Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell'altro millennio

Numero 040 - 2002-05

1. Editoriale 1
2. Problemi 4
2.1 Criceti & Cocorite 4
2.2 La passeggiata del soldino 4
3. Bungee Jumpers 5
4. Soluzioni e Note 5
4.1 [039] 5
4.1.1 Guida Uto Ughi 5
4.1.2 Problemi di Euro 9
5. Quick & Dirty 10
6. Zugzwang! 10
6.1 Amazzoni 10
7. Pagina 46 11
8. Paraphernalia Mathematica 12
8.1 La Sezione Aurea 12

1. Editoriale

Le esternazioni scrittorie di Doc sono contagiose... Anche le Forze Sane della Redazione hanno dovuto soccombere.

So che una domanda assilla come un tarlo la vostra mente... "Ma cosa succede, durante i Comitati di Redazione?". Alcuni fortunati mortali hanno avuto l'onore di parteciparvi, e si stanno riprendendo solo ora. Per soddisfare comunque le vostre curiosita`, Alice ha deciso di raccontarvi l'ultimo.

Il Cubana era chiuso. Forse non e` un grande evento, forse era solo la settimana in cui il cuoco dagli occhi a mandorla e la lisergica escono a cena (a mangiare messicano), ma per la redazione per un momento e` stato un dramma.

Sono ormai quasi tre anni che la redazione di RM e` una redazione virtuale, i cui elementi (che ormai chi ci legge ha imparato a conoscere) si sono magari incontrati una prima volta in tre dimensioni, ma da quando scrivono di matematica, insieme, hanno un'essenza le cui dimensioni scorrono su bit e byte.

Redazione, poi, e` una parola grossa. Se ne avessimo una, sarebbe un'enorme sgabuzzino ingombro di carta e oggetti di tutti i generi, dove i libri di sana matematica sarebbero in minoranza tra tutti gli altri interessi di questi tre individui tanto diversi. Ne ho descritto il contenuto, una volta, mentre cercavo di raccontare chi siamo, e mi sono resa conto che in qualche parte, in un angolo delle nostre rispettive case o dei nostri uffici, parti di questa stanza immaginaria sono realmente esistenti.

Non esiste una redazione vera e propria, i protagonisti nel quotidiano hanno dei lavori, noiosi o interessanti che siano, che richiedono la loro presenza in uffici in orari canonici, e si incontrano e discutono attraverso mail e rubando ore al sonno o alle pause caffe`.

Pero`, due o tre volte l'anno a seconda delle congiunzioni astrali e di un elaborato (ovviamente dal GC) sistema di date *[E` veramente "elaborato": sto scrivendoci un PM. Sul serio! (RdA)]*, i nostri eroi si incontrano e benedicono l'evento con abbondanti quantita` di birra. Si trovano sempre nello stesso posto, perche` lo conoscono, perche` la cameriera - soprannominata con buone ragioni "la lisergica" - capisce quando ordinano le medie chiare e gli involtini primavera, seguiti da un piatto di gnocchi al pomodoro, una pizza e dei gamberi con curry.

Il posto i cui la redazione si riunisce, insomma, e` una contraddizione di termini, un po` come la redazione stessa, un ristorante/pub/pizzeria/birreria[1]. Siamo diversi, ognuno con il suo ruolo specifico. Il GC che sa sempre di cosa parla, Piotr che sa sempre come dire qualsiasi cosa e Alice che non sa mai niente ma fa un sacco di domande, programmano a distanza una data per incontrarsi e la programmano per mesi stilando una paffuta agenda, che contiene sempre almeno un paio di voci con birra e involtini primavera.

Una volta sul tavolo, tra le patatine e i boccali, il GC ha posato il messaggio agli alieni: Alice e Piotr a definire riga per riga, il GC a controllare e sovrintendere, la lisergica preoccupata per l'uso improprio delle tovagliette di carta che portava altra birra. Per le settimane successive le mail si sono gonfiate di soluzioni e disegni, Piotr in vena artistica aveva elaborato una decina di modi grafici per poter descrivere i geroglifici.

Ad un altro CdR si e` giocato a Roller Coasters, al solito Piotr e Alice a scornarsi e il GC a ridere dietro il fumo della pipa e verificare teorie.

Ci sono tanti motivi per cui il Cubana e` il posto ideale delle riunioni del CdR di RM, ma prima tra tutte che e` sempre stato lì, e sempre aperto. Ma per l'ultimo incontro la persiana esterna si e` fatta trovare chiusa, e nessuna invettiva e` riuscita a farla aprire.

Al diavolo la tradizione, si può sempre cambiare. Niente involtini primavera, pazienza, niente lisergica, ma almeno la birra...

Per farla breve, il Comitato di Redazione di Rudi Mathematici si e` riunito, ha bevuto birra ed ha lavorato a quasi tutti i punti all'ordine del giorno, anche senza lisergica e grappa di rose finale.

Per prima cosa, discorso introduttivo del Gran Capo, mentre la cameriera interrompeva con menu e frequenti passaggi e il tavolo d'angolo che si era scelto risultava essere proprio accanto al bagno del locale, insomma, il GC cominciava con il ricoprire il resto della redazione di doni assolutamente immeritati e dimensionalmente impressionanti (so di gente che non ha mai letto niente che superasse le venti pagine...). RM e` un prodotto assolutamente unico, interamente prodotto dal GC, stimolato dalla scarsa attivita` ma alto interesse degli altri elementi. Piotr, grazie alle sue capacita` dialettiche, si e` incaricato di smaltire la posta e curare l'amministrazione del sito, Alice non combina mai niente di buono (a parte qualche

[1] *Piu` precisamente, un pub irlandese, di nome "Cubana", con cuoco cinese in grado di fare passabili pizze. Se il multietnico continua ad essere trendy, siamo a posto per un po`... (RdA)*

soluzione ogni tanto e commenti estemporanei ad altrui soluzioni che hanno gia` fatto scappare almeno un lettore...). E` quindi facile immaginare che il GC ad ogni riunione tenti di stimolare i due fagnani, con letture formanti ("Gargantua e Pantagruele" di Rabelais) e meravigliosi quaderni di appunti che lui spera vedersi riempire di contributi alla rivista.

Gli scambi di doni si sono protratti ancora per poco, mentre il cioccolato svizzero veniva archiviato*[Questa e` un'altra attivita` fondamentale di Alice: cioccolato per le proli -mie e di Doc- e tabacchi introvabili in Italia per il sottoscritto]*, le monetine separate dal tabacco, e la cameriera veniva placata con l'ordinazione del primo giro di birra.

Piotr, nella veste di gestore del sito, ha estratto un portatile e mostrato tabelle di costi futuri e passati, e qualche barzelletta sconcia enpassant... il portatile e` stato presto eliminato dalla tavola, anche perche` ostacolava la distribuzione delle patatine fritte.

Prossimo punto all'ordine del giorno, un paio di sfide ai nuovi giochi. Piotr e Alice si sono combattuti ad "Amazzoni", con vittoria finale di Piotr, e a "Epaminonda", dove Alice e` riuscita ad avere la meglio. La conclusione (di Alice) e` stata che i due giochi, giocati, sono molto piu` belli di come li si immagina leggendo la descrizione. Inutile dire quale le sia piaciuto di più, Alice ama vincere.

Se volete un consiglio, fate come noi. Cominciate a collezionare monetine da un centesimo (prima che vengano messe fuori produzione) e fate una prova, Epaminonda e` descritto nel numero 35 di RM, vi servono un sacco di monetine di due tipi, spero abbiate ancora una buona collezione delle vecchie 50 lire... i rappresentanti di RM possono usare anche i 5 centesimi di franco svizzero. Per Amazzoni, guardate piu` avanti in questo numero *[Qui di monetine ve ne servono una caterva... Tutte uguali, pero` (RdA)].*

E poi il GC ha cominciato ad estrarre dalla sua borsa delle meraviglie le nuove proposte per i futuri numeri di RM, figure geometriche scomposte e ricomposte, magie con numeri e forme. Nel frattempo Alice studiava la soluzione di un problema - apparentemente risolvibile dal 2% della popolazione mondiale a detta di Einstein - abilmente esposta da Rudi -che ovviamente appartiene a quel 2%, mentre Alice, altrettanto ovviamente, no- e la cameriera trasportava boccali da litro scambiando vuoti con pieni *[Alice qui dimentica che il mio unico contributo e` stato dichiarare che Einstein **non** puo` aver detto la frase del 2% in merito a questo problema. Le sigarette Dunhill sono uscite dopo il 1960].*

Molto di piu` non si può raccontare, anche perche` i fumi dell'alcool ne sfumano il ricordo, vi basti sapere che i nostri eroi hanno dimenticato un solo punto all'ordine del giorno (una proposta di un lettore su come vincere al super-enalotto...), ma che sicuramente il discorso verra` trattato nei prossimi scambi epistolari *[...anche se per il momento non ci abbiamo ancora lavorato sopra: prima il giornale, poi il piacere].*

Il Cubana, pero`, speriamo che riapra. Le birre da litro non le avevano, ma la grappa di rose ci sarebbe stata...

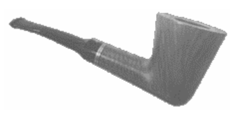
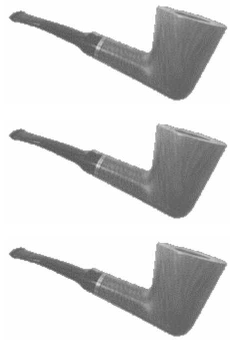
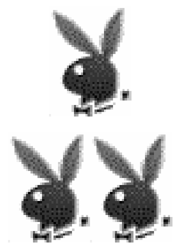
Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

Voglio sperare, entro questo numero, di aver convinto i due soci a fornire le loro valutazioni di difficolta` dei problemi. Allora, siccome non saremo mai d'accordo, proviamo con una simpatica tabellina.

	Rudy d'Alembert	**Alice Riddle**	**Piotr R. Silverbrahms**
Criceti & Cocorite			
La Passeggiata del Soldino			

Carini, vero? La prima e` la pipa che non avro` mai (costa sul migliaio di euro), la seconda e` la birra preferita da Alice (si legge "Guinness", si?) E il terzo rappresenta il numero di "conigliette" di Playboy necessario per convincere Doc a risolvere il problema.

Se pensate che sono l'unico normale, sappiate che qui si va a maggioranza.

2.1 Criceti & Cocorite

Sono animali che non mi sono mai piaciuti (da piccolo avevo un criceto, e mi ha morso un dito). Non vedo comunque il motivo di escluderli dai problemi; per vendicarmi, li metto in uno facilefacile.

Un negoziante di animali compra un certo numero di criceti e la meta` di questo numero di coppie di pappagallini, pagando ***2*** euro per ogni criceto e ***1*** euro per ogni pappagallino. Per ogni bestiola mette un prezzo di vendita superiore del ***10%*** rispetto al prezzo di acquisto.

Dopo aver venduto tutte le bestiole tranne ***7*** si accorge di aver ricavato esattamente quanto aveva pagato per l'acquisto delle bestiole (per dirla con i paroloni, arriva al break-even).

Quanto guadagnera` se riuscira` a venderle tutte?

2.2 La passeggiata del soldino

Questo e` decisamente tosto. Ammesso tutto, Excel, i tentativi, HAL9000, il fratellino piu` piccolo... Tranne sbirciare la soluzione (tanto, non vi dico dove l'ho preso...).

ABCD e` una scacchiera rettangolare, con ***AB=20*** e ***CD=12***, divisa in ***20x12*** quadrati, e ***r*** e` un numero (positivo) dato.

Nel centro del quadrato dell'angolo ***A*** e` posata una moneta (valore insignificante) che puo` essere mossa nel centro di un altro quadrato purche` la distanza tra i due centri sia ***esattamente*** $\sqrt{r}$ ; il problema e` trovare una sequenza di mosse che portino la moneta dal quadrato del vertice ***A*** al quadrato del vertice ***B*** in alcuni casi particolari:

1. Se ***r*** e` divisibile per ***2*** o per ***3***
2. Se ***r=73***
3. Se ***r=97***

Confesso, volevo usarlo per BJ ma poi, col fatto che avete una scacchiera, mi e` sembrato troppo "pratico"...

Giusto per darvi un aiutino: la prima parte del primo punto e` facile ma non troppo, la seconda parte del primo punto non ci sono arrivato, gli altri due, come amo dire, "Quando il gioco si fa duro, i giocatori si chiedono se e` il caso...".

3. Bungee Jumpers

Qualche masochista incallito preferisce, prima di guardare la soluzione, provare a risolvere per conto suo BJ, ma l'avere la soluzione "subito dopo" fa si` che sia troppo facile sbirciare; quindi, per decisione della redazione, da questo numero "Pagina 46" assurge al livello di capitolo principale (sarebbe l'Heading 1, per gli anglofoni. Questo aumenta le dimensioni dell'indice, quindi l'Editoriale sforera` sovente in seconda pagina. Spiacente per gli alberi, ma questo vi costera` un foglio di carta in piu`, se la stampate...) e si sposta piu` avanti, mentre BJ va piu` indietro; in mezzo, almeno, ci saranno le soluzioni dei problemi.

Sono dati quattro numeri positivi (A_0, B_0, C_0, D_0). Dimostrare che attraverso le iterazioni:

$$\begin{cases} A_i = |A_{i-1} - B_{i-1}| \\ B_i = |B_{i-1} - C_{i-1}| \\ C_i = |C_{i-1} - D_{i-1}| \\ D_i = |D_{i-1} - A_{i-1}| \end{cases}$$

Si giunge entro un numero finito di passi alla situazione $(0,0,0,0)$.

4. Soluzioni e Note

Per prima cosa, c'e` uno strascico della soluzione del "problema dei teppisti" di Sam, il quale in un'Apologia (di se medesimo) fa notare tre cose:

1. Che tra lui e l'esame di Fisica ci passa un discreto lasso di tempo *[Anche tra me e il mio, ma nell'altro senso]*
2. Che non aveva voglia di calcolare i Joule necessari ad un teppista per estrinsecare la sua arte; da qui il concetto di "media". *[D'accordissimo. Cercavo solo la rissa...]*
3. Che la metonimia non e` ne` matematica ne` fisica ma dovrebbe esservi accettata onde poter sostituire la causa con l'effetto. *[...e a occhio e croce l'ho trovata. Cio` non e` bello, se mi passi la litote. C'e` un retore in sala?]*

4.1 [039]

4.1.1 Guida Uto Ughi

Non ci credo, che la formula dell'Effetto Doppler l'avevate tutti li` sulla punta delle dita.

Dunque, per prima cosa correggiamo un paio di improprieta` nella formulazione. Sia comunque ben chiaro che non mi scuso e che non sono errori, in quanto avete capito tutti cosa volevo dire.* In primis*, si, l'aereo si muove di moto rettilineo orizzontale uniforme ecdcetera eccetera; altrimenti il problema e` intederminato. In secundis*, si, "ottava" e` piu` giusto di "scala". Comunque, in una (brutta) traduzione del Baynes li ho visti usare entrambi per dire quella-cosa-li`.*

Detto questo, cerchiamo di capire cos'e` successo.

Sono arrivate soluzioni da Enrico, Sam, Cld e PuntoMauPunto; inoltre, c'era la mia vecchia. "E perche` conti la tua?" Semplice, perche` ***non ce ne sono due che danno lo stesso risultato****. E sono tutte giuste. Per evitare di stamparvele tutte e cinque, tagliuzzo un pochino.*

Enrico *parte dalla formula dell'Effetto Doppler sia per il punto del "Do" che per il punto del "La".*

Imponendo

> V_s = Velocita` del suono nell'aria = 340 m/s
> V_r = Velocita' relativa dell'aereo rispetto alla fabbrica
> V_h = Velocita` orizzontale dell'aereo (630 Km/h = 175 m/s)
> F_s = La frequenza della sorgente (la fabbrica)
> F_r = La frequenza ricevuta.

Siccome la nota emessa dalla sirena e` sempre la stessa, ottiene il sistema:

$$\begin{cases} F(LA) = F_s\left(1+\dfrac{V_r}{V_s}\right) \\ F(DO) = F_s\left(1-\dfrac{V_r}{V_s}\right) \end{cases} \qquad \textbf{[001]}$$

E (sommando membro a membro) si ottiene **F_s** *che risulta la media (aritmetica) tra le due note, come ci si poteva aspettare per motivi di simmetria[2]. La prossima parte la trovo decisamente carina:*

La distanza dell'aereo dalla fabbbrica è:

$$d = \sqrt{s^2 + h^2} \qquad \textbf{[002]}$$

da cui derivando e considerando $\dfrac{dh}{dt} = 0$, si ottiene:

$$V_r = \frac{s * V_h}{\sqrt{\dfrac{V_h^2}{V_r^2} - 1}} \qquad \textbf{[003]}$$

quindi, invertendo la formula,

$$h = s * \sqrt{\frac{V_h^2}{V_r^2} - 1} \qquad \textbf{[004]}$$

Trovo sia piu` elegante del mio metodo: ero passato dalla trigonometria, non avevo pensato di cercare il minimo della funzione.

La via trigonometrica e` stata quella scelta da* ***Sam*** *che, da bravo retore come ha dimostrato poco piu` sopra, cerca di dare la colpa della soluzione nell'ordine a Doppler, alla trigonometria, all'acustica e all'algebra, facendosi carico della possibilita` di errori solo nell'ultimo punto: vi passo solo la traccia, giusto per capire la strada. Trovo la

[2] Questa frase e` qui solo perche` so che da` un fastidio tremendo a Doc.

presentazione decisamente ben schematizzata. Sam, "taglio" un pezzo, i motivi saranno piu` chiari dopo.

Secondo Doppler:

$$f' = f * \left(1 + \frac{v}{c}\cos a\right)$$
$$f'' = f * \left(1 - \frac{v}{c}\cos a\right)$$ **[005]**

dove ***v*** e` la velocita` dell'aereo, ***c*** quella del suono nell'aria, ***f*** e` la frequenza della sirena, ***f'*** e` la freq. percepita in avvicinamento e ***f''*** quella percepita allontanandosi, mentre ***a*** e` l'angolo tra la traiettoria del biplano e la retta tra il biplano e la fabbrica.

Secondo la trigonometria:

$$h = 200 * \frac{\sin a}{\cos a}$$ **[006]**

dove h e` l'altezza a cui vola l'aereo. E $\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$

Secondo l'acustica:

$$k = \frac{f(LA)}{f(DO)}$$ **[007]**

Secondo l'algebra:

rapportando f' e f''

$$\cos a = \frac{k-1}{k+1} * \frac{c}{v}$$ **[008]**

e quindi

$$h = 200 * \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k-1}{k+1} * \frac{c}{v}\right)^2}}{\left(\frac{k-1}{k+1} * \frac{c}{v}\right)}$$ **[009]**

Secondo me:

ho sbagliato nel primo punto.

Nel senso che ha sbagliato Doppler?

Anche ***Cld*** *ha seguito la via trigonometrica, ma della sua soluzione non vi cito nulla. Come valore aggiunto, nella dimostrazione, ci informa comunque che Doppler si chiamava Christian Andreas e che la nota della sirena dovrebbe essere suppergiu` un* Fa. *Del resto della sua risposta ne parliamo dopo.*

Non so se si nota, ma non vi ho dato neanche un risultato. Infatti, olte che nella via piu` strettamente matematica, si sono estrinsecate diverse scuole di pensiero anche nella Teoria Musicale, raggruppabili in tre grandi categorie:

1. *Il gruppo* Jay O'Rear *(o* Amaldi*, oppure* PanitteriBarcioCorsello... *insomma, quello che ha scritto il vostro testo di fisica). Filosofia di questo gruppo e` che* "Tre pagine prima dell'effetto Doppler ci sono le frequenze delle note...". *Rappresentante* **Enrico***, che utilizza i valori* **F(La)=440 Hz** *e* **F(Do)=261.52 Hz**.
2. *Il gruppo di* Bach *(Johann Sebastian) che definisce il rapporto tra due semitoni adiacenti come* $\sqrt[12]{2}$ *; da cui, per il rapporto tra le due frequenze considerate, si utilizza un comodo valore* $\sqrt[12]{2^9}$ *. Rappresentata da* **Cld** *e da* **Sam***: voglio sperare che per fare i calcoli non abbiano usato Excel.*
3. *Il gruppo di* Pitagora *(o di* Aristo & Rietz*) che usa un piu` tranquillo* $\frac{5}{3}$ *per il rapporto tra le note considerate. Rappresentato da* **Me** *(e PuntoMauPunto): e tanto basti. Sono stonato come una campana e di sicuro non mi accorgo della differenza tra i due; inoltre, calcolare il valore dei Bachiani con il regolo calcolatore introduce una quantita` di errori.*

Giusto per cambiare discorso: Era Messiaen che aveva scritto un pezzo che utilizzava tutte e solo *le 200 divisioni tra il Do e il Re? (chiunque sia stato... erano Bachiane o Pitagoriche?).*

Cld*, comunque, si e` lanciato in un'interessante concione.*

Solo a titolo di curiosita`, lasciando invariate tutte le altre variabili, si ottiene che il massimo effetto Doppler che si può manifestare (ovviamente con l'aereo che vola rasoterra) puo` portare la nota finale ad una frequenza minima di $146,\overline{6}$ Hz, corrispondente approssimativamente a un Re dell'ottava inferiore. L'unico Do possibile e` quindi quello relativo alla stessa ottava. Per poter raggiungere il Do dell'ottava inferiore (130,81 Hz), il nostro amico "orecchie-a-punta" dovrebbe viaggiare ad una velocita` di circa 1326 Km/h (Mach 1,05). Praticamente come una vecchietta che usa la sua nave stellare solo per andare a messa la domenica. Anche se alla guida dell'aereo ci fosse un cetaceo geneticamente modificato, per poter sentire qualcosa 200 metri dopo la verticale della fabbrica dovrebbe andare al massimo a 2447 Km/h.

Un ultimo problema (lasciando perdere il sistema di riferimento rispetto a cui la velocita` dell'aereo e` misurata) riguarda la velocita` del suono, considerata pari a 350 metri al secondo, ma questo solo perché cosi` l'aereo viaggia esattamente a Mach 0,5. In realta` la velocita` del suono varia sensibilmente in funzione della temperatura dell'aria. Per avere una velocita` di 350 m/sec e` necessario che la temperatura dell'aria sia di circa 32° centigradi (32,039362), per cui dovremmo essere in estate. Sfortunatamente la velocita` del suono non dipende dalla pressione, quindi non so dirvi che tempo facesse *[Se era la sirena di entrata era un tetro mattino autunnale; se quella di uscita, un radioso pomeriggio di primavera].*

In realta`, provando a fare i conti esattamente, risulta che ad una temperatura di 0° centigradi (273,15 Kelvin), l'aereo doveva volare ad un'altezza di 364 metri e 51 centimetri, mentre a 40° centigradi (313,15 Kelvin) l'altezza doveva essere 332 metri e 85 centimetri.

Questo problema riguardo all'effetto Doppler mi ricorda una storiella di tanto tempo fa, dove un fisico era stato accusato di essere passato con il rosso. Messo di fronte al giudice si difese dicendo che a causa dell'effetto Doppler il rosso del semaforo gli era parso verde. Il giudice convenne con lui e lo assolse dalla precedente accusa, ma facendo due conti lo condannò per aver superato di 5.074.382 volte il limite di velocita`. *[Conosco alcuni fisici che guidano cosi`].*

Giunti a questo punto, credo la cosa meno interessante siano le soluzioni. Mi limitero` a dirvi che, tra scale musicali e velocita` del suono, si oscilla tra i **333** *e i* **366** *metri.*

4.1.2 Problemi di Euro

Se sapevo come andava a finire, qui scrivevo "Pesce d'Aprile".

Alcuni di voi sono caduti in un errorino.

Hanno impostato una bellissima equazione in Euro*, inserendo il valore dei Cent moltiplicato per zerovirgolazerocinque, sono andati avanti per un po`, hanno cercato le soluzioni* intere*....Boiinggg! Trovato il palo. In questo modo, i Cent (anche se interi) danno origine a dei valori decimali, e quindi vengono fuori dei valori un po` alti.*

Morale della favola, **Enrico** *e* **PuntoMauPunto** *caricano me e mio figlio sotto una quantita` di monete che spezzerebbe la schiena ad un dromedario di bronzo; Enrico, io tutti quei soldi non li vedo neanche il ventisette...*

Cld... *Beh, ha trovato una via di mezzo. Tra un calcolo in ventesimi e un errore di calcolo, raggiunge delle cifre che si avvicinano abbastanza alla realta`. Ringrazio comunque sentitamente per la grossa stima che tutti voi avete del mio portafoglio.*

Sam *ha avuto qualche problema con dei "primi tra loro", ma si e` corretto per il rotto della cuffia arrivando al risultato giusto (c'e` da dire che lo sbagliato era il piu` giusto tra gli sbagliati). Vai e distruggili*[3]*.*

GreyHawk *e* **Filippo** *raggiungono valori piu` sensati: il primo inserisce alcuni interessanti commenti (e commette un errore madornale), mentre il secondo segue una strada che probabilmente molti di noi apprezzeranno di piu`. Quindi, prendiamo la soluzione di Filippo e i commenti di GreyHawk. In sostanza, il trucco era di fare sin dall'inizio i calcoli in* Cent*; solo in quel modo era corretto imporre l'ottenimento di un valore* intero.

Indico con ***C*** il numero delle monete da 5 cent, con ***E*** il numero delle monete da 1 euro (100 cent) *[Filippo non lo dice, ma sta parlando dei* **miei** *soldi]*. Per la prima indicazione:

$$2*(5C+100E)=5E+100C \qquad \textbf{[010]}$$

cioe` $13E=6C$

il valore minore di E e C, risolvendo in interi, è:

$$\begin{cases} E=6 \\ C=13 \end{cases} \qquad \textbf{[011]}$$

quindi la prima persona possiede: 13*5 cent + 6*100 cent = 6,65 euro, se invece avesse Euro al posto dei Cent e viceversa, la sua somma sarebbe: 13*100 + 6*5 = 13,30 Euro, che e` infatti il doppio di quello che possedeva prima. *[Un grazie a Filippo da parte di quelli di noi cui le frazioni stanno antipatiche (cioe` un bel po`)]*

Passo alla seconda parte. Indico con ***A*** il numero di monete da 5 cent di Alberto, il cui valore va sommato ai soldi calcolati prima:

$$\begin{aligned} &6.65A+0{,}05A=A \\ &\Rightarrow 665A+5A=100A \\ &\Rightarrow A=7 \end{aligned} \qquad \textbf{[012]}$$

Chiaro, no?

Greyhawk esordisce con una considerazione:

[3] Se non capite niente di cosa stiamo dicendoci con Sam, non preoccupatevi. E` normale.

III Postulato di Tukkee sulla consistenza patrimoniale: "Meno soldi hai, piu` spesso li conti".

Dopo, pero`, c'e` un brutto scivolone:

Cominciamo a fare i conti in tasca all'ottimo Piotr.

Oeu, calma! Alberto e`* ***mio*** *figlio, non di Doc! (forse manca un dato: e` Rudy alle tastiere).

Tra l'altro, riesce anche a trovare una buona giustificazione al fatto che si cerchi il valore minimo: "Nell'era delle carte di credito non desideriamo riempire piu` di tanto le tasche dei nostri eroi...".

Dopodiche`, la soluzione procede (sino al valore corretto), attraverso vie generali... Ma siccome so una cosa sul lavoro di GH che voi non sapete, lasciamo perdere: partiva facilitato.

Doc, se ti sei messo d'accordo con GreyHawk per chiedermi in questo modo un prestito, la risposta e` "No".

5. Quick & Dirty

Si avvicina l'onomastico di mia moglie...

Q: Com'e` fatto un mazzo di fiori in cui sono tutte azalee tranne due, tutte rose tranne due, tutte strelizie tranne due?

6. Zugzwang!

6.1 Amazzoni

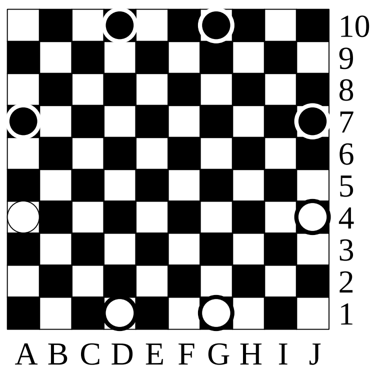
Prima vi racconto di un altro gioco.

Secoli fa, quando io ero giovane e andavano di moda i giochi intelligenti (Qualcuno ha ancora un Cubo di Rubik?) era uscito un gioco supposto "per bambini", piuttosto carino. Data una scacchiera (8x8) e due cavalli (con una piccola modifica... ve ne parlo dopo). Si mettevano negli angoli diagonalmente opposti della scacchiera e poi si cominciava a muoverli come negli scacchi; scopo del gioco non era catturare il cavallo dell'avversario, ma bloccarlo. Il gioco, visto cosi`, sembra impossibile, se non fosse per la piccola modifica ai pezzi: ogni volta che un cavallo passa su una casella, lasca un segnalino (e` fatto apposta per lasciarne giu` uno ad ogni mossa) e piu` nessun cavallo puo` da quel momento fermarsi su quella casella. Caso mai non ci arrivaste da soli, con indubbio riferimento ai "segnalini" (che erano marroni), il gioco si chiamava "***Plop!***".

Torniamo seri.

Un'evoluzione interessante di questo gioco, superata la fase scatologica del linguaggio, e` quello delle ***Amazzoni***. Semplicissimo da spiegare, ma l'analisi e` ancora completamente in alto mare.

Il gioco comincia con ***4*** Amazzoni per colore (regine degli scacchi, se volete fare i raffinati; monete da 1 e 2 euro se volete fare i ricchi); la posizione di partenza sulla scacchiera (10x10) e` quella indicata (si vede? Bianco A4, D1, G1 e J4; Nero A7, D10, G10 e J7).



Posizionate le Amazzoni, il bianco inizia il gioco vero e proprio con una mossa, consistente in ***due parti obbligatorie e in sequenza***:

1. Muove un'Amazzone
2. L'Amazzone mossa tira una freccia

L'Amazzone muove come la regina degli scacchi, e non puo` saltare o fermarsi in una casa occupata da altre Amazzoni o frecce; la freccia muove nello stesso modo e sottosta` alle stesse regole, solo che, una volta tirata, non puo` piu` muoversi da li` (per le frecce, monete da un cent: non importa distinguere quelle di uno da quelle dell'altro). Scopo del gioco e` fare in modo che l'avversario non possa fare la mossa quando tocca a lui; vi prego di notare che "non muovere" significa non poter fare la prima mossa ***o*** poter fare la prima ma non la seconda mossa con nessuna delle proprie Amazzoni.

I pezzi non si prendono e non si colpiscono con le frecce, ma si bloccano: anche la strada della freccia deve essere libera (da Amazzoni e/o da frecce). E` abbastanza logico che scopo di ognuno dei giocatori e` quello di "cintare" (con le frecce) una serie di territori attorno alle proprie Amazzoni di dimensioni maggiori di quelli dell'avversario, onde potersi muovere in tutta tranquillita` aspettando che l'avversario si blocchi da solo; riuscire a bloccare le Amazzoni avversarie puo` essere una strategia che non paga. L'unica complicazione del gioco e` che possono servirvi sino a novantadue cent: non un gran che in valore monetario, ma il peso lo rende un gioco piu` che altro da salotto (con tavolo robusto).

Se state pensando a qualche battuta sulle capacita` di tiro delle signore, lo dico ad Alice e le presto il mio arco.

7. Pagina 46

Se vi sembra evidente perche` tanto decrescono, provate con una tripla come $(1,1,0)$*, e auguri...*

Prendiamola alla larga; per prima cosa, vediamo che diventano ***pari****.*

Inoltre, notiamo che i calcoli sono una permutazione ***ciclica****.*

Notiamo che l'unico modo per avere un risultato ***dispari*** e` che un numero sia ***pari*** e l'altro sia ***dispari***; se entrambi i numeri sono pari o entrambi i numeri sono dispari otterremo sempre un pari. A meno di permutazioni cicliche (non significative data la struttura del calcolo), i quattro numeri apparterranno ad una di queste strutture, in cui ***P*** rappresenta un valore ***pari*** e ***D*** rappresenta un valore ***dispari***:

1. ***P***, ***P***, ***P***, ***P***
2. ***P***, ***P***, ***P***, ***D***
3. ***P***, ***P***, ***D***, ***D***
4. ***P***, ***D***, ***P***, ***D***
5. ***P***, ***D***, ***D***, ***D***
6. ***D***, ***D***, ***D***, ***D***.

Tutte le altre disposizioni sono ottenibili attraverso permutazioni cicliche di questi valori.

Ora, volendo ottenere tutti i valori ***pari***, vediamo che:

La combinazione ***5*** e la combinazione ***2*** diventano, in ***un*** passo, la combinazione ***3***[4].

La combinazione ***3*** diventa la combinazione ***4*** in un passo.

La combinazione ***4*** diventa la combinazione ***6*** in un passo.

La combinazione ***6*** diventa la combinazione ***1*** in un passo.

La combinazione ***1*** e` stabile e rappresenta la richiesta. Quindi, in al piu` ***4*** passi arriviamo ad una quadrupla di numeri pari.

[4] Per la combinazione ***5*** e` necessario applicare una permutazione ciclica considerandola come ***D***, ***D***, ***D***, ***P***.

Raggiunto questo stato, consideriamo la quadrupla formata dai nostri numeri ***divisi per due*** e procediamo con lo stesso calcolo; nello stesso modo, raggiungeremo uno stadio equivalente allo stadio ***1*** visto sopra, *in al piu` quattro passi*; questo significa che effettuando il calcolo con i valori reali, raggiungeremo uno stadio in cui tutti i termini sono ***divisibili per quattro***, in (al piu`) *otto* passi dall'inizio.

In quattro ulteriori passi otterremo una quadrupla divisibile per ***otto*** eccetera; procedendo per un sufficiente numero di passi, arriveremo ad un insieme di valori divisibie per una qualsiasi potenza di due. Siccome i numeri decrescono in valore assoluto, prima o poi uno di questi arrivera` al valore zero e successivamente arriveranno tutti al valore zero, in un numero finito di passi[5].

8. Paraphernalia Mathematica

8.1 La Sezione Aurea

Sappiate che, da uno sproloquio che conteneva anche parte di questo, e` nato Rudi Mathematici.

Consideriamo, per motivi puramente estetici, la divisione di un segmento in due parti, tali che abbiano una proporzione "esteticamente valida" tra di loro; per quanto riguarda il concetto di esteticamente valida, supponiamo di esserci focalizzati sull'idea che il tutto stia alla parte maggiore come la parte maggiore sta alla parte minore o, come dicevano gli antichi, di dividerla in media ed estrema ragione. Siccome non vorrei avervi sulla coscienza, vi faccio un disegnino.

Quello che si vorrebbe, e` che tutto il segmento stia ad ***A*** come ***A*** sta ad ***B***. Vi vedo gia` pronti con carta, matita: in pratica (ponendo nel secondo passaggio ***A=1*** e ***A+B=x***),

$$\frac{B}{A} = \frac{A}{A+B}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{1}{x}$$

$$x-1 = \frac{1}{x}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Ora, prendendo la soluzione maggiore, si ha il numeraccio $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Possibile che da un'espressione cosi` simpatica debba venir fuori un numero del genere?

Beh, la cosa ha comunque aspetti interessanti; in particolare, se guardate il terzo passaggio, scoprite che rispolve il problemino "*Qual'e` quel numero che, diminuito di uno, fornisce il suo reciproco?*" che, ammetterete, non e` male[6].

Effettivamente, per riuscire a trovare un'espressione "elegante" del numero in oggetto, dobbiamo rovistare in un ambito scarsamente frequentato dai matematici normali; non appartenendo voi ne` alla categoria dei matematici ne` a quella dei normali, dovreste

---

[5] Analogamente, e` possibile dimostrare che si arriva ad una ***n***-upla di zeri per qualsiasi $n = 2^k$; per generici ***n*** che non siano potenze di due, come si verifica facilmente per ***n=3*** con i valori ***(1, 1, 0)***, questo puo` non essere vero.

[6] Come *alcuni* di voi ricorderanno, l'altra soluzione cambia il segno davanti alla radice; che caratteristica ha questo numero, non ve lo dico.

averlo perfettamente presente. Giocherellando opportunamente con la radice di 5, si arriva alla:

$$j = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}} = [1;\overline{1}]$$

Che spero ammetterete e` piuttosto carina. Senza voler andare a discutere di estetica delle formule, c'e` da dire che la sua bellezza non si estende all'ambito del calcolo: infatti, proprio per la presenza di cosi` tanti "1", e` *la frazione continua che converge piu` lentamente*. Se fate un po` di prove in Excel (questa e` facile da implementare), vedete che dopo una quarantina di passaggi diventa indistinguibile dal valore reale; quindi, per avere una stima pessimistica dell'approssimazione di una *qualsiasi* frazione continua, andate a vedere quanto differisce (in percentuale e valore assoluto) lo stesso termine dello sviluppo della sezione aurea. Da cui, la regoletta pratica che in una frazione continua e` meglio fermarsi dopo un grosso numero che dopo una caterva di numeri piccoli.

Ma perche` l'hai indicata con $j$? Beh, perche` si indica con questa lettera; tra l'altro, e` stata scelta in quanto iniziale del nome di Fidia, che di proporzioni armoniche se ne intendeva[7].

La prima volta che mi e` comparsa davanti la frazione continua e mi hanno detto che tendeva a $j$, ho espresso i miei sonori dubbi; una cosina elegante come quella che tende ad un numeraccio? Beh, la dimostrazione e` un classico esempio di risoluzione per fregatura[8]: se la frazione e` infinita, detto $\boldsymbol{x}$ il risultato, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x &= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}} = \\ &= 1+\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Che non e` altro che la nostra espressione di j. Carino, vero?

Da bravi praticoni della matematica, proviamo a calcolare un po` di ridotte: data la forma della nostra frazione continua, le ridotte dei vari ordini non sono altro che l'ultima frazione (quella in basso a destra) di ogni espressione:

$$j \approx 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{2}}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}} = 1+\cfrac{1}{\cfrac{5}{3}} = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$

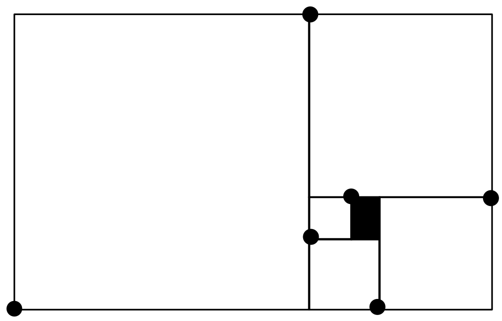
...e avanti cosi`. Se andiamo a vedere quali sono i numeri che compaiono nelle ridotte, ci salta fuori una cosa del tipo [1, 1, 2, 3, 5, 8,...]; prendendo un termine a caso, e` facile

7 Piotr R. Silverbrahms, comunicazione personale

8 Da giovane, chiamavo cosi` il metodo di soluzione di una classe di integrali trigonometrici che, dopo una marea di integrazioni per parti, ti facevano ricomparire a secondo membro la stessa espressione con la quale avevi cominciato (con segno opposto) e, quando stavi per buttare via tutto, ti accorgevi che bastava spostarla a primo membro e dividere per due il secondo. Il metodo, qui, e` sostanzialmente lo stesso.

vedere che ci ritroviamo sempre con un aggeggio del tipo $1+\frac{p}{q}$; facendo il conto, otteniamo una nuova frazione con denominatore ***q*** e numeratore ***p+q***, ossia *dato un numero della serie, per ottenere il successivo basta sommare al numero dato il numero precedente*. Se la successione dei numeri ottenuta sopra era un sussurro, questo e` un grido: ***il rapporto tra due termini consecutivi della serie di Fibonacci tende a*** j.

Tra le altre cose, possiamo anche darne una rappresentazione un po` diversa: consideriamo un rettangolo con i lati pari a due termini della successione di Fibonacci; giusto per rendere il disegno visibile, prendiamo ***2*** e ***3***. Per ottenere il termine successivo della serie (***5***), aggiungiamo al minore (***2***) il maggiore (***3***). Sul nostro rettangolo, per ottenere il valore dato, aggiungiamo un *quadrato di lato pari all'ultimo termine* e "cuciamolo" di fianco al rettangolo. Il nostro nuovo aggeggio ha lati ***3*** e ***5***, e quindi e` un rettangolo "di Fibonacci". La cosa puo` andare avanti e si ottiene una serie di rettangoli che sono sempre piu` "aurei", ossia con i lati che tendono sempre di piu` alla nostra sezione aurea. Il disegnino viene fuori una cosa del tipo della figura (sperabilmente) qui di fianco: il rettangolo origine e` indicato in nero.



In questa figura, in realta`, c'e` piu` di quanto sembra: Bernoulli (Jacob), ad esempio, era rimasto molto colpito dal fatto che tutti i punti indicati in grassetto (in sostanza, tutti i vertici opposti dei nostri quadrati), giacessero su una spirale logaritmica; se unite i punti con archi di cerchio di dimensione adeguata (sostanzialmente, i quadranti di cerchio sottesi dalle diagonali dei quadrati), ottenete un'ottima approssimazione della suddetta spirale. No, non ve lo dimostro. Sto parlando di Casa Bernoulli, mica del droghiere all'angolo! In famiglia avevano l'abitudine di essere piuttosto oscuri, nelle dimostrazioni (se volete, ve la cerco in latino).

Tra le altre cose, il buon Jacob rimase cosi` colpito dal fatto da richiedere che sulla sua tomba fosse incisa una spirale logaritmica seguita dalla frase *eadem mutata resurgo* (per chi non si ricorda il latino, "uguale ma diversa rinasco": e` il motto della fenice -l'animale, non il teatro). Purtroppo, lo scalpellino fece un lavoro schifoso e traccio` una spirale archimedea.

Non divaghiamo.

Se per voi le proporzioni del rettangolo aureo non sono tali da strapparvi un sospiro di estatica ammirazione, provate con il triangolo: costruite un triangolo isoscele con due numeri della serie di Fibonacci (no, non vi dico qual'e` la base e quale i due cateti) e costruite la sequenza dei "triangoli roteanti" nello stesso modo dei quadrati di cui sopra: un cateto del triangolo piccolo diventa la base del triangolo grande, la base del triangolo piccolo diventa un pezzo del cateto del triangolo grande e avanti cosi`: se costruite il tutto correttamente, i vertici dei vari triangoli vi definiscono sempre una spirale logaritmica. Personalmente, con buona pace di Gauss, preferisco questa costruzione: il disegno viene molto piu` carino.

"E perche` non lo fai?"

Semplice, per due motivi: primo, e` complicato, secondo, *quanto valgono gli angoli del triangolo aureo?*. Questa ve la calcolate da soli. Se trovate dei metodi carini, mandate e pubblicheremo; inoltre, potreste cercare un po` in giro se trovate delle "comparse" di j.

Matti come sono, i matematici hanno provato a generalizzare il concetto: principalmente, esistono due "strade": Edouard Lucas ha provato sommando non due termini, ma genericamente "***n***", mettendo all'inizio il necessario numero di "***1***". Un po` noiosi, ma non si puo` avere sempre caviale...

Decisamente piu` interessante il tentativo di Richard Padovan (l'accento e` sulla prima "a", e si legge all'americana, anche se il cognome ne tradisce la lontana origine): dato il necessario numero di ***1*** all'inizio, formiamo la successione secondo la formula $a_{n+1} = a_{n-2} + a_{n-1}$, ossia il nuovo numero e` dato dalla somma del penultimo e del terzultimo.

...E cos'ha di interessante, questo aggeggio? Beh, provate a costruire la sequenza dei "triangoli rotanti" [1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12,.,..] e provate a calcolare gli angoli che "dovete" usare... Siccome dalla vostra pigrizia non mi aspetto niente di buono, ve lo dico io: sono *equilateri!* In effetti, Ricky ci e` arrivato cercando la sequenza che desse origine a questa figura.

Se provate a unire con archi di cerchio i punti di mezzo dei lati "piu` all'esterno" di questa roba, vi viene fuori una spirale piuttosto svergola e esteticamente non un gran che. Se andate avanti per un po` a calcolare i numeri di Padovan, vi accorgete che anche il loro rapporto converge ad un valore (suppergiu` 1,324717957), ma la convergenza e` molto piu` lenta della serie di Fibonacci. Anche questo valore e` soluzione di un'equazione ($x^3 - x - 1 = 0$: la si ricava lavorando un pochino sull'espressione ricorsiva che abbiamo visto prima)[9].

In realta`, una successione di questo genere l'aveva gia` studiata Perrin, ma cominciando da altri valori (***3, 0, 2,...***). In questa successione (quella di Perrin), Lucas ha notato una cosa piuttosto strana: se $\boldsymbol{P_n}$ e` l'***n***-esimo numero di Perrin e ***n*** e` *primo*, allora ***n*** *divide esattamente* $\boldsymbol{P_n}$. Prima che cadiate dalla sedia, ci tengo a farvi notare il *senso* del teorema: ***non*** e` scritto "se e solo se", spiacente. Comunque, e` stato verificato che il "solo se" vale sino a numeri con un qualcosa come quindici cifre: logicamente, il primo "pseudoprimo di Perrin" puo` essere li` girato l'angolo, quindi non fidatevi troppo.

In fondo, come ama dire un famoso matematico la cui firma compare qui sotto:

La sezione aurea e` il prezzemolo della matematica.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[9] Conscio del fatto che esteticamente non era un gran che, Padovan ha chiamato questo valore "la sezione di plastica".