Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell altro millennio

Numero 036 - 2002-01

1. Editoriale

BeneBeneBeneBene... Non so quando vi arrivera` questo numero, quindi non ho ben chiaro che tempo usare per chiedervi del Natale e di Capodanno.

Noto con piacere che il nostro sito ha avuto un discreto numero di accessi; non arriviamo ai livelli di certa gente che sta dalle parti di Redmond, pero` nel nostro piccolo il fatto che in tre giorni (di cui due festivi) si siano superati i cento accessi ci fa sentire un po` osservati... Spero non pretenderete da Doc il mantenimento di questo ritmo nell'aggiornamento. Se siamo riusciti a metterci d'accordo, dovrebbe comparire a breve l'Index Mundi, ossia la catalogazione di tutti i problemi comparsi su RM; il guaio e` che stiamo litigando in merito alla valutazione della difficolta` dei problemi; Doc vuole mettere "3" a tutti (con l'eccezione di quelli cui io attribuisco un "3") e Alice vuole mettere "1" a tutti (con l'eccezione di quelli cui io attribuisco un "1"); insomma, andamo d'accordo solo nel non andare d'accordo. Andra` a finire che daremo tre valutazioni.

Se ce la facciamo, il mese prossimo vi faccio una domanda difficile.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Problema di Urbanistica

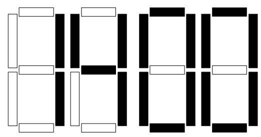
Allora, questo e` piuttostototosto...

Vi e` stata richiesta una consulenza da parte di una citta` composta unicamente da una strada perfettamente circolare ("Ci vediamo in centro..."). Le autorita` intendono fornire ***4*** e solo ***4*** licenze per l'apertura di un nuovo commercio. Gli abitanti vivono distribuiti uniformemente sulla circonferenza e, visto che il servizio e` fondamentale (Edicole che distribuiscono RM?) tutti si recheranno al negozio piu` vicino. La posizione del negozio (sulla circonferenza) verra` scelta dagli esercenti nell'ordine ***A***, ***B***, ***C***, ***D***. Ognuno di loro intende massimizzare i suoi guadagni e avendo ognuno un consulente perfettamente razionale (ci deve essere un errore: non potete essere voi), ognuno di loro fara` la scelta migliore per la situazione attuale, tenendo conto che dovranno scegliere anche gli altri e sapendo che gli altri perseguono lo stesso obiettivo. Nel caso un negoziante debba scegliere tra valori uguali, scegliera` casualmente. Inoltre, l'ultimo scegliera` evidentemente a meta` del segmento piu` largo.

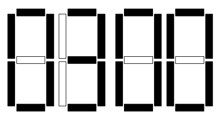
Dove dovrebbe scegliere ***B***, in funzione della scelta di ***A***?

2.2 Che ore sono?

Visto che l'altro e` pesantino, una cosina facilefacilefacile; pero` io mi sono divertito, anche perche` non mi sono fermato al primo risultato.



Allora, a Natale vi hanno regalato un nuovo orologio digitale (di quelli che, secondo D. Adams, dovrebbero rendere felici gli esseri senzienti); quando avete cominciato a lavorare a questo problema segnava l'ora indicata qui sulla destra; quando siete andati a nanna (senza essere riusciti a risolvere il problema) l'orologio segnava l'ora qui a sinistra.



Ora, dalle istruzioni (che sicuramente non avrete letto) sapete che ogni segmento sopravvive per un anno di accensione.

Bene, dopo quanto siete *costretti* a comprarvene uno nuovo?

3. Soluzioni e Note

3.1 [034]

No, non e` un refuso: semplicemente, ho ricevuto tre mail che chiedevano lumi in merito alla soluzione. Evidentemente, non siete stati attenti mentre Roberto spiegava. Vi passo quella che avevo, datemi la manina, OK?

3.1.1 Sempre dalle stesse parti

Siccome Anna pensa, dopo la chiaccherata, di sapere dove abita Andrea, quest'ultimo deve aver risposto "*Si*" entrambe le volte; siccome ci sono solo due quadrati perfetti maggiori di ***50*** (trattasi di ***64*** e ***81***), se Anna pensa di sapere dove abita Andrea vuol dire che "decide" tra questi due e quindi *lei abita ad uno dei due e Andrea abita all'altro*. Lo ammetto, non era facile.

Siccome pero` Andrea ha contato una frottola, sappiamo solo che il numero civico di Andrea e` maggiore di ***50*** e che ***non*** e` un quadrato perfetto.

Nel dialogo con Alessia, si puo` fare lo stesso ragionamento, visto che i cubi perfetti maggiori di ***25*** sono due (trattasi di ***27*** e ***64***); quindi l'idea di Alessia e` che *lei abita ad uno dei due e Andrea abita all'altro*.

Stesso ragionamento di cui sopra quindi ma senza dati aggiuntivi; infatti, sappiamo gia` che e` maggiore di ***50*** e quindi sapere che e` maggiore di ***25*** non ci interessa assolutamente.

Proviamo a capire pero` dove abitano le due gentildonne; se il numero di Andrea e` maggiore di ***50*** ma minore di quello di Alessia, allora Alessia *deve abitare al numero **64***.

Ora, supponendo che non siano cosi` scemi da non accorgersi che abitano tutti assieme, con lo stesso ragionamento si deduce che Anna *deve abitare al numero **81***.

Inoltre, sappiamo che deve essere, se ***x*** e` il numero civico di Andrea e ***p*** un parametro,

$$64+81+x=2*p^2 \text{ } \textit{sub condicio} \text{ } 50<x<64.$$

Io ci sono arrivato per tentativi a manina, se vi diverte provate con Excel.

Alla fine, dovreste ottenere un grazioso valore ***55*** per il numero civico di Andrea e quindi potete compilare la vostra rubrica:

Andrea: ***55***

Alessia: ***64***

Anna: ***81***.

Allora, voi saltate dentro, li disarmate e io dopo cerco il valsente...

3.2 [035]

3.2.1 Un altro problema logico

Qui qualcuno ha deciso di mettermi nella bagna. Voglio sperare non vi aspettiate un problema del genere al mese, non ce la farei mai. *[Aggiornamento del 20011214]* ***DUE*** soluzioni! E` arrivata anche quella di PuntoMauPunto! Le due soluzioni sono simili (anche perche` non c'erano molte strade da seguire); C'e` da dire che PMP ha messo "una cosa in piu`". Andiamo con ordine.

Roberto, questo doveva durare tre numeri, neanche il tempo di pubblicarlo che *tracchete*, arriva la soluzione. Fosse almeno sbagliata... Invece oltre che giusta e` anche piu` corta della mia. Gli lascio la parola (anche perche` non ho parole...).

Forse e` meglio reinserire il testo, si? Altrimenti rischiate di perdervi.

Calcolate ***N*****,** noto che:

1. Almeno una delle ultime due dichiarazioni e` vera
2. Questa e` o la prima vera o la prima falsa dichiarazione della lista.
3. Ci sono tre dichiarazioni false consecutive.
4. La differenza tra il numero dell'ultima dichiarazione vera e il numero della prima dichiarazione vera e` un fattore di ***N***.
5. La somma dei numeri delle dichiarazioni vere e` ***N***.
6. Questa non e` l'ultima dichiarazione vera.
7. Il numero d'ordine di ogni dichiarazione vera e` un fattore di ***N***.
8. ***N*** e` uguale alla percentuale delle dichiarazioni vere
9. Il numero dei diversi fattori di ***N*** (non necessariamente primi, ma diversi da ***1*** e ***N***) e` maggiore della somma dei numeri delle dichiarazioni vere.
10. Non ci sono tre dichiarazioni consecutive vere.

Riprendendo il discorso della scorsa volta sulla difficolta` dei problemi, insisto nel dire che essa e` presunta o reale a seconda che gli stessi si sappiano o no risolvere.

[Sono d'accordo. Infatti, nell'"Index Mundi", vorremmo inserire le *nostre* valutazioni, ben consci che non esiste una valutazione assoluta; Doc (Piotr) dopo tre secondi dice che non ce la fara` mai, Alice ci si incaponisce sopra e arriva alla soluzione che a posteriori le sembra ovvia; quindi, votano rispettivamente "3" e "1". Io? Dipende dal traffico; ci penso in macchina e quindi e` una variabile aleatoria]

Personalmente il problema di trovare il numero N in maniera logica, l'ho trovato simpatico, divertente e ingegnoso. La soluzione pero` mi e` venuta abbastanza spontanea una volta superato lo scoglio di pensare che una dichiarazione potesse essere esclusivamente vera o falsa e non anche indeterminata, come mi stavo portando a pensare la prima volta che una lettura affrettata del dettato mi aveva fatto arenare col ragionamento.

[No, alla logica ternaria non ci siamo ancora arrivati. Pero` potremmo provarci...]

Questo e` un tipico problema che si risolve per passi che, nel mio piccolo, son quelli che mi riescono di piu`.

[Roberto, cambio solo la formattazione, per chiarezza...]

Passo 1*: che la [2] sia vera o falsa, la [1] e` comunque falsa; se la [2] e` vera, e` la prima vera, quindi l'[1] e` falsa; se la [2] e` falsa, non e` la prima falsa, ergo... Poiche' la [1] e` falsa, anche la [9] e la [10] devono essere false. En passant, si nota che se la [5] e` vera allora N puo` valere al piu` 35 (=(2+8)/2*7).*

Passo 2*: la [6] e` vera per assurdo; se fosse falsa sarebbe l'ultima vera. Essendo [9] e [10] false, la [6] implica che o la [7] o la [8] o entrambe sono vere. Escludiamo subito l'ultimo caso. Se la [7] e la [8] fossero entrambe vere, N, per la [8], sarebbe una percentuale su 10 casi e quindi un numero minore di 100 e divisibile per 10. La [7] dice che N deve anche essere divisibile per 7 e per 8. Poiche' MCD(7,8,10)=280>100, si e` arrivati ad un assurdo. Ergo, una e solo una tra la [7] e la [8] e` vera.*

Passo 3*: ipotizziamo che la [3] sia falsa, cioe` che non ci siano tre false consecutive. Per evitare triplette di false, [2] e [8] devono essere vere, la [7] e` falsa per quanto detto sopra e poiche' la [10] e` falsa, c'e` una tripletta di vere che puo' essere solo formata da [4], [5] e [6]. La [8] dice che N e` 50; la [5] dice che N e` 25. E` un assurdo, per cui la [3] e` vera.*

Passo 4*: essendo vera la [3], la [8] e` falsa perche' e` l'unico posto dove si puo` collocare una tripletta di falsi. Quindi la [7] e` vera. N, pertanto, dev'essere divisibile per 7 e per 6, cioe` dev'essere almeno 42. Per quanto vedevamo nel passo [1], la [5] e` falsa. Per la falsita` della [10], l'unica tripletta di veri e` collocabile in [2], [3] e [4].*

Passo 5*: si tirano le fila: in virtu` della [7], N dev'essere divisibile per 2, 3, 4, 6 e 7. Per la [4], inoltre, N dev'essere anche divisibile per 7-2, cioe` per 5. MCD(2,3,4,5,6,7)=420, per cui tutti i multipli di 420 sono candidati alla soluzione*

Passo 6*: entra in gioco la [9], reietta fino a questo momento. Poiche' e` falsa, N deve avere un numero di fattori non maggiore di 2+3+4+6+7=22. Per un colpo di "classe" incredibile : - ), i fattori di N sono giustappunto 22: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 12, 14, 15, 20, 21, 28, 30, 35, 42, 60, 70, 84, 105, 140, 210. 840 avrebbe sicuramente piu` fattori, quindi la soluzione e` 420.*

Ammiro chi ha composto un problema simile.

[Anch'io, anche se non lo conosco. E invidio chi riesce a risolverli in un giorno]

Chiudo con un consiglio: sarebbe bene inviare la rivista di venerdi` pomeriggio. Non credo di avere avuto oggi una giornata troppo produttiva : -))

Tecnicamente, questa si definisce "presa per i fondelli"... Era nostra intenzione garantirvi almeno *due settimane* non troppo produttive.

Quella di PuntoMauPunto segue circa la stessa strada: vi do` solo la traccia:

1. *La [6] deve essere vera*
    - *1.1. Allora [1] e` falsa*
        - *1.1.1. Allora [9] e [10] sono false*
2. *Supponiamo [8] vera*
    - *2.1. **N** puo` essere 20, 30, 40, 50, 60, 70 (dipende da quante sono le vere)*
    - *2.2. [7] deve essere falsa, altrimenti N=70 (multiplo di 7) e N=40 (multiplo di 8)*
        - *2.2.1. Quindi N e` diverso da 70*
    - *2.3. Da [10], [4] deve essere vera, altrimenti non ne avremmo 3 vere di seguito.*
    - *2.4. Se [5] fosse vera, la somma dei numeri delle vere sarebbe tra 23 e 28*
        - *2.4.1. Quindi [5] e` falsa*
    - *2.5. Sempre per [10], [2] e [3] sono vere*
        - *2.5.1. Ma non ci sono tre false consecutive, quindi [3] dovrebbe essere falsa.*
    - *2.6. Contraddizione.*
3. *Allora [8] e` falsa*
    - *3.1. Allora [3] e` vera (ci sono tre false di fila)*
    - *3.2. ...e [7] e` vera (perche` sono false [8], [9], [10]).*
4. *Supponiamo [5] vera.*
    - *4.1. Le vere sinora sono [3], [5], [6], [7], totale 21*
        - *4.1.1. Quindi N puo` valere 21, 23, 25, 27 (abbiamo dubbi su [2] e [4]).*
            - *4.1.1.1. Se [7] e` vera N ha fattori 7 e 6, quindi vale almeno 42*
    - *4.2. Contraddizione*
5. *Allora [5] e` falsa.*
6. *Da [10], [2] e [4] devono essere vere.*
7. *Ricapitolando, sono vere: [2], [3], [4], [6], [7].*
    - *7.1. Quindi **N** e` multiplo di* $2^2 * 3 * 5 * 7 = 420$
        - *7.1.1. E il numero dei fattori e` minore di* $2 + 3 + 4 + 6 + 7 = 22$
    - *7.2. I fattori distinti si possono calcolare con la famosa formuletta che moltiplica tra loro tutti gli esponenti dei fattori primi diversi nella scomposizione, ciascuno con sommato uno.*
        - *7.2.1. Ossia* $3 * 2 * 2 * 2 = 24$ *da cui togliamo 1 e 420, quindi restano 22*
    - *7.3. Qualsiasi multiplo di 420 ha almeno 23 fattori distinti (i 22 di cui sopra e 420)*
        - *7.3.1. Questo renderebbe vera [9]*
8. *Quindi e`* ***420***.

"...Bene, ma cosa c'e` in piu`?". La fine:

```
Buone feste, .mau.
```

E` l'unico che si e` ricordato! Vergogna!

3.2.2 Ricordi di naja

Oeu, ***frena!*** Non mi risulta di aver detto che fossero in ordine di *altezza*... Ho parlato solo dei "piu` alti" e dei "piu` bassi". E non vi chiedevo chi e` il piu` alto, ma semplicemente "chi e` piu` alto" (questa volta era scritto giusto).

Dunque, PuntoMauPunto lo ha risolto, ma siccome lui le soluzioni le manda in modo testo, ravviviamo l'ambiente con un disegnino. Il metodo utilizzato e` esattamente lo stesso.

*Sia **A** il piu` basso dei piu` alti delle righe.*

*Sia **B** il piu` alto dei piu` bassi delle colonne.*

*Allora, la situazione e` una cosa del tipo rappresentato qui di fianco; esistera` un elemento **x** che appartiene alla **riga** di **A** e alla **colonna** di **B**. Chiediamoci in che rapporto e` questo marmittone con i due colleghi.*

$$\left\Vert \begin{array}{ccc} & & B \\ & & \vdots \\ A & \cdots & x \end{array} \right\Vert$$

*E` evidente che e` $A \geq x$, in quanto **A** e` il piu` alto della riga di **x** e quindi deve essere piu` alto di **x**.*

*E` anche evidente che e` $B \leq x$, in quanto **B** e` il piu` basso della colonna di **x** e quindi deve essere piu` basso di **x**.*

Da cui si ricava che e` $A \geq x \geq B \Rightarrow A \geq B$, dove l'uguaglianza vale solo se ***A***, ***B*** e ***x*** sono la stessa persona ("E perche` questa parte non l'hai messa in corsivo?" "Semplice, perche` nessuno ha pensato che potessero essere *la stessa persona*":-).

La scritta? "1984: Orwell non ha sbagliato". Parliamo d'altro, va bene?

4. Bungee Jumpers

4.1 Il Salto

Sia ***n*** un naturale.

1. $< n^{100} >_{125} = ?$

2. Trovare tutti i numeri di tre cifre per cui tutte le potenze intere terminano con le stesse tre cifre.

4.2 Pagina 46

Prima parte

Ogni intero rientra, in un'ottica di divisibilita` per ***5***, in una delle seguenti categorie:

5k-2, 5k+1, 5k, 5k+1, 5k+2

Se il numero e` divisibile per ***5*** (ossia e` nella forma ***5k***), allora la sua centesima potenza sara` sicuramente divisibile per ***5^3=125***. Dobbiamo quindi investigare solo i casi non divisibili per ***5***.

Dal teorema binomiale, ricaviamo:

$$(5k \pm 1)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100*99}{1*2}(5k)^2 \pm 100*5k + 1$$

In cui ogni fattore *tranne l'ultimo* contiene ***5^3*** come fattore; quindi, tutti i termini *tranne l'ultimo* sono divisibili per ***125*** e quindi i numeri in questa forma daranno resto ***1***.

Con lo stesso ragionamento,

$$(5k \pm 2)^{100} = (5k)^{100} \pm \cdots + \frac{100*99}{1*2}(5k)^2 * 2^{98} \pm 100*5k*2^{99} + 2^{100}$$

Anche in questo caso ogni fattore *tranne l'ultimo* contiene ***125*** come fattore. Focalizziamoci allora sull'ultimo termine.

Il numero ***2^{100}*** puo` essere scritto come:

$$2^{100} = 4^{50} = (5-1)^{50} = 5^{50} - \cdots + \frac{50*49}{1*2}*5 - 50*5 + 1$$

Per cui (per gli stessi motivi precedenti) si ha resto ***1*** dopo la divisione per ***125***.

Quindi, se ***n*** e` divisibile per ***5*** il resto e` ***0***. In ogni altro caso, il resto e` ***1***.

Seconda Parte

*Qui, una buona idea puo` essere quella di chiedersi* perche` *sia stata inserita la condizione di primalita` con 10. E` probabile che un qualche zero alla fine sia importante...*

Sia ***n*** l'intero cercato. La condizione del problema richiede che ***n²-n*** termini con tre zeri, ossia che sia divisibile per ***1000***. Allora, noto che $n^2 - n = n(n-1)$ e noto che ***n*** e ***n-1*** sono primi tra loro, la divisibilita` per ***1000*** sara` possibile se e solo se questo numero e` divisibile per due gruppi di fattori di ***1000*** primi tra loro, ossia per ***8*** e ***125***[1].

5. Paraphernalia Mathematica

5.1 I Numeri Surreali [001]

Die ganze Zahlen had der liebe Gott gemacht,
alles andere is Menschenwerk.

L. Kronecker

E a qualcuno sembra impossibile, essere daccordo con uno che si chiama Leopoldo.

Va bene, lo ammetto; questo pezzo serve solo a sfoggiare la mia conoscenza delle lingue.

In realta`, sapevo c'erano in giro alcune cosine interessanti in questo campo; purtroppo, l'unica fonte era un libro (piuttosto costoso) pubblicato negli States. Ora, abbiamo deciso che questa rivista deve costarci esattamente quanto la pagate, e quindi scarsa era la nostra intenzione di acquistarlo. Fortunatamente, lo sciovinismo francese ha colpito ancora: un gallico ha tradotto il libro e ha avuto la buona idea di mettere il tutto in internet.

E cosa c'entra Kronecker? Beh, mi pareva mancasse qualcosa in tedesco[2]...

Comunque, la cosa alla quale pensava Kronecker era qualcosa del genere:

> Supponiamo di ricevere la gentile ma ferma richiesta di creare i numeri, partendo evidentemente dal nulla. Un buon metodo, e` quello di considerare quello che abbiamo a disposizione, ***l'insieme vuoto***: {∅} e provare a vedere cosa possiamo farci. La grande idea, in questo campo, consiste nel calcolare la ***cardinalita`*** dell'insieme; non essendoci niente dentro, la cardinalita` dell'insieme vuoto e` ***0***. Toh, un numero! E non posso neanche esclamare "...e uno!"; l'uno non l'ho ancora inventato. Beh, a questo punto ci vuole un attimo; prendiamo l'insieme vuoto, ficchiamoci dentro tutto quello che abbiamo (lo zero) ottenendo un nuovo insieme: `{0}`. Penso che anche i piu` addormentati di voi si renderanno conto che la cardinalita` di questo insieme e` ***1***. Ora, se calcolate la cardinalita` di `{0,1)` molto probabilmente capite il metodo e potete andare avanti da soli.

...Francamente, credo che anche Kronecker conoscesse dei modi migliori per passare le domeniche pomeriggio.

La cosa divertente e` che qualcuno non si e` trovato d'accordo. Se volete la mia opinione, tutto e` cominciato per puro spirito di contraddizione, ma quando il contradditorio e` con John Horton Conway, di sicuro saltano fuori scintille pirotecniche.

Allora, Conway si e` inventato una storia (che vi risparmio), inerente il ritrovamento di una pietra che somiglia ad un'edizione del primo libro della Genesi scritto talmente semplice da farlo capire anche ai matematici: segue la mia traduzione, piuttosto libera.

All'inizio, nulla era se non il vuoto e il caos, e J. H. W. H. Conway creo` i numeri. Conway disse: "Ci siano due regole che generano tutti i numeri, i piccoli e i grandi".

---

[1] La cosa non e` molto chiara... in pratica, ***8*125=1000*** e ***8*** e ***125*** sono primi tra loro. Per quanto riguarda ***1000***, questi dono gli unici due divisori con questa caratteristica. Questo fenomeno va limitato a ***n*** e ***n-1*** di tre cifre, in quanto in altri casi potremmo avere uno dei due divisibile per ***1000***.

[2] No, non so il tedesco, ma Alice e mio padre si. Secondo loro, una traduzione piuttosto libera e` "Dio ha creato gli Interi, il resto e` opera dell'Uomo".

"Questa sara` la prima regola. Ogni numero nasce da due insiemi di numeri gia` esistenti, tali che nessun membro dell'insieme di sinistra sia superiore o eguale a un qualsiasi membro dell'insieme di destra".

"Questa sara` la seconda regola. Un numero e` minore o uguale a un altro numero se e solamente se nessun membro dell'insieme di sinistra del primo numero e` superiore o uguale al secondo numero e se nessun membro dell'insieme di destra del secondo numero e` inferiore o uguale al primo numero".

E Conway guardo` alle due regole che aveva creato e penso` che era buono.

E il primo numero fu creato a partire dal vuoto a destra e a sinistra. Conway lo chiamo` 'Zero' e disse: "Che lo Zero sia il segno che separa i positivi dai negativi".

Conway provo` che zero e` inferiore o uguale a zero e penso` che era buono. E fu sera e fu mattina e fu il giorno zero.

E il giorno seguente altri due numeri furono creati, l'uno avente zero come insieme di sinistra e l'altro avente zero come insieme di destra. E Conway chiamo` il primo 'Uno' e il secondo 'Meno Uno'. E Conway provo` che Meno Uno e` inferiore ma non uguale a Zero e che Zero e` inferiore ma non uguale a Uno.

E fu sera...

E qui finisce la prima pietra[3].

Il primo che dice che tutto e` chiaro, si prende il pietrone di Conway sulla zucca.

A questo punto, nel libro si parte con una trattazione matematica molto stretta e, se volete la mia opinione, piuttosto pedante; va pero` riconosciuto che in questo modo la struttura formale sta decisamente bene in piedi[4]. Un po` per mancanza di simboli un po` perche` in fondo mi siete simpatici, tagliamo per i campi, OK?

Tanto per cominciare, mettiamoci d'accordo sui simboli. Con le maiuscole indichiamo gli insiemi, con le minuscole i numeri; i pedici distinguono l'insieme di sinistra da quello di destra.

Le due regole allora si scrivono:

(1)	$x = \{X_S \mid X_D\}, X_S \not\geq X_D$
(2)	$x \leq y \Leftrightarrow \left(X_S \not\geq y\right) \wedge \left(x \not\geq Y_D\right)$

Non incidetele sul bronzo; come vi ho detto, abbiamo tagliuzzato un po` i formalismi.

Il giorno non numerato abbiamo a disposizione solo l'insieme vuoto; siccome pero` per costruire un numero ci servono *due* insiemi, prendiamone due; in fondo, che differenza c'e` tra un insieme vuoto e due insiemi vuoti?

Quello che sappiamo dalla storiella e` che $\{\varnothing | \varnothing\} = 0$. Il bello e` che l'insieme vuoto ha alcune interessanti caratteristiche; tanto per cominciare, puo` allegramente stare dalle *due parti*, in quanto vi sfido a trovare un elemento dell'insieme che sia maggiore o uguale a qualsiasi elemento dell'insieme. Non avendo elementi, possiamo dire che e` maggiore o minore di se stesso con allegra nonchalance. Quindi, rispetta la prima regola nei confronti

[3] Della seconda pietra, parleremo un'altra volta. *Estote Parati*..(grande! il latino non c'era ancora...).

[4] Giusto per dirne una, ci mette un paio di pagine per dimostrare che 0=0; l'unico modo che ha e` dimostrare che il primo numero e` maggiore o uguale al secondo e il secondo numero e` maggiore o uguale al primo; da cui, segue l'uguaglianza. Tra l'altro, se volete la mia opinione, Conway qui ciurla nel manico, come si dice da queste parti; non doveva essere proprio *tutto* caos, visto che aveva quantomeno a disposizione la *relazione* di ordinamento maggiore/minore...

di se stesso e nei confronti di tutti gli altri; posso impunemente considerarlo insieme sinistro o destro.

Allora, posso costruire due nuovi "cosi". In uno mettero` lo zero a sinistra e l'insieme vuoto a destra; nell'altro viceversa. Ottengo quindi **{0|∅}** e **{∅|0}**.

Perche` questi due cosi siano dei numeri, nel primo caso zero non deve essere maggiore o uguale a nessun elemento dell'insieme vuoto, mentre nel secondo caso nessun elemento dell'insieme vuoto deve essere maggiore o uguale a zero. Siccome tutte e due le condizioni sono verificate, questi aggeggi sono dei numeri[5].

Si tratta ora di verificare se sono maggiori, uguali o minori l'uno dell'altro, ma qui ci aiuta la seconda legge.

Proviamo a confrontare il primo con lo zero; usando le notazioni indicate, si ha:

$$\{0 \mid \emptyset\} \leq \{\emptyset \mid \emptyset\} \Leftrightarrow (0 \ngeq 0) \wedge (\{0 \mid \emptyset\} \ngeq \emptyset)$$

Ora, la prima relazione ***non*** e` verificata, quindi il nostro aggeggio ***deve essere maggiore di zero*** e, per comodita`, lo chiameremo **uno**.

Per quanto riguarda il secondo,

$$\{\emptyset \mid 0\} \leq \{\emptyset \mid \emptyset\} \Leftrightarrow (\emptyset \ngeq 0) \wedge (\{\emptyset \mid 0\} \ngeq \emptyset)$$

Ossia, nessun elemento dell'insieme vuoto deve essere maggiore o uguale a zero (e questo c'e`, come visto prima) e zero non deve essere maggiore o uguale a nessun elemento dell'insieme vuoto (e anche questo c'e`, sempre per lo stesso motivo). Quindi il nuovo aggeggio ***deve essere minore di zero*** e senza perdere in generalita` lo chiamiamo **meno uno**.

Giusto per vedere se state remando o c'e` una vaga parvenza di luce, verifichiamo se il nostro sistema e` coerente; deve essere $-1 \leq 1$, ossia:

$$\{\emptyset \mid 0\} \leq \{0 \mid \emptyset\} \Leftrightarrow (\emptyset \ngeq \{0 \mid \emptyset\}) \wedge (\{\emptyset \mid 0\} \ngeq \emptyset)$$

(...ragazzi, 'na voglia di lasciarvela come esercizio...). In sostanza:

1. L'insieme vuoto non deve avere elementi maggiori o uguali di zero
2. Meno uno non deve essere maggiore o uguale a nessun elemento dell'insieme vuoto.

Essendo le due condizioni verificate, il nostro sistema e`, almeno per il momento, coerente. E, secondo Conway, e` passato anche il giorno "uno".

La parte interessante (siiii?) arriva il giorno "due"; i piu` assonnati probabilmente si aspettano che si creino il due e il meno due, ma basta un rapido sguardo per vedere che possiamo creare una quantita` di cose; infatti, trattiamo con degli ***insiemi***, sia alla sinistra che alla destra; l'importante e` che rispettino la prima regola, poi possiamo mettere anche dei gelati al pistacchio, nel sistema... Insomma, ci ritroviamo con la seguente allegra famigliola:

$\{\emptyset \mid \emptyset\} = 0$	$\{-1 \mid \emptyset\}$	$\{\emptyset \mid (-1,0)\}$	$\{-1 \mid 0\}$
$\{\emptyset \mid 0\} = 1$	$\{1 \mid \emptyset\}$	$\{\emptyset \mid (0,1)\}$	$\{0 \mid 1\}$

[5] E` questo il motivo dell'utilizzo della terminologia negativa; e` immediato che "niente" e` "non maggiore o uguale" a qualcosa, il problema nasce quando dobbiamo decidere se e` minore. E qui, gli epistemologi ci ingrassano...

$$\begin{array}{cccc}
\{0|\emptyset\}=-1 & \{(-1,0)|\emptyset\} & \{\emptyset|(-1,1)\} & \{(-1,0)|1\} \\
\{\emptyset|1\} & \{(0,1)|\emptyset\} & \{\emptyset|(-1,0,1)\} & \{-1|(0,1)\} \\
\{\emptyset|-1\} & \{(-1,1)|\emptyset\} & \{(-1,0,1)|\emptyset\} & \{-1|1\}
\end{array}$$

...e solo i primi tre esistevano! Alla faccia del "crescete e moltiplicatevi", questi si esponenziano...

Per fortuna, ***molti di questi sono uguali tra di loro***. Infatti, se guardate la seconda regola, per verificare una relazione ci basta verificarla per due soli numeri: $\mathbf{x=\{X_S|X_D\}\approx\{max(X_S)|min(X_D)\}}$, dove il simbolo in mezzo significa "nelle relazioni, e` tranquillamente sostituibile da..."; in pratica, verifico solo le relazioni con il ***maggiore*** di $X_S$ e con il ***minore***di $X_D$. Questo mi permette di "buttare via" un po` di roba che in realta` ho gia` creato; in particolare, se volete giocare un po`, provate a verificare queste espressioni della regola due:

$$\{\emptyset|\emptyset\}\leq\{-1|1\}\Leftrightarrow(\emptyset\ngeq\{-1|1\})\wedge(1\ngeq\{\emptyset|\emptyset\})$$
$$\{-1|1\}\leq\{\emptyset|\emptyset\}\Leftrightarrow(-1\ngeq\{\emptyset|\emptyset\})\wedge(\{-1|1\}\ngeq\emptyset)$$

Gia`, sono valide tutte e due... Spero non siate ormai talmente persi da non ricordarvi che se a e` minore o uguale a bi e bi e` minore o uguale ad a, e` molto probabile che a=b.

Se fate un po` di prove, vi accorgete che restate con piuttosto pochi valori, che possiamo ordinare come segue (vi prego, lasciatemi usare il "minore"...):

$$\{\emptyset|-1\}<\{\emptyset|0\}<\{-1|0\}<\{\emptyset|\emptyset\}<\{0|1\}<\{0|\emptyset\}<\{1|\emptyset\}$$

Il primo e l'ultimo li chiamiamo ±2 (ciao, bimbo nuovo!), ma ce ne sono due che non si capisce da dove arrivino; sono tra meno uno e zero e tra zero e uno... Gia`, con il metodo di Conway, ***il giorno "due" si costruiscono i razionali*** $\frac{1}{2}$ ***e*** $-\frac{1}{2}$.

In pratica, il "processo di creazione" va avanti in questo modo:

G. "zero"								0								
G. "uno"				-1								1				
G. "due"		-2				-1/2				1/2				2		
G. "tre"	-3		-3/2		-3/4		-1/4		1/4		3/4		3/2		3	

Voi dite quel che vi pare, ma a me sembra un modo piu` divertente di quello di Leopoldo; anche le piu` lunghe tra le riunioni noiose finiscono entro il decimo giorno.

E cosi`, ho rinfrescato il mio francese e sono guarito dall' insonnia...

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms