Rudi Mathematici

Rivista fondata nell altro millennio

Numero 039 - 2002-04

1. Editoriale

Solo una breve nota, che c'e` altro da fare. Per quanto riguarda Q&D, Sam manda, oltre alla soluzione del problema, una breve nota:* "In cinematica vi sono altri problemi, quasi altrettanto corti e assai piu` difficili". Vero, ma perche` limitarsi alla cinematica? Prima o poi ve ne rifilo uno di idraulica che non e` male, promesso. Sto solo aspettando che vi facciate un attimo le ossa.*

Oeu, ma perche` scrivi in corsivo? Semplice, perche` l'editoriale e` un altro. Il sottoscritto, quando arriva la primavera, di solito non ha voglia di fare niente. Esiste qualcuno invece che viene preso da foga scrittoria. Mi pare giusto condividiate con me questa tridimensionale superficie convessa di lacrime... Data l'esuberanza dell'estensore, le mie note sono siglate (RdA).

De/Matematizzazione

Ci vuole una bella faccia di bronzo per scrivere un pezzo che parla di qualcosa di cui non si conosce la definizione. Del resto, se questo accade, e` quasi inevitabile che accada in un giornale di matematica; e se accade in un giornale di matematica e` probabile che sia in un giornale di matematica ricreativa. La parola di cui si ignora la definizione (ma se riusciamo a mettere le mani su un vocabolario, magari la riportiamo in una nota a pie` di pagina[1]) e` *matematizzazione.*

Per quel che ci e` dato di capire, la matematizzazione e` l'azione che compie regolarmente il solutore di problemi di matematica ricreativa. Ci immaginiamo un lettore di RM che legge un testo che parla di qualche terribile azione fatta da quelle pesti dei figli del GC (in realta` sono due bambini bravissimi *[Solo per quelli come te che li subiscono a dosi omeopatiche (RdA)]*: se sapessero che gli attribuiamo le azioni che gli attribuiamo, si limiterebbero a chiamare il telefono azzurro), di compleanni incrociati e scommesse da latrocinio, di ponti impossibili che sostengono solo un paio di persone, bilance a piatti in piena epoca elettronica (alle quali, inevitabilmente, mancano sempre anche i pesi campione, per non parlare del cavalierino di Berzelius), citta` perfettamente circolari e improbabili paeselli di montagna *[Improbabile sara` Vische! Il Paesello esiste realmente, e c'e` anche un numero di lettori di RM maggiore di zero; sono gia` tre estati che ti dico di venirmi a trovare.(RdA)]*, la cui altitudine si deve calcolare, anziché con un altimetro (o, meglio, una buona carta geografica), con una derivata seconda.

Il solutore di problemi non batte ciglio, di fronte a violazioni dei diritti civili che prevedono il taglio della testa se apri la porta sbagliata; trovano naturale avere le grazie d'una discinta principessa se si riescono ad articolare frasi risolutive del tipo "se io chiedessi al tuo compagno se la porta di destra e` fatta di legno, potrebbe lui rispondermi che il latte e` bianco?", e altre amenita` del genere. Tutto questo perché, anche se chi ha scritto il testo del problema si dilunga ad esaltare l'arco di schiena della principessa di cui sopra, il solutore di problemi a certe cose non bada. A meno che, nascosto da qualche parte del testo, non si evinca che l'arco di schiena di cui sopra sia una conica gia` regolamentata dal trattato di Apollonio.

Ma attenzione... il nocciolo della matematica ricreativa sta anche (se non soprattutto) nel capire perché l'autore abbia scelto esattamente quell'ambientazione, e non un'altra. Fin dalle elementari i maestri e le maestre sono costretti a immaginare casalinghe che comprano tre etti di mele e mezzo chilo di pere, per iniziare i giovani virgulti alle delizie dell'aritmetica; e qui lo scopo e` quello di spiegare alle acerbe menti che i numeri sono si` astratti e generalisti, ma servono spesso per risolvere problemi concreti e specializzati. Al punto che capita spesso, purtroppo, che l'artificio si mangi il concetto, e che intere generazioni di scolari siano convinti che la matematica sia solo calcolo (aritmetico, per di più). L'autore di problemi, invece, di solito ambienta il problema matematico in uno scenario che porta con sé, ben nascosto, qualche vincolo matematico, al fine di rendere l'esposto meno evidente e la soluzione un po` piu` difficile; in pratica, per inserire un parametro matematico senza che la matematica sia menzionata. Se per scoprire quante mele ha comprato la mamma l'autore vi costringe ad usare un'equazione di secondo grado, beh, siete autorizzati a buttare via la soluzione negativa che vi risulta dal calcolo, e a tenere solo quella positiva; ma in generale non e` affatto detto che un fisico teorico si possa permettere lo stesso lusso, e noi non ci sentiremmo di consigliarlo nemmeno ad un contabile. E anche voi, in fondo, dovreste cautelarvi che nel testo non ci sia nascosto qualcosa che vi autorizzi a pensare al concetto di "mele negative" (chi non si ricorda il gioco delle Noci di Cocco che P.A.M. Dirac risolse con l'introduzione della "noce di cocco negativa" alzi la mano *[Chi ha alzato la mano si vada a rivedere il PM di RM017. (RdA)]*). Quindi, qualche volta l'ambientazione sta li` per delimitare il campo (e quindi aiutare la matematizzazione), qualche volta per nascondere un dato (e quindi per renderla piu` complessa).

---

[1] **Matematizzare:** *v. tr.* **1** interpretare la realta` in base a principi o procedimenti matematici **2** ricondurre una teoria, un ragionamento, una disciplina e sim. a un modello matematico (Dizionario Garzanti online)

Ve lo ricordate quell'indovinello facile-facile, che recitava piu` o meno così: "Un pastore sta preparando il suo gregge di 120 pecore per la transumanza. Siccome il viaggio e` lungo, decide di lasciare le piu` malconce nell'ovile. Fa un rapido controllo, e, delle 120 in totale, decide di non portare sette pecore azzoppate e dodici con il raffreddore. Quante ne restano?". E` qualcosa che potrebbe andare bene per la seconda elementare, probabilmente. E, se si trovasse davvero su un sussidiario per seconde classi elementari, non c'e` dubbio che nel reparto soluzioni ci debba essere scritto 101. Ma se io lo scrivo su RM, e` invece altrettanto ovvio che, per quanto ugualmente sciocca, la soluzione scritta sia 19. Se e` un gioco, e` ovvio che l'unico posto dove il gioco si può nascondere e` nella parola "restano": 101 pecore "restano" come risultato della sottrazione 120-7-12=101, ma ovviamente sono 19 le pecore che "restano" nell'ovile, le altre "vanno in transumanza"*[io a questo punto mi sarei chiesta se le pecore zoppe avevano il raffreddore... tranello per tranello...(Alice)]*. In un esposto cosi` semplice, non e` difficile immaginare che deve esserci un piccolo inganno; in un esposto piu` complesso ed elaborato, inserire un piccolo doppio senso come questo rischia di far esplodere il problema (e di far linciare l'autore).

Prendiamo un esempio "vero", un autentico problema di matematica ricreativa creato da uno degli autori piu` famosi del campo (no, non vi diciamo chi è: gia` abbiamo dovuto corrompere il GC e supplicarlo fino alla nausea per convincerlo a farci usare il problema qui dentro, e non nella piu` canonica sezione "Problemi" di RM). Noi adesso facciamo la fatica di scriverlo; voi, prima di proseguire, siete pregati di risolverlo. O almeno, di provarci; non conta tanto la soluzione, quanto il metodo, il tentativo di matematizzarlo. Eccolo qua:

GOLF

*Nel golf basta imparare due tiri: il colpo lungo (**drive**) e il colpo di avvicinamento (**approach**), ciascuno di una lunghezza ben precisa. Quale deve essere la lunghezza di questi due tiri per effettuare il percorso minimo in un campo da nove buche della lunghezza di 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400, 425 yarde?*

Mentre voi provate a risolverlo, o quanto meno ad impostarlo, vi intratteniamo con il vecchio tormentone "che cos'e` che rende bello un gioco matematico?", argomento sempre all'ordine del giorno dei nostri CdR, quando non siamo sbronzi[2] ; e` ovvio che molto dipende dalle personali predisposizioni. Alice, di solito, non va matta per problemi come questo, che mostrano subito una certa predisposizione alla "risoluzione per tentativi" e che richiedono l'addizione come operazione di rango piu` complesso; Piotr, convinto che i "tentativi" siano paragonabili alle lotterie, usualmente ne tira due o tre nel mucchio, sperando nella buona stella, e gioisce del fatto che non servano cose astruse come le moltiplicazioni, per provare a risolverlo; il GC si limita a tirar fuori la pipa e la bacchetta. La pipa per godersi la scena e la bacchetta per fustigare il primo che prova a tirar fuori un foglio elettronico dal pc *[qui mi sento di dissentire: un pc ai CdR non si e` mai visto, non starebbe bene con gli schizzi di birra e l'unto delle patatine... (Alice)]*. O, magari, continua la sua vecchia ricerca della poesia di Edoardo Sanguineti sul conigliopollo. A proposito, c'e` qualche anima buona che ce l'ha? Noi la stiamo cercando da un anno, senza successo. E si` che ci starebbe proprio bene, in un pezzo sulla matematizzazione... possiamo provare a raccontarla, ma vi perdete il meglio.

La poesia parla di un ragazzo che deve risolvere un problema di aritmetica. I termini esatti non ce li ricordiamo, ma grazie al cielo non sono fondamentali... in breve, c'e`

[2] Il fatto che l'insieme "CdR di RM" e l'insieme "riunione sobrie" abbiano intersezione coincidente con l'insieme vuoto e` del tutto pleonastico *["sbronzi" mi pare eccessivo. Ci limitiamo ad un congruo numero di birre [hai dimenticato la grappa di rose... (Alice)], definito da una funzione esponenziale del tempo che ha una brusca discontinuita` quando Doc "Cenerentola" Silverbrahms decide che e` tardi (RdA)].*

una grossa stia in cui sono accalcati insieme polli e conigli. Sono talmente fitti (ci perdoni la Protezione Animali) che a malapena si capisce che ci sono venti teste e sessantaquattro zampe. E il ragazzo di Sanguineti deve scoprire quanti sono i polli e quanti sono i conigli. Ciò che rende notevole la poesia dal punto di vista matematico e\` il metodo che il ragazzo si inventa per la soluzione; un metodo talmente fantasioso e stringente al tempo stesso, che il personalissimo problema dello scrivente di queste note e\` che ormai non si ricorda piu\` quale sia il metodo "classico" di soluzione di questo tipo di problemi, ma solo quello del ragazzo di Sanguineti. Probabilmente irritato dal fatto che conigli e polli abbiano lo stesso numero di teste ma diverso numero di zampe, genialmente inventa due altri tipi di animali: il "conigliopollo" caratterizzato dall'aver due teste e sei zampe, e il "coniglio spollato", che ha due zampe e nessuna testa. Dal punto di vista aritmetico, e\` palese che, detto C il coniglio e P il pollo, il conigliopollo e\` banalmente (C+P), mentre il coniglio spollato e\` (C-P). Ma volete mettere il fascino evocativo d'un coniglio spollato rispetto a C-P? A quel punto, e\` facile: venti teste significano dieci conigliopolli (o coniglipolli?) *[Un conigliopollo, due coniglipolli. Contrariamente ai capistazione o al capostazioni, qui sono due sia i conigli che i polli (RdA)]*, che si portano appresso le loro brave sessanta zampe. Restano fuori quattro zampe, che, ovviamente, sono tutto quanto serve a fare due conigli spollati. E il gioco e\` fatto. Oddio, se proprio si vuol far contenta la maestra, il ragazzo deve anche dilungarsi a spiegare che dieci coniglipolli corrispondono a dieci banali polli e altrettanti banali conigli; aggiungere che se si prendono due conigli spollati e si aggiungono due polli si ottengono due semplicissimi conigli; e concludere infine che anche otto polli e dodici conigli danno la combinazione cercata.

E\` pur vero che, in questo caso, piu\` che di matematizzazione (nel senso di astrarre matematica da casi reali) si tratta di esobiologia comparata, ma il genio e\` genio. Specie quando e\` interdisciplinare, alla faccia di quei Ministeri dell'Istruzione che pensano che la scuola debba solo formare specialisti di settore.

Ma torniamo al Golf... avete risolto il problemuccio? Ancora no? Allora vi intratteniamo ancora un po\` con delle osservazioni tanto banali quanto preziose. Il lavoro del solutore di problemi e\` spesso un problema di matematizzazione: spogliare il testo di tutte le cose che non servono, stando bene attenti a non buttare, insieme all'acqua sporca, anche il proverbiale bambino. Altrettanto ovvio, il lavoro dell'autore dei giochi (beh, almeno "uno" dei lavori...) e\` quello opposto, quello di dematematizzare un problema squisitamente matematico. Ci sono problemi che si risolvono davvero con un paio di sottrazioni e un'addizione, ma la magia sta nel nascondere quelle sciocchezze in un ambiente realistico, completo di vincoli accessori, e possibilmente con un pezzo di narrazione che leghi il tutto. Il lavoro principale che su RM fa il GC e\` proprio questo, ed e\` talmente importante che non e\` un caso che lo faccia il Gran Capo. Sempre su RM, gli unici problemi che non sono dematematizzati sono i Bungee Jumpers, che generalmente sono problemi difficili, tecnici, e talmente poco romanzati che la soluzione e\` nello stesso numero del problema. Il loro fascino risiede nella pura difficolta\` risolutiva, senza bisogno di ambientazione e dematematizzazione; ma se voi siete tra coloro (e crediamo siano in molti) che saltano a pie\` pari i BJ e quasi non vi ricordate che sono una rubrica fissa, siete certamente tra coloro che hanno qualcosa da dire ai Ministri dell'Istruzione pro-tecnicismi di cui sopra. Ma, matematizzazione e dematematizzazione a parte, il piu\` grosso aiuto che il solutore ha, di fronte ad un gioco matematico, e\` la certezza che la soluzione esista. Certezza che e\` un vero lusso, nella vita reale.

Ve lo ricordate il problema degli U2[3]? Non era facile, ma nemmeno impossibile da risolvere. Ma c'era la forza d'attrazione cosi` forte della soluzione "naturale" (18 minuti) che se non vi fosse stato garantito dal testo del problema che esisteva una soluzione migliore in 17 minuti, assai difficilmente l'avreste trovata. La ricerca operativa e` una grande produttrice di indovinelli matematici, ma probabilmente riesce a generarli solo in casi fortunati.

Quindi, il solutore sa che la soluzione "esiste". E la sua opera di matematizzazione può cominciare, perché si fida della regolarita` del problema (ma ad Aprile, visto che RM esce il primo giorno, potremmo anche mettercelo, un problema senza soluzione...*[Tranquilli. Lo tengo a bada io (RdA)]*) e si fida dell'onesta` dell'autore. Quindi, possiamo vedere come potrebbe iniziare la matematizzazione del problema del golf. Vediamo se riconoscete dei meccanismi comuni.

Prima Fase - Semplificazione

E semplificazione significa sia semplificazione della narrazione, sia semplificazione matematica vera e propria. Il testo mi dice che ho due sole tipologie di "colpo da golf" (che sia vero o meno nel golf reale non conta, perché questo e` palesemente un vincolo del problema), e la lunghezza delle nove "buche". Si aspetta che io conosca il golf almeno quel tanto che serve a capire che posso usare piu` colpi per arrivare a mettere la pallina in buca, mi vincola ad usarne solo di due tipi, e mi chiede di usarne il minimo numero possibile (cosa che ha piena coincidenza con le velleita` dei veri giocatori di golf). Tradotto in matematica (anzi, aritmetica), mi chiede di trovare due numeri (interi, positivi e diversi fra loro: tutto implicito nella "sceneggiatura") tali che siano combinabili in modo da dare come somme risultanti i nove valori 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400 e 425. E, poiché la soluzione e` tutt'altro che unica, si affida alla sceneggiatura per chiedermi di trovare la coppia di numeri che riesce a farlo con il minimo numero globale di addendi. Et voila`.

La prima "semplificazione tecnica" e` invece quella che consiste nel notare che tutti i numeri sono multipli di 25 (*a dire il vero, chi scrive si era limitato a notare che erano multipli di 5, poi ha scoperto che anche i risultati delle divisioni restavano multipli di 5, e ha compiuto l'audace passo di scoprirli tutti multipli di 25*), con la conseguenza immediata e gradevole di ridurre la ricerca degli addendi ai valori molto piu` maneggevoli di 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16 e 17. Li abbiamo anche messi in ordine crescente, alla faccia dell'autore solleva-polvere.

Seconda Fase - Guessing & Number Crunching

Va beh, il titolo della fase e` un nonsense altisonante, tanto per dire che arrivati al nocciolo semplificato, si e` nel mare magno dell'alea. Ogni problema fa storia a sé, e cosi` pure ogni solutore. In questo caso, tanto per dare un esempio, riporteremo almeno in parte i pensierini, piu` o meno casuali, di uno *[a caso, non l'avete sicuramente riconosciuto (Alice)]* della redazione.

Per generare tutti quei numeri consecutivi con due soli "colpi", forse serve tenersi come approach il valore 1 (alias 25). Con una coppia di numeri piu` grandi, e` piu` difficile. Forse non impossibile, però. Ce la farei usando solo 2 e 3? Si, ce la farei. Però "suona male"... facciamo due conti; se uso solo il 2 e il 3 ci vogliono (calcola-calcola) 39 colpi. Se invece uso l'approach da 1 risulta (calcola-calcola; calcola-calcola) beh, risulta che ne bastano 36 se uso un drive da 4 o anche da 5. Allora e` fatta! L'approach e` da 1 (25 yarde), il drive da 4 (100) o 5 (125) yarde. *(Il tempo impiegato per leggere queste righe e` stato molto, molto, molto minore di quello che ci e` voluto al nostro eroe per elaborarne il contenuto)*

[3] Rudi Mathematici numero 16, Maggio 2000

Terza Fase Ritorno alla dematematizzazione

Paradossalmente, il fatto che esistano due possibili soluzioni (drive da 100 o da 125) da` l'impressione di essere sulla strada giusta. Molti bei problemi di quest'autore, infatti, usano i "parametri nascosti" della dematematizzazione per risolvere le scelte finali di questo tipo. Quindi, bisogna scavare proprio nell'ambientazione, nel golf. Siamo gia` contenti che il drive e l'approach abbiano dei valori "credibili", ben distanti fra loro. Siamo anche contenti che il risultato di 36 colpi in totale per le nuove buche suoni cosi` bene: 36 e` un bel numero, in un problema di golf. Bisogna forse scavare ancora un po'? Beh, proviamo ad analizzare come sono suddivisi i 36 colpi nelle 9 buche. Con il drive da 100 yarde, la serie di colpi per ogni buca e` 3, 3, 4, 5, 3, 4, 5, 4, 5. Con il drive da 125 diventa invece 2, 5, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 5. Sembra proprio piu` carina la prima serie... senza scomodare concetti estetici come lo scarto quadratico medio, il fatto che la prima serie sia piu` "compatta", composta solo da 3, 4 e 5 e la seconda invece utilizzi buche da 2, 3, 4, 5 e 6, fa pensare che la prima sia "migliore". Si può essere persino tentati di cercare di scoprire se il golf ammetta o meno buche da 2 e 6 colpi. Certo, il verbo "ammettere" ha un senso un po` strano, qui, perché se qualcuno fa una buca in due o sei colpi, fa la buca in due o sei colpi e basta. Però magari ci si ricorda del concetto di "par". Una buca e` par 4 se si prevede che ci vogliano 4 colpi per farla, par 3 se ne dovrebbero bastare 3. E` gia` un informazione un po` "tecnica" (non certo per i golfisti, ma per i solutori di problemi di matematica ricreativa sì), però forse e` la ciliegina che aiuta a scegliere tra le due soluzioni equivalenti. Una veloce ricerca (telefonata ad amico golfista? No, basta internet, di questi tempi...) da` la risposta trionfale: esiste lo standard che le buche dei campi di golf abbiano par3, par4 e par5. E basta. Eccolo, il trucco! Tutto tornava troppo bene, per non essere vero: i numeri "belli" (36, 25, 100) e il piccolo criterio extramatematico, proprio della dematematizzazione, che risolve l'ambascia tecnica tra il drive da 100 o da 125 yarde.

Quanto servono davvero, questi "appigli", nella risoluzione di un problema o indovinello? Oh, beh, dipende. Varia in maniera clamorosa da problema a problema, da autore ad autore. Poi, abbiamo anche usato la rischiosa parola "indovinello", nella frase precedente. E gli indovinelli sono indovinelli, non necessariamente problemi. Se vi chiedessi di continuare la serie:

5, 2, 9, 8, 4, 6 ...

potrebbero essere proprio i migliori solutori "matematici" ad accorgersi in ritardo che sono semplicemente le cifre messe in ordine alfabetico. Ordinare alfabeticamente i numeri e` un'opera di genio o un reato. Scegliete voi la risposta, e noi ci teniamo la nostra. In casi come questi, ovviamente patologici, la parte matematica serve solo da "schermo", come le tre madonne dantesche[4], e forse per questo si meriterebbe il bando assoluto da una rivista di matematica ricreativa. Ma e` anche vero che dei problemi "puramente matematici" (i nostri BJ, tanto per farci le pulci fra noi) sono attraenti sono per gli iniziati.

L'ardua via di mezzo e` il territorio difficile dei "bei problemi di matematica ricreativa". Ah, sì... e` anche lo splendido territorio di quella poesia di Sanguineti sul conigliopollo, di cui non ci ricordiamo il titolo *[Parla per te. E` "Laborintus modello 39" (non garantisco sul numero) ed era sul terzo (o quarto) tomo di un'antologia del biennio di quand'ero giovane io ("Gli incontri", se non ricordo male). Non l'ho mai considerata molto come antologia, anche perche` l'estensore delle note si stupiva che alla fine il risultato fosse esatto [gli insegnanti di lettere tendono a frequenti affermazioni del tipo "io, con la matematica..." ovviamente il commentatore non*

[4] L'inciso è ovviamente del tutto gratuito e arrogante. Serve, anche questo, ad auspicare una sana contaminazione tra culture.

*aveva capito dove si andava a parare (Alice)]. Chiaramente funziona in ogni caso, la differenza rispetto al metodo "classico" e` solo nella decisione di quali siano le incognite. (RdA) ].* E` un po` come se discipline separate si facessero visita ogni tanto, anziché sfuggirsi e guardarsi in cagnesco. Tanto, poi, uno fa sempre in tempo a tornarsene a casa propria, e a rimettere a posto la propria roba. Proprio come facciamo noi adesso... non crederete mica che il problema del golf sia finito lì, no?

Quarta Fase Revisioni & Sorprese

Il metodo risolutivo adottato dal nostro eroe, infatti, non e` esattamente esaustivo. Anzi, a dirla tutta, non e` neanche un metodo, non e` niente di scientifico, e` un "seguire una pista", trovare una preda, e fare festa per averla trovata in un paesaggio che ripete da tutti gli angoli "Sono la soluzione!", "Sono la soluzione!". L'ambiente era cosi` carino, che, pur senza perdere tempo in analisi, il solutore ha anche l'impressione che, supponendo di conoscere fin dall'inizio i vincoli extramatematici del "par", che si traducono nella non trascurabile informazione che il "numero di colpi" che realizzano una buca deve necessariamente essere 3, 4 o 5, forse esiste anche una via piu` canonica, piu` analitica; insomma, una via puramente matematica per arrivare all'approach da 25 e al drive da 100 yarde. Ma esplorare questa via e` un di più, farlo o non farlo dipende quasi esclusivamente dal carattere e dal "rigore matematico", nonché dalla curiosita`, del solutore stesso.

Poi, può accadere che un deus ex machina qualunque arrivi sul palco, e cambi tutto. Nella vita normale, spesso il deus-ex-machina e` un'idea ribelle non sopita, che si affaccia brutalmente alla coscienza. Altrettanto spesso può essere l'amico al quale abbiamo rigirato il problema, che lo affronta (non necessariamente risolve) in maniera del tutto diversa. Nell'anfiteatro di RM, il deus ex machina e` quasi sempre il GC.

Piccolo salto all'indietro: se vi piace "visualizzare" i problemi, forse in questo caso vi siete immaginati una bella retta delle ascisse, in cui sono marcati in rosso i "punti" da raggiungere, distanziati fra loro della lunghezza delle nove buche. E magari avete anche immaginato che tali "punti" sono da raggiungere con una serie di salti, di due sole lunghezze fisse. Insomma, un "semplice" problema monodimensionale. Il golf, come quasi tutti gli sport, e` in realta` tridimensionale: quasi tutti gli sport tridimensionali, complice la gravita` che schiaccia l'asse zeta, sono schematizzabili in due dimensioni[5], come fa il CT della Nazionale di calcio con le sue lavagnette e i suoi gessetti. Ma "questo golf" del problema, necessita una sola dimensione. Si può semplificare ancora di più? Certo no...

... e infatti non si può, se lo si risolve come il nostro eroe. Il quale, ahimè, ha fatto in realta` una semplificazione di **troppo**. Senza rendersene conto, non ha considerato che anche in uno spazio monodimensionale ci sono **due** versi di percorrenza. Nulla, neanche nel vero golf tridimensionale, mi vieta di superare una buca e poi tirare all'**indietro.**

Quando il deus-ex-machina tira una boccata di pipa e ve lo fa notare, sentite un brivido tutt'altro che virtuale lungo la schiena *[...e vi ricordate che procedere per tentativi aiuta in una percentuale infima dei casi (Murphy)].* Mettete timorosamente da parte la vostra soluzione cosi` "intonata all'ambiente" e tornate alla pura aritmetica. In questo stramaledettissimo caso, potreste addirittura scoprire da soli (o

[5] Di sport puramente 3D, difficilmente rappresentabili in 2D, al momento mi viene in mente solo il Quidditch di Harry Potter. Ma forse ce ne sono altri. *[Propongo il baseball e il cricket: la palla deve passare in una zona ben precisa, definita anche sull'asse "z". Ma e` solo per polemica: Anche la corsa a ostacoli, in fondo...(RdA)]*

farvelo rivelare, per sopraggiunta caduta di zuccheri) che un approach da **125** yarde e un drive da **150**, il numero totale di colpi scende addirittura a **26**.

Certo, un "approach" da 125 yarde e` pura fantascienza, dal punto di vista golfistico. Un drive pari ai 6/5 dell'approach e` ridicolo. Presupporre di fare regolarmente "hole in one" alla prima buca pazzesco. Per non parlare di tutti i bei discorsi sul "par", sui numeri "belli", eccetera, eccetera, eccetera. A casa di Nicklaus, forse, possono ridere. Ma su RM (e nel piu` augusto regno dell'aritmetica) quei due colpi sono piu` che legittimi. Il massimo lusso che potreste concedervi consiste nell'illusione che l'autore abbia inizialmente composto il problema per l'ambientazione che avete inizialmente immaginato, salvo poi scoprire, con perfida gioia, la soluzione "migliore" e quindi "giusta". Ma e', per l'appunto, un'illusione: anche stavolta, il nostro eroe ha **sbagliato** *[per fortuna! tutto il pubblico di RM avrebbe potuto avere delle crisi d'identita` se il nostro eroe avesse cominciato a fornire ragionamenti belli e corretti allo stesso tempo...(Alice)].*

Però, si e` divertito, matematizzando e dematematizzando. Ha scoperto che nel golf vero esistono solo "par" da 3, 4 e 5 colpi, e sono informazioni che vengono sempre buone, quando si gioca a calcetto con gli amici. Si e` ricordato che dobbiamo ancora trovare la poesia sul conigliopollo di Sanguineti. Si e` concesso una piccola invettiva contro le massime autorita` scolastiche, si e` rammentato mezzo verso di Dante *[...e ha scritto l'editoriale...(Alice)].*

Tutto questo, nello sbagliare la soluzione di un problemuccio di matematica ricreativa. Pensateci, quando decidete di non risolvere un problema di RM perché e` troppo difficile, o troppo facile.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

Piccola premessa: ho ritrovato un vecchio libro, che davo per definitivamente smarrito. Per festeggare, vi rifilo due problemi presi da li`. Il primo mi piace molto, visto che esce dal campo strettamente matematico, ma non troppo. Il secondo... beh, ne ho cercato uno semplice dallo stesso libro.

2.1 Guida Uto Ughi

Un biplano (beh, ci serve che il pilota abbia le orecchie fuori) si sta avvicinando in linea retta alla velocita` di ***630*** Kilometri l'ora alla verticale di una fabbrica quando comincia a suonare la sirena (della fabbrica).

200 metri prima della verticale della fabbrica, per il pilota la nota e` un ***La***.

200 metri dopo la vericale della fabbrica, per il pilota la nota e` un ***Do***[6].

A che altezza vola l'aereo?

2.2 Problema di Euro

O meglio, problema di Cent... Da quando e` arrivato l'euro, mi sta tornando la scoliosi a forza di monetine...

L'altro giorno sia io che Alberto avevamo in tasca solo monete da 5 Cent e da 1 Euro; il dialogo (piuttosto psicotico, se devo dire) e` stata una cosa di questo genere.

Io: "Se avessi tanti pezzi da 5 Cent quanti ne ho da 1 Euro e tanti pezzi da 1 Euro quanti ne ho da 5 Cent, avrei il doppio di quello che ho".

Al: "Io ho solo dei pezzi da 5 Cent, ma se tu mi dessi tutto quello che hai, sarebbe equivalente a trasformare le mie monete da 5 Cent in monete da 1 Euro".

Svelti, prima che arrivino quelli vestiti di bianco... Quanti soldi abbiamo, come minimo?

3. Quick&Dirty

3.1 [039]

Su un circuito di un kilometro, ho fatto un giro a 30 Km/h. Quale dev'essere la velocita` del secondo giro per avere una media di 60 Km/h?

> A ***60*** Km/h impiego due minuti per fare due giri; per fare il giro a ***30*** Km/h ho ***gia`*** impiegato due minuti.

Visto che non credo alla telepatia, comincio a pensare che qualcuno di voi abbia accesso al computer che ci serve da tipografia. Un mucchio di gente ha deciso di citare Star Trek, nella risposta (in particolare, "Scott, Tiraci su!"), che quindi guadagna il discutibile titolo di essere citata due volte nello stesso numero (l'altra volta e` nella nota al problema sopra). Anche Einstein ha ricevuto svariate citazioni, ma questo probabilmente era dovuto al fatto che questo mese era il suo compleanno.

Come dicevo, uno di voi si e` calato completamente nello spirito del problema; l'idea e` di dare una risposta veloce, immediata.... Salvo poi dire "Ooops..." e accorgersi che avete preso una cantonata. Sarebbe interessante sapere quanti di voi hanno fatto la stessa strada; solo di Ulf, pero`, abbiamo le prove che l'abbia effettivamente seguita.

[6] Stessa scala, altrimenti guida il Dottor Spock.

La prima mail era un qualcosa tipo $\frac{x+30}{2}=60 \Rightarrow x=90$. Il tempo di leggerla e di prepararci a confrontare questo calcolo con quello del mezzo mattone, che ci e` arrivata la risposta corretta, da Ulf. Confessate, a quanti di voi e` venuto, in prima istanza, lo stesso risultato?

4. Soluzioni e Note

Come vedete dai rispettivi paragrafi, ci sono state un mucchio di soluzioni.

Mi chiedo come vadano considerate quelle di Cld e Enrico. Hanno risolto i problemi *senza leggerli*. Infatti, non risultano nella lista degli abbonati...

4.1 [038]

4.1.1 Giovani Teppisti

Un mucchio di soluzioni, bene. Avete seguito tutti approssimativamente la stessa traccia, quindi scegliamo quella che c'e` meno da lavorare a metterla qui. Siccome l'avete risolto tutti con lo stesso metodo, la cosa piu` interessante presumo siano i commenti a margine.

Ad esempio, Ulf scrive "*Non so come si fa a definire 'teppista' uno che si alza alle otto e lavora ininterrottamente fino alle quattro*". Come fai a tenere a letto questi dolci frugoletti, con la prospettiva di un'intera parete e un'intera giornata a disposizione per fare danni?!?!. Inoltre, sostiene che "*Non importa quale numero di teppisti stia verniciando il muro di casa tua: fermali o in breve non ci saranno piu` muri da verniciare*". Ulf, non conosci i miei figli. Le ultime due parole sono di troppo.

Sam, invece, si chiede se sono tutti figli miei. No, solo due. Gli altri, comunque, sono della stessa classe (del correzionale). In un altro punto della sua soluzione, ho avuto un sobbalzo... Sam, certe cose non dovresti farle, alla mia eta` certi colpi possono far male. Cito testualmente: "*...la potenza media di ogni teppista (in* $\frac{m^2}{h}$ *)...*". Se avessi detto una cosa cosi` a Fisica I, mi avrebbero restituito il libretto dicendo "Torni il prossimo millennio...".

Nella soluzione di Alice[7], il commento e` difficilmente separabile dalla soluzione, quindi pubblichiamo la sua: inoltre, e` piu` facile da paginare. Come al solito, i commenti (suoi) in corsivo.

Sono mesi e mesi che non ne proponevi uno facile, e` per festeggiare il terzo anno di pubblicazione?

Per rispettare la tradizione mando la mia soluzione... ebbene si, risolvo solo quelli facili, le telecomunicazioni ti mangiano il cervello...

Per cominciare, supponiamo che l'Orda d'Oro sia composta di un numero ***2n*** di bambini *(visto che poi si dividono ho deciso di risparmiarmi le frazioni)*. Per semplicita` *(e perche` altrimenti non saprei come fare)* considero il cane trascurabile, e suppongo che l'effetto orda sia approssimatamente omogeneo inipendentemente dal pargolo *(assunto che potrebbe essere provato assolutamente falso nella realta` dei fatti: aumentando il numero di teppisti i danni si moltiplicano esponenzialmente, secondo la mia breve esperienza).*

Mi risulta piuttosto difficile immaginare i bimbi lavorare ininterrottamente per otto ore consecutive, ma facciamo anche questa assunzione, dopotutto i mostri possono avere

[7] Nel caso vogliate insinuare che "e` evidente che le sue soluzioni arrivano prima, lei la rivista la vede subito!" puntualizziamo che questa soluzione e` arrivata *mezz'ora* dopo l'invio del preprint. Quindi, ci ha messo mezz'ora in qualsiasi sistema dsi riferimento.

energia infinita, contrariamente alle leggi della fisica (altro fatto comprovato da esperienza).

Ok, inizialmente i ***2n*** teppisti lavorano alla parete da ***6*** metri per ***4*** ore, mentre le restanti ***4*** ore della prima giornata solo ***n*** terminano la prima parete, mentre gli altri ***n*** attaccano la parete da ***3*** metri.

La parete da ***6*** metri, quindi, viene completata dal lavoro di

$$2n \text{ mostri} * 4 \text{ ore} + n \text{ mostri} * 4 \text{ ore}$$

Ciò significa che la parete da ***6*** poteva essere "sistemata" dall'Orda unita in sole ***6*** ore. Di conseguenza, la truppa di teppisti unita (***2n*** mostri), decora ***1*** metro di parete all'ora, mezza Orda significa mezzo metro all'ora.

La parete da ***3***, quindi, alla fine del primo giorno, e\` decorata per due terzi *(manca solo un metro... ma non chiedetemi com'e\` distribuito sulla parete[8]...).*

L'unico eroe che accetta la missione ci impiega ***8*** ore, l'Orda d'Oro ci avrebbe messo ***1*** ora, per cui i mostri erano ***8***... Facile, no?

4.1.2 Basta una moneta

Uffa, non c'e\` cascato nessuno... Anche qui, cerchiamo di condensare un attimo.

PuntoMauPunto (probabilmente perche\` considerava il problema troppo facile) esordisce con un "*tiri sempre a fregare*". Dopodiche\`, enuncia "*La probabilita\` di avere la prima testa dopo un numero pari di mosse e\`* $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\ldots$*, ossia la probabilta\` di avere esattamente* **1**, **3**, **5**,*... croci di fila seguite immediatamente da una testa, la cui somma e\`* $\frac{1}{3}$. PuntoMauPunto ammette di avere un po\` fretta, quindi accettiamo questo risultato, anche se per i nostri standard e\` un po\` stringato.

Fortunatamente, Sam effettua qualche passaggio in piu\`, chiarendo un paio di punti piuttosto facili da perdere di vista.

Se imponiamo $n = 2k$, ossia se facciamo i conti sui termini pari, la probabilita\` che io vinca e\`:

$$\sum_n \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \textbf{[001]}$$

Mentre la probabilita\` che vinciate voi e\`:

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \qquad \textbf{[002]}$$

E la probabilita\` che non vinca nessuno e\`

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \textbf{[003]}$$

[8] Su questo PuntoMauPunto ci fornise l'affermazione (non dimostrata): "*la rapidita\` nel lavoro e\` ovviamente inversamente proporzionale alla quantita\` di particolari che viene inserita*". Beh, si, e\` probabile, soprattutto alla luce dell'ipotesi che "*il cane desse solo consigli*". Ho pero\` qualche dubbio... E lo avreste anche voi, se aveste visto la parete. Sembra un incubo di Mandelbrot.

Ora, le prime due di queste formule sono delle somme di progressioni geometriche di ragione $q = \frac{1}{4}$, quindi possiamo calcolare la somma ricordando che se $\boldsymbol{a_1}$ e` il primo termine, esse tendono a $\frac{a_1}{1-q}$; quindi, la probabilita` che vinca io vale:

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \qquad \textbf{[004]}$$

Mentre la probabilita` che vinciate voi vale:

$$\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \qquad \textbf{[005]}$$

E, per quanto riguarda la probabilita` che nessuno vinca, per $n \to \infty$ ho che il termine tende a zero.

Credo meriti una menzione anche la soluzione di Cld che, per non calcolare le sommatorie, attua un grazioso taglio per i campi: calcolate le probabilita` di vincita per qualche lancio (*"mosse" non gli piace... confesso, neanche a me. Mi e` scappato in stesura del problema*) dei due giocatori, nota che qualunque sia il termine sul quale decidete di fermarvi, la probabilita` di uno e` il doppio di quella dell'altro. Siccome prima o poi qualcuno deve vincere, si tratta di trovare due numeri uno il doppio dell'altro che diano somma ***1***, da cui il risultato.

Molto bene, continuate cosi`.

5. Bungee Jumpers

5.1 Il salto

Se tutti gli interi a cominciare da ***1*** sono scritti di seguito, che cifra occupa la posizione ***206788***?

5.2 Pagina 46

*Quanti sono i numeri con **n** cifre?*

In totale, abbiamo 9 numeri da una cifra, $99-9=90$ numeri da due cifre, $999-90-9=900$ numeri da tre cifre e, in generale, $9*10^n$ numeri da ***n*** cifre.

I numeri da una cifra occupano le prime 9 posizioni nel numero dato.

I numeri da due cifre opccuperanno le successive $90*2=180$ posizioni.

I numeri da tre cifre occuperanno le successive $900*3=2700$ posizioni.

I numeri da quattro cifre occuperanno le successive $9000*4=36000$ posizioni.

I numeri da cinque cifre occuperanno le successive $90000*5=450000$ posizioni.

E` quindi chiaro che la cifra cercata fara` parte di un qualche numero di ***5*** cifre, in quanto con quelli sino a ***4*** cifre abbiamo raggiunto la posizione $9+80+2700+36000=38889$ e quando avremo finito di scrivere quelli a ***5*** cifre saremo alla posizione $38889 + 450000 = 488889$.

Se dividiamo la differenza tra la posizione richiesta e la posizione di inizio dei numeri a cinque cifre per ***5***, otteniamo:

$$206788 - 388889 = 5 * 33579 + 4$$

Quindi la cifra cercata e` la *quarta* cifra del *trentatremilacinquecentoottantesimo* numero di cinque cifre. Il numero cercato e` ***33579*** (il *primo* numero a cinque cifre e` ***10000***), e quindi la cifra cercata e` ***7***.

6. Paraphernalia Mathematica

6.1 Le Frazioni Egizie

Cominciamo da un problemino: non troppo facile e neanche un granche`, se devo dire...

Problema

> Un arabo lascia in eredita` i suoi cammelli alle proprie tre figlie: nel testamento, specifica che la suddivisione deve essere tale che meta` della mandria vada alla figlia maggiore, un quarto della mandria vada alla figlia di mezzo e un sesto della mandria vada alla figlia minore. Il problema sorge quando si contano i cammelli: sono ***11***, e nessuno di loro sembra intenzionato a fare il decimale. Come si fa?

Soluzione

> In soccorso viene il *mufti`* locale, che presta un cammello: in questo modo, la mandria diventa da 12 cammelli e ne vengono dati la meta` (6) alla figlia maggiore, un quarto (3) alla figlia di mezzo e un sesto (2) alla figlia minore. Totale, 11 cammelli. Quello che avanza, se lo riprende il *mufti`*.

In sostanza, quello che e` successo e` che qualcuno si e` accorto al volo che $\frac{11}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ e che ***2***, ***4*** e ***6*** erano divisori di 12. Il tizio, evidentemente, aveva una buona conoscenza delle ***frazioni egizie***.

Infatti, gli egiziani non esprimevano le frazioni nel modo che oggi consideriamo usuale, ma preferivano scriverle come *somma di frazioni a numeratore **1***. In questo modo, anziche` 11/12 si ritrovavano ad esempio l'espressione di cui sopra.

Utilita`? Meno di zero; infatti alcuni storici della matematica (Djrksterius, giusto per dirne uno col nome facile) sostengono che la matematica egizia non ha fatto grossi progressi proprio per questa rappresentazione delle frazioni; altri (Boyer), logicamente, non sono d'accordo.

E` evidente che tutto questo vale per le frazioni ***proprie***, ossia per quelle in cui il numeratore e` minore del denominatore.

Gia`, ma data una frazione, come faccio a scriverla "all'egizia"? Bene, il problema non e` cosi` semplice. Esistono alcuni metodi, ma nessuno di questi e` propriamente una meraviglia. Questa volta, se riuscite a metterli giu` in Excel, vi dico anche "Bravi".

Il metodo piu` semplice e` il metodo di ***Greedy***: giusto tre regolette.

1. Trovare la frazione egizia immediatamente minore del numero dato
2. Scriverla nell'espressione
3. Calcolare la differenza tra l'espressione e il numero dato e ricominciare da capo sin quando non ottengo il valore esatto.

Giusto per fare un esempio, prendiamo 11/12.

Passo 1: $\frac{1}{2}$ e` la massima frazione egizia minore del valore dato.

Passo 2: consideriamola parte dell'espressione.

Passo 3: $\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.

A questo punto, la massima frazione egizia minore di 5/12 e` 1/3: dovremo quindi lavorare con $\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$. Essendo il risultato una frazione egizia, il nostro lavoro e` finito e possiamo affermare che e`: $\frac{11}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$.

Rudy, *frena!* E` diversa da quella di prima! Beh, mai detto che la rappresentazione sia unica. Gli scribi egizi si portavano dietro delle tabelle con le diverse espressioni dei numeri di questo tipo. Il fatto che non siano necessariamente uniche e`, sempre secondo i matti di cui sopra, uno dei piu` grossi problemi delle frazioni egizie.

Posto che vi piaccia il metodo di Greedy, provate ad applicarlo a qualcosa di un po` piu` serio: ad esempio, a 31/311: vengono fuori una decina di termini, e l'ultimo ha cinquecento cifre.

Un altro metodo grazioso si basa sulla ***risoluzione dei conflitti***: questa volta prendiamo un'espressione un po` piu` semplice, ad esempio 3/7.

Il primo passaggio consiste nel riscrivere il nostro valore come frazione egizia "impropria", ossia nel nostro caso come ***3*** copie della frazione ***1/7*** (cosa non ammessa nella rappresentazione standard): $\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$ e poi nel cercare di risolvere i conflitti. Qui, abbiamo una coppia in conflitto (il terzo esemplare puo` benissimo restare nel calcolo); il bello e` che sostituiamo alla coppia dei valori particolari:

Se il denominatore ***y*** e` ***pari***, sostituiamo alla coppia il valore $\frac{2}{y}$.

Se il denominatore ***y*** e` ***dispari***, sostituiamo alla coppia il valore $\frac{2}{(y+1)}+\frac{2}{y*(y+1)}$.

Notate che tutti questi aggeggi per definizione si semplificano (i denominatori sono sempre pari) e quindi ci troviamo delle frazioni egizie. Ad esempio, il nostro aggeggio diventa una cosa di questo genere:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7}&=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\\&=\frac{1}{7}+\frac{2}{7+1}+\frac{2}{7*(7+1)}=\\&=\frac{1}{7}+\frac{2}{8}+\frac{2}{56}=\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}\end{aligned}$$

Si noti che ogni volta che mi ritrovo un denominatore pari il numero dei termini diminuisce di 1; quando mi trovo un dispari, il numero dei termini resta invariato ma elimino una contraddizione; quindi, se ho un numero nella forma $\frac{x}{y}$, dovro` fare al piu` ***x*** passaggi, e quindi l'algoritmo ha termine. Se riprendiamo l'esempio di prima, essendo ***311*** decisamente dispari, capite che anche in questo caso il nostro algoritmo "spara" un po` alto.

Certe volte, tagliare per i campi in matematica e` utile: qui, quello che ci interessa, e` avere degli ***1*** a numeratore. Vi ricordate qualche posto dove c'erano degli ***1*** a numeratore? io si:

$$C+\cfrac{1}{I+\cfrac{1}{A+\cfrac{1}{O+\ldots}}}$$

(concedetemi qualche stupidaggine, ogni tanto...). In effetti, se date di una frazione il suo sviluppo in ***frazione aritmetica continua***, lo sviluppo in frazione egizia sembra a portata di mano... Probabilmente vi ricordate che e`, ad esempio:

$$\frac{120}{49}=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}=[2,2,4,2,2]$$

La sequenza delle ridotte (l'avevamo gia` calcolata) e` una cosa del tipo:

$$c_0=\frac{2}{1}$$

$$c_1=\frac{5}{2}=c_0+\frac{1}{2}$$

$$c_2=\frac{22}{9}=c_1-\frac{1}{18}$$

$$c_3=\frac{49}{20}=c_2+\frac{1}{180}$$

$$c_4=\frac{120}{49}=c_3-\frac{1}{980}$$

Noterete che le frazioni finali di ogni espressione sono in forma egizia. Gia`, peccato che a noi servano delle *frazioni positive*[9]... Fortunatamente, data la ***i-esima*** ridotta nella forma $\frac{h_i}{k_i}$, possiamo costruire una serie di *ridotte secondarie* secondo la formula $\frac{h_{i-1}+j*h_i}{k_{i-1}+j*k_i}$, dove ***j*** varia da zero a a_{n+1} (i coefficienti della frazione: sveglia!). E a cosa serve questo obbrobrio? Beh, ci genera una sequenza monotona crescente tra l'***i-esima*** e la ***i+1-esima*** ridotta, e la differenza tra due termini successivi e` una frazione egizia *positiva*. In pratica, quando trovo un negativo, inserisco i termini ottenuti attraverso le ridotte secondarie e poi vado avanti[10]... OK, ammetto non sia semplicissimo e pure un po` noioso.

---

[9] Il motivo per cui abbiamo segni alterni e` che, approssimando il numero con le FCA, siamo una volta in ecesso e una volta in difetto.

[10] Attenzione che vi serve un numero *dispari* di termini nello sviluppo: ricordatevi la regoletta.

In effetti, quello delle frazioni egizie sembra essere un campo nel quale le cose piu` interessanti sono le piu` noiose da dimostrare: ad esempio (no, non ve lo dimostro: in realta` lo abbiamo gia` visto poco sopra), tutti i numeri nella forma $\frac{2}{2k+1}$ si possono esprimere come somma di ***due*** frazioni egizie: in particolare, $\frac{2}{2k+1}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k*(2k+1)}$.

Se pero` volete qualcosa di tosto...

Vi ricordate la serie armonica? Bene, la domanda e`: $k=\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$, esistono dei valori di ***n*** per cui si ha ***k*** *intero?*

Mettetela in agenda alla prossima riunione *non* noiosa..

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms