Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell altro millennio

Numero 042 - 2002-07

1. Editoriale

Il Comitato di Redazione vuole sottolineare il fatto che Questo Numero Risponde A Molte Domande.

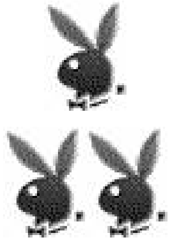
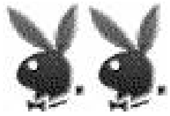
Casomai questo fosse l'unico giornale che leggete o se quello che leggete ha "bucato" la notizia fondamentale di luglio, ve lo dico io.

Se tra il diciannove e il trentuno vi capita di passare da Glasgow, non perdetevi lo spettacolo: in quel periodo, ci sono le quarantatreesime Olimpiadi Internazionali di Matematica.

E` piuttosto probabile che i testi siano disponibili abbastanza alla svelta, ma non in tempo per il numero del mese prossimo; quindi, non cominciate a rompere le scatole: ne parleremo quando avremo in mano qualcosa di solido (leggasi "le soluzioni": non ho la minima intenzione di provarci, e vanto di questa rivista e` di pubblicare solo problemi di cui abbiamo gia` la soluzione). E se sono facili, prendetevela con gli organizzatori, non con noi...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Puntate Sicure			
Cisleuthania e Transleuthania			

2.1 Puntate Sicure

Per qualcuno la valutazione di RdA del problema puo` sembrare bassa. C'e` un motivo.

Allora, questa volta abbiamo un Casino`. Non mi risulta in certi luoghi esista il concetto di "Offerta Speciale" (non ci sono mai andato), comunque possiamo supporre sia una cosa di questo tipo.

Partite con ***40*** gettoni giocabili e un capitale (non giocabile) di ***1*** Euro. *Potete solo giocare gettoni*, e non potete comprarne altri o fare giochini strani.

Il bello e` che ogni volta che vincete, ***moltiplicate il capitale per i gettoni giocati*** e non ritirate i gettoni (ho detto Offerta Speciale, non Garanzia di Bancarotta).

Giusto per capirci: se ad un certo punto avete ***23*** gettoni e ***4*** Euro e giocate ***3*** gettoni e vincete, vi ritrovate con ***20*** gettoni e ***12*** Euro.

Quanto potete vincere, al massimo?

*Con Excel ci vogliono tre picosecondi per trovare la soluzione, ma sarei molto contento se qualcuno capisse **perche`** per me e` facile (senza Excel)...[RdA]*

2.2 Cisleuthania e Transleuthania

... Ridenti paesini di cui sarebbe interessante saperne di piu`: l'unica cosa che so e` che erano staterelli balcanici all'epoca dell'Impero Austro-Ungarico. Anche i miei motori di ricerca falliscono, in certi casi.

Supponiamo comunque abbiano entrambi sbocco su una qualche pozza d'acqua e tratti di confini terrestre in comune, e siano governati da un paio di matti affetti da manie di grandezza: onde ridurre la dimensione delle targhe automobilistiche ("Leuthania" occupa meno spazio), la Cisleuthania ha intenzione di attaccare la Transleuthania, e la Transleuthania ha intenzione di difendersi dall'attacco della Cisleuthania. Entrambe le nazioni possono scegliere una strategia "terrestre" o "marittima", ma non e` possibile utilizzare strategie miste.

Se la Cisleuthania attacca via mare e la Transelutania prepara una difesa via mare le probabilita` di successo nell'invasione sono dell'***80%***.

Se la Cisleuthania attacca via mare e la Transleuthania prepara una difesa via terra le probabilita` di successo dell'invasione sono del ***100%***.

Se la Cisleuthania attacca via terra e la Transleuthania prepara una difesa via terra le probabilita` di successo dell'invasione sono del ***60%***.

Se la Cisleuthania attacca via terra e la Transleuthania prepara una difesa via mare le probabilita` di successo dell'invasione sono del ***100%***.

Ora, domanda per gli aspiranti von Klausewitz: e` abbastanza evidente che il modo migliore per fregare l'avversario e` scegliere a caso, ma dobbiamo stabilire con che probabilita` scegliere (a caso) una certa strategia.

Con che probabilita` dovrebbe scegliere tra i due attacchi la Cisleuthania?

Con che probabilita` dovrebbe scegliere tra le due difese la Transleuthania?

Quante probabilita` abbiamo che le targhe vengano effettivamente piu` corte?

3. Bungee Jumpers

Alcuni gruppi di interi positivi consecutivi hanno somma ***1000***. Trovateli.

4. Soluzioni e Note

4.1 [041]

4.1.1 Al posto dell'orologio a LED

La prima soluzione ci arriva da **Enrico***, seguito a ruota da* **Cld**. *E guardate un po` cos'e` successo...*

La pendola perde ***12*** ore esatte ogni ***4*** giorni, ***6*** ore e ***6/7*** di ora. Si tratta di trovare un multiplo di ***12*** tale che l'orario di arrivo cada di sera e il numero di giorni sia inferiore a ***30*** (tenendo conto, volendo, anche dei tre minuti di ritardo accumulati inizialmente anche se non sono determinanti) *[Giusto per sottilizzare: sono quelli che danno la stura al problema... (RdA)]*.

Per essere in orario avendo perso ***12*** ore (meno i ***3*** minuti iniziali) saresti dovuto tornare ***4*** giorni ***6*** ore e ***3/7*** di ora dopo, ovvero di notte.

Vediamo i multipli successivi:

Ore	**Tempo di ritorno**	*Note di RdA*
24	***8*** gg ***13*** h $\frac{2}{7}$ (alba)	*"Ora di andare a nanna", per Doc*
36	***12*** gg ***20***h $\frac{1}{7}$ (pranzo)	*"Ora di alzarsi", per certi loschi figuri*
48	***17***gg ***3***h (preciso, e` sera e non ci sono neanche frazioni di ora)	

Non e` necessario andare avanti, perche` le ore successive sono comunque improponibili. Si desume che sei tornato dopo ***17***gg, ovvero ***3*** giorni dopo la domenica e quindi ***mercoledì***.

Detto tra noi preferisco una pendola ferma, perche` segna l'ora esatta (veramente esatta in termini assoluti) per ben due volte al giorno. *[Gia`, ma devi guardarla tutto il giorno...]*.

E` arrivata anche la soluzione di* **Sam**, *in merito (un po` tardi perche` doveva andare in vacanza... Beh, non glie ne vorremmo, mentre lui si rilassa tranquillo al fresco in panciolle e noi siamo qui a sudare nei nostri uffici e a cercare di scrivere riviste di matematica... no, lasciamo perdere. Devo ancora prenotare le ferie, io). Sam, dicevo, postula la birra alle

16:00, *che mi pare un'ottima ora per la birra (sono ammesse altre opinioni, anche multiple) e genera una tabella dei tempi da fare invidia a Perry Mason; anche lui fa i conti a mano.*

Il buon **Cld** *(oltre ad accettare la rissa che cercavo di scatenare nel numero del mese scorso) si chiede* " sebbene non capisca che diavolo debba farci con l'Excel..." *Semplice. Distinguere la sera dal buio pesto. Il Nostro, infatti, si ferma alla prima soluzione, quindi mi costringe a tornare da Doc il giovedi` immediatamente successivo, a notte fonda. Sono veloce a leggere i libri, ma ho anch'io i miei limiti. (Rissa! Rissa! Rissa!).*

Se ne deduce quindi che esistono delle divergenze epistemologiche tra i nostri amici per quanto riguarda la definizione di "pomeriggio" e "sera". A mediare tra queste due inconciliabili posizioni viene PuntoMauPunto, che (questo mese aveva da fare) si limita ad un "dipende molto dalle vostre idee di pomeriggio e sera".

Torniamo a Cld, che svolge alcune interessanti considerazioni:

Complimenti comunque per il tempismo della seconda visita: per vedere l'orologio scartare meno di un secondo era necessario controllarlo con un *gap* di soli 17,142857... secondi *[L'anticipo folle col quale mi presento di solito agli appuntamenti e` uno dei miei vanti (RdA)].*

Ricordavo un problema analogo, ma dove il controllo dell'ora veniva fatto esclusivamente allo scadere di ogni ora (cioe` potendo controllare gli anticipi o i ritardi del pendolone solo grazie a una sorta di segnale orario che venisse trasmesso allo scadere di ogni ora). In questo caso e` necessario ricorrere ad un po` di aritmetica modulare (o a un bel foglio Excel...).

Molto bello; qualcuno vuole provarci? Con Excel e` piu` semplice, ma con l'aritmetica modulare e` piu` carino.

Comunque, a voler essere pignoli, le soluzioni sono incomplete*: ho provato ad aiutarvi dicendo che io Excel l'ho usato **tre** volte, ma a quanto pare nessuno ha colto.*

Si possono distinguere tre casi:

1. *Nel frattempo e` stata **inserita** l'ora legale*
2. *Nel frattempo e` stata **tolta** l'ora legale*
3. *Nel frattempo non e` successo niente.*

Vi ricordo che Doc **non ha toccato la pendola**;

Tutti i calcoli sono limitabili all'intervallo di un mese, visto che:

*Nel **primo** caso, devo cercare un "ritardo" pari a* $(12*n)\mathrm{h}:57\mathrm{m}$ *(era indietro di tre minuti, ricordate?), il che significa (visto che Doc non l'ha messa a posto per l'ora legale) che l'orologio ha perso* $(12*n-1)\mathrm{h}:57\mathrm{m}$*, ossia ha guadagnato tre minuti, e questo succede per un ritardo di 12h:57m ossia dopo **4 giorni e 15 ore**.*

*Nel **secondo** caso, l'orologio avrebbe dovuto perdere* $(12*n-2)\mathrm{h}:57\mathrm{m}$ *e la cosa funziona per **3 giorni, 10 ore e 57 minuti**.*

*Nel **terzo** caso, avrebbe dovuto perdere* $(12*n-1)\mathrm{h}:57\mathrm{m}$ *e questo significa un ritardo di 47h:57m, ossia siamo in pari dopo **17 giorni e 3 ore**.*

*Tre risultati... Gia`, pero` la prima volta era pomeriggio e l'altra volta era sera; quindi, l'unico risultato compatibile e` il terzo. E diciassette giorni dopo una domenica c'e` un **mercoledi`**.*

Cld, mi raccomando; per "quella-cosa-che-dici-alla-fine-della-mail", cerca di arrivare almeno il giorno giusto[1].

4.1.2 Tutti in giardino!

Molto bene, un bel po` soluzioni tutte con lo stesso risultato finale (Cld, non ce l'ho con te: questa volta era diverso il mio). Le prime arrivate sono molto simili tra loro: i cerchi sono in in posizioni diverse sul piano cartesiano, ma la cosa non cambia di molto.

Qualcuno si e` chiesto perche` la valutazione fosse cosi` alta da parte mia: semplicemente, perche` non ho usato le coordinate cartesiane e, quando mi sono ritrovato tra i piedi un triangolo di lati ***3***, ***4***, ***5*** sono stato fiero di me nell'accorgermi che si trattava di una terna pitagorica.

Enrico inserisce i tre cerchi in ***(0,0)***, ***(0,3)***, ***(4,0)*** (raggi rispettivamente ***1***, ***2***, ***3*** metri), chiama ***R*** il raggio del cerchiolino e arriva al sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (1+R)^2 \\ x^2 + (3-y)^2 = (2+R)^2 \\ (4-x)^2 + y^2 = (3+R)^2 \end{cases} \qquad \textbf{[004.001]}$$

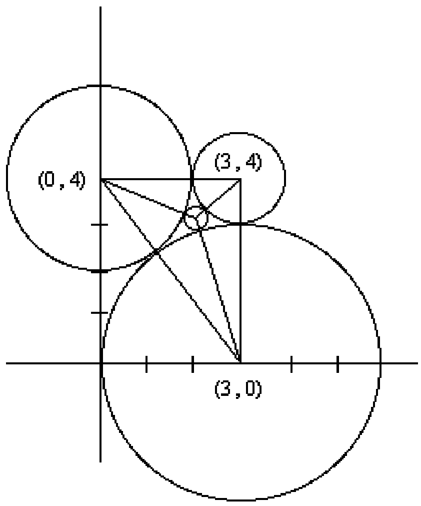
...non sara` una meraviglia, ma un certo senso estetico c'e`.

Dopo alcuni emozionanti passaggi che non mi sogno neppure di passare al Formula Editor, si arriva alla:

$$R^2 + \frac{132}{23}R - \frac{36}{23} = 0 \qquad \textbf{[004.002]}$$

che da` la soluzione cercata $R = \frac{6}{23}$.

Enrico chiude la mail con *"non vedo in questo momento un sistema piu` generale..."* Ne parliamo dopo, bene? Per intanto, pensate a cosa significa *l'altra* soluzione dell'equazione di secondo grado.



Se cominciate a non capire piu` niente, arriva in aiuto **Filippo**; tanto per cominciare, ci manda un graziosissimo disegno della situazione; no, niente PowerPoint: e` troppo ben fatto. E poi, e` in formato GIF. O Filippo ha un qualche tool che noi non abbiamo, o ha la mano piu` ferma di Giotto (sommo della raffinatezza, ha anche definito lo sfondo come trasparente). Allora, prima il testo della mail.

E' una brutta soluzione, nel senso che non sono soddisfatto del metodo; avrei preferito trovare una via basata sulle "proprieta`" degli elementi geometrici anziché principalmente sui calcoli.

Ho utilizzato per la prima volta l'editor di Word; l'inserimento delle formule e` piuttosto lento per cui ho preferito non riportare tutti i passaggi, anzi li ho notevolmente semplificati. *[Infatti, e` per questo che RM esce solo una volta al mese... Mettere le vostre soluzioni in FEd e` un lavoro usurante. (RdA)]* Se lo ritenete necessario ve li spedirò *[No, **Grazie**: per non spedirceli (RdA)].*

[1] La Redazione tutta si impegna nel lancio virtuale di bianchi ellissoidi di seconda specie.

Non ho ancora trovato una soluzione generale, ma usando un metodo esclusivamente geometrico (il centro della circonferenza piccola unito ai tre vertici del triangolo suddivide il triangolo in tre triangoli, l'area dei quali, con la formula di Erone, viene eguagliato al triangolo grande) si arriva ad una formula con 4 radici quadrate, per me assolutamente ingestibile, che però mi conferma il risultato ottenuto col primo metodo *[E` la strada scelta da Cld; vedi dopo (RdA)].*

I centri si trovano sui vertici del piu` classico dei triangoli pitagorici, ma questa bella disposizione non mi sara` di alcun aiuto; anzi, da questo momento solo tediosi calcoli *[Il che riduce il mio "lampo di genio" ad un'ovvieta`. Beh, almeno non ha scritto "evidentemente"...(RdA)].*

Il centro della quarta circonferenza, essendo tangente a tutte, si deve trovare equidistante dalle altre tre. Se indico con ***R*** il raggio della quarta allora la distanza dagli altri 3 centri sara`: $(3+R),(2+R),(1+R)$

Procedo in questo modo:

Calcolo le coordinate dei punti di intersezione (mi serve solo il punto ad ascissa minore) tra le circonferenze di raggio ***3+R*** e ***1+R***, di centro rispettivamente ***(3,0)*** e ***(3,4)*** in funzione di R.

$$\begin{cases} (X-3)^2+Y^2=(3+R)^2 \\ (X-3)\ +(Y-4)^2=(1+R)^2 \end{cases} \qquad \textbf{[004.003]}$$

svolgendo i calcoli,

$$\begin{cases} Y=\dfrac{R+6}{2} \\ X=\dfrac{6-\sqrt{3R(R+4)}}{2} \end{cases} \qquad \textbf{[004.004]}$$

Quindi impongo che il punto ***(X,Y)*** si trovi a distanza ***2+R*** dal centro ***(0,4)*** della circonferenza di raggio ***2***.

$$\left(\frac{6-\sqrt{3R(R+4)}}{2}\right)^2+\left(4-\frac{R+6}{2}\right)^2=(2+R)^2 \qquad \textbf{[004.005]}$$

e alla fine:

$$R=\frac{-132+\sqrt{20736}}{46} \qquad \textbf{[004.006]}$$

che, per fortuna, porta a: $R=\dfrac{6}{23}$.

Avete avuto un'altra spiegazione per pensarci, quindi adesso ve lo dico. L'altra soluzione (che, nel caso particolare, vale **6***) e` il cerchio tangente esternamente.*

Anche in questo problema ***Sam*** manda la soluzione. Lui il triangolo rettangolo le liquida all'ottava parola; comincio a dubitare delle mie capacita` di solutore dei problemi, io ci avevo pensato per un bel po`. La soluzione procede piuttosto tranquillamente secondo i binari ormai consolidati, ed il Nostro alla fine butta li` un " *In alternativa si può usare la formula di Descartes per i cerchi tangenti... Non ne conosco la dimostrazione, ma solo la costruzione e un po` della sua storia. Ve le mando?*". Beh, dipende: e` arrivato prima ***Cld***, ma se hai altri dati interessanti oltre a quelli qui sotto manda pure; pubblicheremo sicuramente, a me quella formula piace molto.

Non sono mica sicuro che quella di **Cld** *sia una soluzione... Il ragazzo, probabilmente, ha altro per la testa. vediamo cosa combina.*

Sebbene esista una poderosa letteratura su questo problema, risolto dal "*Teorema sui cerchi di Descartes*", proviamo a fare due conti ignorando (ma non troppo) il lavoro degli altri *[Boinnng! Il signore vince l'orsacchiotto gigante di peluche!]*.

Chiamiamo O_1, O_2 e O_3 i centri dei cerchi rispettivamente di raggio 1, 2 e 3. Unendoli salta fuori un bel triangolo di lati 3, 4 e 5. Dal momento che abbiamo beccato una terna pitagorica, possiamo calcolare l'area di questo triangolo come 3*4/2 = 6 metri. Uniamo ora i vertici del triangolo con il centro del cerchio piccolo, che chiamiamo O_4. Saltano fuori altri tre triangoli, la somma delle cui aree deve essere pari al triangolone di prima. Per le singole aree dei triangoli chiediamo aiuto ad Erone, che con la sua magica formula ci consente di calcolare l'area di un triangolo conoscendo i tre lati. Calcoliamo i tre semiperimetri, introducendo la variabile x che rappresenta il raggio cercato (p_1 e\` il semiperimetro del triangolo opposto al centro $O_1$, $p_2$ quello opposto a $O_2$, e cosi\` via):

$p_1 = \frac{(2r_2 + 2r_3 + 2x)}{2}$, ossia $p_1 = x + 5$. Analogamente $p_2 = x + 4$ e $p_3 = x + 3$. La prima area cercata sara\` quindi

$$A_1 = \sqrt{p_1[p_1 - (r_2 + x)][p_1 - (r_3 + x)][p_1 + (r_2 + r_3)]} \qquad \textbf{[004.007]}$$

Sostituendo i raggi e semplificando, $A_1 = \sqrt{6x(x+5)}$.

Allo stesso modo, $A_2 = \sqrt{3x(x+4)}$, e $A_3 = \sqrt{2x(x+3)}$.

Dato che $A_1 + A_2 + A_3 = 6$, possiamo scrivere

$$\sqrt{6x(x+5)} + \sqrt{(3x(x+4)} + \sqrt{2x(x+3)} = 6 \qquad \textbf{[004.008]}$$

che risolta per x fornisce il valore di 6/23 (l'ho fatta risolvere a Derive... troppo difficile per me *[Pusillanime! (RdA)]*).

La parte interessante arriva adesso. Il caso generale!

Come dicevo prima, e\` un problema a dir poco noto, che e\` stato generalizzato non solo per qualunque raggio dei tre cerchi, ma addirittura per qualunque numero di circonferenze.

La **formula di Soddy** fornisce una bella relazione tra i raggi dei cerchi, o meglio tra le curvature degli stessi (il concetto di curvatura, per una circonferenza, e\` rappresentato dall'inverso del raggio: maggiore e\` il raggio, minore sara\` la curvatura della circonferenza). La formula (che presumo sia quella che citate nell'enunciato *[Yep! Proprio lei!]*) e\` la seguente:

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^2 \qquad \textbf{[004.009]}$$

[Io divido per due entrambi i membri, ma non mi pare il caso di formalizzarci. Quella somma di quadrati uguagliata al quadrato di una somma mi e\` sempre piaciuta molto (RdA)].

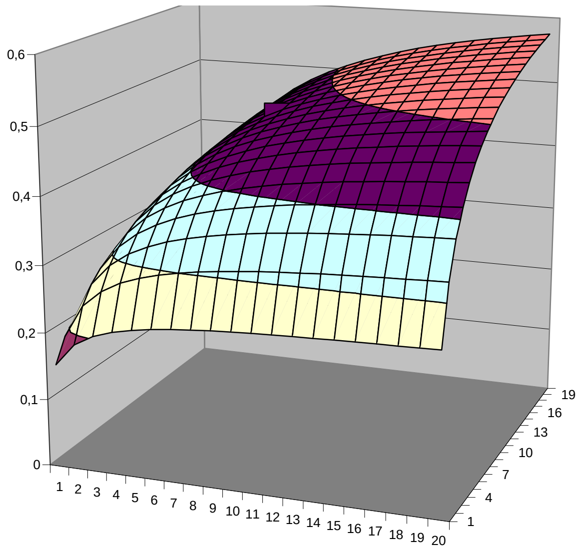
Risolvendo per e_4, ed esprimendo le curvature come raggi, si ottiene la notevole *[Nel senso che e\` notevole la pazienza per scriverla. E\` stato Cld, non io (RdA)]*

$$r_4^{\pm} = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_2 r_3 + r_1(r_2 + r_3) \pm 2\sqrt{r_1 r_2 r_3 (r_1 + r_2 + r_3)}} \qquad \textbf{[004.010]}$$

in cui la soluzione positiva e` il raggio della nostra "*aiuoletta*", e la soluzione negativa il raggio della circonferenza grande esterna tangente alle altre. Vediamo se Soddy ha ragione: $r_4^{\pm} = \frac{6}{6+5\pm 2\sqrt{6\cdot 6}}$, cioe` $r_4 = \frac{6}{23}$ e $r_4 = 6$.

Ho tentato di dimostrare la formula di Soddy, ma ho paura che vada al di la` delle mie capacita` (spero che le due Guinnes non siano per la dimostrazione... neanche io riuscirei a bere in una volta quelle che ci vorrebbero) *[No, la dimostrazione era una richiesta personale: conoscevo la formula di Soddy, ma non ho mai trovato la dimostrazione. E sono convinto che Erone giochi un ruolo chiave, nell'affare. (RdA)].*

Di seguito ho messo un bel grafico colorato che relaziona l'area dell'aiuoletta ai raggi r_2 e r_3, fissando r_1=1. Non so a cosa serva ma e` bello da vedersi.



Oooohhhh!

Molto bello.

Spiacente, ma per problemi di paginazione devo ridurlo.

Per quanto riguarda l'uso, direi che "sezionare" la superficie (in verticale e/o in orizzontale) puo` fornire interessanti casi particolari della formula.

Non cercate "Soddy" sul calendario: non c'e`. Pero` una ricerca in rete puo` dare interessanti risultati.

5. Quick & Dirty

Q: Da una barca in un lago, butto l'ancora; rispetto a quando l'ancora era a bordo, il livello del lago sale, scende o resta invariato?

6. Dal Nostro Inviato Speciale

Eccoci! Siccome Sam e` un buono, ci fornisce le soluzioni.

E siccome 'sto numero e` un po` smilzo, vi rifilo di nuovo anche i testi.

Mentre stavamo per andare in macchina, e` arrivata una mail da parte di ***Filippo***, con alcune considerazioni relative a questi problemi: " *La soluzione del problema sulle radici intere dell'equazione di 3° grado e` forse meno interessante di quello che sembrava a prima vista. Decisamente piu` interessante il problema n° 5; ricorrendo alle congruenze si risolve il problema in modo, almeno per me, inaspettatamente semplice*".

Bene, veniamo ai problemi.

Trovare tutti gli interi di tre cifre che siano uguali a 34 volte la somma delle loro cifre.

> Oltre ad una banale dimostrazione per elencazione (scrivere tutti i multipli di 34 e sommare le cifre per vedere se si trovava corrispondenza) si poteva procedere

per via algebrica (mi sembra tanto uno di quei problemini delle prime 100 pagine del Ghersi):

Siano ***c*** le centinaia, ***d*** le decine e ***u*** le unita` del numero cercato:

$$100c + 10d + u = 34 * (c + d + u) \qquad \textbf{[006.001]}$$

con ***c***,***d***,***u*** naturali inclusi in [1;9] *[E niente zero?(RdA)].*

$$66c - 24d - 33u = 0 \Rightarrow 11 * (6c - 3u) = 24d \qquad \textbf{[006.002]}$$

da qui e` evidente come sia necessario, affinché i risultati siano interi, che $d = k * 11$ (con ***k*** naturale), per cui, dovendo essere $0 < d < 10 \Rightarrow k = 0, d = 0$ *[l'avevo detto, io... (RdA)].*

Allora

$$6c - 3u = 0 \Rightarrow 6c = 3u \Rightarrow u = 2c \qquad \textbf{[006.003]}$$

e, sempre per la limitazione suddetta,

$$(u = 2c) < 10 \Rightarrow c < 5 \qquad \textbf{[006.004]}$$

e dunque

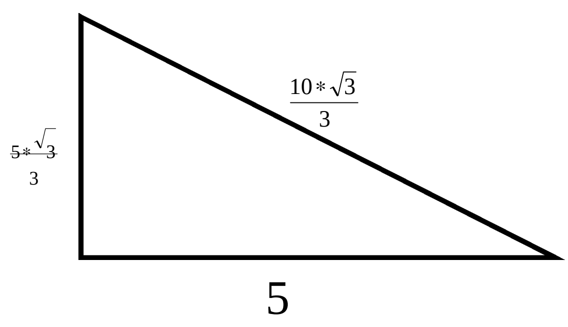
$$\begin{array}{lll} c = 1 & u = 2 & \Rightarrow \ 102 \\ c = 2 & u = 4 & \Rightarrow \ 204 \\ c = 3 & u = 6 & \Rightarrow \ 306 \\ c = 4 & u = 8 & \Rightarrow \ 408 \end{array} \qquad \textbf{[006.005]}$$

NOTA: Ovviamente la seconda strada e` assai piu` elegante, ma visto che i correttori hanno attribuito il massimo punteggio anche a chi ha semplicemente scritto la tabellina del 34, mi pento di essermi ingabolato per 20 minuti buoni (ero agitato e sbagliavo i calcoli) con c,d,u e k *[Propongo di prendercela con l'arbitro. O con il guardalinee (RdA)]* .

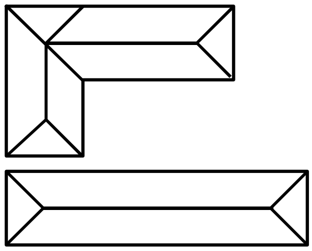
Una casa ha una pianta a forma di L, formata da quattro quadrati (di lato 10 m) opportunamente disposti, tutte le pareti, perpendicolari al suolo, sono alte 10 m. Il tetto e` formato da piani inclinati di 30° dal piano orizzontale che si dipartono da tutti i lati esterni. Calcolare il volume.

[Vi ricordo che questo a Sam non piaceva.(RdA)]

Ovviamente il corpo dell'edificio avra` un volume pari a 4 volte un cubo di lato 10m ossia 4000mc (e non 1000 come ho scritto io *[la Casa della Barbie? (RdA)]*). Ora studiamo la forma del tetto grazie ad alcune considerazioni trigonometriche *[che potete facilmente dedurre dal disegno presumibilmente qui di fianco; misure in metri (RdA)].*



perciò i punti di intersezione dei piani si troveranno tutti sui centri dei quadrati. L'altezza complessiva e` cosi` di √3 * 5/3 m.



Per quel che riguarda il volume, possiamo, con una simmetria assiale e una rototraslazione, trasformare la figura come segue *[Questa finisce chissadove... (RdA)]*:

Calcolare il volume e\` banale, poiché possiamo scomporre la figura in un prisma a base triangolare di area $\frac{25*\sqrt{3}}{3}$ mq e con altezza ***30*** m e quindi $V_{pri} = \frac{500*\sqrt{3}}{9}$ mc, unito ad una piramide di base quadrata di area ***100*** mq con altezza di $\frac{5*\sqrt{3}}{3}$ m, con $V_{pir} = \frac{500*\sqrt{3}}{9}$ mc. Sommando, $V_{casa} = 4000 + \frac{2750*\sqrt{3}}{3}$ mc.

NOTA: Brutto e meccanico, oltre che noioso e affrontabile in vari modi, che portavano tutti al risultato corretto, ma che secondo i correttori non erano altrettanto esatti del precedente (valli a capire) *[Qui e\` chiaramente colpa del guardalinee (RdA)]*.

Sia AB un segmento, M il suo punto medio e RS la sua proiezione su una retta r. Dimostrare che i triangoli AMR e BMS (non degeneri) sono inscritti in circonferenze congruenti

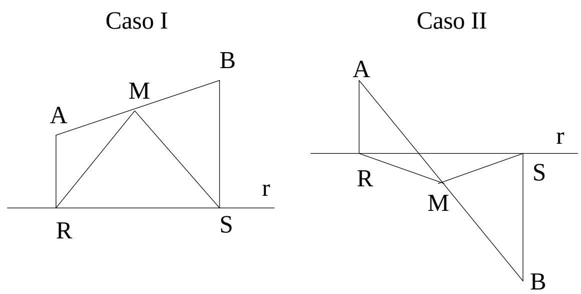
[Ho paura a guardare la soluzione... Sam mostra un'insana propensione per i disegni in PaintBrush... (RdA)]

Soluzione A (La via breve).

Due circonferenze sono congruenti quando hanno i raggi congruenti. Per la trigonometria

$$2R = \frac{a}{\sin a} \Rightarrow \frac{AM}{\sin(ARM)} = \frac{MB}{\sin(MSB)} \qquad \textbf{[006.006]}$$

e visto che , per costruzione, ***AM=MB***, dobbiamo dimostrare che $\sin(ARM) = \sin(MSB)$. Ora, una proiezione ***H*** di ***M*** su ***r*** divide ***SR*** a meta\` e quindi ***MH*** e\` altezza e mediana del triangolo ***RSM*** che e\` quindi isoscele su base ***RS***. Perciò, nel primo caso ***ARM=MSB*** e quindi anche i loro seni, mentre nel secondo caso $ARM = 90 + x$ e $SMB = 90 - x$, per cui i loro seni sono uguali. CVD.



Soluzione B (La via consigliata)

Senza disegni *[L'impaginatore ringrazia sentitamente... (RdA)]* né spiegazioni: si tracci l'asse di ***AB***, che essendo i triangoli non degeneri, interseca ***r*** in ***L***. Si dimostra che le due circonferenze si intersecano in ***L*** e si vede che esse vedono ***AL*** e ***BL*** da ***R***,***M***,***S*** sotto un angolo retto, quindi ***AL*** e ***BL*** sono diametri, ma sono anche uguali, poiché ***L*** e\` sull'asse di ***AB*** CVD.

Soluzione C (La via lunga)

Dimostrare che i due raggi sono uguali, ricordando che il raggio e` dato dal rapporto tra il prodotto dei tre lati e quattro volte l'area. Ometto il procedimento, perché lungo e con molti disegni *[ClapClapClapClap...(RdA)]* . Di certo e` un buon esercizio di logica e di geometria.

NOTA: Ho riportato tre vie perché io ho usato l'ultima, i solutori hanno proposto la seconda e, mentre pranzavo dopo la prova (finita dopo le 13 e iniziata verso le 8:30), ho trovato la prima. Il problema e` carino, la prima soluzione e` molto elegante, la seconda pone, a mio avviso, troppi presupposti che, seppur leciti, non e` sempre buona abitudine prender per buoni, la terza e` pedestre e un poco noiosa, ma la piu` sicura. *[Fate voi, ma a me piace di piu` la prima; la "consigliata" e la "lunga" richiedono di andare a scavare troppo lontano... (RdA)]*

*Dire per quali valori reali di **n** l'equazione* $x^3 - 3x + n = 0$ *ammette tre soluzioni intere.*

Sam trova per questo problema **due** *soluzioni; e` uno dei problemi di cui* **Filippo** *ci ha mandato la soluzione (lui segue la strada "A", forse e` per questo che il problema si e` rivelato meno interessante del previsto).*

Soluzione A

Una cubica con soluzioni ***a***,***b***,***c*** può essere scritta come

$$\begin{aligned}&(x-a)(x-b)(x-c)=0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0\end{aligned} \qquad \textbf{[006.007]}$$

Ora, $a,b,c \in Z, n \in R$, ma necessariamente, se $n = -abc$, $n \in R$.

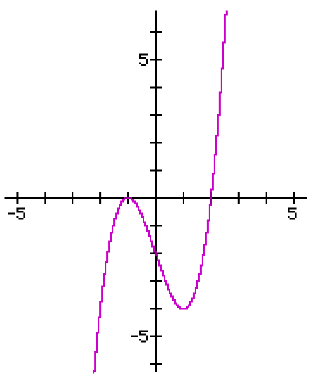
$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ca=-3 \end{cases} \qquad \textbf{[006.008]}$$

e dunque

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0+6 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a^2+b^2+c^2=6\end{aligned} \qquad \textbf{[006.009]}$$

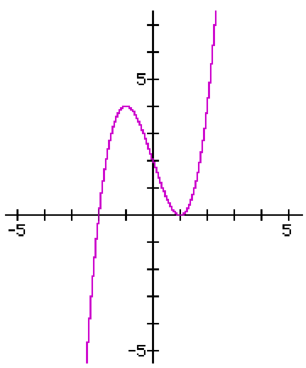
Nessuna soluzione può essere 0, poiché altrimenti le altre dovrebbero essere opposte e $6 = k^2$ non ha soluzioni intere.

Si consideri $6 = 1+1+4 = 1+2+3$. Il secondo caso non ci interessa, mentre nel primo vediamo che $1 = (+1)^2 = (-1)^2$ e che $4 = (+2)^2 = (-2)^2$ allora, tenendo conto che ***a+b+c=0***, si trovano due triplette di soluzioni: $(-1,-1,2)$ e $(1,1,-2)$, che portano entrambe a ***n=2***.



Sempre Filippo, per sfoggiare le sue abilita` grafiche (purissima invidia, la mia...) ci manda anche i disegni delle due cubiche, che qui volentieri alleghiamo.

Si vede abbastanza chiaramente dove sono le soluzioni intere che stiamo cercando. Chiaro, no?



Come dicevamo, a lui non e` piaciuto molto il problema e a Sam non e` piaciuta questa soluzione. Tant'e` che ne ha trovata un'altra. Filippo, questa mi pare piu` carina.

Soluzione B

Soluzione assai piu` elegante e stranamente non accettata e` questa:

$X^3 - 3X + n = 0$ e` una famiglia di cubiche traslate l'una rispetto all'altra lungo l'asse delle ***y*** dal parametro ***n***. Se ***n=0*** si ha $x(x^2-3)=0$ con soluzioni $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$, che non sono intere. Sicuramente vi sara` un ***n*** per cui la curva e` tangente all'asse delle ***x***: dunque si trova la derivata $y' = 3x^2 - 3$ e la si pone uguale a ***0*** trovando $x = \pm 1$, si sostituiscono tali valori e si pone l'intera cubica uguale a ***0*** (vogliamo trovare le tangenze con l'asse delle ***x*** che ha ordinata nulla) trovando $n = 2$ e $n = -2$. Dunque ***n*** deve assumere valori compresi tra -2 e 2, poiché oltre essi la traslazione verticale e` tale da produrre due soli incontri con l'asse delle ***x***, mentre noi vogliamo tre soluzioni. ***n=0*** e` gia` stata esclusa; ***n=1*** vuole che ***a***,***b***,***c*** siano uguali a ***1***, o tutti positivi o un positivo e due negativi, ottenendo in entrambi i casi una somma non nulla; $n = -1$ idem, ma con segni invertiti; rimangono $n = 2$ e $n = -2$, rispettivamente uguali a $(-1)*(-1)*(2)$ e $(1)*(1)*(-2)$, accettabili e adeguate.

NOTA: il problema e` simpatico anche se semplice, in quanto permette di giocare un poco con l'algebra, i grafici e con le derivate.

[D'accordo sul "simpatico", ma riserverei il "semplice" alla soluzione meno elegante. Per quanto riguarda la non accettazione, qualcuno riesce a capire il perche`? Io no. (RdA)]

Dimostrare che $5^n + 3^n + 1$ *e` primo solo se* **n** *e` multiplo di* **12**.

n deve essere multiplo di ***12*** e quindi non può essere dispari:

infatti $\left\langle 5^{2k-1} \right\rangle_3 = 2$ e quindi, modulo ***3*** l'espressione diventa ***2+0+1=3***, quindi il numero e` sicuramente divisibile per ***3***.

[Non solo, ma Sam si e` anche ricordato qual'e` la mia notazione preferita per la congruenza... (RdA)]

n deve essere multiplo di ***4***, cioe` non può essere $n = 2d$, dove $d = 2k - 1$:

infatti $\left\langle 3^{2(2k-1)} \right\rangle_5 = -1$ e quindi l'espressione diventa ***1+0+1=0*** e quindi il numero e` divisibile per ***5***.

n deve infine essere $4k$ con $k = 3h$, ovvero $(5^4)^k + (3^4)^k + 1$ e` primo se ***k*** e` multiplo di ***3***:

infatti

$$\left\langle 625^k + 81^k \right\rangle_7 = \begin{cases} \langle k \rangle_3 = 1 & 2+4 \Rightarrow 4+2+1=7 \\ \langle k \rangle_3 = 2 & 4+2 \Rightarrow 2+4+1=7 \\ \langle k \rangle_3 = 0 & 1+1 \Rightarrow 1+1+1=3 \end{cases} \qquad \text{[006.010]}$$

e nei primi due casi e` divisibile per ***7***, mentre non lo e` nell'ultimo caso

E` dunque dimostrato che se ***n*** non e` multiplo di ***12***, il numero suddetto non e` primo (si noti che per ***n=12*** si ottiene un numero primo).

NOTA: Questo problema e` molto divertente  e per di piu` permette di usare l'aritmetica modulare. La soluzione ufficiale e` piu` lunga, piu` noiosa e piu` algebrica. Non richiede però di tirar fuori dal cilindro i tre divisori ***3***,***5***,***7*** che del resto sono piu` tentativi ordinati (i primi ***3*** numeri primi dopo il ***2***) che colpi di fortuna.

[Devo confessare che a me l'artimetica modulare piace solo quando la usa qualcun altro; trovo quindi apprezzabilissima la soluzione di Sam, ma capisco anche il fatto che qualcuno possa preferire altre strade (RdA)]

E anche qui Filippo si e` lanciato; niente disegnini, stavolta, ma guardate un po` cos'e` saltato fuori.

Dopo aver tentato, inutilmente, di trovare una formula per le somme di potenze dei primi ***n*** dispari (che pure esistera` da qualche parte), ho vilmente fatto ricorso alla potenza di calcolo del programma PARI-GP *[Voglio sperare sia una marca di matite...(RdA)].* L'osservazione delle ricorrenze dei fattori primi piu` piccoli (matematicus sperimentalis) mi ha fatto trovare una strada per la dimostrazione che mi e` parsa elegante.

(Ho provato a scrivere una spiegazione, ma ne e` venuta fuori una cosa incomprensibile *[Anche qui, ringraziamo sentitamente per* **non** *avercela inviata...(RdA)]*).

Con i metodi della matematica sperimentale (leggasi "provando per un po`"), Filippo arriva alle edificanti conclusioni:

Quando **x** e` dispari **(2n+1)** l'espressione: $\mathbf{5^x + 3^x + 1}$ e` divisibile per **3**

Quando **x** e` **(4n+2)** l'espressione: $\mathbf{5^x + 3^x + 1}$ e` divisibile per **5**

Quando **x** e` **(6n+2)** oppure **(6n+4)** l'espressione: $\mathbf{5^x + 3^x + 1}$ e` divisibile per **7**

E da questo ricava la tabellina che si trova da qualche parte, per i soliti problemi di paginazione.

esp.	div. per 3	div. per 5	div. per 7
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			

Da questo (per tentativi) il Nostro ricava la regola:

I divisori 3, 5 e 7 coprono tutti gli esponenti tranne il 12 o i suoi multipli per cui solo $\mathbf{5^{12x} + 3^{12x} + 1}$ può essere primo (non e` detto che lo sia)

Prego notare la sana vena di scetticismo dell'ultima parte; quesata volta Filippo non poteva fare dei disegni, quindi ha cercato di rallegrare l'ambiente in un altro modo: guardate come prosegue.

In effetti:

$5^{12} + 3^{12}+1$ = 244 672 067

$5^{36} + 3^{36}+1$ = 14 551 915 378 461 487 103 639 747

$5^{48} + 3^{48}+1$ = 3 552 713 678 880 267 372 432 493 847 753 987

sono tutti primi, ma:

$5^{24} + 3^{24} +1$ = 59 604 927 204 927 107 = 103 * 457 * 61 331 * 20 646 607

$5^{60} + 3^{60} +1$ = 867 361 737 988 445 938 364 237 456 899 467 663 573 827

= 3144853 * 3847314239 * 680874654589 * 105287080263229

e infine, per chi ama i numeri grandi:

$5^{120} + 3^{120} +1$ =

752 316 384 526 264 005 099 991 385 619 247 533 718 377 166 747 315 843 275 206 131 749 662 673 588 876 497 027
anche lui primo.

Sentite, io mi fido; se qualcuno vuole verificarlo, vuol dire che proprio non sa cosa fare durante le ferie.

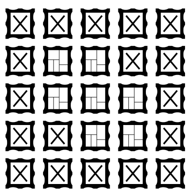
*Data una scacchiera 100*100, e` possibile colorare opportunamente le caselle di modo che:*

1. *vi sia un numero dispari di caselle colorate e ogni casella colorata sia adiacente ad un numero dispari di caselle colorate?*
2. *vi sia un numero dispari di caselle colorate con adiacenti 4 caselle colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano 2 caselle colorate adiacenti?*
3. *vi sia un numero dispari di caselle colorate con adiacenti 2 caselle colorate e tutte le altre caselle colorate abbiano 4 caselle colorate adiacenti?*

Nota: due caselle si dicono adiacenti se hanno un lato in comune.

a) Con dispari caselle colorate, vogliamo vi siano dispari lati che hanno da entrambe le parti una casella colorata, e che ogni casella abbia dispari adiacenze. La somma delle adiacenze di ogni casella sara` dunque il doppio del numero di lati con da entrambe le parti una casella colorata ovvero sara` il doppio di un dispari, cioe` un pari, ma il numero di adiacenze di ogni casella e` dispari e le caselle sono dispari; una somma di dispari termini dispari sara` dispari, il che contraddice l'ipotesi che il numero di lati "comuni" sia dispari. Quindi la richiesta e` inesaudibile.

b) Sì, esiste una simile combinazione:



O anche altre. Quali?

c) Poniamo un sistema di coordinate (1,100)-(1,100) e distinguiamo le caselle a seconda che abbiano coordinate entrambe pari o entrambe dispari e una pari e una dispari chiamando c e d i due tipi. Ora si ha che c=c2+c4 cioe` ci sono caselle con 2 o con 4 adiacenze e similmente d=d2+d4 e quindi si avra` che il numero di lati con da entrambe le parti una casella colorata sara` (2 * d2+ 4 * d4+2 * c2+4 * c4)/2 . Ora una casella d può essere adiacente solo a caselle c e quindi il numero di tali lati e` 2*d2+4*d4=2*c2+4*c4. Allora d2-c2=2(c4-d4) e quindi la differenza e` pari. Dovra` esserlo allora anche la somma d2+c2=2(c4-d4) + 2 * c2 e quindi la richiesta e` impossibile.

NOTA : Non credo ci sia bisogno di commento: le soluzioni sono gia` confuse così. Io le avevo scritte in una calligrafia orrenda e avevo anche sbagliato la seconda. Quindi non voglio aggiungere nulla. *[Non sono d'accordo sul fatto che il problema sia "brutto", dopo aver visto la soluzione. Da qui a capirla, pero`, ce ne corre... (RdA)]*

Posto che qualcuno di voi si chieda come mai ci sono cosi` tanti riferimenti calcistici, sappiate che nella stanza a fianco una torma di scatenati sta guardando i Mondiali.

7. Pagina 46

Vi ricordate la somma alla Gauss, quella di quando aveva cinque anni?

Vanno trovati ***m*** e ***k*** per cui $m+(m+1)+\ldots+(m+k)=1000$. Usando la formula per le progressioni aritmetiche, abbiamo

$$\frac{2m+k}{2}*(k+1)=1000$$

o, equivalentemente,

$$(2m+k)*(k+1)=2000$$

Ora, il numero $(2m+k)-(k+1)=2m-1$ e\` ***dispari***, e il risultato di una sottrazione e\` dispari solo se un termine e\` pari e l'altro e\` dispari. Inoltre, essendo ***m*** positivo (primo termine della successione richiesta), deve essere $2m+k>k+1$.

Scomponendo si ha $2000=2^4*5^3$ che ammette quindi come fattori primi ***dispari*** unicamente ***1***, ***5***, ***25***, ***125***.

Per avere $(k+1)$ dispari dobbiamo considerare solo ***1***, ***5***, ***25*** mentre per avere $(2k+m)$ dispari abbiamo da considerare solo ***125***. Quindi si hanno le soluzioni:

$k+1=1$	$\Rightarrow$	$k=0$	$\Rightarrow$	$2m+k=2000$	$\Rightarrow$	$m=1000$
$k+1=5$	$\Rightarrow$	$k=4$	$\Rightarrow$	$2m+k=400$	$\Rightarrow$	$m=198$
$k+1=25$	$\Rightarrow$	$k=24$	$\Rightarrow$	$2m+k=80$	$\Rightarrow$	$m=28$
$2m+k=125$	$\Rightarrow$	$k+1=16$	$\Rightarrow$	$k=15$	$\Rightarrow$	$m=55$

In cui le prime tre sono ricavate dai possibili valori di $(k+1)$ e l'ultima dal possibile valore di $(2m+k)$.

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 Da Aristotele a Lewis Carroll - [002] Da Lewis Carroll a Lewis Carroll

Se a questo punto siete caduti completamente addormentati, avete tutta la mia comprensione. Sembra che parlare di logica sia una delle cose piu\` noiose a questo mondo; i libri in merito di un Grande come Lewis Carroll[2] sono di una dormaggine che non li consiglierei neanche a voi (sara\` per questo che sono firmati "*C. L. Dogson*"?). In compenso, da alcune cose noiose il nostro riusciva a cavare dei problemi veramente validi.

$X \in Y$	$X \in \overline{Y}$
$\overline{X} \in Y$	$\overline{X} \in \overline{Y}$

Vale anche qui lo stesso *caveat* di prima: date le peculiari idee del Nostro sull'ontologia, ogni tanto dovremo tagliare un po\` per i campi dal punto di vista terminologico.

Prendiamola semplice, complichiamo dopo.

[2] Gli "*Alice*" li avete letti bene, si? In rete trovate piuttosto facilmente le edizioni inglesi e se volete qualcos'altro sul tipo vi consiglio quelli di *Sylvie and Bruno*, meno noti. Anche di questi trovate l'edizione inglese in rete, purtroppo senza disegni (di Harry Furniss, non di Tenniel). Esiste un'edizione italiana (Sonzogno?) con i disegni, ma la traduzione non e\` una meraviglia. Se trovate i disegni in rete, fatemelo sapere che mi servono per un'altra cosa.

Voglio sperare sarete d'accordo con me che dato un insieme ***X*** e una proprieta` ***Y*** sono possibili solo quattro visioni del mondo; diamone una rappresentazione insiemistica e poi cerchiamo di tracciare un *diagramma bilatero* (la soprasignatura sta per negazione, che mi e` piu` simpatica):

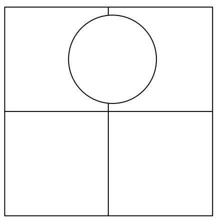
1. $X \in Y$
2. $X \in \overline{Y}$
3. $\overline{X} \in Y$
4. $\overline{X} \in \overline{Y}$

Si, la cosa sembra un po` manichea... Mai detto che un qualcosa debba appartenere a una e una sola delle categorie indicate, ossia si tratta di gestire le proposizioni particolari ($\exists X \in Y$). Possiamo pero` dire, secondo gli assiomi aristotelici, che e`: $\exists X \in Y \Rightarrow \exists X \notin Y \Rightarrow \exists X \in \overline{Y} \Rightarrow \forall X \in \left(Y \bigcup \overline{Y}\right)$ e che quindi 'ste ***X*** appartengono a *entrambe* le caselle della prima riga del diagramma. Vale evidentemente lo stesso discorso per le particolari negative (comunque le formiate), e quindi direi che c'e` tutto.

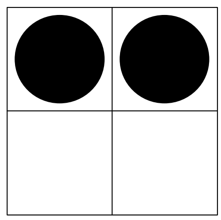
Bene, la noiosaggine di Carroll (e quello che ha fatto si` che tutti i suoi testi di logica siano oggi ampiamente dimenticati) consisteva nel sostenere che ad esempio la nostra proposizione particolare era un'ammissione dell'*esistenza* di ***X***, e su questo problema la smenava per almeno una trentina di pagine. Inoltre, tendeva a perdere per strada il segno di appartenenza, scrivendo di seguito soggetto e predicato (il che, se fate il "conto" con delle proposizioni sensate, di solito e` piu comodo).

Per fare i conti, Carroll usava dei gettoni che venivano posizionati nelle opportune caselle o a cavallo: per intenderci, di seguito vi do` le combinazioni possibili (*almeno guardatele*: mi ci e` voluto un mucchio di tempo, a farle...). Il gettone *bianco* indica l'esistenza, quello *nero* l'inesistenza; si noti, tra l'altro, che possiamo mettere "a cavallo" solo un gettone *bianco*. Se volete seguire la tradizione, utilizzate dei gettoni *rossi* per l'esistenza e *grigi* per l'inesistenza[3]. Vi fornisco anche il "parlato", nella forma di Carroll.

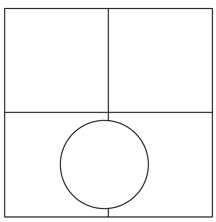
Esiste qualche ***X***



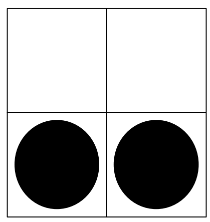
Non esiste nessun ***X***



Esiste qualche ***X`***



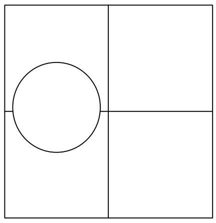
Non esiste nessun ***X`***



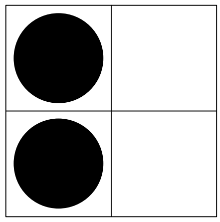
[3] Per ricordarsi i colori, Carroll aveva scritto (come suo solito) una poesiola:

See, the Sun is overhead,
Shining on us, **FULL** and **RED!**
Now the Sun is gone away,
And the **EMPTY** sky is **GRAY!**

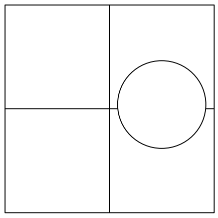
Esiste qualche ***Y***



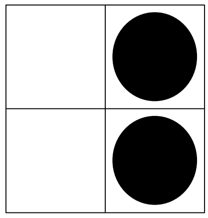
Non esiste nessun ***Y***



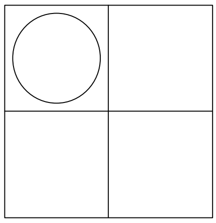
Esiste qualche ***Y`***



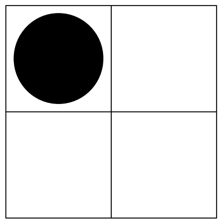
Non esiste nessun ***Y′***



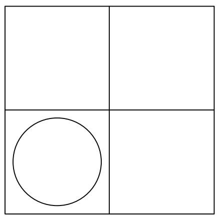
Esiste qualche ***XY***
(Qualche ***X*** e` ***Y***)
(Qualche ***Y*** e` ***X***)



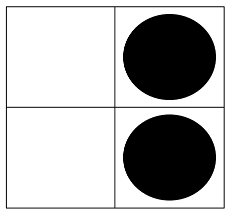
Non esiste nessun ***XY***
(Nessun ***X*** e` ***Y***)
(Nessun ***Y*** e` ***X***)



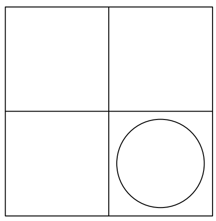
Esiste qualche ***X`Y***
(Qualche ***X`*** e` ***Y***)
(Qualche ***Y*** e` ***X`***)



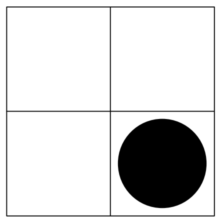
Non esiste nessun ***X`Y***
(Nessun ***X`*** e` ***Y***)
(Nessun ***Y*** e` ***X`***)



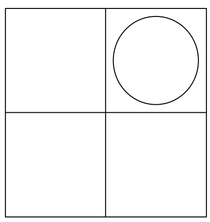
Esiste qualche ***X`Y`***
(Qualche ***X`*** e` ***Y`***)
(Qualche ***Y`*** e` ***X`***)



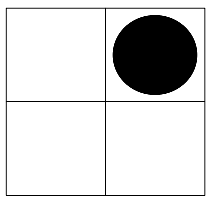
Non esiste nessun ***X`Y`***
(Nessun ***X`*** e` ***Y`***)
(Nessun ***Y`*** e` ***X`***)

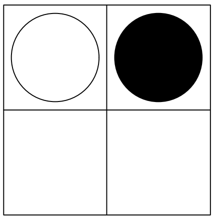
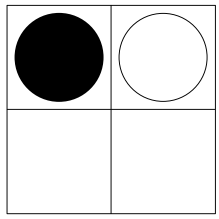
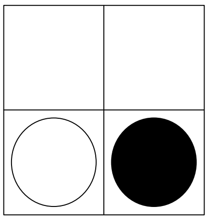
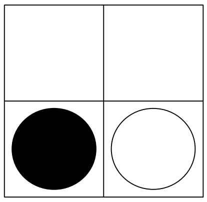
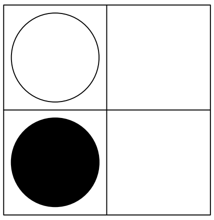
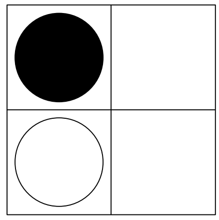
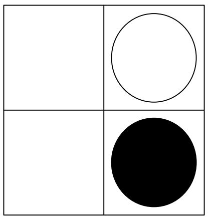
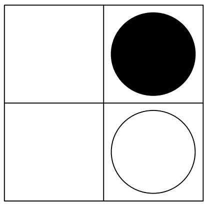
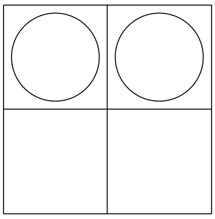
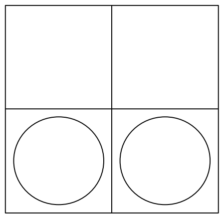
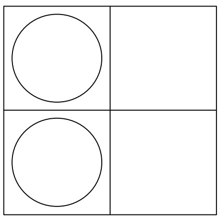
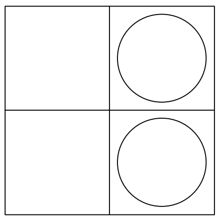


Esiste qualche ***XY`***
(Qualche ***X*** e` ***Y`***)
(Qualche ***Y`*** e` ***X***)



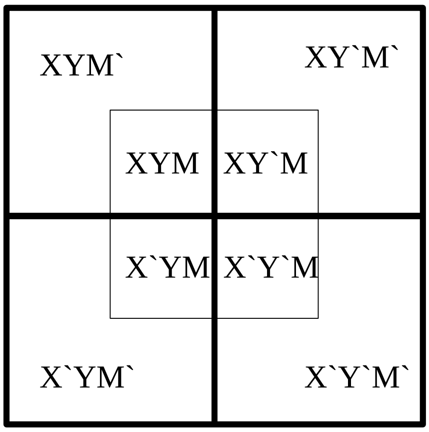
Non esiste nessun ***XY`***
(Nessun ***X*** e` ***Y`***)
(Nessun ***Y`*** e` ***X***)



Tutti gli ***X*** sono ***Y***		Tutti gli ***X*** sono ***Yˋ***	
Tutti gli ***Xˋ*** sono ***Y***		Tutti gli ***Xˋ*** sono ***Yˋ***	
Tutti gli ***Y*** sono ***X***		Tutti gli ***Y*** sono ***Xˋ***	
Tutti gli ***Yˋ*** sono ***X***		Tutti gli ***Yˋ*** sono ***X***	
Alcuni ***X*** sono ***Y*** Alcuni ***X*** sono ***Yˋ***		Alcuni ***Xˋ*** sono ***Y*** Alcuni ***X'*** sono ***Yˋ***	
Alcuni ***Y*** sono ***X*** Alcuni ***Y*** sono ***Xˋ***		Alcuni ***Yˋ*** sono ***X*** Alcuni ***Yˋ*** sono ***Xˋ***	

...E a questo punto il pensiero dei piu` anglofoni di voi e` "Ready to make the beer...".

Ancora un attimo di pazienza. Una volta tanto, complicarsi la vita porta a qualcosa di interessante. Quello che ha fatto il Dogson e` stato inventare i ***diagrammi trilateri***. Consideriamo la figura qui sotto: vi prego di notare che alcune parti sono indicate in bordi piu` marcati.

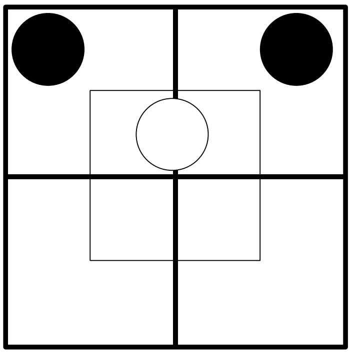


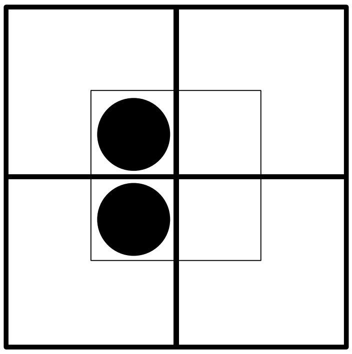
Per utilizzare lo stesso linguaggio gia` introdotto, definiamo ***X*** e ***Y*** come *retinendi* e ***M*** come *eliminando* (*termine medio*, se preferite), e eliminiamo ***M*** facendo *collassare* il disegno in un *disgramma bilatero*. Il tutto seguendo determinate regole, logicamente; quando parliamo di *quadrati*, ci riferiamo alle parti a bordo evidenziato, cioe` (ad esempio), un "quadrato" e` quello che contiene *sia **XYM`** che **XYM***; vi prego di notare che all'interno di un quadrato l'unica variabile e` l'eliminando.

Allora, le regole:

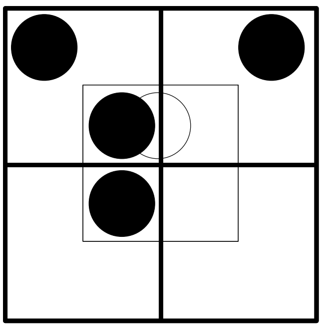
1. Se un quadrato contiene due gettoni ***neri***, trasferite un gettone ***nero*** nella posizione equivalente del diagramma bilatero.
2. Se un quadrato contiene almeno un gettone ***bianco***, trasferite un gettone bianco nella posizione equivalente del diagramma bilatero.
3. In tutti gli altri casi non fate nulla.

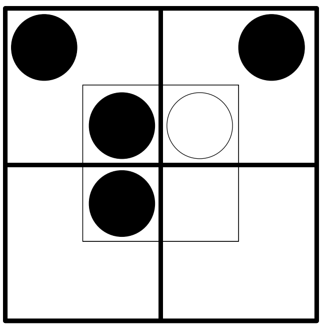
Ad esempio, prendiamo le due premesse $(\forall X \in M),(\forall Y \notin M)$; vorremmo trarne qualche edificante conclusione[4].





Allora, per prima cosa definiamo le due premesse su due diagrammi trilateri, dove il primo ci dice che ***tutti gli X sono M*** mentre il secondo sostiene che ***Nessun Y e` M***. Spero che, dalla mia fatica precedente, tutto risulti relativamente chiaro. Il tondo bianco nel primo disegno sostiene che gli ***X*** (sia quelli ***Y*** che quelli ***Y'***) sono ***M***, e i due tondi neri ci dicono che nessun ***X*** e` un ***M'***, sia esso ***Y*** o ***Y'***. Nel secondo disegno gli ***Y*** (siano essi ***X*** o ***X'***) non sono negli ***M*** (non stiamo a sindacare se siano negli ***M'***...).



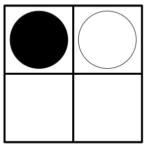


A questo punto, sovrapponiamo i due diagrammi (lo so, fa schifo... li ho proprio sovrapposti...), e spostiamo il gettone ***bianco*** che sta evidentemente dichiarando una

[4] Se avete studiato vi accorgete subito che e` in seconda figura (l'eliminando e` predicato nella maggiore e nella minore) la prima e` universale affermativa (quindi ***A***) e la seconda universale negativa (quindi ***E***), e le uniche che ammettono questa composizione sono **Camestres** *e* **Camestrop**.

cosa un po` balorda.

Dai che siamo vicino alla fine; considerando i quattro quadrati (quelli che rappresentano l'eliminando, ossia ***M***, ossia il termine medio), cerchiamo di far collassare il nostro ultimo disegno in un qualcosa di sensato.



Notiamo che il quadrato in alto a sinistra contiene *due gettoni neri*, e quindi dalla ***Regola 1*** possiamo farlo collassare in un gettone nero sul diagramma bilatero. Inoltre, il quadrato in alto a destra contiene *almeno un gettone bianco*, e quindi possiamo farlo collassare in un gettone bianco sul bilatero in base alla ***Regola 2***; tutti gli altri gettoni non hanno configurazioni interessanti, quindi li ignoriamo bellamente in base alla ***Regola 3***. Il risultato quindi e` quello indicato nella figura, ossia che ***tutti gli X sono Y`*** o, se preferite, ***nessun Y e` X***.

Carino, vero? ...E si puo` fare con tutti i sillogismi (neanche per sogno: fateveli voi, se vi va).

Anche qui potei darvi le configurazioni piu` semplici ma, siccome sono trentadue (quelle semplici) e dovreste aver capito come gira il fumo, liberi di disegnarveli da soli alla prima riunione noiosa.

Logicamente Carroll non si e` fermato qui; ha anche inventato un grazioso giochetto, noto come ***soríte*** (accento acuto sulla "i"); il nome deriva dal greco σορειτησ[5].

Vi faccio qualche esempio, si? Originali di Carroll:

1. Things sold in the street are of no great value
2. Nothing but rubbish can be sold for a song
3. Eggs of the Great Auk[6] are very valuable
4. It is only what is sold in the street which is really rubbish.

An egg of the Great Auk is not to be had for a song

Questo e` un po` piu` difficile:

1. The only animals in this house are cats;
2. Every animal is suitable for a pet, that loves to gaze at the moon;
3. When I detest an animal, I avoid it;
4. No animals are carnivorous, unless they prowl at night;
5. No cat fails to kill mice;
6. No animals ever take to me, except what are in this house;
7. Kangaroos are not suitable for pets;
8. None but carnivora kill mice;

---

[5] Quando i colleghi latitano (Doc ha fatto il classico), anche le mogli vengono utili, soprattutto se si sono portate dietro il Rocci; oltre a spiegare che quella roba si traduce come "sorite", da` la traduzione alternativa "sillogismo di massa con piu` proposizioni". francamente, preferisco la spiegazione dell' *Enciclopaedia Britannica*:

> ...forma di argomentazione in cui una serie di sillogismi *incompleti* sono presentati in modo tale che il predicato di una premessa sia il soggetto di un'altra; la congiunzione del primo soggetto con l'ultimo predicato da` la conclusione del sillogismo.

A occhio, direi che *E.B.* si limita alla prima e alla quarta figura (e` un'opinione, non ne sono sicuro); per "incompleti" si intende che vi mancano le conclusioni, ma ci sono tutte le premesse. Quello che *E.B.* non dice e` che per complicare la cosa potete mettere in disordine il tutto.

[6] **Nota per i pignoli**: Trattasi del *Pinguinus Impennis*, estinto il 4 giugno del 1844 (e poi non dite che sono impreciso, quando si tratta di dati inutili)

9. I detest animals that do not take to me;
10. Animals, that prowl at night, always love to gaze at the moon.

I always avoid a kangaroo.

Provate a crearne qualcuno sui colleghi, alla prossima riunione noiosa...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms