Rudi Mathematici

Rivista fondata nell`altro millennio

Numero 026 - 2001-03

1. Editoriale

Pochi di voi ci hanno creduto, ma e` vero: mi porto (quasi) sempre dietro due quadernetti tascabili ricolmi di problemi: questi due depositi di sapere e sacelli di torture contengono, in particolare, tutta la robaccia che mi viene in mente o raccatto in giro e che prima o poi vi rifilo sotto forma di problemi su queste pagine.

E a noi?

Beh, volevo dirvi che ho finito il primo quaderno.

Ragione per festeggiare!

Rudy d`Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Aiutate il tabaccaio!

Avete presente quei bambini dei problemi di matematica, che riescono a dimenticarsi il dettaglio piu` semplice ma in compenso si ricordano una serie astrusa di relazioni impossibili? Ecco, e` successo proprio cosi`.

"*Papa` vuole dei francobolli da 1,2,3,5 e 10 Cent; ha detto che ne vuole quattro di due tipi e tre degli altri tipi, ma ho dimenticato quali. Mi ha dato queste monete da 10 Cent e ha detto che non c`e` resto...*"

Quanti francobolli erano per ogni tipo e quanto aveva il giovincello nella manina lercia e sudaticcia?

2.2 Un problema d`annata

Dovete sapere tre cose:

1. Mi hanno richiesto un problemino di criptaritmetica (vero: e` piu` di un anno che non ne facciamo)
2. Nel 1968, alle Olimpiadi di Citta` del Messico, Ada KOK (Danimarca) ha vinto un oro nel nuoto.
3. "Snel" in danese vuol dire "veloce".

Trovate i numeri della divisione:

$$\frac{ADA}{KOK} = .SNELSNELSNEL... = .\overline{SNEL}$$

dove a lettera diversa corrisponde cifra diversa e la frazione e` ridotta ai minimi termini. Attenzione che c`e` un punto decimale, davanti al risultato.

3. Soluzioni e Note

3.1 [023]

3.1.1 Odio il tennis

Bene! Cioe`, Male!

Un tentativo da Giorgio, e per di piu` sbagliato! Ho chiesto il permesso di pubblicarlo, e mi ha solo chiesto di non infierire troppo... OK, non infieriro`. Effettivamente, era decisamente tosto.

Quello che frega sono i primi due punti: e` relativamente facile metterli sotto forma di equazione, ma farci entrare il terzo e` tutto un altro discorso.

Giorgio propone:

Dovendo far stare le palline in k *righe, nella riga* ***r*** *(con r che va da 1 a* ***k****) mettero`:*

r	$r+k$	$2*k+2*(k-r)+1$

ottenendo per ogni riga $(r)+(r+k)+(2k+2k-2r+1)=5k+1$ *palline; essendo* ***k*** *le righe, nel primo settore avro`* ***[1,...,k]*** *palline, nel secondo settore avro`* ***[k+1,...,2k]*** *palline e nel terzo settore avro`* ***[2k+1,...,4k]*** *palline (in questo settore viaggio al contrario).*

...Gia`, e proprio nel terzo settore casca l`asino (senza alcuna allusione): qui, uso *la meta`* dei numeri indicati! Quindi, non e` detto che questo sia effettivamente il minimo.

Per raggiungere il minimo dobbiamo (se possibile), utilizzare ***tutti*** i numeri compresi tra ***1*** e ***3k***, o almeno saltarne il meno possibile.

Per prima cosa, supponiamo ***k*** dispari.

In questo caso, e\` ***k=2m+1*** e il numero totale di palline e\` pari alla somma dei numeri da ***1*** a ***3k*** o, utilizzando ***m*** (vi ricordate il metodo che Gauss ha inventato verso i sei anni, vero?) $\sum_{i=1}^{3k=6m+3} i = \frac{(6m+3)*(6m+4)}{2}$.

Dovendo avere lo stesso numero di palline in ogni riga, questo sara\` 1/k della somma data, ossia $\frac{(6m+3)*(6m+4)}{2k} = \frac{(6m+3)*(6m+k)}{2*(2m+1)} = 9m+6$ e non e\` possibile fare di meglio in quanto ogni altra scelta di ***6m+3*** interi positivi dara\` un risultato maggiore.

Un modo per raggiungere questi valori e\` quello indicato in tabella qui a fianco (attenti ai cambi di forma delle espressioni dei numeri):

1	4m+2	5m+3
2	4m	5m+4
3	4m-2	5m+5
...	...	...
m	2m+4	6m+2
m+1	2m+2	6m+3
m+2	4m+1	4m+3
m+3	4m-1	4m+4
m+4	4m-3	4m+5
...	...	...
2m	2m+5	5m+1
2m+1	2m+3	5m+2

In questo modo (se fate la prova per, ad esempio, ***k=7***) vi accorgete che i numeri vengono usati tutti: per il caso indicato, avete le colonne [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] in prima colonna, [14, 12, 10, 8, 13, 11, 9] nella seconda colonna e [18, 19, 20, 21, 15, 16, 17] nella terza colonna: in sostanza, si ha:

Prima colonna: numeri da ***1*** a ***K***

Seconda colonna:

Prime ***m+1*** righe: i *pari* da ***2m+2*** a ***4m+2***

Altre ***m*** righe: i *dispari* da ***2m+3*** a ***5m+2***

Terza colonna:

Prime ***m+1*** righe: numeri da ***5m+3*** a ***6m+3***

Altre ***m*** righe: numeri da ***4m+3*** a ***5m+2***

In questo modo, sono coperti tutti gli interi e ogni riga ha somma ***6m+3***.

Supponiamo ora ***k*** pari.

Con lo stesso metodo si arriva a (***k=2m***) un numero di palline pari a $\frac{\frac{6m*(6m+3)}{2}}{2m} = 9m + \frac{3}{2}$ che non e` intero; quindi, il meglio che si puo` fare e` usare il valore intero successivo, ossia ***9m+2***.

Omettendo il valore ***5m+1*** nel nostro calcolo si ottiene la disposizione indicata nella tabella. Ad esempio, per ***k=8*** (e quindi ***m=4***) si hanno le colonne:

Prima colonna: [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Seconda colonna: [15, 13, 11, 9, 16, 14, 12, 10]. Terza colonna: [22, 23, 24, 25, 17, 18, 19, 20].

Questo fornisce il miglior risultato possibile dando per ogni riga una somma pari a ***9m+2***.

1	4m-1	5m+2
2	4m-3	5m+3
3	4m-5	5m+4
...	...	...
m	2m+1	6m+1
m+1	4m	4m+1
m+2	4m-2	4m+2
m+3	4m-4	4m+3
...	...	...
2m	2m+2	5m

Notate che anche in questo caso gli schemi per la seconda e la terza riga sono diversi nelle due meta` della tabella.

Lo ammetto, non era semplice. Pero` era carino. Credo sia l`unica cosa divertente del tennis...

4. Bungee Jumpers

4.1 Il salto

*La linea **l** e` tangente al cerchio **S** nel punto **A; B** e **C** sono due punti su **l** dai lati opposti di **A** e le tangenti ad **S** per **B** e **C** si incontrano in **P**.*

*Trovate il luogo geometrico di **P** al variare di **B** e **C** sotto la condizione* $|AB| * |AC| = k^2$.

4.2 Pagina 46

Probabilmente un disegnino aiuta. Indicando gli angoli $P\hat{B}A = b \quad P\hat{C}A = g$, si ha che e`

$\overline{AB} = p \overline{AC} = q$ con ***pq=k²*** costante positiva.

Siano ***D*** e ***E*** i punti di tangenza su ***S*** rispettivamente di ***PB*** e ***PC***. Per il triangolo ***EIP*** si ha:

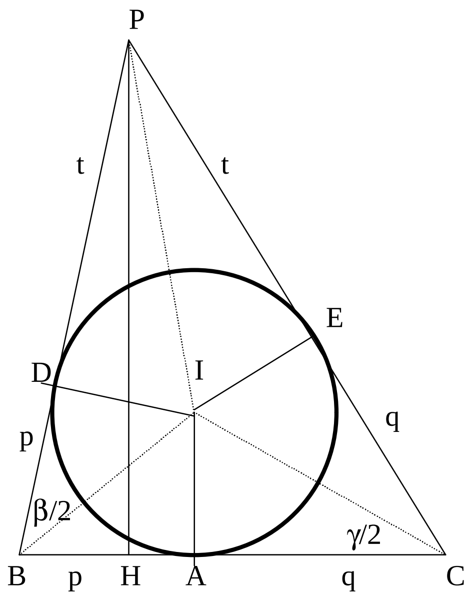
$E\hat{I}P = \frac{1}{2}(b + g)$ da cui

$$t = \frac{1}{2}\tan(b + g) = \frac{(p+q)r^2}{pq - r^2}$$

Il semiperimetro di ***BCP*** risulta:

$$p + q + t = p + q + \frac{(p+q)r^2}{pq - r^2} = \frac{pq(p+q)}{pq - r^2}$$

L`area di ***BCP*** vale



$$r\frac{pq(p+q)}{pq-r^2}=\frac{1}{2}(p+q)PH$$

dove ***PH*** e\` l\`altezza per ***P*** su ***BC***. Ricavando ***PH*** si ha $PH=\frac{2pqr}{pq-r^2}=\frac{2k^2r}{k^2-r^2}$, ossia il luogo geometrico di ***P*** e\` una retta parallela a ***BC***.

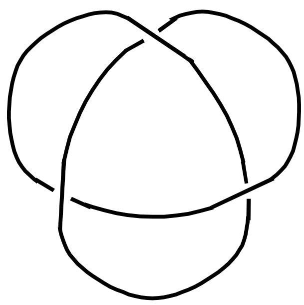
5. Paraphernalia Mathematica

5.1 I Polinomi di Jones

...Mi piacerebbe sapere quanti di voi riescono a capire di cosa sto parlando, dal titolo. Tranquilli, e\` *un po\`* meno noioso di quanto sembra.

E\` sempre stata mia impressione che i topologi fossero delle specie di *flaneur* della matematica, occupati in astratte attivita\` quali tagliuzzare strisce di Möbius o inventarsi bottiglie assolutamente inutili; inoltre, mi sono sempre chiesto come facessero (ipse dicunt...) a descriverli matematicamente.

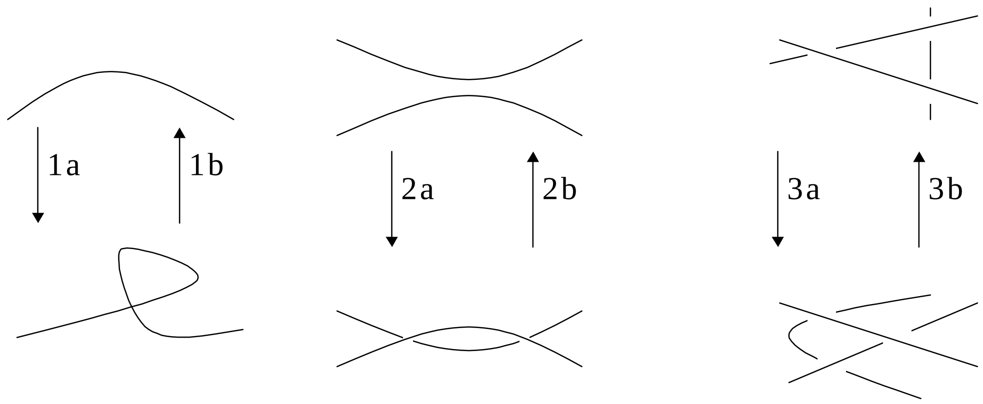
Grande e\` quindi stata la mia felicita\` nel trovare un po\` di roba... Ma procediamo con ordine.



Tanto per cominciare, in matematica un *nodo* e\` una curva chiusa; in pratica, dati i nodi reali, prendete i due capi e spiccicateli insieme (no, non con un nodo... Cioe\`, ne esistono anche di quel tipo, ma sono degeneri anche secondo i matematici). Secondariamente, quello che ottenete potete deformarlo in (quasi) tutti i modi che vi pare e continuate ad avere sempre la stessa cosa.

Insomma, per capirci: quello qui di fianco e\` un nodo (*trifoglio destro*). Siccome disegnarlo e\` complicatissimo e il risultato e\` tutt\`altro che buono, lo spiccichiamo li\` adesso e poi ci facciamo riferimento.

Ecco, questo sembra un buon punto d\`inizio. In quanti modi possiamo deformare un nodo e fare in modo che resti un nodo? Sembra strano, ma *Rademeister* (Kurt) ha dimostrato che sono possibili solo **tre** movimenti, che vi indico qui di seguito.



...Voglio sperare che tanto per cominciare si capisca qualcosa, e secondariamente che nel primo disegno non rappresenti un problema il capire che uno qualunque dei due "fili" puo` andare sotto. Nel secondo, o tutti i passaggi sotto o tutti sopra.

Se fosse tutto qui, potremmo chiudere bottega e lasciare che se ne occupi il primo scimpanze` con l`aria intelligente. Fortunatamente, c`e` dell`altro.

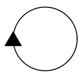
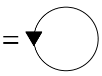
Una cosa che potete verificare piuttosto facilmente e` che se prendete il trifoglio e cominciate a rademeistarlo (sono *sicuro* che non si dice cosi`) non riuscirete mai a trasformarlo nella sua immagine speculare; infatti, il nodo sinistro e` un nodo diverso da quello destro (se vi piacciono le parole difficili, hanno una chiralita` o sono enantiomorfi).

Esistono alcuni modi per descrivere i nodi dal punto di vista matematico, ma molti falliscono proprio nella distinzione di chiralita`. Ne esiste uno, pero`, che ci riesce. Siccome gli altri sono noiosi (anche se qualcuno e` simpatico... Ne parleremo, prima o poi), passiamo subito a quello interessante.

Jones ha cercato di definire i nodi attraverso un polinomio; la cosa, presenta delle indubbie utilita`, considerato che in questo modo possiamo portarci dietro le "componenti" senza mescolarle tra loro; se riusciamo ad attribuire un "valore" ad un incrocio, Rademeister puo` aggrovigliare la cosa quanto vuole che i nostri incroci non si mescoleranno.

Il bello e` che il metodo ammette due assiomi, e con questi riesce a fare tutti i calcoli necessari. L`unica cosa (in piu`) che ci serve, e` definire un *senso* alle corde. Siccome vorrei semplificarmi la vita, tiriamo le corde dritte.

Il primo assioma sostiene che il Polinomio di Jones di un *non-nodo* vale **1**, qualsiasi sia il suo orientamento; approfittiamone per definire una notazione per i polinomi:

 [t] =  [t] = 1

La cosa mi sembra piuttosto chiara: il Polinomio di Jones (indicato con ***[t]*** del non-nodo (il cerchietto con la freccia) vale 1.

Il secondo e` un po` piu` complicato: quando due diagrammi sono uguali tra di loro tranne ad un incrocio (dove uno sta "sopra" e l`altro sta "sotto"), si puo` modificare la formula "snodando" quell`incrocio: nella formula, viene indicata solo la parte "diversa" dei due nodi.

t^{-1}  [t] - t  [t] = $(t^{1/2}-t^{-1/2})$  [t]

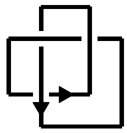
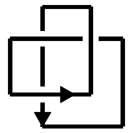
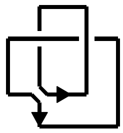
In pratica, prendiamo il polinomio del nodo moltiplicato per $\boldsymbol{t^{-1}}$, gli sottraiamo il polinomio del nodo "inverso solo in un punto" moltiplicato per ***t*** e il risultato e` un "taglia & incolla" delle due corde moltiplicato per quella robaccia. Questa, e` nota come relazione del garbuglio[1].

Sembra incredibile, ma con queste due regolette stupide si riesce a calcolare il polinomio di qualsiasi nodo non degenere. Proviamo con il trifoglio destro, ad esempio. Il metodo e` quello di andare avanti sin quando non riusciamo ad ottenere un non-nodo, e a quel punto vedere cosa ci avanza come polinomio.

[1] In inglese e` molto piu` bella: "Skein relation".

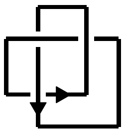
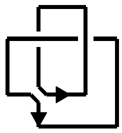
1-Dal trifoglio al legame

Applicando la relazione del garbuglio, abbiamo:

t^{-1}  *[t] - t*  *[t] =* $(t^{1/2}-t^{-1/2})$  *[t]* [001]

{1} ***{2}*** ***{3}***

...In cui ***{1}*** e\` il nostro nodo originale, ***{2}*** abbiamo "tirato su" l\`incrocio in basso a sinistra, ***{3}*** abbiamo effettuato il "taglia & incolla". Voglio sperare tutto sia chiaro, che a fare i disegni ci ho messo piu\` di un\`ora. A questo punto, se non siete troppo ingarbugliati, dovreste vedere che ***{2}*** e\` un anello cui e\` stata applicata la manovra di Rademeister 1a (Polinomio di Jones uguale a 1). Nulla ci vieta, a questo punto, di moltiplicare tutto per ***t,*** in modo da isolare il nodo ***{1}***:

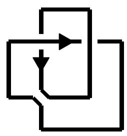
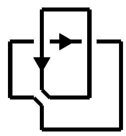
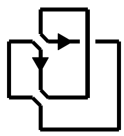
 *[t] =* $(t^{3/2}-t^{1/2})$  *[t] +* t^2 [002]

{1} ***{3}*** ***{2}***

...Se siete riusciti a capire sin qui, non dovreste avere problemi per il resto.

2-Dal legame al doppio anello

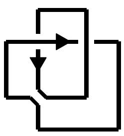
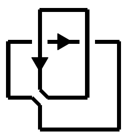
Consideriamo il solo nodo ***{3}***: sempre per la legge del garbuglio, si ha:

t^{-1}  *[t] - t*  *[t] =* $(t^{1/2}-t^{-1/2})$  *[t]* [003]

{3} ***{4}*** ***{5}***

Dove ***{5}*** e\` sempre un anello (Polinomio di Jones uguale a 1) e ***{4}*** sono due anelli, *di cui non conosciamo il Polinomio di Jones*. Gia\`, e\` proprio li\` la fregatura... due pezzi di corda sono diversi da un pezzo di corda.

Comunque, isolando ***{3}*** nello stesso modo di prima, ottengo:

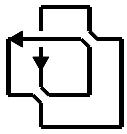
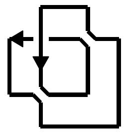
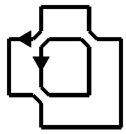
 *[t] =* $t^{3/2}-t^{1/2}+t^2$  *[t]* [004]

{3} ***{4}***

Direi che la situazione sta dipanandosi.

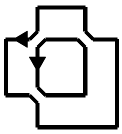
3-Il Polinomio di Jones di due anelli

Applichiamo il garbuglio ad un anello singolo con manovra di Rademeister 1a (vi ricordo che Kurt non cambia la struttura di un anello, quindi il Polinomio di Jones e\` sempre 1):

t^{-1}  ***[t] -t***  ***[t] =*** $(t^{1/2}-t^{-1/2})$  ***[t]*** [005]

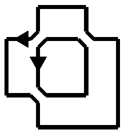
{6} ***{7}*** ***{4}***

Ma se ***{6}*** e ***{7}*** hanno Polinomio 1, allora possiamo calcolare il Polinomio di ***{4}***.

$t^{-1} - t = (t^{1/2}-t^{-1/2})$  ***[t]*** [006]

{4}

Ossia

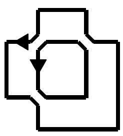
 ***[t]*** $= -t^{1/2}-t^{-1/2}$ [007]

{4}

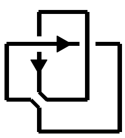
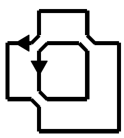
E allora basta rifare il calcolo al contrario, visto che ormai dovremmo avere tutti i valori (e anche tutti i disegnini, il che non guasta di sicuro).

4-Al contrario

Dicevamo:

 ***[t]*** $= -t^{1/2}-t^{-1/2}$

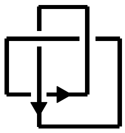
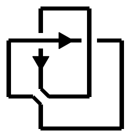
{4}

 ***[t]*** $= t^{3/2}-t^{1/2}+t^{2}$  ***[t]***

{3} ***{4}***

$$= t^{3/2}-t^{1/2}+ \quad t^{2}(-t^{1/2}-t^{-1/2})$$

$$= -t^{5/2}-t^{1/2}$$

 $[t] = (t^{3/2}-t^{1/2})$  $[t] + t^2$

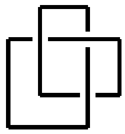
{1} *{3}*

$$= (t^{3/2}-t^{1/2}) \quad (-t^{5/2}-t^{1/2}) \quad + t^2$$

$$= -t^4+t^3+t$$

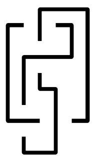
...Che, liberi di non crederci, non ha richiesto neanche una volta l`uso del Formula Editor.

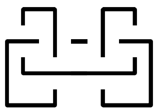
Il calcolo e` sostanzialmente lo stesso per il trifoglio ***sinistro***, solo che il risultato e`

 $[t] = -t^{-4}+t^{-3}+t^{-1}$

Ossia, il nostro aggeggino *riconosce la chiralita`*.

Non puo` mancare, nel campo, il necessario viatico per le riunioni noiose: provate con questi due:





Vi invito ad apprezzare la potenza estetica del secondo: inoltre, dovreste riconoscerlo.

Direi che stiamo affrontando un punto nodale...

Rudy d`Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms