)
p	(0,12)
q	(5,12)
r	(6,12)
s	(10,11)
t	(10,12)
u	(11,12)
v	(vince il Vombato)
w	(vince la Volpe)

Cataloghiamo gli stati e definiamo in una matrice qual'e` la probabilita` di partire da uno stato e finire in un altro; evidentemente, ogni stato di partenza avra` ***sei*** possibili stati di arrivo (a parte i casi di vittoria immediata), e ci sara` una probabilita` $\frac{1}{6}$ di finire in uno di questi stati; la cosa e` organizzabile in una ***matrice di transizione*** che ci dice come cambiano le cose.

Siccome qui di fianco abbiamo gia` una tabella kilometrica, non so bene dove saltera` fuori, ma in qualche posto nella rivista trovate il matricione.

Spero venga fuori tutto nella stessa pagina; siccome non si capisce niente, cerchiamo di chiarire i concetti.

Le colonne rappresentano lo stato di partenza, le righe lo stato di arrivo e all'incrocio c'e` la probabilita` di effettuare la transizione; dallo stato ***a***, ad esempio, avro` ***1/6*** di probabilita` di finire in ***b*** (ho approssimato a due cifre dopo la virgola, quindi compare ***0.17***), ***1/6*** di finire in ***c*** e altrettante di finire in ***d*** o ***e***, in quanto questi stati di arrivo rappresentano i risultati ***1***, ***2***, ***3*** e ***4*** del dado, e quindi muove il Vombato; se nello stato ***a*** esce ***5***, muovera` la Volpe e finiro` nello stato ***f***; nel caso di risultato ***6*** lo stato finale e` ***g***. Gli stati verso cui la transazione e` impossibile (ad esempio dallo stato ***a*** allo stato ***a***) hanno probabilita` ***0*** e, per avere un minimo di chiarezza, ve li ho risparmiati.

Prego notare le righe ***v*** e ***w***, quelle della vittoria; arrivati ad un certo punto (ad esempio con il Vombato in posizione ***11*** e la Volpe in posizione ***10***, pari allo stato ***s***), se faccio ***1*** andro` nello stato ***t***, se faccio ***2***, ***3*** o ***4*** andro` in ***v*** e se faccio ***5*** o ***6*** andro` in ***w***; quindi, la probabilita` di andare in ***v*** da ***s*** e` ***3/6***, e di andare in ***w*** da ***s*** e` ***2/6***. Evidentemente, se mi trovo nello stato ***v*** ci restero` (ha vinto il Vombato), cosi` come ci restero` se finisco nello stato ***w*** (ha vinto la Volpe), quindi nelle opportune posizioni compaiono degli ***1***. Per questo, questi stati sono definiti ***stati di assorbimento***.

L'ultima riga al fondo somma le colonne; e` evidente che da uno stato devo fare qualcosa, quindi la somma sulle colonne deve dare ***1***.

Una volta tanto, Excel si rivela utile.

Simpatico, carino, eccetera; adesso, ci faccio la birra?

No, adesso comincio a giocare; tutte le partite *assieme*, tra l'altro.

In pratica, in qualsiasi posizione (o stato) mi trovi, cosa succedera` alla prossima mossa?

	Partenza																						
Arrivo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
a																							
b	0.17																						
c	0.17	0.17																					
d	0.17	0.17	0.17																				
e	0.17	0.17	0.17	0.17																			
f	0.17																						
g	0.17																						
h		0.17				0.17																	
i			0.17			0.17		0.17															
j				0.17		0.17		0.17	0.17		0.17												
k					0.17	0.17		0.17	0.17	0.17													
l		0.17					0.17																
m			0.17				0.17					0.17											
n				0.17			0.17					0.17	0.17										
o					0.17		0.17					0.17	0.17	0.17									
p		0.17	0.17	0.17	0.17																		
q								0.17	0.17	0.17	0.17					0.17							
r													0.17	0.17	0.17	0.17							
s																							
t																	0.17		0.17				
u																	0.17	0.17					
v			0.17	0.33	0.50				0.17	0.33	0.50	0.17	0.17	0.33	0.50	0.67	0.67	0.67	0.50	0.67	0.67	1.00	
w						0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.17	0.33	0.33	0.33	0.33			0.17	0.33	0.33	0.33		1.00
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Semplicemente che, con data probabilita`, mi spostero` in un altro stato. Quindi, *il moltiplicare la matrice per se stessa mi dice con che probabilita` mi ritrovero` in un dato stato dopo* **due** *mosse.*

Se le cose sono andate come devono andare, qui sopra dovreste avere la matrice di inizio come e` venuta a me; sembra incasinata, ma se la compilate per colonne avete al massimo sei valori per ogni colonna e non dovreste metterci molto (fatemi sapere se c'e` qualche errore, nel caso).

Ora, cerchiamo di capire come funziona il gioco un po` piu` ad alto livello; se la Volpe e` lenta, ci mette al massimo ***tre*** tiri a procurarsi un pranzetto a base di Vombato; posto invece che il nostro Vombato sia particolarmente artritico, ci mettera` ***sei*** tiri a raggiungere la casetta; da cui, mi pare piuttosto evidente che se ci mettiamo piu` di ***nove*** mosse a finire il gioco, o la Volpe e` vegetariana, o il Vombato ha studiato arti marziali, o qualcuno non ha capito qualcosa.

Questo significa che se prendo la matrice qui sopra e la moltiplico per se stessa nove volte (ossia la elevo alla nona potenza), ottengo lo "schema" del gioco completo.

Potreste provarci a mano, posto che non vi ricordiate come si fa il calcolo matriciale in Excel... Sono delle istruzioni piuttosto balorde, in realta`. Giusto per darvi una mano, il risultato e` quello indicato sperabilmente di seguito, nello stesso formato di cui sopra[9].

Non fate troppo caso ai valori ***0.00*** che compaiono; sono delle probabilita` inferiori all'***1%***, che restano per problemi suppergiu` di arrotondamento. Cerchiamo di capire cosa significa questo obbrobrio.

In sostanza, se partite dalla posizione ***a***, dopo ***9*** mosse ci sono suppergiu` il ***66%*** di probabilita` che vi ritroviate in ***v*** e il ***34%*** che siate in ***w***.

A questo punto, alcuni tra voi probabilmente hanno capito su chi scommettere la birra, ma per amor di precisione proseguiamo con il metodo standard.

9.00	**Partenza**																						
Arrivo	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w
a																							
b																							
c																							
d																							
e																							
f																							
g																							
h																							
i																							
j	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00		0.00	0.00		0.00												
k	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00		0.00	0.00	0.00													
l																							
m																							
n																							
o																							
p																							
q	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00												
r																							
s																							
t	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00												
u	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00		0.00	0.00	0.00	0.00												
v	0.66	0.73	0.78	0.83	0.89	0.61	0.64	0.54	0.54	0.61	0.75	0.45	0.50	0.57	0.63	0.94	0.89	0.78	0.61	0.67	0.67	1.00	
w	0.34	0.27	0.22	0.17	0.11	0.39	0.36	0.46	0.46	0.39	0.25	0.55	0.50	0.43	0.37	0.06	0.11	0.22	0.39	0.33	0.33		1.00
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

[9] Se vi serve comunque fare calcoli matriciali in Excel, guardate l'help di "MMULT"; da li` dovreste poter risalire alle diverse operazioni sulle matrici.

Per sapere chi vince, bisogna imporre alcune condizioni al contorno; piu` formalmente (ma non troppo), consideriamo la prima mossa come il risultato di una mossa precedente che mi ha portato nello stato ***a***; questo significa prendere la nostra matrice e moltiplicarla per un vettore composto tutto di zeri tranne un uno nella prima riga (nel senso che partite/arrivate nello stato ***a***). Il risultato, se non si sono sbagliati i conti, sono esattamente i valori dati poco sopra, con tutti gli altri a zero.

Oeu, ma se li avevamo gia` prima, a cosa ci serve? Beh, ci possono essere dei casi in cui il risultato non e` cosi` immediato; prima di vedere cosa succede in certi altri casi, se il giochino vi e` piaciuto, potreste provare con due variazioni sul tema:

1. Il Vombato deve arrivare *esattamente* sulla tana; se fa "troppo", rimbalza come nel gioco dell'oca.
2. La Volpe deve o arrivare *esattamente* sulla tana o *esattamente* sul Vombato; in caso di superamento del Vombato, fate voi...

Se riuscite ad analizzarli, fateci sapere (e fatemi avere il file Excel).

Cambiamo gioco, OK?

Ve la ricordate, quell'elegia del pescecanismo capitalistico che e` il ***Monopoli***?

Siccome 'sto pezzo sta diventando troppo lungo, di seguito vi rifilo una tabella con tutti i nomi dei posti, trilingue: italiano, inglese e americano. Vi aggiungo anche i colori,

#	*italiana*	*americana*	*inglese*
1	vicolo Corto	Mediterranean Ave.	Old Kent Road
2	probabilita`	Community Chest	Community Chest
3	vicolo Stretto	Baltic Ave.	Whitechapel
4	tassa patrimoniale	Income Tax	Income Tax
5	stazione Sud	Reading Railroad	King's Cross Station
6	Bastioni Gran Sasso	Oriental Ave.	The Angel Islington
7	imprevisti	Chance	Chance
8	viale Monterosa	Vermont Ave.	Euston Road
9	viale Vesuvio	Connecticut Ave.	Pentonville Road
10	transito/PRIGIONE	JAIL	Just Visiting
11	via Accademia	St. Charles Place	Pall Mall
12	societa` elettrica	Electric Company	Electric Company
13	corso Ateneo	States Ave.	Whitehall
14	piazza Universita`	Virginia Ave.	Northumberland Ave.
15	stazione Ovest	Pennsylvania Railroad	Marilebone Station
16	via Verdi	St. James Place	Bow Street
17	probabilita`	Community Chest	Community Chest
18	corso Raffaello	Tennessee Ave.	Marlborough Street
19	piazza Dante	New York Ave.	Vine Street
20	posteggio gratuito	Free Parking	Free Parking
21	via Marco Polo	Kentucky Ave.	Strand
22	imprevisti	Chance	Chance
23	corso Magellano	Indiana Ave.	Fleet Street
24	largo Colombo	Illinois Ave.	Trafalgar Square
25	stazione Nord	B. & O. Railroad	Fenchurch Station
26	viale Costantino	Atlantic Ave.	Leicester Square
27	viale Traiano	Ventnor Ave.	Coventry Street
28	societa` acqua potabile	Water Works	Water Works
29	piazza Giulio Cesare	Marvin Gardens	Picadilly
30	VAI IN PRIGIONE!	GO TO JAIL !	GO TO JAIL !
31	via Roma	Pacific Ave.	Regent Street
32	corso Impero	North Carolina Ave.	Oxford Street
33	probabilita`	Community Chest	Community Chest
34	largo Augusto	Pennsylvania Ave.	Bond Street
35	stazione Est	Short Line	Liverpool Station
36	imprevisti	Chance	Chance
37	viale dei Giardini	Park Place	Park Lane
38	tassa di lusso	Luxury Tax	Luxury Tax
39	parco della Vittoria	Boardwalk	Mayfair
40	VIA	GO	GO

giusto per avere un riferimento comune. Comodo? Cosi`, adesso dovremmo essere tutti d'accordo su come si chiamano.

Proviamo a giocarne una versione semplificata, tanto a complicare c'e` sempre tempo. In particolare, ignoriamo il "doppio tiro" (se fate due valori uguali sui due dadi, tirate di nuovo) e lasciamo perdere le Probabilita` e gli Imprevisti, che ogni tanto vi sbattono a spasso per il tavoliere e non si capisce piu` niente; se comunque volete inserirle, non e` un eccessivo problema. Fateci poi sapere come va a finire.

Alura, qui costruire la matrice di Markov puo` venire fuori un po` seccante; tanto per cominciare sono quaranta righe per quaranta colonne, il che non e` proprio una cosa che ci stia sull'agendina; inoltre, bisogna considerare che posso finire in ***1*** facendo un ***2*** sul ***39***, quindi la nostra tabella non ha stati di accumulazione definitivi. Sembrerebbe, quindi, che finalmente si sia trovato un gioco "onesto", come ogni sana forma di capitalismo imperialistico-mattonaro.

No.

Markovianamente (o Marxianamente, fate voi) parlando, c'e` la fregatura. Il trucco consiste nel fatto che se costruite la matrice, tutte le caselle hanno suppergiu` la stessa probabilita` di arrivo, ma la casella ***30*** fa si` che siano praticamente ***doppie*** le probabilita` di finire nella casella ***10***: le "sue" e quelle date dal finire sulla ***30***. Quindi, *la probabilita` di finire in Prigione e`* (suppergiu`) ***doppia*** *rispetto a quella delle altre caselle.*

Risultato	Frequenza	Probabilita`	#	
2	1	0.03	12	societa` elettrica
3	2	0.06	13	corso Ateneo
4	3	0.08	14	piazza Universita`
5	4	0.11	15	stazione Ovest
6	5	0.14	16	via Verdi
7	6	0.17	17	probabilita`
8	5	0.14	18	corso Raffaello
9	4	0.11	19	piazza Dante
10	3	0.08	20	posteggio gratuito
11	2	0.06	21	via Marco Polo
12	1	0.03	22	imprevisti

OK, appurato che nella societa` capitalistica il terrorismo non paga, dove ci conviene comprare casa?

Beh, a questo punto il problema e` abbastanza semplice; a quanto pare, la gente finisce sovente in galera, e per uscirne dovra` tirare due dadi; questo vuol dire che ad ogni giro, se qualcuno finisce in galera, al prossimo tiro avra` le probabilita` indicate qui da qualche parte di "atterrare" nelle caselle indicate.

Carino, vero? Se fate le somme, vi accorgete che ci sono un bel ***39%*** di probabilita`, in totale, di finire sui viola... e solo al ***primo*** tiro; se colpisce la Sfiga Cosmica (tipo un sei e un tre), posso finirci anche con il secondo!

Qui a Torino, corso Raffaello e piazza Dante sono dalle parti della Facolta` di Fisica, pensandoci. Non fate domande sul perche` due su tre di noi sono finiti li`...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms