Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell`altro millennio

Numero 028 - 2001-05

1. Editoriale

...Non so mica se e` un errore...

Come avrete notato, nello scorso numero abbiamo pubblicato il necrologio del buon vecchio Claude.

Mi hanno fatto notare che in realta` e` mancato il *ventuno*, ma dietro sua richiesta il fatto e` stato reso pubblico il ventinove.

Ma per l`inventore della Teoria della Comunicazione, e` "vera" la data reale o quella della *comunicazione*?

Pensateci, e fateci sapere.

Rudy d`Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Il prezzo di una Smith & Wesson

Il seguente problema non rappresenta in alcun modo una forma di appoggio della rivista alla liberalizzazione delle armi da fuoco; piu` sadicamente, preferiamo le mani nude.

La Redazione

La valigetta nera è aperta, spalancata in mezzo al tavolo. La stanza è piena di fumo, poco illuminata e satura ancora di un vecchio e persistente odore di fritto. Il tavolo quadrato ha visto centinaia di partite notturne di poker e telesina, e molti dei graffi sulla sua superficie sono stati causati dalle stesse lame che più facilmente hanno inciso guance e carotidi. Ma stanotte non sono i full d`assi e le doppie coppie a calamitare gli sguardi dei presenti. Dentro la valigia dormono mazzette di dollari, ancora nuove, ordinate e ancora decorate con le fascette di banca. Chasey guarda i soldi e poi alza lo sguardo su Mick. Mick raccoglie lo sguardo di Chasey, poi lo riaccompagna verso i biglietti di banca.

- "Sono un bel mucchio di soldi. Ma erano anche un bel mucchio di diamanti. Sei sicuro che il cinese abbia pagato il giusto, Mick?" -mormora Chasey.
- "Accontentati, Cheese. Ho passato due ore in quella topaia che puzza di soya, e nessuno ne sarebbe uscito con più soldi di quelli che vedi. Alla fine, credo addirittura che l`abbia divertito la coincidenza, che abbia smesso di fare il fottuto muso giallo ricettatore e abbia accettato la mia offerta per quella che ha chiamato `l`armonia dei numeri`.
- "Non chiamarmi Cheese, imbecille. Che cretinate vai dicendo, sui numeri? Ti ho mandato a farti dare dei soldi, non a ripetizione di aritmetica."
- "Non lamentarti, non ci abbiamo rimesso. Se l`e` menata col fato e col destino, che era tutto il giorno che seguiva il tao armonico, e che era disposto a continuare a farlo anche per me. Diceva che al mattino aveva pagato tremila dollari l`una tre collane di perle, e che nel pomeriggio si era accordato con un negro per cinquemila dollari per ognuna delle cinque Chevrolet che gli offriva. E che gli piaceva l`idea di chiudere la giornata in questa maniera."
- "Incomincio a credere che ti sei fatto fregare. Quei diamanti erano purissimi, Mick. Valgono un mucchio di soldi." - Chasey controllo` velocemente il rigonfio che aveva sotto l`ascella sinistra.
- "Questi *sono* un mucchio di soldi, Chas. Ogni mazzetta e` fatta da cento bei biglietti da cento. Diecimila dollari a mazzetta   anche i diamanti erano un bel po`, no? E questo ci ha aiutato." - Mick sorrise, e sembro` accendere la sigaretta col riflesso del suo canino.
- "Non chiamarmi Chas, idiota. Cosa vuoi dire, che ci ha aiutato?"
- "Vuol dire che anche noi siamo stati pagati alla stessa maniera, Sey. Ci ha pagato ogni diamante tante migliaia di dollari quanto il numero dei diamanti stessi. Un bel mucchio di diamanti, e per ognuno di essi un ugual numero di bei biglietti da mille."
- "Non chiamarmi Sey, cretino. Questa storia mi puzza, troppo complicata. Meglio che cominciamo a dividere, e a fine divisione ne riparliamo. Comincio a prendere questa mazzetta, voglio sentirne il profumo." - E la mano di Chasey si chiuse sulla prima mazzetta da diecimila.

- "Sempre con la fifa di essere fregato, vero Chey? L`unica matematica che capisci non va oltre questa divisione da ragazzini: una mazzetta a me, una mazzetta a te. Come fossimo ancora mocciosi coi leccalecca" - e Mick intasco` la seconda mazzetta.
- "Non chiamarmi Chey, deficiente. La matematica non c`entra. E` solo che in questa maniera posso prendere una mazzetta alla volta senza distrarmi, e controllare che non te ne freghi qualcuna di nascosto. Continuiamo cosi`, preferisco far lavorare solo le mani e tenerti gli occhi addosso."
- "Va bene, va bene! Sempre nervoso, eh Tom? Ma come facciamo adesso che hai intascato l`ultima mazzetta intera? C`e` ancora qualche biglietto da mille sciolto, in fondo alla valigia. Anche se li prendo tutti, non arrivo mica a fare una mazzetta da diecimila. Rimetti in mezzo una delle tue mazzette, e dividiamo il resto per bene " - e la destra di Mick si allungò a tendere il palmo, in attesa degli ultimi diecimila presi da Chasey. Trattenne a stento un urlo, quando Chasey gli artiglio` la mano con la sua.
- "Non provarci, verme. Raccogli quegli spiccioli, e accontentati."
- "Dai, Tom, guarda che ."

Chasey estrasse un revolver con la stessa velocità con cui un topo ruba il formaggio. Incastro` la canna fra le sopracciglia di Mick, e armo` il cane senza sorridere.

- "E` la seconda volta che mi chiami Tom, figlio di cane. E io non mi chiamo Tom, dovresti saperlo. Come dovresti sapere che a far di conto sono sempre stato più bravo di te. I biglietti da mille ti basteranno, anche questo dovresti saperlo. E dovresti anche sapere che questa e` una Smith & Wesson ben oliata, affidabile e precisa. Me l`ha venduta Joshua tre mesi fa, non ha sparato ancora più di tre colpi."

La canna percorse tutta la gobba del naso di Mick, e comincio` a forzare la narice sinistra del gangster. Una goccia di sudore, imprudente, stava cominciando a scivolare lungo la canna bruna.

- "Tutto sommato, il cinese ha pagato il giusto, e per stavolta non ti ammazzo." - Butto` il revolver nella valigetta ormai vuota, spense il mozzicone di avana e si alzo` in piedi. Mick ancora tremava. - "E visto che non ti sei fatto fregare, per questa volta io non frego te. Tieni quella Smith & Wesson, e` un vero gioiellino. E il suo prezzo rende la divisione della grana perfettamente equa."

Usci` senza aggiungere altro.

Mick torno` a respirare solo dopo mezzo minuto. Si slaccio` il colletto, e raccolse la pistola. Un gran bell`oggetto, davvero. Quasi sorrise, e decise di togliersi la curiosità. Con il cellulare chiamo` Joshua, e ci parlo` brevemente. Alla fine, il sorriso era completo e stupito. Chasey aveva ragione, i conti tornavano . Con la pistola in tasca, la divisione della grana era finita perfettamente fifty-fifty. Si alzo`, prese il soprabito e fece per uscire.

Dietro la porta, Chasey lo aspettava, con un altro sigaro in bocca e la faccia sprezzante.

- " Devi imparare ancora molto, ragazzino. Devi imparare a non fidarti di nessuno, a controllare sempre dove tiene l`artiglieria chi ti siede davanti, a non pisciarti sotto quando ti stampano la bocca di una pistola in fronte. E devi anche oliare meglio le rotelline che hai nel cervello. A capire quanto valeva quella Smith & Wesson potevi arrivarci anche da solo, senza rompere le scatole al vecchio Joshua, che sicuramente dormiva già. "

Mick sospira, annoiato.

- "Capirai quanto ci voleva, a capirlo   No, ho telefonato a Joshua per vedere se il prezzo che avevi calcolato era proprio quello che hai pagato. In fondo, speravo che a forza di mettere le mazzette in saccoccia senza togliermi gli occhi da dosso non avessi tenuto a mente quanta grana avessi preso. Invece, no, eh? Contavi le mazzette, controllavi le mie mani e tenevi i conti, tutto in un colpo   "
- Devi imparare ancora più di quel che credevo, pinguino." - sorrise Chasey - "per fare le parti giuste non mi serviva mica conoscere il totale della grana".

...indovinate l`autore...

2.2 Una strana partita

...So che la cosa piu` tagliente che vi lasciano maneggiare e` una palla di gomma, ma supponiamo per un attimo che un gruppo di temerari vi lasci giocare a bowling.

Mentre siete impegnati a decidere cosa fare con la boccia e i birilli, vi accorgete che tutti i birilli sono numerati da ***0*** a ***9*** e che il numero su ogni birillo e` la somma (modulo ***10***) dei due dietro di lui: ad esempio, una struttura del tipo di quella mostrata a fianco: 5+7=12=2 (mod 10).

5 **7**

2

Tutti presi da questo interessante fenomeno, il vostro avversario fa *strike*.

Com`erano disposti i birilli?

Attenzione: sono possibili piu` soluzioni, ma ce ne basterebbe una, *motivata*.

3. Soluzioni e Note

3.1 [026]

3.1.1 Aiutate il tabaccaio!

...Certo che se aspettavamo voi altro che le poste italiane... Facevamo prima per lumaca viaggiatrice.

Dunque, il metodo migliore per affrontare la faccenda sembra essere il fatto che comunque, di *tutti* i tipi, ne vuole almeno tre; a questo punto, se gli diamo 3 francobolli per tipo gli abbiamo forito un totale di $3*(1+2+3+5+10)=63$ cent. Questo vuol dire che gli altri due francobolli devono portare questa cifra ad un multiplo di *dieci*; l`unico modo e` (siamo forzati ad usare solo due francobolli!) aggiungere ***7*** (=5+2, caso mai non lo ricordaste...) in quanto diciassette e` eccessivo. Quindi il papa` del terrore del tabaccaio voleva ***4*** francobolli da 5, ***4*** francobolli da 2 e ***3*** dei restanti tipi.

4. Bungee Jumpers

4.1 Il salto

Trovare le ultime due cifre di:

(a): 2^{999}

(b): 3^{999}

(c): $14^{\left(14^{14}\right)}$

(d1): $\left(\cdots\left(\left(\left(7^{7}\right)^{7}\right)^{7}\right)^{\cdots 7}\right)$

(d2): $7^{\left(7^{\cdot^{\cdot^{7^{\left(7^{7}\right)}}}}\right)}$

In cui, in ognuno dei casi (d), la cifra "7" compare 1001 volte.

4.2 Pagina 46

*Cercare le ultime due cifre vuol dire trovare il resto della divisione per **100** del numero dato.*

Tutti ci ricordiamo che $a^2 - b^2 = (a-b)*(a+b)$ *e che esistono formule simili per le altre potenze (anche se non ci ricordiamo mai le formule...). Pochi pero` possono pensare di applicarle ai **numeri**...*

Quei "999" hanno l`aria sospetta.

*Per quanto riguarda (b), notiamo che **3** e` un parente molto stretto di **9**, e che questo numero ha delle interessanti caratteristiche; tra le altre cose, ogni sua potenza **pari** finisce per **1** e ogni sua potenza **dispari** finisce per **9**.*

(a)

Per prima cosa, calcoliamo il resto della divisione per **25**, ma prima modifichiamo leggermente il nostro valore; si ha:

$$\begin{aligned} 2^{1000} - 1 &= \left(2^{20}\right)^{50} - 1 = \\ &= \left(2^{20}\right)^{50} - 1^{50} \end{aligned}$$

e questo numero (vedi il prodotto notevole indicato sopra) e` divisibile per $2^{20} - 1$.

Applicando nuovamente lo stesso prodotto notevole al divisore,

$$2^{20} - 1 = \left(2^{10} - 1\right) * \left(2^{10} + 1\right)$$

Questi valori risultano decisamente piu` trattabili ed e` facile verificare che il secondo termine (1024+1=1025) e` divisibile per 25.

Ne discende che $2^{1000} - 1$ e` divisibile per 25 e che quindi $\left\langle 2^{1000} \right\rangle_{25} = 1$.

Da cui, sono possibili solo ***quattro*** coppie di cifre finali per 2^{1000}:

$$00 + 01 = 01$$

$$25 + 01 = 26$$

$$50 + 01 = 51$$

$$75 + 01 = 76$$

Essendo 2^{1000} divisibile per 2^2 e potendo verificare la divisibilita` per 4 attraverso le sole due ultime cifre le ultime due cifre dovranno essere divisibili per 4; dei valori indicati, l`unica che soddisfa questa possibilita` e` ***76***

In realta`, le ultime due cifre cui siamo interessati sono quelle di $2^{999} = \frac{2^{1000}}{2}$; nostro scopo e` quindi quello di ottenere la coppia di cifre che, moltiplicata per 2, generi un valore terminante con 76.

Si vede facilmente che le uniche possibilita` sono ***38*** e ***88***. Essendo pero` 2^{999} divisibile per 4, l`unico valore accettabile e` ***88***.

(b)

Esploriamo, come prima, le caratteristiche di un numero "vicino":

$$3^{1000} - 1 = 9^{500} - 1 = \left(9^{10}\right)^{50} - 1$$

Come sopra, l`ultimo termine e` divisibile per $9^{10} - 1$.

Identicamente al caso precedente, $9^{10} - 1 = (9^5 - 1) * (9^5 + 1)$ e, considerando solo l`ultimo termine, $9^5 + 1 = (9 + 1) * (9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1) = 10 * (9^4 - 9^3 + 9^2 - 9 + 1)$.

Ora, dalla regoletta sulle ultime cifre delle potenze di ***9*** si ha che possiamo raggruppare i termini secondo la loro terminazione:

$$\underbrace{(9^4 + 9^2 + 1)}_{1} - \underbrace{(9^3 + 9)}_{9}$$

Questo vuol dire che il primo termine avra` ***3*** come ultimo elemento e il secondo termine ***8***; quindi, il risultato della sottrazione (a meno di prestiti dalla cifra precedente) terminera` con ***5***. Quindi possiamo affermare che $\left\langle 9^5 + 1 \right\rangle_{100} = 10 * 5 = 50$.

Essendo pero` $3^{1000} - 1$ divisibile per $9^{10} - 1$, allora $3^{1000} - 1$ e` divisibile per ***100*** e di conseguenza 3^{1000} termina con la coppia ***01***. Ma questo numero e` evidentemente divisibile per ***3*** e quindi, quando effettuo la divisione, dalla posizione delle centinaia dovro` avere un resto da riportare sulle decine di ***2*** (se fosse 0 o 1 il numero non sarebbe divisibile per 3); quindi, 3^{1000} si comportera` dal punto di vista delle ultime cifre come ***201*** e potro` scrivere:

$$\left\langle 3^{999} \right\rangle_{100} = \left\langle \frac{201}{3} \right\rangle_{100} = 67$$

Che e` il risultato cercato.

(c)

Proviamo a modificare l`espressione:

$$\left\langle 14^{\left(14^{14}\right)} \right\rangle_{100} = \left\langle 7^{\left(14^{14}\right)} * 2^{\left(14^{14}\right)} \right\rangle_{100} = \left\langle \left\langle 7^{\left(14^{14}\right)} \right\rangle_{100} * \left\langle 2^{\left(14^{14}\right)} \right\rangle_{100} \right\rangle_{100}$$

E focalizziamoci sul primo termine.

> E` facile calcolare che $7^4 - 1 = 2401 - 1 = 2400$ e` divisibile per 100; da questo ne discende che qualunque potenza di 7 cui sia sottratto 1 e per cui l`esponente sia divisibile per 4 e` divisibile per 100, infatti potremo sempre scrivere:
>
> $$\begin{aligned} 7^{4k} - 1 &= (7^4)^k - 1^k = \\ &= \left(7^4 - 1\right)\left(\cdots\right) = \\ &= 2400 * \left(\cdots\right) \end{aligned}$$
>
> Ma l`esponente del primo termine e` divisibile per 4; infatti si ha che

$14^{14} = 2^{14} * 7^{14} = 4 * 2^{12} * 7^{14}$.

Allora e`

$$\left\langle 7^{\left(14^{14}\right)} - 1 \right\rangle_{100} = 0$$

e quindi per quanto riguarda il primo termine le ultime due cifre sono ***01***.

Per il secondo termine, ricordiamo che in (b) abbiamo visto che 2^{20}-1 e` divisibile per 25.

Sempre con lo stesso ragionamento ricavato dai prodotti notevoli, se ***n=20k***, ***2^n-1*** e` divisibile per ***25***.

Si tratta allora di cercare il resto di 14^{14} diviso 20.

Scomponendo:

$$14^{14} = 2^{14} * 7^{14} = 4 * 2^{12} * 7^{14}$$

Siccome il numero $2^{12} - 1 = \left(2^4\right)^3 - 1^3$ e` divisibile per $2^4 - 1 = 15$, se ne ricava che $4 * \left(2^{12} - 1\right)$ e` divisibile per 20, in quanto il primo fattore e` divisibile per 4 e il secondo per 5 (essendolo per 15, incidentalmente lo e` anche per 3...) e di conseguenza $\left\langle 2^{14} \right\rangle_{20} = 4$.

Per quanto rigarda $7^{14} = 49 * 7^{12}$, con lo stesso metodo di cui sopra si vede che $7^{12} - 1 = \left(7^4\right)^3 - 1^3 = \left(7^4 - 1\right) * (\cdots)$ e quindi $\left\langle 7^{12} - 1 \right\rangle_{100} = 0$, come gia` calcolato. Da cui, diviso 20 dara` resto 1 e quindi:

$$\begin{aligned}
\left\langle 7^{14} \right\rangle_{20} &= \left\langle 49 * 7^{12} \right\rangle_{20} = \\
&= \left\langle \left\langle 49 \right\rangle_{20} * \left\langle 7^{12} \right\rangle_{20} \right\rangle_{20} = \\
&= \left\langle \left\langle 49 \right\rangle_{20} * 1 \right\rangle_{20} = \\
&= \left\langle 49 \right\rangle_{20} = 9
\end{aligned}$$

Da cui $\left\langle 14^{14} \right\rangle_{20} = \left\langle \left\langle 2^{14} \right\rangle_{20} * \left\langle 7^{14} \right\rangle_{20} \right\rangle_{20} = \left\langle 4 * 9 \right\rangle_{20} = 16$.

Ossia abbiamo dimostrato che e` $14^{14} = 20k + 16$ e quindi possiamo scrivere, tornando al secondo termine,

$$\begin{aligned}
\left\langle 2^{\left(14^{14}\right)} \right\rangle_{25} &= \left\langle 2^{16} * 2^{20k} \right\rangle_{25} = \\
&= \left\langle 2^{16} \right\rangle_{25} = \\
&= \left\langle 65536 \right\rangle_{25} = 11
\end{aligned}$$

Quindi le ultime due cifre possono essere solo:

$$11+00=11$$
$$11+25=36$$
$$11+50=61$$
$$11+75=86$$

Ricordando che il numero deve essere divisibile per 4 e un numero e` divisibile per 4 se lo sono le sue ultime due cifre, l`unico candidato accettabile e` 36.

Da cui,

$$\left\langle 14^{\left(14^{14}\right)}\right\rangle_{100}=\left\langle\left\langle 7^{\left(14^{14}\right)}\right\rangle_{100}*\left\langle 2^{\left(14^{14}\right)}\right\rangle_{100}\right\rangle_{100}=$$
$$=\langle 1*36\rangle_{100}=$$
$$=36$$

Ossia il numero termina con 36.

(d1)

Consideriamo le ultime due cifre (ossia il modulo 100) delle potenze di 7:

$$\langle 7\rangle_{100}=07$$
$$\left\langle 7^2\right\rangle_{100}=49$$
$$\left\langle 7^3\right\rangle_{100}=\left\langle 7*7^2\right\rangle_{100}=\langle 07*49\rangle_{100}=43$$
$$\left\langle 7^4\right\rangle_{100}=\left\langle 7*7^3\right\rangle_{100}=\langle 07*43\rangle_{100}=01$$
$$\left\langle 7^7\right\rangle_{100}=\left\langle 7^3*7^4\right\rangle_{100}=\langle 43*01\rangle_{100}=43$$

Identicamente, da quest`ultima relazione,

$$\left\langle\left(7^7\right)^2\right\rangle_{100}=\langle 43*43\rangle_{100}=49$$
$$\left\langle\left(7^7\right)^3\right\rangle_{100}=\langle 43*49\rangle_{100}=07$$
$$\left\langle\left(7^7\right)^4\right\rangle_{100}=\langle 43*07\rangle_{100}=01$$
$$\left\langle\left(7^7\right)^7\right\rangle_{100}=\langle 07*01\rangle_{100}=07$$

Procedendo, si verifica che *se il numero di 7 e` pari il numero termina con 43; se il numero di 7 e` dispari il numero termina con 07.*

Quindi, essendo 1001 dispari, il numero termina con ***07***.

(d2)

Nella parte (d1) abbiamo visto che $\left\langle 7^4\right\rangle_{100}=01$; da questo si ricava che e`:

$$\left\langle 7^{4k+r} \right\rangle_{100} = \left\langle 7^{4k} * 7^{r} \right\rangle_{100} = \left\langle 7^{r} \right\rangle_{100}.$$

Dove ***r*** puo` valere 1, 2 o 3. Quindi il problema si riduce a trovare il resto modulo 4 della parte esponente.

L`esponente e` anch`esso una potenza di 7, quindi dobbiamo determinare il suo resto nella divisione per 4.

Allora, considerando i resti negativi, si ha:

$$\left\langle 7 \right\rangle_4 = \left\langle 8-1 \right\rangle_4 = -1$$

$$\left\langle 7^2 \right\rangle_4 = \left\langle (8-1)*(8-1) \right\rangle_4 = \left\langle (-1)*(-1) \right\rangle_4 = 1$$

…

$$\left\langle 7^{2x} \right\rangle_4 = 1$$

$$\left\langle 7^{2x+1} \right\rangle_4 = -1$$

…

$$\left\langle 7^{N} \right\rangle_4 = (-1)^N$$

In cui il valore negativo e` equivalente al valore ***3***.

Nel numero in questione, essendo l`esponente una potenza di 7, sara` sicuramente ***dispari*** e quindi sara` esprimibile nella forma avente modulo ***3*** e sara` equivalente a:

$$\left\langle 7^{4k+3} \right\rangle_{100} = \left\langle 7^{3} \right\rangle_{100} = \left\langle 343 \right\rangle_{100} = 43$$

Riepilogando:

(a): 2^{999} termina con 88

(b): 3^{999} termina con 67

(c): $14^{\left(14^{14}\right)}$ termina con 36

(d1): $\left(\cdots\left(\left(\left(7^7\right)^7\right)^7\right)^{\cdots 7}\right)$ termina con 07

(d2): $7^{\left(7^{\cdot^{\cdot^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}}}\right)}$ termina con 43.

5. Paraphernalia Mathematica

5.1 I nodi di cravatta [001]

5.1.1 Introduzione

Pochi lo sanno, ma sono un fanatico nel campo dei nodi di cravatta. Anche questa volta, essere mancino aiuta: se vi mettete davanti a qualcuno che fa un nodo e lo ripetete specularmente, siete facilitati nell`imparare e il risultato e`, gia dai primi tentativi, accettabile.

Grande e` stata la mia gioia quando ho scoperto che ***Fink*** e ***Mao*** (entrambi fisici, tra l`altro) avevano formalizzato la teoria dei nodi di cravatta, introducendo piu` matematica che tessuto; l`articolo e` comparso l`anno scorso sulla rivista ***PHYSICA***, ed e` ora disponibile in rete; non essendo pero` una meraviglia di chiarezza, fose e` meglio se prendiamo le cose un po` alla larga. Tra le altre cose, non vorrei che le femminucce si sentissero ignorate: chiariamo quindi che per molto tempo non si e` trattato di un accessorio unicamente maschile, e quindi se qualcuna di voi trarra` giovamento dalla spiegazione e` pregato di comunicarlo; la cosa non potra` che farci piacere.

Comiciamo con una brutta notizia: Fink e Mao hanno anche scritto un libro (recentemente tradotto in italiano), oltre all`articolo; purtroppo, il libro non affronta in modo completo la matematica del nodo (anche se da` tutti gli esempi utilizzabili in modo molto chiaro; voglio sperare che, una volta definita la notazione, siate in grado di ricavare la procedura di tracciamento senza costringermi a copiare i disegni), in compenso ha un prezzo abbordabile e contiene una storia decente dell`argomento. L`unica altra cosa valida nel campo e` un vecchio libro senza matematica intitolato "188 nodi da collo"[1]. Ve lo sconsiglio, costa (oggi) centocinquantamila lire (no, non ve lo presto).

Il nodo oggi piu` utilizzato e` quello noto come *tiro a quattro* o, se preferite l`inglese, il *four-in-hand*, nato verso la fine del diciannovesimo secolo. L`origine del nome e` dubbia; potrebbe essere nato dal modo di legarsi la sciarpa al collo tipico dei guidatori di carrozze, o dal modo utilizzato dai medesimi per legare le briglie ai cavalli.

Tra gli altri nodi, va ricordato il *Windsor* (noto in Italia come Scappino, per motivi squisitamente autarchici: era l`epoca della "Perfida Albione"); e` interessante notare che il Duca di Windsor, cui si attribuisce l`invenzione del nodo, non lo ha mai portato: preferiva (e poteva permetterselo) farsi tagliare le cravatte appositamente per ottenere un nodo molto regolare.

Con l`avvento (sciagurato) delle cravatte decisamente spesse, il Windsor rischiava di nascondere la faccia del portatore di cravatta; furono inventate alcune varianti quali l`*Half Windsor* noto anche come *Nicky*. Di quest`ultimo si conosce l`inventore, Nikita Krushov: le cravatte decisamente spesse che portava assumevano un aspetto decente solo con questo nodo.

Inoltre, va considerato che nessuno ha mai detto che la cravatta debba essere sistemata (al primo colpo) a "faccia avanti"; nulla vieta di fare il nodo con la cravatta di cui, all`inizio, si vedano le cuciture. La "gambetta", o parte passiva, restera` al contrario, ma sara` nascosta dalla gamba (o parte attiva). Se ad esempio fate l`equivalente di un "tiro a quattro" in questo modo, ottenete un nodo minuscolo noto come "Simplicissimus". Attenti quando disfate questi nodi, in molti alla fine resta un "nodo" che va snodato con calma.

Infine, e` anche possibile dare due giri alla fine del nodo, prima di far passare all`interno la gamba; il nodo diventa molto piu` stretto (tant`e` che in America questa forma di nodo si chiama "shrinker", da "head-shrinker", strizzacervelli, ossia psicanalista).

Riepilogando:

1. All`***inizio*** potete avere la cravatta **D**ritta o **R**ovesciata.
2. In ***mezzo*** potete fare un **T**iro a quattro o un doppio giro; quest`ultimo, **I**ncrociando o **N**o (per chiarirci: Windsor o Nicky)
3. Alla ***fine***, potete fare **U**no o **D**ue giri (normale o shrinker)

Se volete sapere un po` di nomi:

[1] In realta` sono solo una decina utilizzabili per la cravatta: gli atri sono per sciarpe, papillon, ascot o foulard oppure sono i soliti nodi fatti con cravatte particolari.

DTU: tiro a quattro

DIU: Windsor

DNU: Nicky

RTU: Simplicissimus

DTD: Shrinker

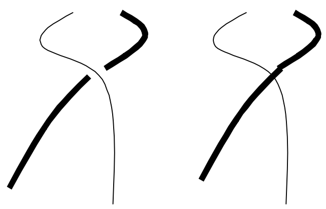
RNU: Pratt

RND: Rudy (si, l`ho inventato io. E` l`unico modo per portare le cravatte sottili ma molto larghe sotto, secondo me; in realta` e` una variazione del Christensen[2]).

Gli altri, potete chiamarli "sacco a pelo" o "tenda storta", in quanto vengono di quelle dimensioni e di quella forma.

Capite che questa linea di attacco porta in pochi posti, soprattutto dal punto di vista matematico; Fink e Mao sono partiti dall`idea di analizzare *tutti* i nodi cercando di definire matematicamente anche l`estetica e il bilanciamento dei medesimi. Per citare il loro bellissimo abstract, "*piuttosto che aspettare altri 50 anni per avere un nodo decente, presenteremo ora un approccio piu` rigoroso: il nostro scopo e` quello di predire tutti i nodi di cravatta esteticamente validi*".

5.1.2 Definizione



Un nodo di cravatta e` un nodo scorrevole; la cravatta e` messa attorno al collo e la parte larga (attiva, o gamba) viene manipolata attorno alla parte stretta (passiva o gambetta) in modo tale da far si` che quest`ultima possa scorrere all`interno del nodo risultante. Ciononostante, non tutti i nodi scorrevoli sono nodi da cravatta, e in questa parte definiremo le differenze.

Un nodo di cravatta comincia portando l`estremita` attiva sulla sinistra a formare la base trigonale **Y** e dividendo lo spazio in tre parti, ***D***estra, ***C***entro e ***S***inistra. I nodi che iniziano da destra sono identici rispetto alla riflessione e possono essere omessi dalla discussione.

In sostanza, quello che succede e` indicato nella figura: se passa sotto, ricordatevi di metterla al contrario. Le tre zone sono il vostro collo (***C***), la parte dove va a finire l`estremita` attiva (***S***) e l`altra parte (***D***). Indichiamo il primo movimento come $\boldsymbol{S}_-$ e il secondo come $\boldsymbol{S}_+$, dove i pedici "-" e "+" significano rispettivamente "passa sotto" e "passa sopra".

Un nodo continua arrotolando l`estremita` attiva attorno alla base trigonale: questa parte puo` essere considerata come una sequenza di mezzi giri che portano da una regione all`altra;

Tanto per cominciare, notiamo che l`ultimo passaggio deve essere (a meno di ridicolaggini alla Onassis) $\boldsymbol{C}_-$, seguito da una chiusura (tirata) ***T***; quest`ultima possiamo ingnorarla, fermo restando che il nostro nodo sia "finito li`"[3]. Da questo, si ricavano le possibili mosse che possono esserci in un nodo: $\{\boldsymbol{S}_-, \boldsymbol{S}_+, \boldsymbol{D}_-, \boldsymbol{D}_+, \boldsymbol{C}_-, \boldsymbol{C}_+\}$. Non solo, ma un nodo iniziera` sempre con $\boldsymbol{S}_-$ o $\boldsymbol{S}_+$ e terminera` con una delle sottosequenze $\boldsymbol{D}_-\boldsymbol{S}_+\boldsymbol{C}_-$ oppure $\boldsymbol{S}_-\boldsymbol{D}_+\boldsymbol{C}_-$. Le

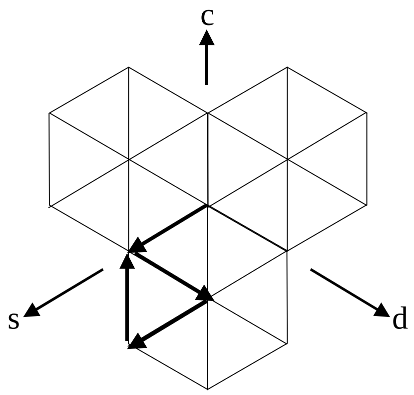
---

2 Che *non* vi spiego adesso, perche` viene una cosa enorme... Un Nicky col doppio giro, OK?

3 Cosa c`entra Onassis? Beh, esistono delle foto in cui chiude la cravatta con $\boldsymbol{C}_+$. L`effetto e` definibile solo come "bavagliolo".

sequenze sono definite in modo tale che non sia mai indicata due volte di seguito la stessa zona.

5.1.3 Cammini casuali



La notazione introdotta ci permette di rappresentare le sequenze di nodi come cammini in un reticolo triangolare; i tre assi rappresentano le regioni verso cui ci si muove e i tre versori rappresentano i movimenti. Siccome i movimenti sono un alternarsi di sequenze "+" e "-" e l`ultimo movimento deve essere un "-", i cammini di lunghezza pari cominciano con "+" e i cammini di lunghezza dispari cominciano con "-". In figura e` rappresentato il reticolo e schematizzato il *four-in-hand*, ossia $\boldsymbol{S_+D_+S_+C_-}$. Data questa regola, e` possibile eliminare i pedici senza introdurre ambiguita`.

La simmetria della regione implica che solo i movimenti positivi sono possibili e non si possono avere due movimenti consecutivi identici[4]; inoltre ogni punto del reticolo puo` essere raggiunto in piu` modi, ad esempio si ha $-\hat{c}=\hat{d}+\hat{s}$ e $2\hat{c}=\hat{c}+\hat{s}+\hat{c}+\hat{d}+\hat{c}$.

Le equazioni di evoluzione per il cammino persistente possono essere scritte come:

$$\begin{cases} k_{n+1}(d,c,s)=\frac{1}{2}p_n(d-1,c,s)+\frac{1}{2}q_n(d-1,c,s) \\ p_{n+1}(d,c,s)=\frac{1}{2}k_n(d,c-1,s)+\frac{1}{2}q_n(d,c-1,s) \\ q_{n+1}(d,c,s)=\frac{1}{2}k_n(d,c,s-1)+\frac{1}{2}p_n(d,c,s-1) \end{cases} \qquad [001]$$

...la cui dimostrazione e` lasciata... No, sto barando; cerchiamo almeno di giustificarla.

$\boldsymbol{k_{n+1}}$ rappresenta la probabilita` (condizionata) di essere nel punto ***(d,c,s)*** all`***n-esimo*** passo avendo appena fatto un passo lungo l`asse ***d*** positivo; ***p*** rappresenta la stessa funzione, ma con l`ultimo passo lungo l`asse ***c***; ***q*** e` la stessa cosa sull`asse ***s***.

Prendiamo, ad esempio la prima formula: sono pronto a fare il passo ***n+1***; la probabilita` di essere arrivato in ***(d,c,s)*** con un passo su ***d*** e` data dalla somma delle probabilita` di essere stato, al giro prima, nel punto ***(d-1,c,s)***; in quel punto potevo esserci arrivato con una manovra lungo ***c*** o lungo ***s*** (di sicuro non con una manovra lungo ***d***: due volte di seguito lo stesso movimento e` impossibile). Siccome le probabilita` sono equiprobabili, abbiamo i termini "1/2" di normalizzazione. Spero questo vi basti, perche` qui ho remato di brutto anch`io.

Stesso discorso per le altre formule, nelle diverse direzioni.

Qindi, la probabilita` ***non condizionata*** risulta essere:

$$U_n(d,c,s)=k_n(d,c,s)+p_n(d,c,s)+q_n(d,c,s) \qquad [002]$$

[4] Cioe` e` un cammino marcoviano del secondo ordine, o *persistente*.

5.1.4 Dimensione

Definiamo la *dimensione* ***h*** di un nodo come *il numero di passaggi nella sequenza* ossia, vedendo il nodo come un cammino casuale, il numero di passi in un cammino. Ora, il nodo piu` piccolo possibile e` dato dalla concatenazione della sequenza iniziale e della finale, ossia $\mathbf{S_-D_+C_-}$ (e` il Simplicissimus[5]), con ***h=3***; considerazioni estetiche (quali ad esempio l`avere sempre il nodo piu` piccolo della testa) consigliano di limitare la ricerca al campo ***h£9***.

Il *numero di nodi* ***K(h)*** aventi una data dimensione non e` altro che il numero dei cammini di lunghezza ***h*** che soddisfano le condizioni iniziali e terminali.

Ora, in un punto generico ***n*** del cammino posso scegliere tra due movimenti (quelli diversi dall`ultimo eseguito), mentre sul primo movimento ho l`obbligo della sequenza iniziale. Indichiamo con $F_{\hat{d}}(n)$ il numero dei cammini di lunghezza ***n*** che finiscono con $\hat{d}$; tenendo conto della condizione iniziale, possiamo dire che e`:

$$F_{\hat{d}}(n) + F_{\hat{c}}(n) + F_{\hat{s}}(n) = 2^{n-1} \qquad [003]$$

Ora, siccome le uniche sequenze terminali concesse sono $\hat{d}\hat{s}\hat{c}$ e $\hat{s}\hat{d}\hat{c}$, quello che dobbimao cercare sono le sequenze di lunghezza ***n=h-2*** terminanti con $\hat{d}$ o $\hat{s}$, dopo di che i due passi restanti sono univocamente determinati.

Cominciamo con il considerare $F_{\hat{s}}(n)$. Ora, ***s*** puo` essere seguito solo da ***d*** o ***c*** e, dopo un ulteriore passo, abbiamo:

$$F_s(n+2) = F_d(n+1) + F_c(n+1) \qquad [004]$$

da cui:

$$F_s(n+2) = F_d(n) + F_c(n) + 2F_s(n) \qquad [005]$$

Combinando la [003] e [005], otteniamo la relazione ricorsiva:

$$F_s(n+2) = F_s(n) + 2^{n-1} \qquad [006]$$

Con le condizioni iniziali $F_s(1)=1$ e $F_s(2)=0$, la [006] e` soddisfatta da:

$$F_s(n) = \frac{2}{3}\left(2^{n-2} + (-1)^{n-1}\right) \qquad [007]$$

Per quanto riguarda la F_d, otteniamo le stesse relazioni ma con diverse condizioni iniziali, $F_d(1)=0$ e $F_d(2)=1$; questo ci porta alla relazione equivalente alla [007]:

$$F_d(n) = \frac{1}{3}\left(2^{n-2} + (-1)^{n-1}\right) \qquad [008]$$

E se il numero dei nodi di dimensione ***h*** e` uguale al numero dei cammini di lunghezza $h-2$ che iniziano con ***s*** e terminano con ***d*** o ***s***, si ha:

$$K(h) = F_d(h-2) + F_s(h-2) = \frac{1}{3}\left(2^{h-2} - (-1)^{h-2}\right) \qquad [009]$$

Con la condizione iniziale ***K(1)=0***.

[5] Noto anche come "Orientale"; pare sia il preferito in Cina.

Da cui, ***il numero totale dei nodi di cravatta*** e` pari a:

$$\sum_{i=1}^{9} K(i) = 85 \qquad [010]$$

Si tratta ora di valutare se tutti questi nodi sono esteticamente validi.

...Ma questa e` un`altra storia.

Rudy d`Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms