Rudi Mathematici

Rivista fondata nell altro millennio

Numero 038 - 2002-03

1. Editoriale

Sembriamo quasi un giornale serio... Per i Grandi Eventi, abbiamo anche l'inviato speciale[1]. Questa volta, l'ANSA ha "bucato"!

Gli occhi americani e scuri di D. Hofstadter osservano con somma attenzione i tre bicchieri di plastica che gli ho messo davanti. Nuovi e vuoti, sono ben alternati: dritto-rovesciato-dritto, e io ho appena finito di chiedere all'americano di raddrizzarli tutti e tre, in tre mosse, dove con "mossa" intendo il rovesciamento simultaneo di due bicchieri, uno per mano. Lui pensa concentrato, e io nel frattempo mi guardo intorno.

Il luogo e` una deliziosa palazzina di proprieta` dell'Universita` di Bologna, sufficientemente antica e circondata dal verde. Contiene stanze ad uso biblioteca, sale per conferenze, e fa anche da foresteria per visiting professors che passano anni sabbatici nella dotta Bononia. Quella dove mi trovo e` infatti una sala per convegni, e il tavolo che ospita i tre bicchieri di plastica e` un lungo tavolo di metallo e vetro, di fronte al quale si allungano file di poltroncine per uditori di conferenze. Attraverso il vetro del tavolo, vedo arrivare nuotando sul pavimento che sembra un mare di stelle filanti Monica Hofstadter, anni dodici, bella e selvaggia come cucciolo di tigre. Da sotto il tavolo vede i tre bicchieri, si incuriosisce e vuole anche lei provare a metterli tutti e tre dritti in tre mosse duplici e simultanee.

[1] Indovinate chi e`: dovreste riconoscerne la prosa...

Douglas Robert Hofstadter ha compiuto 56 anni il 15 Febbraio 2002. Daniele, il mio fratello di sangue, ne compie oggi 42, numero sacro a Douglas Adams e a tutti noi galattici autostoppisti. E` grazie a lui e a grazie a Laura, mia cognata di sangue, che, del tutto fuori luogo in questo consesso di accademici, io e mia moglie Paola ci troviamo tra la quarantina di invitati a questa festa di compleanno. Mia moglie non ha letto "Godel Escher Bach", e probabilmente la sua mente e` rimasta sana e incontaminata dai paradossi quanto basta a capire che la festicciola non e` altro che una festicciola, pomeridiana e zeppa di torte alla frutta e sachertorte guarnite di panna. Io ho passato l'anno di militare attaccato ai dialoghi di Achille e la Tartaruga, inzuppandomi di Formichieri e Canoni dell'AI, e sono perduto per sempre. Come Paola, anche io mi chiedo "Cosa ci faccio qui?", ma probabilmente me lo chiedo in preda a stupore illogico e reverenziale, non squisitamente logico e saggio, come probabilmente fa lei.

Che si tratti proprio di quel Douglas R. Hofstadter me lo ricorda un cartello che un amico di Doug ha rubato per lui: una insegna vecchia di magazzino color verde, che mostra orgogliosa la scritta G.E.B., e che adesso in questa festa significa cose che al momento della sua primigenia pittura certo non sapeva di significare; e tutti i vini, bianchi e rossi, che sono marcati Hofstatter, "a" con dieresi e "doppia t" invece che "dt", chissa` dove l'hanno trovata, sta marca. Poi c'e` una copia del Libro, original english version semidimenticata in un angolo, e sono ora molto dispiaciuto che l'occasione faccia l'uomo ladro ma dannazione non l'ha fatto abbastanza con me, che` rubare una copia del celeberrimo manoscritto direttamente all'autore sarebbe stato un colpo memorabile, da raccontare ai nipoti. Ho solo avuto il tempo di aprire la prima pagina, rileggere la prima parola "Author:" e ricordarmi che, mannaggia alla miseria, che io sia fulminato se ho mai capito cosa c'entri quella prima parola col resto del libro. Non c'entra niente, ma sta rigorosamente riportata anche nell'indice analitico. Author, l'autore. Se e` un altro dei molti indovinelli nascosti in GEB, e` un altro dei molti che non ho risolto.

Ma mi vendico, per la peppa.

D.Hofstadter sta qui accanto a me, adesso, e ha gia` cominciato a manovrare le coppie di bicchieri, con scarsissimo successo. Non ce la fa, in tre mosse... riesce a metterli tutti rovesciati, magari, ma non tutti dritti. E gli occhi scuri e americani mostrano una profonda perplessita`. Anche perche` Monica urla e vuole provare lei, e anche Davide, mio nipote di sangue, adesso e` incuriosito e esaltato, e il gioco dei tre bicchieri sta catalizzando un po` di attenzione... si stanno avvicinando pericolosamente gruppi di ragazzi sui venticinque-trent'anni, guardano le mani che rovesciano i bicchieri a coppie, cercando di capire in un colpo solo meccanismo soluzione e trucco. Ahia, penso, questi saranno dottori dottorandi assetati di sangue e palcoscenico, adesso mi massacrano. Il meglio dell'Istituto Superiore di Matematica di Bologna, temo... occhi accesi e sorriso sardonico, leggo nei loro occhi la domanda crudele "E chi e` questo qui, con la scritta anonima "Piero" sul petto, che monopolizza l'Hofstadter e lo incatena al tavolo di cristallo con tre bicchieri?". Vaglielo a spiegare, a questi rampanti algebristi e topologi... provaci, se hai fegato. Se questi scoprono che ho preso 19/30 ad Analisi Due mi sbranano, come faccio a spiegar loro che sono arrivato presto, che ho trovato D.Hofstadter che con un pezzo di carta faceva origami, splendida e piccola "rana che salta", seduto solo soletto al tavolino di fronte alla sachertorte? C'e` voluto poco a chiedergli se sapeva fare la "gru che batte le ali", anche se la risposta "No" m'ha sorpreso non poco... "Come, non sai fare la gru? Allora guarda, base dell'origami, pieghe a monte e pieghe a valle, base triangolare e base quadrata, e poi la "base della gru". Sai fare le difficili rane che saltano e non sai fare la gru? Incredibile!". Ed e` da li che ho pensato che il gioco dei tre bicchieri, anche se viene dritto dritto da Enigmi e Giochi Matematici di Martin Gardner, magari non lo conosceva...

E infatti, D.Hofstadter sta` li', che rimugina, ancora non vede il controllo di parita` che truffaldinamente gli sottopongo, ancora non ce la fa... ma adesso, come me la scampo, se arrivano questi Unni trentenni e dottorati? Cerco disperatamente via di scampo... il mio istinto d'animatore festaiolo mi fa pensare che potrebbe essere il momento del terribilissimo gioco della sedia, niente affatto matematico, ma che sa discernere con impressionante precisione i maschi dalle femmine. Basta una sedia e un muro, e fior di cervelli si scervellano a capire perche` le donne sollevano la sedia e gli uomini rimangono inchiodati al muro. No, non ce la faro', non c'e` tempo... nella saletta accanto, sta tenendo banco un filosofo da discoteca, pantaloni aderenti in pelle nera, maglione nero, faccia da playboy ormai un po` vizzo, e infatti mi dicono che piu` che per le teorie dialettiche e` famoso per essersi fatto una nota showgirl dalle gambe lunghissime e dalle labbra eccessive. Ecco... se faccio il gioco della sedia, qui finisce tutto a tarallucci e silicone. Decido per rapida ritirata, sussurro all'Hofstadter, veloce-veloce, che il trucco c'e', io metto per me stesso i tre bicchieri in posizione rovesciato-diritto-rovesciato, e raddrizzarli in tre mosse e` esercizio da minorati mentali. A lui li metto inizialmente in posizione diritto-rovesciato-diritto, e raddrizzarli in tre mosse, o in quattrocentomila, e` azione da padreterno. Gli si accendono gli occhi, ha sentito tutto anche la dodicenne Monica: sento urla di soddisfazione e comincia un frenetico rovesciamento bicchieristico che mi consente la fuga, lasciando Monica e D.Hofstadter al centro d'un capannello di Unni.

Salvo. A tre metri di distanza da loro, lascio che giunga il momento del defilarsi definitivo. Piu` tardi, mentre Monica ritorna nuotando sul pavimento e sulle onde delle stelle filanti nella stanza delle torte, Davide, il mio nipote di sangue, ruba e sfida per l'ennesima volta D.Hofstadter al gioco dei tre bicchieri. A quell'eta', ci vuole un po` di tempo, prima di stancarsi di un gioco. In fondo, tutti e due hanno solo quattordici anni.

E mentre Monica lancia un urlo di guerra e sale le scale alla ricerca di arance, dopo che Daniele gli ha incautamente rivelato che ad Ivrea se le tirano addosso di questi tempi; dopo che persino Danny Hofstadter e Davide si sono stancati di rovesciar bicchieri, ecco che ricompare lui, l'Autore, Douglas R., figlio di premio Nobel, padre di Danny e di Monica, autore di GEB, di Ambigrammi, di Matemagical Themes, di Mind's I.

Sembra timido come me, il che e` illogico. Noi siamo i fan, lui e` la star, no? Eppure lui prende fotografie e si giustifica coi fotografati, e invece no, dovrebbe essere lui il fotografato che rifugge i flash... mi sembra strano, non capisco. Ma che io non capisca e` cosa quantomai normale. Gli ho stretto la mano un paio d'ore fa, e per i fanatici della matematica ricreativa come me e` stato piu` o meno come fare un baciamano a Megan Gale. Ho giocato un po` con suo figlio Danny, e sono stato un po` a pensare cosa dev'essere avere quattordici anni, avere un nonno premio Nobel e un padre geniale e famoso quanto una superstar. Monica, almeno, bella come rischia di diventare, puo` sempre provare con Hollywood. Ma Danny ha sorriso saggio e occhi accesi, finira` col diventare una superstar pure lui, o addirittura riuscira` a essere felice senza troppa fatica a dispetto delle responsabilita` di casata. Ha l'espressione di chi sa gia` come si fa.

Al momento dei saluti, Daniele chiede a Hofstadter (quello cinquantaseienne) se aveva dato uno sguardo a Rudi Mathematici, il giornalino di matematica ricreativa che indegnamente qui rappresento, e una copia della quale e` giunta nella mailbox di DRH. Un po` come se un ciclostilato di Lotta Continua fosse atterrato sulla scrivania di Karl Marx, mi viene da pensare. Il timido Doug spiega e giustifica, dice che la sua mailbox dell'Universita` dell'Indiana gli e` ridiretta a Bologna, ma in forma strana e perversa, che gli fagocita gli attachments. Aggiunge che preferisce la carta, dice "supporto cartaceo" e discute su dove debba cadere l'accento, io intanto sospiro di sollievo, quasi, che se finiva col chiedermi qualcosa di tecnico magari avrei dovuto confessargli che ho preso 19/30 anche a Metodi Matematici per la Fisica.

Adesso devo solo dire al Comitato di Redazione che dovremmo spedire a Bologna un pacco con dentro gli ultimi numeri di RM, ma tanto quelli del CdR che io sia una bestia lo sanno gia`... senza contare che finalmente potremmo aggiornare il calendario di RM, aggiungendo DRH nella casella del 15 Febbraio.

Seconda ed ultima stretta di mano, e sono fuori a respirare la quasi-pioggia bolognese. L'indomani, domenica 17, sul treno che mi riporta a Torino leggo un libro sui paradossi che m'hanno regalato Daniele e Laura. Magari, nello stesso momento, loro stanno ascoltando i concerti per violino di Mozart che io ho regalato loro. A me i paradossi di Odifreddi, a loro le armonie di Mozart. Siamo contenti tutti, probabilmente... ma la loro contentezza mi sembra piu` logica, come dire, meno paradossale.

Sara` merito di Bologna.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Giovani Teppisti

..Dal titolo, potete presupporre c'entrino i miei figli... Si, con alcuni parenti aventi suppergiu` la stessa eta` (e fedina penale), collettivamente detti l'Orda d'Oro.

Allora, all'ultimo incontro hanno deciso di decorare due muri della veranda dove si mangia d'estate (ha solo due muri perche` il lato est e` aperto e il lato nord e` un porticato: un calpestabile di 3x6 metri, molto comodo); armati tutti di buona volonta`, spirito critico, pennelli e vernice, hanno iniziato alle otto con il muro piu` grande.

Dopo quattro ore di duro lavoro, alcuni dissidi tra le correnti pittoriche (e il valido intervento del cane, probabilmente il miglior pittore presente) ha fatto si` che il gruppo si dividesse in due fazioni (uguali) e mentre meta` continuava l'opera sul primo muro, l'altra meta` dava sfogo al proprio sadico senso estetico sul muro piu` piccolo, e sono andati avanti cosi` sino alle quattro; a quell'ora, il muro piu` grande era completamente dipinto.

Il giorno dopo, lavorando con lo stesso orario l'intera giornata, un solo teppista termina il muro piu` piccolo.

Quanti erano gli imbrattamuri?

2.2 Basta una Moneta

Abbiamo una moneta ("giusta": non sto tirando a fregare[2]).

Vi propongo un gioco di questo tipo: cominciamo a lanciare la moneta sin quando viene "testa".

Se arriva in un numero ***pari*** di mosse, vincete voi, altrimenti vinco io.

La moneta e` 50/50, i pari sono 50/50... Ci state?

3. Quick & Dirty

Toh, una nuova rubrica! Oeu, calma, la mettiamo solo una volta ogni tanto.

E` una cosa a cui rispondere, ma in un modo un po` speciale. Tutto nasce da un tormentone di Doc (Piotr). Vi abbiamo detto che in Bungee Jumpers il mattonepiumezzomattone non lo mettiamo, tra i problemi non lo mettiamo, un PM da quello neanche a pensarci, sul sito e` finito tra i "Getting Started" ma secondo me non c'entra niente... Insomma, dove mettiamo 'sto cavolo di mattone?

Semplice: ci inventiamo una rubrica.

Allora, quando c'e` la rubrica (non tutti i mesi, non sognatevelo neanche), vi ritroverete una domanda, espressa nella forma piu` concisa (e talvolta imprecisa) possibile. La risposta e`, di solito, piuttosto facile, soprattutto se ci pensate con calma (una volta trovatala, liberi di sfogare il vostro sadismo facendo la domanda a vittime innocenti). Mandateci delle risposte; ne pubblicheremo pero` solo una.

La piu` breve.

Su un circuito di un kilometro, ho fatto un giro a 30 Km/h. Quale dev'essere la velocita` del secondo giro per avere una media di 60 Km/h?

[2] Dico sempre cosi`...

4. Soluzioni e Note

4.1 [037]

4.1.1 Tiriamo i dadi

Bene, quattro soluzioni, due delle quali da parte dei nostri laconici preferiti... Se le mettiamo assieme, otteniamo qualcosa che capisce anche Doc (piu` che altro, per sfoggiare la mia abilita` con il formula editor...).

Roberto comincia con un salace commento: Troppo facile o c'e` il trucco?

Seguito a ruota da Vittorio: Ho paura di dover dire ancora una volta: "Devo aver sbagliato tutto, e` troppo facile".

[Ne` "troppo" ne` "trucco", ne` "sbaglio"; e` solo facile, ma richiede di fare qualche passo in piu` rispetto a seiperseitrentasei. Considerate che questa e` una rubrica per famiglie, quindi stiamo cercando di mettere dei problemi facili e dei problemi tosti].

E PuntoMauPunto non e` da meno: Che io sappia, oltre al 6 sui dadi non si arriva *[Polemicamente, poteri tirare in ballo Dungeons & Dragons... Ma se ricordo bene, il risultato non cambia].*

Le combinazioni che posso dare P=36 sono:

$$\{1,1,6,6\}\text{che si verifica } \frac{4!}{2!*2!}=6\text{ volte}$$

$$\{1,2,3,6\}\text{che si verifica } 4!=24\text{ volte}$$

$$\{1,3,3,4\}\text{che si verifica } \frac{4!}{2!}=12\text{ volte}$$

$$\{2,2,3,3\}\text{che si verifica } \frac{4!}{2!*2!}=6\text{ volte}$$

[A questo punto Vittorio, che ha evidentemente recepito la mia richiesta di essere un po` meno stringati, chiarisce anche ai piu` tardi di noi cosa sta succedendo (sto parlando di me: in questi casi ne dimentico sempre una per strada. Sul serio!)]

Ossia:

1166 1616 1661 6116 6161 6611

1236 1263 1326 1362 1623 1632 2136 2163 2316 2361 2613 2631 3126 3162 3216 3261 3612 3621 6123 6132 6213 6231 6312 6321

1334 1343 1433 3134 3143 3314 3341 3413 3431 4133 4313 4331

2233 2323 2332 3223 3232 3322

[Sam preferisce la strada del ragionamento e ci chiarisce da dove arrivano i valori, senza passare per l'elencazione]

Nel primo e nell'ultimo caso si possono presentare due cifre distinte; le combinazioni sarebbero ***24*** se potessimo distinguere un ***1*** *[e un sei]* dall'altro, cosa che non avviene. Quindi, ***6***.

Il terzo caso ha a disposizione tre cifre diverse, quindi a denominatore compare il fattore ***2*** *[per lo stesso motivo di cui sopra].*

Totale, abbiamo percio` ***48*** casi. Considerato che i casi possibili sono $6*6*6*6=6^4=1296$, ho che la probabilita` di ottenere ***36*** vale $\frac{48}{1296}=\frac{1}{27}$.

Sam invece il commento l'ha tenuto per la fine: (4) ora spiegatemi dove vi serviva Excel! *Semplice: conosco alcuni che, quando e` implicato un numero naturale maggiore di uno, ritengono opportuno usarlo per verificare i calcoli. Qualcun altro, invece, sostiene che sono piu` probanti tre mega di Excel che tre righe di algebra. E anche se verso i primi posso nutrire comprensione (e comunanza di errori di calcolo), verso i secondi sono di un'intolleranza totale.*

4.1.2 L'oracolo Maligno

Prima parlo io.

Non so se vi rendete conto di quanto e` frustrante mandare avanti questa parte della rivista.

Con la scusa che la matematica la sappiamo, ci arrivano dei problemi terrificanti; sudiamo le proverbiali settepertreventuno camicie per risolverli (ci teniamo alla nostra reputazione) impiegando tutti i ritagli di tempo, mentre nelle (mie e di Doc) orecchie Tullo Ostilio e il trapassato remoto (al momento massime preoccupazioni del pargolame assortito) sgomitano per raggiungere il nostro cervello; quando finalmente ce la facciamo, pubblichiamo i problemi, sicuri di procurarci un ragionevole periodo di pace. Tre giorni (anzi meno: cinquantatre` ore, suppergiu`) ci ritroviamo in posta otto mail di discussione del problema, la soluzione esatta e un paio di generalizzazioni.

No, in realta` sono contento. Devo pero` ammettere che per un attimo le mie reazioni sono state piene di consonanti (e, come insegnava Brunella Gasperini, in una parolaccia piu` sono le consonanti, piu` e` una parolaccia. "Aiuola maiala" non ha speranze...). Quindi, mi attacco alle piccolezze; per citare Emerson (Ralph Waldo), "Trovare i piccoli errori e` la soddisfazione delle piccole menti".

Roberto sostiene che questo problema gli ricorda il paradosso dell'impiccagione imprevedibile di Gardner.

In realta`, come tutti dovrebbero sapere, la prima comparsa di questo paradosso e` nel numero di febbraio 1944 della "Rivista di Filosofia" dell'Universita` di Stoccolma, in un articolo a firma Lennart Ekbom (anche se fonti solitamente bene informate sostengono che non e` tutta farina del suo sacco); voglio sperare questo vi dia il tono delle nostre letture (dentro, "Topolino" si nasconde agilmente).

Dunque, procediamo con ordine.

All'inizio ci sono stati alcuni tentativi, che pero` si incagliavano su un'impropria interpretazione del testo: visto che l'oracolo pagava doppio, il gioco doveva essere tipo "testa o croce" e quindi (se si sapeva che l'oracolo avrebbe mentito alla prossima giocata) diventava possibile giocare "contro" l'oracolo. Cribbio (57.1% di consonanti... si, e` una parolaccia), gia` vi do` un oracolo (un po` di serie B tipo la Ternana, ma comunque sempre un oracolo), pretendete anche un gioco onesto*?*

Dopodiche`, sono cominciate le "soluzioni"... e le virgolette dovrebbero mettervi in sospetto. Per decisione dei due terzi del Comitato di Redazione, il commento di queste "soluzioni" e` stato affidato ad Alice (indovinate quali erano i due terzi), che, tra le altre cose, aveva anche risolto il problema.

Allora, comiciamo con la parte di PuntoMauPunto. Testo in normale, commenti in corsivo.

Beh, mi spiace. Non potrete pubblicare questa risposta perché sara` troppo corta per gli standard di RM.*[Effettivamente, considerando l'usuale abbondanza di complicazione problemi semplici, pare che il nostro PuntoMauPunto abbia cambiato stile...]*

Il mese scorso ho spiegato cosa ho imparato a fisica: quello che mi hanno insegnato a matematica e` invece sintetizzabile con "se non riesci a risolvere il problema, prova con un caso particolare: se non ci riesci lo stesso, prova a dimostrare un teorema piu` generale e ricavare quello di partenza come caso particolare". Si, lo so che sembra un'idiozia. Il guaio e` che spesso funziona. *[Lo pensa anche Roberto... cosi` tutti e due avete dimostrato universalmente generalizzazioni che in un paio di casi particolari danno risultati buoni...]*

Ho iniziato a pensare a un capitale qualunque C, invece che ai 100 euro iniziali, e a una funzione ricorsiva che mi permettesse di calcolare il valore aspettato E_k per un gioco di k partite, iniziando con un capitale C_k. Partendo da k=1 sono tornato indietro man mano, e ho scoperto una cosa **molto** interessante: che se non sapevo se l'oracolo mi avesse detto la verita`, era meglio che non giocassi! *[Mah, mi viene il dubbio che qui ci sia qualche origine genovese...]* In realta` ciò potrebbe essere preso come "dimostrazione" che giocare fa male... Una volta calcolato i primi valori, ho poi capito che la cosa piu` semplice era cancellare le tracce dei miei conti e fare una bella dimostrazione per induzione: quelle cioe` che danno sempre sui nervi a chi le vede perché la soluzione sembra venuta dal cielo, e devi accontentarti della sua perfezione formale senza capire come diavolo e` nata. *[Ancora... pare che tutti abbiano la stessa opinione sulle dimostrazioni per induzione, ma tutti ce le rifilano...]*

Il teorema generalizzato diventa così:

> "Se ho un gioco con k partite in cui la quota vincente e` due volte la posta, e so che mi verra` dato un suggerimento sbagliato una e una sola volta, il mio capitale finale aspettato sara` $((2^k-1)/k)C$. La strategia ottima e` quella di giocare sempre zero per tutte le partite (tranne l'ultima) fino a che il suggerimento non si rivela sbagliato, e poi giocare sempre tutto."

[L'errore di base consiste nel voler massimizzare il valore medio della vincita, cioe` le probabilita` di vincere il piu` possibile. Quello invece che vogliamo ottenere e` la certezza di vincere il massimo possibile, per cui la strategia deve essere basata su certezze e non su probabilita` e valori medi.]

Vediamo ora la dimostrazione.

Il caso **k=2** e` l'inizio dell'ipotesi induttiva. Supponiamo di avere un capitale C e giocare x. Avrò probabilita` 1/2 di perdere, e quindi passare a (C-x), e 1/2 di vincere, quindi passare a (C+x). Nel primo caso, posso tranquillamente giocarmi tutto nella seconda partita, e raddoppiare il capitale, ottenendo (2C-2x). Nel secondo caso, visto che mi hanno fatto gentilmente notare che non posso giocare **contro** l'oracolo, me ne sto buono buono, gioco zero, e rimango quindi col capitale finale (C+x). Il valor medio ottenuto e` pertanto (3/2)C-x/2, che ha un massimo per x=0. Ergo, meglio non giocare nulla la prima volta, e giocare tutto la seconda volta solo se ho "perso" la prima. L'ipotesi induttiva e` verificata.

Nel caso **k generico**, cominciamo a fare un po` di conti. Giocando x la prima volta, sarò fregato in 1/k dei casi, ma a questo punto potrò sempre giocare tutto, sapendo di vincere: in questo caso il mio valore finale del capitale sara` $(2^{k-1}(C-x))$. Negli altri casi, passerò a C+x, e mi troverò nel caso di avere ancora k-1 giocate con uno e un solo errore. Ergo, vale l'ipotesi induttiva e otterrò come valore finale aspettato $((2^{k-1}-1)/(k-1))(C-x))$. *[Cioe`, non solo si e` semplificato la vita giocando sempre x, invece di considerare dei valori variabili o una qualche funzione del capitale, ma induce saltando passaggi, per cui l'induzione ce la dobbiamo fare da soli...]* Il valor medio aspettato, calcolato ovviamente pesando le due possibilita`, vale esattamente

$$\left[\frac{2^{k-1}}{k}+\frac{2^{k-1}-1}{k}\right]C+\left[\frac{2^{k-1}}{k}-\frac{2^{k-1}-1}{k}\right]x$$

(e` piu` divertente scriverlo in LaTeX). Il primo membro vale proprio $((2^k-1)/k)C$, mentre il secondo membro vale (1/k)x e quindi si massimizza per x=0. Insomma, esattamente quello che dovevamo dimostrare *[O, meglio, quello che volevamo dimostrare. Con le opportune condizioni al contorno e gli opportuni postulati si puo` dimostrare qualsiasi cosa...]*.

Infilando i valori numerici dati, cioe` C=100 e k=10, viene fuori che il valore aspettato e` di 10230 euro... anche se il nostro oracolo sara` certamente abbastanza bastardo inside per darci solo l'ultimo risultato errato e fregarci.

Uno a zero, palla al centro. E siamo solo al primo tempo...

Adesso arriva Roberto; credo alla fine anche a voi saranno chiare due cose:

1. *Non so se fuma, ma quello che fuma Roberto non lo passa di sicuro il Monopolio.*
2. *Aveva ragione Doc*[3].

Spero che vi divertirete a notare che per una volta abbiamo commenti anche dal resto della redazione: per una volta Alice si e` voluta dimostrare utile... [questo lo ha scritto Alice e non rispecchia l'opinione della maggioranza della Redazione (RdA & PRS)]. Non volendo togliere il bello della diretta, vi diciamo anche chi ha commentato...

Le dimostrazioni per induzione sono le piu` carine perche` spesso non si capisce da dove nascano e anche dove finiscano non e` chiarissimo.

[E anche in mezzo un paio di antinebbia vengono bene...(RdA). L'avevano detto anche il GC e PuntoMauPunto e non mi sento proprio di negarlo... (Alice)]

Prendiamo il caso dell'Oracolo Maligno, in arte Murphy, cosi` chiamato perche` puo` mentire nel momento peggiore (anzi, io vorrei che lo facesse proprio di regola).

Per pararsi da Murphy occorre mettersi nelle condizioni in cui, che lui menta o no, a noi non potrebbe fregarne di meno. Aspetteremo con pazienza che lui menta e, se non lo fa, beh, avremo comunque ottenuto un discreto gruzzolo (lo stesso, per altro, che otterremmo se lui avesse mentito). *[La cosa andrebbe un minutino approfondita... Comunque, non sottilizziamo (RdA)]*

E` interessante la generalizzazione. Sia N (invece che 10) il numero di giocate (per quanto non sia significativo). Sia p (invece che 2) il numero di volte che viene pagata la posta vincente.

Sia k il numero di tentativi che ancora mancano prima che finiscano il numero di giocate. E` chiaro che se Murphy ha gia` mentito si deve giocare tutto. Se Murphy deve ancora mentire invece il calcolo della giocata e` piu` complicato. In particolare (ecco le meraviglie dell'induzione) essa vale:

$$A = \frac{(k-1)(p-1)}{kp-k+1} X \qquad \textbf{[A]}$$

dove X e` il capitale al momento della giocata. Sara` vero? Durante la risoluzione non generalizzata (dove p era quindi uguale a 2) si era supposto che la giocata fosse (k-1)X/(k+1). Come si puo` notare, per p=2, si ottiene per l'appunto quel valore.

Ehi, amigo, nice formula! Where did it come from? Domanda invero legittima. Probabilmente non e` il modo migliore per mostrare la soluzione. *["mostrare"? veramente, saremmo interessati ad un "**di**mostrare". E anche sul senso estetico avremmo qualche dubbio (RdA)]*

Riprendiamo il filo. Per pararsi giocondamente il posteriore da Murphy (quando deve ancora mentire ovviamente) nello stato k (cioe` a k giocate dalla fine) ad ogni colpo si gioca una cifra A tale che:

- se Murphy mente (e quindi perdo) giochero` sempre tutto quel che mi rimane da quel momento sino alla fine; alla fine otterro` $(X-A)p^{k-1}$ (che chiamo $\mathbf{G_k(X)}$)

[3] "I matematici, bisognerebbe ammazzarli da piccoli..." (*Piotr R. Silverbrahms,* comunicazione personale).

- se Murphy non mente (e quindi vinco) entro nello stato k-1 con capitale X+(p-1)A. In tale stato (che chiamo **G_{k-1}(X+(p-1)A)**) devo ancora essere capace di vincere (X-A)p^{k-1}.

Devo trovare quindi una formula che mi rappresenti lo stato k. Andiamo a tentativi. Proviamo con:

$$G_k(X) = \frac{p^k}{kp-k+1}X \qquad \textbf{[F]}$$

Ehi, amigo, nice formula! Where did it come from? (Hmm, perche` questa domanda non mi giunge nuova?) *[probabilmente perche` te la sei gia` posta prima. Piu` che le meraviglie dell'induzione, direi che sono le possibilita` dell'estetica...(RdA)}*

Bah... Proviamo a dimostrarla per induzione. Poi presenteremo la venusiana (o meglio sua sorella, c'e` chi capira` il perche') che ce l'ha suggerita (cosi` teniamo viva l'attenzione).

Quando abbiamo finito siamo nello stato atarissico (forse... dovrei ricordarmi con precisione cosa voglia dire atarassia). In altre parole ci aspettiamo che **G_0(x)=X**. Proviamo quindi a porre k=0 e vediamo cosa succede *[Qui il procedimento non e` completamente corretto. Le X di cui si parla, anche se nella versione di Roberto non hanno pedice, sono valori alla puntata: la $G_0(X_0)$ vale effettivamente X_0, ma la $G_k(X_k)$ vale sempre X_0 e non X_k. (Alice)]*: :

$$G_0 = \frac{p^0}{1}X = X$$

Una e` andata. Per una prova del 9 piu` seria proviamo a calcolare **G_1(x)**. Dovra` ancora valere X, visto che se Murphy non ha ancora mentito, col cavolo che faccio una puntata all'ultimo giro.

$$G_1(X) = \frac{p^1}{p-1+1}X = X$$

[Conosco un paio di formule che vanno bene uguale, basate su delle identita` trigonometriche... Questa sembra che l'ispano-americano del piano di sopra l'abbia capita, da dove arriva?(RdA)]

E due! Vuoi vedere che quella formula ha una chance? Che si fa? Si rischia l'induzione? Proviamo a porre:

$$G_k(X) = (X-A)p^{k-1} = G_{k-1}\left(X + (p-1)A\right)$$

e a cercare un valore per A . Se, per puro caso, per **G_k(X)** viene fuori proprio la [F] vuol dire che la sorella della venusiana ci ha preso e potremo invitarla fuori a cena.

[Per quelli di voi che cominciano a chiedersi cosa c'entrino le venusiane, sono un metodo di dimostrazione comodissimo quando uno si trova tra le mani una formula che scotta (su Venere siamo dalle parti dei 400 gradi, se non sbaglio) e brancola nella nebbia piu` totale...(RdA)]

Proviamoci:

$$G_{k-1}\left(X + (p-1)A\right) = \frac{p^{k-1}}{(k-1)p-(k-1)+1}\left(X + (p-1)A\right) = (X-A)p^{k-1}$$

Eseguiamo qualche passaggio *[Mi rifiuto di passarveli in FEd (RdA)]*:

[1] (X+(p-1)A)$\cancel{p^{k-1}}$ = (X-A)$\cancel{p^{k-1}}$((k-1)p-(k-2))

[2] ((p-1) + (k-1)p-(k-2))A = ((k-1)p-(k-2))X - X

```
[3]   (k-1)(p-1)X = (kp - k + 1)A
```

da cui:

$$A = \frac{(k-1)(p-1)}{kp-k+1} X$$

che somiglia tanto, ma proprio tanto alla [A] *[Abbastanza da poter essere sua sorella. Solo che la cosa e` "still da demostrar - ole`!" (RdA)]*. Sostituiamo ora A in $(X-A)p^{k-1}$ ottenendo:

$$(X-a)p^{k-1} = \left(X - \frac{(k-1)(p-1)}{kp-k+1} X \right) p^{k-1} =$$
$$= \frac{kp-k+1-kp+p+k-1}{kp-k+1} Xp^{k-1} =$$
$$= \frac{p^k}{kp-k+1} X$$

Gulp! Abbiamo ottenuto davvero la [F]: la tesi e` dimostrata e la venusiana si e` guadagnata l'invito a cena.

[Spiacente, ma il Ponte di Brooklin non lo compro. E anche sulla venusiana ho i miei dubbi; come fa, di cognome, Roswell? (RdA). Mah, non saprei... ha ricavato A da una formula con la venusiana, poi l'ha risostituita nella venusiana e, miracolo!, ha ottenuto un'identita`...(Alice)]

Rimane da spiegare donde arrivi la sorella della venusiana... (anche se di per se` non ce ne sarebbe bisogno) *[Noooo... Arriva dallo stesso posto di sua sorella (RdA)]*

Sia $G_0(X)$ che $G_1(X)$ valgono X e fino qui... Si calcoli ora $G_2(X)=(X-A)p$ che dev'essere uguale a $X+(p-1)A$. Si risolve per

$$A = \frac{p-1}{2p-1} X \Rightarrow G_2(X) = \frac{p^2}{2p-1} X$$

Si passa a $G_3(X)=(X-A)p^2$ che dev'essere uguale a

$$\frac{p^2}{2p-1}\left(X + (p-1)A\right)$$

che, risolto in A, da`:

$$A = \frac{2(p-1)}{3p-2} X \Rightarrow G_3(X) = \frac{p^3}{3p-2} X$$

Beh, si prosegue nello stesso modo fino a quando non si vede un qualche accidenti di trend:

$$G_4(X) = (X-A)p^3 = \frac{p^3}{3p-2}\left(X + (p-1)A\right) \Rightarrow A = \frac{3(p-1)}{4p-3} X$$

$$G_4(X) = \frac{p^4}{4p-3} X$$

e

$$G_5(X) = (X - A)p^4 = \frac{p^4}{4p-3}(X + (p-1)A) \Rightarrow A = \frac{4(p-4)}{4p-3}X$$

$$G_5(X) = \frac{p^5}{4p-3}X$$

A questo punto mi sembra di aver individuato il trend. Azzardo quindi la [F] che poi si dimostra essere vera.

[Questo ultimo punto mi risulta della stessa chiarezza dell'onusto problema inerente l'uovo e la gallina; l'ordine del ragionamento sembra essere: (1) Trovo queste formule. (2) Da queste mi invento la [F]. (3) Dalla [F] deduco queste formule. Francamente, la cosa ha decisamente poco della dimostrazione (RdA)]

<u>Conclusione</u> ...

Beh, si potrebbe generalizzare anche il numero di volte in cui Murphy mente. Ma l'esercizio e` lasciato al gentile lettore *[Il quale pero` continua a chiedersi che cosa evolva da che cosa, su Venere (RdA)].*

Bene, probabilmente vi chiederete cosa ha combinato Alice. Semplice, ha risolto il problema. Di seguito, avete la soluzione redazionale (tutta sua, in realta`, ma io e Doc siamo pronti ad attribuircene parte del merito); non e` l'originale di sei pagine promessovi, anche perche` altrimenti potreste avere dei problemi a rilegare questo numero. A seguito dell'arrivo delle parti di Roberto e PuntoMauPunto, e` stata un po` modificata, inserendo dei riferimenti.

Dunque, tanto per cominciare con una congiunzione, leviamoci dai piedi la p che Roberto si e` inventato per complicare le cose e supponiamo:

X_k = Capitale a k giocate dalla fine

A_k = Giocata a k giocate dalla fine

Con un numero di puntate generico N (che non serve, alla fine saranno dieci).

In pratica sono a k giocate dalla fine e gioco A_k:

Se vinco, ho $X_{k-1} = X_k + A_k$, altrimenti $X_{k-1} = X_k - A_k$, ma sono sicura che da questo punto in poi vincerò sempre e posso giocare tutto il capitale ad ogni puntata.

Il trucco e` di avere sempre lo stesso guadagno, qualsiasi sia il punto in cui l'oracolo mente, come hanno detto tutti prima di me. Sia $G_k(X_k)$ il guadagno finale se a k passi dalla fine ho un capitale X_k. In generale, $G_k(X_k)$ deve essere lo stesso per ogni valore di k.

Andiamo passo passo, prima il caso generale:

$$k-1: \begin{cases} X_{k-1} = X_k + A_k \xrightarrow{sevinco} G_k(X_k) = G_{k-1}(X_k + A_k) \\ X_{k-1} = X_k - A_k \xrightarrow{seperdo} G_k(X_k) = 2^{k-1}(X_k - A_k) \end{cases}$$

Da adesso in poi, facciamo discendere quale dovrebbe essere la puntata da fare ad ogni passo, supponendo sempre che l'oracolo abbia appena mentito, oppure che mentira` in seguito. Ovviamente, quando l'oracolo mente, il resto delle puntate sono predeterminate (ogni volta la posta massima).

Per k=0, cioe` alla fine, ovviamente $G_0(X_0)= X_0$. Il capitale alla fine e` il guadagno finale.

Per k=1, un passo prima, $G_1(X_1)= X_0$, perché non può che essere uguale, ma X_1 può essere uguale a X_0 o la sua meta`, a seconda se ho perso in precedenza (per cui punto tutto X_1), oppure no (nel qual caso non punto per niente).

$$G_2(X_2)=\begin{cases}2(X_2-A_2)\\G_1(X_2+A_2)\end{cases}$$

Se l'oracolo non ha mentito (seconda riga), arrivo a k=1 con un oracolo che non ha mai mentito, cioe` sono sicura che mentira` alla prossima, per cui non gioco e $X_1 = X_0$. Da cui:

$$2(X_2-A_2)=(X_2+A_2)\Rightarrow A_2=\frac{1}{3}X_2\Rightarrow G_2(X_2)=\frac{4}{3}X_2$$

Per k=3:

$$G_3(X_3)=\begin{cases}2^2(X_3-A_3)\\G_2(X_3+A_3)\end{cases}$$

sostituendo il valore appena trovato nell'espressione di sotto, si ottiene:

$$4(X_3-A_3)=\frac{4}{3}(X_3+A_3)\Rightarrow A_3=\frac{1}{2}X_3\Rightarrow G_3(X_3)=2X_3$$

Per k=4:

$$G_4(X_4)=\begin{cases}2^3(X_4-A_4)\\G_3(X_4+A_4)\end{cases}$$

$$8(X_4-A_4)=2(X_4+A_4)\Rightarrow A_4=\frac{3}{5}X_4\Rightarrow G_4(X_4)=\frac{16}{5}X_4$$

Per k=5:

$$G_5(X_5)=\begin{cases}2^4(X_5-A_5)\\G_4(X_5+A_5)\end{cases}$$

$$16(X_5-A_5)=\frac{16}{5}(X_5+A_5)\Rightarrow A_5=\frac{2}{3}X_5\Rightarrow G_5(X_5)=\frac{16}{3}X_5$$

Generalizzando:

$$G_k(X_k)=\frac{2^k}{k+1}X_x$$

$$G_k(X_k)=2^{k-1}(X_k-A_k)=G_{k-1}(X_k+A_k)$$

$$\frac{2^{k-1}}{k-1+1}(X_k+A_k)=2^{k-1}(X_k-A_k)\Rightarrow A_k=\frac{k-1}{k+1}X_k$$

In questo modo sappiamo sempre quanto puntare finche` il maledetto mente dato il capitale e le puntate che ci restano.

Bravo Roberto, la generalizzazione l'ho imparata da lui...

Casomai non vi bastasse, c'e` la soluzione di WoTmaniac (e` un nuovo lettore, e ha il diritto di scegliersi il nome che preferisce, quindi non rompete le scatole). La sua soluzione procede sui binari di quella di Alice, ma non lavorando con il Formula Editor si e` stancato molto meno (Alice ha fatto le due di notte, per finire la sua analisi in tempo per questo numero) e questo ha fatto si` che andasse avanti nei calcoli senza impiegare tempi biblici; onore al merito, e dalla sua risposta ricaviamo un bignamino di quanto dovete scommettere se l'oracolo non ha ancora mentito.

Spero sia chiaro.

Alla	***prima***	*giocata gioca i*	$\frac{9}{11}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***seconda***	*giocata gioca i*	$\frac{4}{5}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***terza***	*giocata gioca i*	$\frac{7}{9}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***quarta***	*giocata gioca i*	$\frac{3}{4}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***quinta***	*giocata gioca i*	$\frac{5}{7}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***sesta***	*giocata gioca i*	$\frac{2}{3}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***settima***	*giocata gioca i*	$\frac{3}{5}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***ottava***	*giocata gioca i*	$\frac{1}{2}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***nona***	*giocata gioca i*	$\frac{1}{3}$	*di quello che hai*
Se non ha ancora mentito, alla	***decima***	*giocata*		*non giocare*

Inoltre, WoTmaniac inserisce un interessante commento: Aumentando la percentuale di puntata, converrebbe che la giocata in perdita si presentasse tardi. Diminuendo la percentuale, converrebbe si presentasse presto. Certo che l'oracolo, essendo maligno e avendo dimostrato di saper mentire, potrebbe aver mentito un'altra volta e farci perdere DUE volte....:) *[Per carita`! Gia` abbiamo il mal di testa a decidere quanto scommettiamo, anche le tasche vuote??]*

5. Bungee Jumpers

5.1 Il salto

1) Provare che la somma di tutti gli interi formati da ***n*** cifre (***n>2***) vale $494\underbrace{9\ldots9}_{n-3}55\underbrace{0\ldots0}_{n-2}$.

2) Trovare la somma dei numeri ***pari*** di ***4*** cifre che possono essere scritti con le cifre ***0***, ***1***, ***2***, ***3***, ***4***, ***5*** eventualmente ripetute all'interno del medesimo numero.

5.2 Pagina 46

Prima Parte

Con un numeraccio del genere, meglio partire dal fondo. Proviamo a scriverlo diverso.

Si vede che e`:

$$4949\underbrace{9\ldots9}_{n-3}55\underbrace{0\ldots0}_{n-2} = 4*10^{2n-1} + 9*10^{2n-2} + 4*10^{2n-3} + 9*\left(10^{2n-4} + \ldots + 10^{n}\right) + 5*10^{n-1} + 5*10^{n-2} =$$

$$= 4*10^{2n-1} + 9*10^{2n-2} + 4*10^{2n-3} + 9*10^{n}*\frac{10^{n-3}-1}{9} + 5*10^{n-1} + 5*10^{n-2} =$$

$$= 4*10^{2n-1} + 9*10^{2n-2} + 5*10^{2n-3} - 10^{n} + 5*10^{n-1} + 5*10^{n-2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(8*10^{2n-1} + 18*10^{2n-2} + 10*10^{2n-3} - 2*10^{n} + 10^{n} + 10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(9*10^{2n-1} + 9*10^{2n-2} - 9*10^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\left[\left(10^{n}-1\right)+10^{n-1}\right]*9*10^{n-1}}{2}$$

Questo valore e\` la somma della serie aritmetica avente ragione ***1*** con primo termine $10^{n-1}$ e ultimo termine $10^{n}-1$ o, piu\` prosaicamente, e\` la somma dei $9*10^{n-1}$ numeri interi compresi[4] tra 10^{n-1} e $10^{n}-1$, ossia degli interi formati da ***n*** cifre.

Seconda Parte

*Se deve avere **quattro** cifre ed essere **pari**, non potra\` cominciare con **0** e dovra\` finire con **2** o con **4**.*

Nella seconda e nella terza posizione di questi numeri puo\` esserci una qualsiasi delle cifre ***(0, 1, 2, 3, 4, 5)***, ossia abbiamo la scelta tra ***6*** valori; nella quarta e ultima posizione puo\` esserci una qualsiasi delle cifre ***(0, 2, 4)***, ossia abbiamo la scelta tra ***3*** valori; quindi, se in prima posizione abbiamo uno dei numeri ***(1, 2, 3, 4, 5)***, il numero dei numeri che iniziano con quella cifra sara\` $6*6*3=108$.

Ora, per questi numeri, consideriamo il contributo alla somma che viene dato dalla colonna delle migliaia (la prima); quando in questa colonna c'e\` il valore ***1***, la somma sara\` $1*108*1000$; quando sara\` presente il valore ***2***, la somma sara\` $2*108*1000$, e avanti cosi\`; il contributo nei ***5*** casi individuati sara\`:

$$(1+2+3+4+5)*(6*6*3)*1000=1620000$$

Con lo stesso ragionamento per la colonna delle centinaia (la seconda), vediamo che il numero dei numeri aventi questa cifra definita e\` $5*6*3=90$ (contributi rispettivamente delle migliaia, delle decine e delle unita\`). Da cui il contributo nei ***6*** (in realta\` ***5***: il contributo dello ***0*** e\` nullo e possiamo ignorarlo) casi individuati sara\`:

$$(1+2+3+4+5)*(5*6*3)*100=135000$$

Identicamente, per le decine, si ha un contributo di:

$$(1+2+3+4+5)*(5*6*3)*10=13500$$

e per le unita\`

$$(2+4)*(5*6*6)*1=1080$$

E il totale risulta

$$1620000+135000+13500+1080=1769580$$

[4] Vi ricordate che Gauss ha calcolato con questo metodo la somma degli interi da ***1*** a ***100*** all'eta\` di cinque anni? La formula e\` la stessa.

Che e` il risultato cercato.

6. Paraphernalia Mathematica

6.1 La Serie Armonica

Anche se piuttosto semplice, la *serie armonica* contiene alcune caratteristiche piuttosto strane: ad esempio, arduo e` stato convincermi che non converge. La miglior dimostrazione in merito (cioe` talmente facile che ci arriva anche il sottoscritto) prevedeva di prendere dei blocchi di termini, ciascuno delle dimensioni della rispettiva potenza di due; e` semplice veder che ognuno di questi termini e` *maggiore* di $\frac{1}{2}$, e quindi la serie e` minorata da una serie infinita di termini ciscuno uguale a $\frac{1}{2}$, quindi diverge.

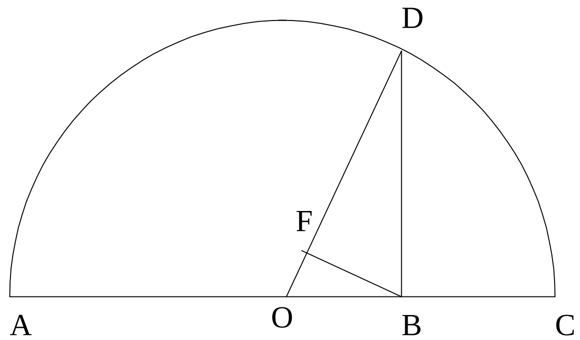
In pratica:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}}_{>1*\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2*\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>4*\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>8*\frac{1}{16}} + \cdots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

Abbastanza chiaro, no?

OK, ma perche` l'anno chiamata armonica? Bel, la cosa risale a Pitagora, all'epoca in cui studiava i rapporti armonici delle corde pizzicate: se dimezziamo la lunghezza di una corda, la nota emessa sara` di frequenza doppia, ma se riduciamo la sua lunghezza ad un rapporto *sesquipedale* (va meglio, se scrivo $\frac{2}{3}$?) otteniamo una *quinta*, che e` comunque considerato un rapporto armonico intermedio. Quindi si dice che $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ formano una progressione armonica (musicale), e che $\frac{2}{3}$ e` la *media armonica* tra 1 e 2.



Molte sono le relazioni tra la media armonica e le altre medie; ad esempio, se prendete gli inversi dei due numeri e della loro media armonica ottenete una serie aritmetica (con il termine intermedio media aritmetica tra i due estremi); da cui, l'inverso della media armonica e` uguale alla media aritmetica degli inversi, ossia $\frac{1}{M_A} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ da cui il nome (tutt'altro che armonioso) di *media subcontraria*.

La media armonica piaceva molto ai greci, che riuscivano a farla saltar fuori dai posti piu` disparati: ad esempio, dati due numeri a caso, il primo sta alla media aritmetica dei due come la media armonica sta al secondo (non e` difficile dimostrarla, datevi da fare).

Inoltre *Pappo* e` riuscito a dimostrare (anche questa e` piuttosto semplice[5], se vi ricordate Euclide) che nella figura qui sopra, se ***AB=a*** e ***BC=b***, allora ***OD*** e` la media *aritmetica*, ***DB*** e` la media *geometrica* e ***BF*** e` la media *armonica*.

Se vi piacciono le espressioni complicate e i calcoli, allora potreste provare a dimostrare che la media *geometrica* di due numeri positivi e` uguale alla media *geometrica* della media *armonica* e della media *aritmetica*.

Tutte quante espressioni piuttosto esoteriche, che divertivano molto i Pitagorici.

Quello pero` che li mandava in un brodo di giuggiole, era una cosina basata sulla Formula di Eulero che, nella formulazione classica per i solidi convessi e non forati, risulta $V - E + F = 2$, dove ***V*** e` il numero dei *vertici*, ***E*** e` il numero degli *spigoli* e ***F*** e` il numero delle *facce*. State a vedere cosa succede.

Supponiamo un poliedro regolare abbia ***F*** facce, ciascuna delle quali sia un poligono regolare di ***n*** lati e che in ciascun vertice si incontrino ***r*** spigoli. Contando gli spigoli rispetto alle facce e ai vertici, si ha che e` $nF = 2E$ perche` ogni spigolo appartiene a due facce e quindi nel prodotto dobbiamo contare ***nF*** due volte. Inoltre $rV = 2E$ in quanto ogni spigolo contiene due vertici. Dalla formula allora si ricava che deve essere $\frac{2E}{n} + \frac{2E}{r} - E = 2$, ossia

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \qquad [001]$$

Se poi consideriamo il fatto che un poligono deve avere almeno tre lati, deve essere $n \geq 3$ e dal fatto che almeno tre lati devono incontrarsi per formare un angoloide deve essere $r \geq 3$.

Ma ***n*** e ***r*** non possono essere *contemporaneamente maggiori* di 3, in quanto dalla [001] si avrebbe che il primo termine non supera 1/2 e quindi ***E*** dovrebbe essere negativo. Si tratta quindi di vedere quali valori puo` assumere ***r*** quando ***n=3*** e quali valori puo` assumere ***n*** quando ***r=3***.

Ossia, otteniamo due espressioni (che una volta tanto *non* devono essere soddisfatte contemporaneamente):

$$n = 3 \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E} \qquad r = 3,4,5 \qquad [002.001]$$

$$r = 3 \qquad \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E} \qquad n = 3,4,5 \qquad [002.002]$$

Ossia, gli unici solidi regolari che possiamo avere sono:

n	r	E	F	V	Nome
3	3	6	4	4	Tetraedro
	4	12	8	6	Ottaedro
	5	30	20	12	Icosaedro
4	3	12	6	8	Cubo
5		30	12	20	Dodecaedro

[5] Piccola nota di storia di RM. Alice e` la nostra esperta in geometria e, durante un CdR, abbiamo sudato sette camicie su 'sta roba, sin quando lei e` scoppiata a ridere... Stavamo usando un disegno *sbagliato*.

E questi sono gli unici valori possibili, quindi i solidi regolari sono cinque.

E questo cosa c'entra con la serie armonica? Beh, nelle [002], se n o r e` pari, potete trasformare la formula in un rapporto armonico (raccogliendo 1/2 a fattor comune). Quindi $n=4$ ($r=3$) e $r=4$ ($n=3$) sono gli unici solidi *"armonici"*. Anche questo divertiva da matti i Greci.

Quanto spesso viene battuto un record?

Supponiamo di avere una lista dei livelli di precipitazione raccolti nell'arco di un secolo (se vi piacciono i numeri "grossi", chiedete a Alice: dalle sue parti piove sempre, peggio che al Paesello); quante violazioni del record precedente vi aspettate, esaminando la serie storica? Escludiamo buchi dell'ozono e organizzazioni di picnic, ossia consideriamo le piogge completamente indipendenti tra di loro.

Il primo anno (e` abbastanza evidente) e` un anno record, non avendo dati precedenti.

Il secondo anno, a stima, piovera` come il primo, quindi la probabilita` di avere un record sara` 1/2. Da cui, il numero atteso di record nei primi due anni sara` 1+1/2. Al terzo anno, sempre secondo le ipotesi precedenti, ci aspettiamo un record con probabilita` 1/3, da cui... Credo che a questo punto siate in grado di andare avanti da soli. Ora, se sommate i primi cento termini della serie armonica (ammesso Excel...) ottenete il numero di volte che, nel secolo, i giornali titoleranno "*Record di pioggia dalle vostre parti!*", e viene fuori un qualcosa come cinque volte (5.187, per la precisione). Facendo un po` di calcoli potete scoprire dopo quanto tempo potete dire che "sui giornali ci sono sempre le stesse notizie": dovrete aspettare lo scrivano dieci volte, scoprire cioe` quanti termini vi servono per superare il valore dieci. Prendetevela pure calma, (o usate Excel, come ho fatto io...): dovrete aspettare dodicimilatrecentosessantasette anni (meno i primi cento, logicamente...).

Questa invece l'ho verificata tornando a casa.

Supponiamo una strada ad una corsia per senso di marcia; prima o poi, l'imbranato che forma la coda lo trovate di sicuro. Di solito, lungo la strada si formano dei "grappoli", ciascuno guidato da un valido rallentatore. Se abbiamo n auto, quanti gruppi si formeranno? Gia`, sempre lei. E` equivalente a chiedersi quanti record di lentezza si formeranno, e gia` sappiamo che la risposta e` la serie armonica; i gruppi saranno in ordine di velocita` (lentezza), quindi saranno sempre piu` spaziati tra di loro.

Giusto per vedere ancora un paio di posti dove puo` saltar fuori la serie armonica, supponiamo di essere responsabili per il crash test di una fabbrica di stuzzicadenti; nostro scopo e`, usufruendo delle piu` moderne apparecchiature, stabilire che forza e` necessaria per rompere uno stuzzicadenti.

Spero ammetterete che provarli *tutti* sino alla rottura e` piuttosto stupido. Un buon metodo potrebbe essere il seguente:

1. Provo il *primo* sino alla rottura: supponiamo richieda uno sforzo F_1.
2. Sul *secondo*, aumento lo sforzo da zero sino a F_1. Se si rompe prima, registro lo sforzo necessario (F_2) e uso questo valore in luogo di F_1.
3. Ricomincio da (2).

In questo modo, mi aspetto di rompere un numero di stuzzicadenti pari alla somma della serie armonica: se fate i conti (ricicliamo i valori di cui sopra, va bene?) scoprite che ne fate fuori circa **5** su una popolazione di cento stuzzicadenti, ma se avete mille stuzzicadenti vi fermate dalle parti del **7**.

C'e` un vecchio problema che, si racconta, e` diventato praticamente una barzelletta per chi si occupa di logistica.

Dovete attraversare un deserto senza distributori. Non avete il tempo di mettervi li` a organizzare dei punti di rifornimento, ma avete a disposizione un numero infinito di jeep (che pero` dovete restituire) e molti amici. Quante jeep vi servono per traversare il deserto?

Supponiamo di avere due jeep, e di applicare la seguente procedura:

1. Vanno assieme per 1/3 del percorso.
2. La jeep 1 trasferisce 1/3 del carburante nella jeep 2
3. La jeep 1 torna indietro, e la jeep 2 puo` andare avanti per un totale di 1+1/3 di serbatoio.

Con tre jeep, la situazione diventa un po` piu` complessa ma ci si riesce:

1. Vanno assieme per 1/5 del percorso
2. La jeep 3 trasferisce 1/5 alla jeep 1 e 1/5 alla jeep 2.
3. Le jeep 1 e 2 si comportano come nel caso precedente, ma la 2 quando torna indietro arriva senza carburante dalla 3
4. La jeep 3 fornisce meta` del carburante rimasto (ossia fornisce 1/5 del serbatoio) alla jeep 2, cosi` riescono a tornare alla base

...e avanti cosi`. La distanza massima percorribile risulta quindi $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} > \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\right)$ (posto che ad un primo sguardo non vi tornino i conti, prego notare che la prima sommatoria comincia da ***zero***, mentre la seconda comincia da ***uno***: ogni termine della prima serie maggiora il corrispondente termine della seconda serie). Ma quest'ultima e` divergente, quindi posso traversare qualsiasi deserto. L'unico problema puo` essere il fatto che ad un certo punto il deserto e` *pieno di jeep*.

Cercate comunque di fare attenzione quando la maneggiate: provate ad esempio a prendere la serie armonica (con *tutti* i numeri dentro) e cancellate tutti i termini che *contengono uno zero*. "A occhio", sparisce un termine ogni dieci, e quindi dovrebbe tendere a un decimo di infinito...

No.

Consideriamo i termini in cui il denominatore e` formato da *una cifra*: di questi ne abbiamo ***9***, ciascuno di loro e` minore o uguale a ***1*** e la loro somma e` sicuramente minore di ***9***.

Consideriamo tutti i termini in cui il denominatore e` formato da *due cifre*: di questi ne abbiamo 81, ciascuno di loro e` minore o uguale a ***1/10*** e la loro somma e` sicuramente minore di $\boldsymbol{9^2/10}$.

E avanti cosi`.

In pratica, se ***S*** e` la somma della nostra serie, $S < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9^k}{10^{k-1}} = 9 * \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^k = 90$.

Se ci giocherellate un po` (una *lunga* tabella Excel aiuta...) scoprite che e` (suppergiu`) ***S=23.10345...***.

Se tornate un attimo alla dimostrazione di divergenza (tra l'altro, e` di Oresme), e indicate con ***H(n)*** la somma della ridotta ***n-esima***, quello che dimostrate (effettuando la sostituzione) e` che

$$H(2^n) \geq \frac{n+2}{2}$$

Ammetterete con me che una cosa del genere puzza scandalosamente di logaritmo. In effetti, si puo` vedere che ***H(n)*** aumenta suppergiu` come il logaritmo (in base ***e***) di ***n***. Con metodi brutalmente numerici si puo` verificare che e` $\lim_{n\to\infty} \log_e n - H(n) = g$, che vale circa 0.577 ed e` nota come la ***costante di Eulero***. Potreste provare a vedere se e` razionale o irrazionale.

Se ci riuscite diteglielo, che la riunione era noiosa: poi, passate tranquilli a ritirare il Premio Field.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms