Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell altro millennio

Numero 033 - 2001-10

1. Editoriale **1**

2. Problemi **2**

2.1 Riciclo dei rotoli 2
2.2 Elementare, Watson... 2

3. Soluzioni e Note **2**

3.1 [032] 2
3.1.1 L'area di un triangolo 2
3.1.2 La domanda fondamentale 3

4. Bungee Jumpers **4**

4.1 Il Salto 4
4.2 Pagina 46 4

5. Paraphernalia Mathematica **5**

5.1 I Sistemi Elettorali 5
5.1.1 Il conteggio dei voti 5

1. Editoriale

Ho un problema (cribbio, che frase originale...).

Nel senso che sta andando avanti una cosa che volevo dirvi a Natale ma non ho voglia di aspettare sino a Natale pero` se ve lo dico adesso e non a Natale vi rovino la sorpresa a Natale.

A insindacabile giudizio della redazione, se tutto va bene il mese prossimo e` Natale.

Su Ganimede.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Riciclo dei rotoli

Con il vostro amore per Excel, e` molto probabile vi avanzino un mucchio di rotoli per calcolatrice. Potreste usarli per provare a vedere quanto viene.

Allora, sulla parte ***sinistra*** del rotolo scriviamo i numeri ***1000, 1001, 1002,..., 9999*** (insomma, tutti i numeri di quattro cifre, in ordine).

Sul lato ***destro*** scriviamo la differenza tra il prodotto delle prime due cifre e il prodotto delle seconde due cifre, tenendo conto del segno.

Giusto per capirci, un paio di righe potrebbero essere:

3879	$(3*8)-(7*9)=-12$
....	....
7521	$(7*5)-(2*1)=9$

E poi sommiamo tutti i risultati (***-12*** e ***9***, nei nostri casi).

Bene, quanto fa?

2.2 Elementare, Watson...

Ho trovato un "problemino" di logica. Non sono mai stato un asso in questo campo, quindi vi dico subito che all'epoca hanno dovuto darmi la soluzione perche` non c'ero arrivato. Quello pero` ve lo passo il mese prossimo, per adesso proviamo con qualcosina giusto per scaldare gli assoni.

Su un foglio di carta ci sono ***100*** dichiarazioni (una per riga) tutte di forma tale che per la generica riga ***n*** l'affermazione e`:

"Esattamente ***n*** dichiarazioni di questo elenco sono false".

Quali sono vere, quali sono false e quali indecidibili?

Potreste usare il retro dei rotoli da calcolatrice del problema precedente...

3. Soluzioni e Note

3.1 [032]

3.1.1 L'area di un triangolo

Qualche tentativo, ma nessuno "bello"... Non mi arrabbio perche` e quasi Natale e siamo tutti piu` buoni e poi perche` ho remato di brutto anch'io.

Credo sia uno di quei problemi per i quali ***dopo*** che vi dicono la soluzione diventano semplici (e vi sentite stupidi. Si, anch'io).

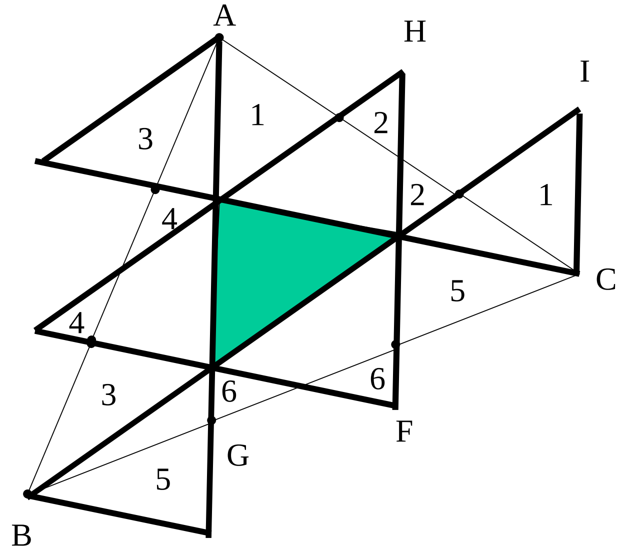
Di seguito trovate il disegno; come al solito, e` uno schifo.

Tracciamo le ***parallele*** alle rette date passanti per ***l'altro*** punto di trisezione del lato e quelle passanti per l'angolo successivo (per intenderci: prolungando la retta uscente da ***A*** otteniamo ***AG***; tracciamo le parallele ***HF*** e ***CI***).

Vorrei ora attrarre la vostra attenzione sulla figura risultante, indicata dai tratti inspessiti.

I sette triangoli che la compongono, essendo tracciati con rette parallele tra loro ed equidistanti, sono uguali tra loro (anche quello colorato ne fa parte).

Ora, se guardate i triangoli piu` piccoli formati da due segmenti inspessiti e da un segmento del vecchio triangolo (sono numerati), vi accorgete che (sempre perche` tracciati tra rette parallele) sono uguali a due a due; inoltre, se uno di questi e` "fuori" dalla figura a tratto spesso ma dentro al triangolo originale (ad esempio il triangolo "***1***" con vertice in ***A***) allora il suo analogo e` dentro la figura a tratto spesso ma fuori del triangolo (*id est* il triangolo "***1***" con vertice in ***C***).



Quindi, la figura a tratto spesso e il triangolo hanno la stessa area.

Ma se tutti i triangoli della figura a tratto spesso sono uguali tra di loro, allora il triangolo colorato ha un'area pari a ***un settimo*** del triangolo di partenza.

Facile, vero, *dopo*?

3.1.2 La domanda fondamentale

Uela! Due soluzioni! Entrambe con lo stesso risultato, fortunatamente... Devo confessare una cosa: quando lo hanno proposto a me, questo, mi sembrava decisamente piu` difficile, tant'e` che avevo deciso di lasciarvi due mesi per pensarci. Fortunatamente, PuntoMauPunto e Franco hanno preso provvedimenti. Le due soluzioni seguono lo stesso metodo, quindi pubblichiamo la prima arrivata, pur riconoscendo il merito della soluzione ad entrambi.

Immagino che - anche se il testo non lo riporta - ciascuna persona abbia comprato una e una sola collezione.

Vero. Non l'ho detto. Ma non lo diceva neanche il mio testo. Prendiamocela con il Cav. Ing. Italo Ghersi.

Abbiamo per l'ultima condizione che, se a e b sono gli oggetti comprati da una coppia,

$$a^2 + b^2 = 63$$

Ora, il primo membro si fattorizza

$$(a+b)*(a-b)$$

*il secondo e` 3\*3\*7; ergo le possibilita` sono 1*63, 3*21, 7*9 che danno come valori per a e b (31,32),(9,12),(1,8). A questo punto e` un gioco da ragazzi scoprire che Tizio ha comprato 32 oggetti e ha sposato Ebe, Caio ne ha presi 12 rispetto ai 9 di Medea, e quegli scozzesi di Sempronio e Aida si sono limitati a 8 e 1 rispettivamente.*

Il "gioco da ragazzi" e` stato affrontato in un modo molto interessante da Franco:

Il numero di differenze da prendere in considerazione deve essere un sottomultiplo di 63 e deve essere dispari.

Comincio da 1: Il valore della differenza è 63 e corrisponde alla differenza tra 32x32 e 31x31, quindi una coppia possibile di oggetti acquistati da un marito ed una moglie è 32 e 31 rispettivamente.

Passo a 3 differenze: I tre valori contigui di differenze da sommare per dare 63 sono 19, 21 e 23 (63 diviso tre per trovare il centrale più chi precede e chi segue) che corrispondono alla differenza tra 12x12 e 9x9, quindi un altra coppia possibile di oggetti acquistati da un marito ed una moglie è 12 e 9 rispettivamente.

Passo a 7 differenze: I sette valori contigui di differenze da sommare per dare 63 sono 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 (63 diviso sette per trovare il centrale più i tre valori che precedono e i tre che seguono) che corrispondono alla differenza tra 8x8 e 1x1, quindi un altra coppia possibile di oggetti acquistati da un marito ed una moglie è 8 e 1 rispettivamente.

Non ci possono essere altri valori (con nove differenze supererei 63). Il numero di oggetti acquistati dai mariti sono: 8, 12, 32 . Il numero di oggetti acquistati dalle mogli sono: 1, 9, 31.

Chiaro, no?

4. Bungee Jumpers

4.1 Il Salto

Trovare i dieci primi minori di 3000 che formano una progressione aritmetica.

4.2 Pagina 46

Potrebbe essere una buona idea esprimere i termini della successione come:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+9d$$

Siccome tutti i primi (tranne ***2***) sono dispari, la ragione della progressione deve essere un pari; quindi ***2*** e\` eliminato come termine della progressione.

Inoltre, siccome ci sono almeno tre termini successivi nella progressione maggiori di ***3*** e che formano una separata serie aritmetica (anche di altra ragione rispetto a quella cercata), la ragione di questa serie deve essere divisibile per ***6*** (si veda **BJ** sul numero **030**), ossia divisibile sia per ***2*** che per ***3***.

Verifichiamo (per assurdo) che la ragione ***d*** deve essere divisibile per ***5***. Se non lo fosse, i primi numeri della successione, che possiamo esprimere come:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$$

devono dare resti diversi se divisi per ***5*** (se due dessero lo stesso resto, si verifica facilmente che ***d*** deve essere divisibile per ***5***). Allora, uno dei numeri dati (siccome sono cinque) deve essere divisibile per ***5***. Siccome tutti i termini della progressione devono essere primi, questa e\` una contraddizione e quindi ***d*** deve essere divisibile per ***5***. Nello stesso modo (considerando sette termini) si mostra che ***d*** deve essere divisibile per ***7*** (si noti che non e\` possibile provare la divisibilita\` per ***11*** in quanto abbiamo solo dieci termini).

Quindi la ragione della progressione deve essere un multiplo di $2*3*5*7=210$, ossia deve essere esprimibile come $d=210k$

Secondo quanto richiesto, deve essere:

$$a_{10}=a_1+9d=a_1+1890k$$

e questo valore deve essere minore di ***3000***. Da cui, ***k*** non puo\` essere maggiore o uguale a ***2***, e quindi ***k=1***.

Allora, segue che

$$a_1 < 3000 - 9d$$
$$a_1 < 3000 - 1890 = 1110$$

Ora, $210 = 11*19+1$; quindi, per quanto riguarda il ***m+1***-esimo termine,

$$a_{m+1} = a_1 + (11*19+1)*m$$
$$= 11*19*m + (a_1 + m)$$

Questo significa che se il primo termine da` resto ***2*** dopo la divisione per ***11***, allora $a_{10}$ e` divisibile per ***11***. Se invece il primo termine da` resto ***3*** dopo la divisione per ***11***, allora $a_9$ e` divisibile per ***11*** e avanti cosi`. Quindi $a_1$ non puo` dare, a seguito della divisione per ***11***, nessuno dei resti ***2, 3, 4, ..., 10***. Inoltre, se a_1 e` diverso da ***11***, essendo primo non puo` essere divisibile per ***11***. Quindi, o vale ***11*** o deve dare resto ***1*** se diviso per ***11***.

Inoltre, considerato che $210 = 13*16+16+2$, deve essere:

$$a_{m+1} = a_1 + (13*16+2)*m = 13 \cdot 16m + (a_1 + 2m)$$

e di conseguenza si puo` mostrare che se $a_1$ e` divisibile per ***13*** puo` fornire come resto solo ***2, 4, 6, 8, 10*** o ***12***. Essendo pero` a_1 dispari, allora puo` essere uguale a ***11*** oppure puo` essere scritto in una di queste forme ($286 = 2*11*13$):

$$286l + 23 \quad 286l + 155$$
$$286l + 45 \quad 286l + 177$$
$$286l + 67 \quad 286l + 199$$

Siccome $a_1<1110$, i valori possibili sono limitati agli interi:

11,

23, 309, 595, 881,

45, 331, 615, 903,

67, 353, 637, 925,

155, 441, 727, 1013,

177, 463, 749, 1035,

199, 485, 771, 1057

Di questi, sono primi unicamente:

11, 23, 881, 331, 67, 353, 727, 1013, 463, 199

Avendo gia` ottenuto ***d=210***, con i valori indicati sopra si verifica facilmente che tutti tranne $a_1=199$ prima del decimo termine forniscono un numero non primo; quindi, l'unica serie e`:

199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089

5. Paraphernalia Mathematica

5.1 I Sistemi Elettorali

5.1.1 Il conteggio dei voti

Non ho intenzione di offendere, ma contare in certi casi puo` rappresentare un discreto problema, anche con numeri decisamente piccoli.

Proviamo ad inventarci qualche risultato elettorale, e vediamo cosa succede.

In prima istanza, supponiamo di sapere che i nostri elettori abbiano, come scelta, un "*preferito*", un "*meglio che niente*" e un "*questo proprio no*", ossia debbano mettere in ordine di preferenza i nostri tre partiti.

Visto che a questo punto siamo rimasti in pochi, riferiamoci a una manciata di elettori. I risultati di questa velocissima votazione sono presentati nella tabella, presumendo per semplicita` che si presentino solo tre configurazioni di scelta tra i candidati. Inoltre, e` una gara ad un solo vincitore, ossia il primo prende tutto.

Preferenze			Voti
MM	WW	TT	**6**
TT	WW	MM	**5**
WW	TT	MM	**4**

Bene, si tratta di contarli.

Un buon metodo puo` essere quello di lavorare a ***maggioranza semplice***. In questo caso, il gruppo che prende il maggior numero di primi posti ha vinto e Piotr, valido rappresentante dei ***MM***, conquista l`ambita posizione.

Se pero` guardiamo un po` meglio la situazione, notiamo che la sua posizione e` piuttosto traballante: infatti, un gran numero di persone lo situa all`ultimo posto, preferendo qualsiasi altro candidato a lui. In pratica, se si fosse votato per "Chi e` che proprio *non* volete?", sarebbe risultato brillantemente primo. Anche se si tratta di una posizione diciamo cosi` "negativa", e` importante tenerne conto.

Una alternativa puo` essere il ***ballottaggio***: sempre tenendo ferma questa votazione, mandiamo in esilio il leader del gruppo che ha ottenuto il minor numero di primi posti (Alice, ***WW***), e rifacciamo i conti.

E` abbastanza chiaro che quel branco di facinorosi che in prima istanza appoggiava ***WW*** ora ridistribuisce i propri voti sulla propria seconda scelta; in questo modo, abbiamo la seguente situazione:

Rappresentante	**Partito**	**Voti di prima scelta**	**Voti di seconda scelta**	**Totale**
Rudy	**TT**	5	4	**9**
Piotr	**MM**	6	0	**6**

...Articolo 1: Se vi becco ad usare Excel, vi sbatto dentro.

Non crediate pero` la situazione di Alice sia cosi` disperata A parte la possibilita` del passaggio alla lotta armata, provate a considerare il metodo del ***confronto diretto*** (noto anche come *metodo di Condorcet*): in questo caso, sull`intero corpo elettorale, facciamo dei confronti diretti tra due sfidanti.

Nel primo *round*, si scontrano ***WW*** e ***TT***; in questo modo, il vostro umile narratore si ritrova a zappare i campi, in quanto Alice puo` contare su ***4*** voti in prima scelta e ***6*** voti in seconda scelta (gli amici di Piotr), mentre il sottoscritto deve accontentarsi di ***5*** voti (quel branco di matti che lo appoggia in prima scelta: quelli che mi appoggiano in seconda scelta, votano Alice).

Nel secondo *round*, nel confronto tra ***WW*** e ***MM***, questi ultimi fanno una figura barbina: infatti contano su ***6*** voti di prima scelta e nessuno di seconda scelta (per nessuno Piotr e` da considerare una seconda scelta, come ben sanno coloro che lo conoscono), mentre il gruppo che appoggiava ***TT*** converge sulla propria seconda scelta, unendo i propri ***5*** voti ai ***4*** che rappresentano la prima scelta di Alice.

...Tremate, tremate, le streghe son tornate.

A questo punto, potremmo inventarci un nuovo sistema di conteggio dei voti, non basato su "uno a me, uno a te..." ma su una logica di assegnazione di voto (in senso scolastico: scusate il bisticcio) ai vari candidati; seguendo il ***metodo di Borda***, ogni elettore puo` assegnare ***3*** punti al suo candidato preferito, ***2*** punti a quello intermedio e ***1*** punto a quello antipatico[1]. La cosa dovrebbe permettere di rendere immediata l`elezione del candidato preferito dalla maggioranza (qualunque cosa questo significhi....). State un po` a vedere cosa succede: qui, il paradosso nasce dal concetto che le *alternative irrilevanti* non devono influenzare il risultato. Supponiamo che i risultati della votazione siano quelli illustrati in tabella qui di fianco; utilizzando la regola 3-2-1 vista prima, si ha che... *colpo di scena!* I ***TT*** si ritirano dalla competizione! Allora, se non si fossero ritirati, i risultati sarebbero stati ***WW=108***, ***MM=107***, *TT=103*. Pero`, siccome si e` ritirato un candidato, e` scorretto assegnare tre punti al primo e due al secondo...Visto che si e` ritirato quello che sarebbe arrivato ultimo, la cosa e` irrilevante e il risultato non dovrebbe cambiare: togliamo **TT** dalla tabella, consideriamo la loro seconda scelta come prima scelta e applichiamo un Borda 2-1. Qualcuno vuole provarci? Conoscendo la vostra pigrizia, forse e ` meglio se ve lo dico io: ***MM=80***, ***WW=79***. Oibo`! Ma non ero irrilevante?

Preferenze			**Voti**
MM	WW	TT	**27**
TT	WW	MM	**24**
WW	TT	MM	**2**

`Nzomma (come dice Piotr), quello che abbiamo fatto e` stato di definire una serie di metodi "corretti" per contare i voti e abbiamo verificato che danno, almeno per gli esempi trovati, dei risultati diversi tra loro; voglio sperare adesso non rappresenti per voi un eccessivo trauma il ***Teorema di Arrows*** (1952): *Nessun metodo di votazione e` in grado di soddisfare un insieme di criteri di correttezza.*

Propongo un sistema assolutistico ereditario per diritto divino...

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

[1] Se vi sembra un metodo balordo, sappiate che e` quello utilizzato da CIO per nominare la sede dei giochi olimpici (loro lo fanno su piu` tornate, cosi` e` piu` complicato).