Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Rivista fondata nell`altro millennio

Numero 025 - 2001-02

1. Editoriale

Questa volta, *non* mi lamento del fatto che c`erano poche soluzioni... Come noterete, e` venuto fuori un numero decisamente "ciccio", e per un problema ci sono un mucchio di soluzioni (fortunatamente tutte con lo stesso risultato). Ma il motivo della ciccitudine e` un altro.

La decisione chiave dell`ultimo CdR (a parte, come al solito, la data della prossima riunione) e` stata quella di inserire una nuova rubrica; questo dovrebbe permettere, aumentando le dimensioni dell`indice, di ridurre le dimensioni dell`editoriale.

Successivamente, si trattava di decidere di cosa parlare e come chiamarla, e come sempre Piotr si e` esibito in un monologo (raramente e` possibile un dialogo...) di rara efficacia; quindi, il primo pezzo tratta di quello che trattera` la rubrica. Quando lo leggete, vi invito a tenere presente la normale prosodia del soggetto.

E due!

Rudy d`Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 C`e` un`altra festa!

Tutte le scuse sono buone, per gozzovigliare...

Dovete sapere che, oltre alle riunioni di redazione, io e Piotr ogni tanto ci si vede con degli amici e le rispettive mogli: l`ultima volta eravamo in otto (quattro mariti e quattro mogli), e non mi sono lasciato sfuggire la possibilita` di inventarmi un qualche giochino balordo.

Allora, queste otto persone quando sono arrivate hanno cominciato a scambiarsi i soliti convenevoli: strette di mano, baci, abbracci, sguardi in cagnesco (beh, no... concentriamoci sulle strette di mano).

Siccome anche se non sembra siamo ragionevolmente normali, e nessuno ha stretto la mano a se stesso o al proprio partner (marito/moglie che sia).

Alla fine della festa chiedo a tutti (tranne a me stesso, evidentemente) a quante persone hanno stretto la mano e ogni persona mi dice un numero diverso; essendo stata la serata nei limiti del ragionevole per quanto riguarda l`alcool, non ho motivo di dubitarne.

Io ho stretto la mano a Piotr.

Mia moglie ha stretto la mano alla moglie di Piotr? E a Piotr?

2.2 Come allevare una capretta

Non faro` i soliti commenti sulle braccia sottratte all`agricoltura...

Supponiamo una zona arida, senza vegetazione tranne in una zona perfettamente circolare (non chiedetemi perche`... Sara` un`aiuola di MathLand).

Sulla circonferenza, in un punto ben preciso, e` fissato un capo di una corda di lunghezza ***l***; all`altro capo della corda e` fissata una capretta di nome Gelsomina (non e` fondamentale, ma aiuta).

L`area totale del cerchio basta a nutrire la bestiola per ***due*** giorni.

Essendo notoria la vostra abilita` in pianificazione e allevamento Gelsomine, il primo giorno dovreste determinare la lunghezza ***l*** della corda tale per cui Jasmine riesce ad accedere *esattamente* all`erba necessaria per un giorno...

Vi consiglio di azzeccare il risultato: tanto cara e buona, ma se si incavola...

3. Soluzioni e Note

3.1 [023]

3.1.1 Quando eravamo giovani...

Oila`! siete andati un po` avanti per tentativi, ma almeno ci avete provato! Benebenebene.

La soluzione di seguito arriva da Anna: e` stata l`unica che ha provato a fare un ragionamento ma, soprattutto, e` stata l`unica che si sia ricordata di *tenere gli anelli tagliati*... Alcune soluzioni li facevano sparire nell`operazione.

Confesso, un po` sono andata avanti per tentativi... se taglio la catena in due pezzi ottengo tre pezzi: uno da un anello, uno da* ***(23-1-x)*** *anelli e un pezzo da* ***x*** *anelli... Riuscire a fare qualcosa in questo modo sembra difficile. Se* ***x=1****, ho i pezzi (1,1,21) e il terzo giorno gia` marca male, come ama dire il mio problemologo preferito [grazie. R.d.A.]. *Proviamo a fare* ***due*** *tagli: in questo modo ho i pezzi (1,1,x,y,z), dove* ***x****,* ***y*** *e* ***z*** *sono da determinare. Andiamo con ordine.*

Primo giorno: pago con uno degli anelli "rotti"

Secondo giorno: pago con l`altro anello "rotto"

Terzo giorno: devo dare ***x****, ma posso ricevere come resto i due anelli "rotti": quindi,* ***x=3****.*

Quarto e quinto giorno: pago con i due anelli "rotti"

*Sesto giorno: devo dare **y**, ma posso ricevere come resto tutto quanto (1+1+x=5); dovendo pagare 6 giorni, il pezzo dovrebbe essere da 11. A questo punto, la mia catena e` stata aperta in "4" e in 4+11+1=16, lasciandomi un pezzo da 7 che "diventa scomodo"... Non mi piace, quindi supponiamo che il secondo pezzo sia per pagare sei giorni senza resto, quindi un pezzo da **6*** [Signori, vi presento l`importanza dell`estetica per la matematica: io ero andato avanti tranquillo con i calcoli, trovandomi poi fregato dal pezzo da 7...]. *Quindi, deve essere **y=6**, lasciandomi quindi ancora con un pezzo da 12.*

A questo punto, forse e` meglio una tabella: cosa pago e cosa ricevo di resto ogni giorno.

Giorno	***Pago***	***Resto***	***Ho in tasca***	***Ha il padrone***
1	*1*	*0*	*12+6+3+1*	*1*
2	*1*	*0*	*12+6+3*	*1+1*
3	*3*	*1+1*	*12+6+1+!*	*3*
4	*1*	*0*	*12+6+1*	*3+1*
5	*1*	*0*	*12+6*	*3+1+1*
6	*6*	*3+1+1*	*12+1+1*	*6*
7	*1*	*0*	*12+3+1*	*6+1*
8	*1*	*0*	*12+3*	*6+1+1*
9	*3*	*1+1*	*12+1+1*	*6+3*
10	*1*	*0*	*12+1*	*6+3+1*
11	*1*	*0*	*12*	*6+3+1+1*
12	*12*	*6+3+1+1*	*6+3+1+1*	*12*
13	*1*	*0*	*6+3+1*	*12+1*
14	*1*	*0*	*6+3*	*12+1+1*
15	*3*	*1+1*	*6+1+1*	*12+3*
16	*1*	*0*	*6+1*	*12+3+1*
17	*1*	*0*	*6*	*12+3+1+1*
18	*6*	*3+1+1*	*3+1+1*	*12+6*
19	*1*	*0*	*3+1*	*12+6+1*
20	*1*	*0*	*3*	*12+6+1+1*
21	*3*	*1+1*	*1+1*	*12+6+3*
22	*1*	*0*	*1*	*12+6+3+1*
23	*1*	*0*	*0*	*12+6+3+1+1*

...E se non mi arrivano i soldi, posso provare con un meraviglioso orologio da taschino, del valore di 24 anelli. Cosi` posso andare avanti ancora un po` (non lo so, non ho verificato). [Si, in effetti "si va avanti per un po`". Anche Anna "va avanti per un po`", e avanza un`ipotesi] *[...] Non so se c`entra, ma mi ricorda la numerazione binaria...* Vero; se fate ***N*** tagli nella catena, il massimo numero di giorni che potete sopravvivere e` $(N+1)*2^{N+1}-1$. Voglio sperare che, fidando nella vostra estetica, riusciate a calcolare dove fare i tagli senza rompere le scatole a Anna...

3.2 [024]

3.2.1 Testa o Croce o Testa o Croce

OK, era facile... infatti sono arrivate un po` di soluzioni. La piu` commentata arriva da Alice.

Certo che il povero Fred è sospettoso! Non si è mai visto un peggior truffatore al mondo di quello capace di usare il calcolo delle probabilità.

Il buon Rudi, come al solito, ha tentato di prenderlo in giro, cambiando le regole. Infatti il gioco non consiste più nel fare `testa`, ma nel fare più teste dell`avversario: supponendo le monetine non truccate (per quanto possa essere cattivo Rudi non userebbe monetine truccate con un bambino... vero?) le combinazioni che farebbero vincere Rudi sono:

A		B	Risultato
T	T	T	A
T	T	C	A
T	C	T	B
T	C	C	A
C	T	T	B
C	T	C	A
C	C	T	B
C	C	C	B

TCC, TTC, TCT, CCC

Mentre quelle che farebbero vincere Fred sono le altre quattro:

CTC, CCT, CTT, TTT.

Essendo ogni combinazione equiprobabile hanno ancora entrambi il 50% di probabilità di vincere... Rudi non è poi tanto cattivo alla fine.

...Alla prossima riunione del CdR, ricordami di raccontarti della mia collezione di monete a due teste*...*

Luca ha utilizzato la formula: la sua soluzione e` un po` "stringata" in quanto stava aspettando un aereo... Sono felice che RM serva almeno a questo.

Ho calcolato la probabilità con le formule:

$$P_F = p_F(2T) + p_F(1T) \cdot p_R(C) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

dove P_F è la probabilità che vinca Fred, pF(nT) è la probabilità che Fred ottenga n "teste" e $p_R(C)$ è la probabilità che Rudy faccia croce. Dal calcolo risulta che la probabilità che vinca Fred e la probabilità che vinca Rudy sono uguali.

3.2.2 Un altro taglio della torta

La piu` stringata arriva da Paolo...

Io farei: perimetro diviso n e unirei ogni segmento al centro.

*L`area dei triangoli è uguale in quanto pari a base*h/2, la glassa sulla base la medesima perchè ho diviso il perimetro in parti uguali.*

Nel caso di 12 fette, ogni lato è diviso in tre e le fette hanno tutte un punto in comune che è l`incrocio delle diagonali del quadrato.

Luca ha fatto un`interessante trattazione... L`aereo doveva essere ***molto*** in ritardo.

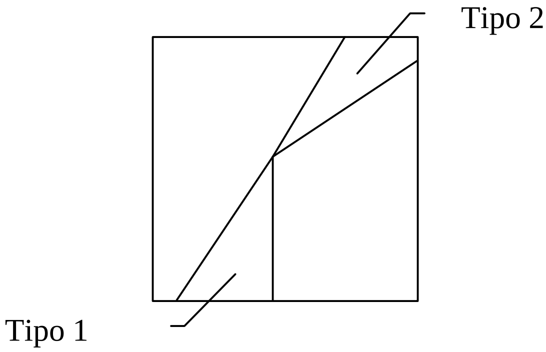
Assumendo che lo spessore della torta sia costante, le due condizioni di ugual volume delle fette ed ugual superficie glassata posso essere riscritte così:

- *le fette hanno lo stesso volume se l`area della base delle fette è uguale*
- *le fette hanno la stessa superficie glassata se in aggiunta della stessa area di base della fetta, la lunghezza di bordo esterno della torta compresa nel perimetro di ogni fetta è la stessa.*

Dalle due relazioni si vede che ogni fetta deve avere una parte di bordo esterno della torta. Infatti se una fetta non avesse parte del bordo esterno allora questa fetta dovrebbe avere superficie di base maggiore per compensare la parte di superficie glassata mancante. Però in questo modo il volume della fetta sarebbe maggiore avendo maggiore superficie di base.

Avendo una torta quadrata si può pensare di dividerla in fette di forma triangolare con vertice il centro della torta e con la base giacente sul bordo della torta. In questo modo *l`altezza dei triangoli di base è comunque uguale a metà della lunghezza del lato della torta.*

A dire il vero, se il numero delle fette in cui dividere la torta non è un multiplo di 4 si possono avere due tipi differenti di fette come mostrato in figura:



Le fette di tipo 1 sono di forma triangolare e se l è la lunghezza del lato della torta, h lo spessore della torta e b la lunghezza della base della torta (ovvero la parte di bordo esterno della torta compreso nella fetta), il volume e la superficie glassata della fetta risulta essere:

$$V_f = h \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{4} \cdot b \cdot l \cdot h$$

$$S_f = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{l}{2} + b \cdot h = \frac{1}{4} \cdot b \cdot l + b \cdot h$$

La fetta di tipo 2 invece può essere scomposta in due fette di tipo 1 considerando il segmento che unisce il vertice del quadrato al centro della torta. Indicando con b_1 e b_2 le due porzioni della base risulta:

$$V_f = \frac{1}{4} \cdot b_1 \cdot l \cdot h + \frac{1}{4} \cdot b_2 \cdot l \cdot h = \frac{1}{4} \cdot b \cdot l \cdot h$$

$$S_f = \frac{1}{4} \cdot b_1 \cdot l + b_1 \cdot h + \frac{1}{4} \cdot b_2 \cdot l + b_2 \cdot h = \frac{1}{4} \cdot b \cdot l + b \cdot h$$

dove $b = b_1 + b_2$. Quindi se la somma delle lunghezze delle due parti del bordo esterno di una fetta di tipo 2 è uguale alla lunghezza della parte di bordo esterno della fetta di tipo 1 le due fette hanno lo stesso volume e la stessa superficie "glassata".

C`e` stata anche un`altra soluzione da parte di Alice: forte del fatto che 12 e` divisibile per 4, prima divideva la torta in 4 parti, poi divideva ogni fetta in tre parti ottenendo lo stesso risultato (anche come forma delle fette). E` interessante la sua formulazione per un valore ***N*** generico non divisibile per 4:

Questo è quanto quando gli amici sono 12, ma come comportarsi per altri valori di N? Facili le soluzioni per 1, 2, 3 (basta dare 4 fette della torta appena divisa per uno...), 4, 6 (stesso trucco, solo due fette questa volta), 8, ma come cavarsela con 5 fette?

Beh, se provate con 20 è più facile: lo stesso trucco degli $l/3$ funziona con $l/5$, e in generale con l/N (basta pensare alle proprietà dei triangoli). Bisogna solo avere un po` di pazienza e tagliare un numero di fette che sia un multiplo di 4, ma così c`è anche più gusto, e si può fare più di un bis!!

3.2.3 Natale al Paesello!

Bene! Due soluzioni. Confesso: mi aspettavo ci metteste un paio di mesi...

Cominciamo con Alice:

Questo è il primo Natale che non trascorro al paesello, per cui mi sarebbero mancate le campane se Rudi non me le avesse fatte ricordare: un piccolo ringraziamento prima di dare la mia soluzione.

Le tre campane cominciano a suonare insieme, e hanno periodi diversi (come nei bei tempi di Don Camillo i sagrestani non amano che il suono delle loro campane si sovrapponga, e hanno studiato questo magnifico trucco per non dover spostare in avanti gli orologi e allo *stesso tempo non escludere un solo cittadino dalla sveglia mattutina). Gli intervalli di tempo per cui suonano possono essere descritti in questo modo:*

$T_1 = 25\ n$

$T_2 = 29\ m = 25\ n + 18$

$T_3 = 33\ k = 25\ n + 21$

Dove n, m e k sono numeri interi. Si vede subito che m e n devono essere divisibili per 3, per cui indicando m = 3 y, con un piccolo trucco di sottrazione tra equazioni, si ottiene:

$33\ k - 3\ y\ 29 = 3$

da cui:

$11\ k - 29\ y = 1$

A questo punto non ci resta che giocare un po` con le proprietà dei numeri. La prima campana suona per meno di mezz`ora, cioè meno di 1800 secondi. Quindi n deve essere un numero più piccolo di 72, divisibile per 3, da 69 in giù, insomma. Per contro, m dovrebbe essere più o meno dello stesso ordine, più piccolo di 69 (da cui y da 22 in giù).

Il trucco consiste nel notare che i multipli di 11 hanno come ultima cifra la stessa ultima cifra del moltiplicando (provare per credere) e per i multipli di 29 vale lo stesso trucco con il complemento a 10 del moltiplicando. Sono tante parole per dire che si procede per tentativi, ma se lo si vede è anche divertente: per far venire 1 dobbiamo moltiplicare 11 per un numero opportuno.

Fattore di 29 (y)		Fattore di 11 (k)		Risultato a secondo membro
22	638	59	649	11
21	609	60	660	51
20	580	61	671	91
19	551	52	572	21
18	522	53	583	61
17	493	54	594	101
16	464	45	495	31
15	435	46	506	71
14	406	37	407	1

Da cui y = 14, m = 42, k = 37 e n =(29 m   18)/25 = 48. In pratica la prima campana ha suonato 48 volte (ben 20 minuti...), la seconda 42 volte e la terza 37 volte.

Complimenti ai campanari e auguri ai parrocchiani!

Mi e` piaciuto, soprattutto per la "regola del 29"... Ignoreremo un *piccolo* errore nell`ultima frase.

La seconda invece arriva da Luca (sempre fermo all`aeroporto? Comincio a pensare che rispetto a certe linee aeree sia piu` rapida la bicicletta...) che ha preso un`altra strada:

Questo ricorda sinistramente il problema dei fabbri che io ho risolto tirando in ballo di tutto ed invece si faceva in 3 passaggi con le frazioni continue. Però a me non stanno molto simpatiche le frazioni normali, figuriamoci quelle continue, per cui persisto nei miei metodi ad hoc (o se preferite "a muzzo").

[...mi piace, "a muzzo"! Posso usarlo o ci sono dei copyright?]

Ho iniziato a scrivere in forma di sistema le equazioni del problema indicando con A, B e C il numero dei rintocchi delle 3 campane:

$$\begin{cases} A \cdot 25 < 1800 \\ B \cdot 29 = A \cdot 25 + 18 \\ C \cdot 33 = A \cdot 25 + 21 \end{cases}$$

con un po` di maquillage:

$$\begin{cases} A < 72 \\ B = \frac{25}{29} \cdot A + \frac{18}{29} \\ C = \frac{25}{33} \cdot A + \frac{21}{33} \end{cases}$$

Considerando la seconda espressione considerando che le tre variabili A, B e C devono appartenere ai numeri naturali, affinché B sia naturale deve valere la seguente relazione:

$$\frac{25}{29} \cdot A = N + \frac{11}{29}$$

dove N è un numero naturale.

A questo punto ho considerato i valori di A partendo da 1 sperando di individuare una relazione tra il valore di A e la parte intera e frazionaria di 25/29 di A:

A=1 ® $^{25}/_{29}\cdot A=0+{}^{25}/_{29}$	*A=8* ® $^{25}/_{29}\cdot A=6+{}^{26}/_{29}$	*A=15* ® $^{25}/_{29}\cdot A=12+{}^{27}/_{29}$
A=2 ® $^{25}/_{29}\cdot A=1+{}^{21}/_{29}$	…	…
A=3 ® $^{25}/_{29}\cdot A=2+{}^{19}/_{29}$	…	…
…	…	…
A=7 ® $^{25}/_{29}\cdot A=6+{}^{1}/_{29}$	*A=14* ® $^{25}/_{29}\cdot A=12+{}^{2}/_{29}$	*A=21* ® $^{25}/_{29}\cdot A=18+{}^{3}/_{29}$

La relazione tra A e le parti intera e frazionaria non è proprio immediata ma con un po` di tempo la ho trovata. Sia i il risultato della divisione intera (A-1)/7 e sia m il risultato di (A-1) modulo 7, risulta[1]*:*

$$\frac{25}{29} A = 6 \cdot i + m + \frac{25 + i - 4 \cdot m}{29}$$

Tutto ciò era per trovare quali valori di A ci danno una parte frazionaria pari a 11/29. Dalla precedente relazione risulta:

$$25 + i - 4 \cdot m = 11$$

$$m = \frac{14 + i}{4}$$

Anche m ed i devono essere numeri interi, quindi la prima coppia di valori utili sono i = 2 e m = 4. Dalla definizione di i ed m risulta che A = 7·i + m + 1, quindi i precedenti valori corrispondono a considerare A = 19 e B = 17.Purtroppo questo valore di A non soddisfa la terza equazione del sistema iniziale poiché genera un valore di C frazionario.

La successiva coppia di valori utili per i ed m è (6,5), che genera valori interi per tutte e tre le variabili A, B e C; ovvero A = 48, B = 42 e C = 37.

[...Qui probabilmente hanno annunciato l`aereo, quindi Luca non lo ha scritto ma e` implicito: se volete sapere quanti "tocchi" ha dato ogni campana, **aggiungete 1 ai valori suddetti**, in quanto dovete tener conto del *primo colpo* di ognuna, quello contemporaneo. Alice, era questo il "piccolo" errore...]

[1] Volendo fare una prova, per A = 21 risulta i = 2, m = 6 e quindi 25/29·A=18+3/29 come calcolato precedentemente.

Una veloce verifica conferma che questa terzina è anche l`unica valida in quanto la successiva coppia di valori validi per i ed m genera un valore di A maggiore di 72.

Quindi i cittadini hanno fermato i rintocchi delle campane delle tre chiese rispettivamente dopo 1200 secondi (ovvero dopo 20 minuti o alle 6:20am) nel primo paese, 1218 secondi nel secondo e 1221 secondi nel terzo.

Correttamente, Luca sentiva odore di frazioni continue (o meglio, di equazioni diofantine). Riconosco pero` che con queste non e` molto semplice... Inoltre, anche qui ad un certo punto bisogna andare "a muzzo".

*Indichiamo il numero di secondi per cui ha suonato la prima campana con **25t**; quindi, avra` dato **t+1** rintocchi (dobbiamo tener conto anche dell`ultimo!); la seconda campana sbattacchia per un tempo (e per un numero di rintocchi) pari a* $1+\frac{(25t+18)}{29}=x+1$, *mentre la terza sbattacchia ben altro per un tempo e rintocchi pari a* $1+\frac{(25t+21)}{33}=1+y$. *Mettendo un po` d`ordine, si ricava il sistema:*

$$\begin{cases} 29x-18=25t \\ 33y-21=25t \end{cases}$$

Da cui la risolutrice $33y-29x=3$.

L`equazione associata viene risolta nel modo classico:

$$33y-29y=1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{33}{29}=1+\frac{4}{29}=1+\frac{1}{\frac{29}{4}}=1+\frac{1}{7+\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{7+\frac{1}{3+1}}=[1,7,3,1]$$

*(Vi ricordate vero, che devo avere un numero **pari** di termini?)*

Da cui le ridotte:

$$c_1=1$$

$$c_2=1+\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$$

$$c_3=1+\frac{1}{7+\frac{1}{3}}=1+\frac{3}{22}=\frac{25}{22}$$

$$c_4=\cdots=\frac{33}{29}$$

Le soluzioni particolari risultano dalla $33*(3*22)-29*(3*25)=3$ *ossia **(66,75)** risolve la nostra equazione.*

La soluzione generale allora diventa:

$$\begin{cases} y=3*22+29*k \\ x=3*25+33*k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=66+29k \\ x=75+33k \end{cases}$$

e, tabellando le soluzioni, si ha che $k=-2$ *e` la soluzione minima, come indicato di seguito:*

k	***0***	***-1***	***-2***
y	*66*	*37*	*8*
x	*75*	*42*	*9*

*Dobbiamo pero` ricordare che* $29x - 18 = 25t$*; per **x=9, t** non e` intero, il che e` impossibile: per **x=42** si ottiene **t=48** e risulta **y=37**.*

*Quindi le campane hanno rotto rispettivamente **49, 43** e **38** scatole.*

Si, siamo abbastanza tolleranti... Ma non la mattina presto.

4. Bungee Jumpers

4.1 An Introduction

Per fare un Bungee Jumping come si deve, servono poche cose. Un ponte (più alto e spaventoso è, meglio è); un bell`elastico robusto (che bene deve adattarsi al ponte suddetto) e, last but not least, uno o più tizi abbastanza fuori di cervello da buttarsi nel vuoto. Ah, se i tizi in questione si ricordano di legarsi un capo dell`elastico ai piedi e l`altro capo ad un punto fisso e solido, il Bungee Jumping viene meglio.

Dal punto di vista matematico, il Bungee Jumping ha un parallelo facile e immediato.... la parte del ponte la fa un problema bello difficile (la matematica abbonda di problemi in grado di fare la parte del baratro... senza scomodare problemi storici e spaventosi come il Grand Canyon, qualche problemucolo corrispondente all`Orrido di Chianocco si trova facilmente), e voi, amatissimi lettori di RM, farete la parte di quelli fuori di testa, che si buttano a capofitto nel precipizio.

E l`elastico? Beh, è ovvio... l`elastico è la soluzione del problema. Esposta con rigorosa eleganza, impeccabile formalismo e con dovizia di particolari. Vi accompagnerà nel volo giù per il baratro, non vi toglierà l`ebbrezza del volo impossibile, ma poi si tenderà dolcemente, allungandosi con tenerezza e impedendovi di sfracellarvi al suolo. Così, potrete prendere di petto quei dannati e complicatissimi problemi di matematica, quelli divini e fetentissimi, che ci vuole un quarto d`ora solo per capire l`enunciato... quelli che anche dopo aver capito di cosa parlano, fanno venire il timor panico scatenato dall`impossibilità di immaginarsi anche solo l`inizio della soluzione, seguito immantinente dall`ansia che esista qualcuno al mondo in grado di nuotare in mezzo alle equazioni necessarie. Bene, tutto ciò vi sarà risparmiato, o quantomeno vi sarà risparmiato lo stress di dover aspettare un mese prima di vedere come la storia va a finire. L`elastico sarà già bell`e pronto, e il problema sarà subito seguito dalla dotta disquisizione che mostrerà al colto e all`inclita come sia possibile domare la bestia, scalare la cima, vedere il burrone senza sfracellarsi: in breve, spiattelleremo la soluzione subito dopo, nel medesimo numero di RM. Insomma, come sulla Settimana Enigmistica, la soluzione starà a pagina 46, e come sulla Settimana Enigmistica sarete liberi di leggervi subito le risposte.

Però, gente, la metafora deve essere portata fino in fondo... il baratro deve essere un vero baratro, l`elastico un vero elastico, e voi siete tenuti a buttarvi nel precipizio a testa in giù. Con la ferrea logica che ci contraddistingue, caratterizzeremo questo primo articolo della neonata rubrica con una brevissima panoramica di quello che NON troverete mai su queste pagine. E nel reparto soluzioni scoprirete anche *perché* non li troverete.

Ad esempio, non troverete problemi come questi....

Mattoni

Pare che questo quesito sia più vecchio di Socrate... l`avrete già sentito, ma tanto sta qui solo a fini didascalici. Va posto tutto di un fiato, e si deve esigere risposta immediata e immeditata (nel senso di "non meditata"). Tanto per rendere l`idea, lo scrivo senza spazi né punteggiatura:

"Unmattonepesaunchilopiùmezzomattonequantopesaunmattone?"

Porte

Beh, non dovrei dirlo, è un segreto... ma il fatto è che all`ultima riunione del CdR il GC (Gran Capo, non Giulio Cesare) ci ha regalato un libro su Paul Erdos[2], ed è un libro così bello che fa quasi venir voglia di pagargli una birra, al GC. Beh, poi... mio padre era ligure, e la voglia riesco a farmela passare, se mi ci metto.

In quel libro, si trova una lunga discussione sul gioco delle tre porte e del presentatore TV.

> *Supponiamo che Raffaella Carrà (o Gerry Scotti, o Amadeus, insomma un cerebroleso qualunque che conduca un qualsivoglia gioco televisivo a premi) si faccia beffe di voi di fronte ad una platea di dieci milioni di telespettatori. Siccome siete il suo milionesimo concorrente vi sottopone il suo gioco-special, e vi mostra tre porte chiuse, identiche, invitandovi a sceglierne una. Dimenticavo... dietro ad una delle tre porte c`e il vostro sogno erotico preferito[3] (Catherine Zeta-Jones, Keanu Reeves, il Commissario Rex, l`Empire State Building... fate voi), e se aprite la porta giusta ve lo portate a casa. Dietro le altre due, ci sono il primo e il secondo classificato al Campionato Mondiale della Pernacchia, pronti ad esibirsi nel loro numero più applaudito.*
>
> *Voi ne scegliete una... Facciamo conto che scegliate la numero 1. Il cerebroleso, a questo punto, apre una delle due porte che non avete scelto, mostrandovi un Pernacchiatore (ovviamente, può sempre aprire una porta con un Pernacchiatore dietro... lui sa chi c`e` dietro le porte): per semplicità, supponiamo che apra la 2. A questo punto, vi sussurra crudele la spietata domanda: "Ti tieni la 1, o vuoi cambiare con la 3?".*

Cosa conviene fare? Tenersi la 1, cambiare con la 3, o è esattamente la stessa cosa?

Sacchi

> *Al Luna-Park di Primburgo c`è un tendone con tre nani cinesi. Ognuno di loro ha un sacco pieno di numeri della tombola, solo che (a Primburgo tutto è possibile...) i numeri nel sacco sono infiniti, e sono tutti i numeri primi. Il loro spettacolo è matematicamente assai affascinante... uno spettatore viene sorteggiato tra il pubblico, e gli viene chiesto di dire un numero intero qualunque, grande quanto vuole. I tre nani scommettono cento talleri contro uno che riescono sempre ad estrarre dai sacchi dei numeri che, sommati tra loro, danno esattamente il numero proposto dallo spettatore. Siccome sono artisti, pero`, adorano gli equilibrismi, le cose difficili: infatti, scommettono anche che ognuno di loro dovrà estrarre al più un solo numero dal proprio sacco, e quindi, in buona sintesi, che il numero proposto dallo spettatore non avrà mai più di tre addendi. Sia ben chiaro... i nanetti non estraggono "a caso`, ma scelgono il numero che vogliono estrarre dal sacco.*
>
> *Dimostrare che Ch, Dba e Gol (questi i nomi dei tre cinesini) non possono mai perdere la scommessa.*

Questi, dicevamo, i tipi di problemi che non troverete mai in Bungee Jumpers... e ognuno di essi per ragioni diverse. Quali siano queste ragioni, ve lo diciamo nella sezione soluzioni. Se invece volete rimuginare ancora un po` su questi tre Not-BJ-Problems..... beh, fatelo ora, fatelo in fretta... o quanto meno smettete di leggere e chiudete la rivista. Le soluzioni e le ragioni dell`esilio da BJ stanno proprio per cominciare....

---

[2] Paul Erdos, ungherese, probabilmente il piu` grande matematico del XX secolo. Vabbe`, ci sono anche Godel, Hilbert, e un sacco di altra gente, nel XX secolo... ma lui lo ha percorso quasi tutto, ed era matto come un cavallo. Se ci sono le elezioni, io voto per lui.

[3] Vabbè, nell`esposizione originale, dietro la porta vincente c`e` il solito mucchio di soldi (miliardo di lire, milione di dollari, 10^{12} Lire Turche...). Io preferisco i premi in natura.

4.2 Pagina 46

Perché BJ rifiuta i Mattoni

La cosa meno importante di questo indovinello è la soluzione. Se ve lo pongono a voce, in attesa di una risposta immediata, avete ottime possibilità di fare una figuraccia, sparando risposte avventate come "Un chilo!" "No, un chilo e mezzo...." "Kili uno virgola sei periodico...."[4]. Nella quiete tranquilla di una paciosa lettura solitaria di RM, viceversa, è assai probabile che i "due chili" che costituiscono la risposta esatta raggiungano pacificamente la vostra coscienza, anche senza scomodare la carta e la penna. Ciononostante, è un giochino assai istruttivo... le persone che, senza conoscere il gioco, rispondono rapidamente ed esattamente al quesito sono scandalosamente poche. Non so se dipende dal ritmo scioglilinguesco, da un cattivo rapporto atavico con i seminteri, o dalla formazione semiclassica (Croce e Gentile... in fondo, la colpa è sempre loro) delle italiche genti, ma i risultati sono impressionanti. Provate, se non ci credete.... L`esposizione è così semplice e immediata che può capirla persino un parlamentare, e le sorprese non mancheranno. Però, dopo che vi siete divertiti a sufficienza, fate un po` di sana autoanalisi, e cercate di capire in che modo lo avete risolto *voi*... avete mentalmente impostato l`equazione di primo grado **X=1+½X**? Avete visualizzato una bilancia a due piatti, con un mattone intero da una parte e mezzo mattone e un peso da mezzo chilo sull`altro piatto? Avete istintivamente cancellato due mezzi mattoni, scoprendo così che l`unico mezzo mattone superstite pesa un chilo? Avete "sentito" la risposta esatta senza calcolarla? E` un gioco stupido, ma anche una vera sonda per capire quanto sia tormentato (o sereno, o magari istintivo...) il vostro rapporto con l`algebra elementare.

Comunque, pochi scherzi.... Quesiti come questi sono giochi di società, e su BJ non ne troverete manco l`ombra. E la ragione e` ovvia: queste sono buche nella sabbia, trappolette neanche troppo ben nascoste... i baratri sono tutt`altra cosa.

Perché BJ rifiuta le Porte

Io mi sarei tenuto stretta la Porta Numero Uno. Per tigna, se non altro. Il ragionamento istintivo che mi è venuto fuori la prima volta che ho sentito il quesito è stato più o meno il seguente: "Ogni porta è equiprobabile, con 1/3 di probabilità di vittoria. La mia porta ha 1/3, e 1/3 ha anche la porta numero tre: cosa cambia che abbiano aperto la porta numero due? Una porta "non vincente" è sempre apribile, quindi le probabilità sono le stesse di quelle che c`erano prima che la due venisse aperta; quindi, che vale cambiare? Un terzo per un terzo, mi tengo la mia cara vecchia porta numero uno, fosse anche solo per non mostrarmi troppo volubile di fronte a tutta questa gente".

E, così facendo, ho appena buttato nel cesso il 33, 33% di probabilità di sussurrare paroline dolci all`orecchio di Catherine Zeta-Jones.

Gente, conviene cambiare, e prendere la porta numero 3. Ve lo giuro. E se sono ridotto a giurarvelo, è solo perché "dimostrarlo" e` difficile, e "convincere" ancora di più. Erdos (che non ci credeva manco lui) è stato convinto solo da una simulazione al computer. Quello che ha fatto il programma di simulazione si è convinto solo stilando completamente "l`albero decisionale delle scelte" e io non so manco che roba è. L`unico tentativo che posso fare per convincervi e` quello di evidenziare come l`apertura della porta numero due comunque "elimini" le probabilità che la due sia la porta vincente, e siccome il presentatore sceglie di aprire una porta tra la numero due o la numero tre, questa probabilità si deve necessariamente condensare sulla porta numero tre, rimasta chiusa. Forse è più facile se considerate l`apertura della porta numero due non semplicemente come "l`apertura di una porta perdente" ma come "l`apertura di tutte le porte non scelte tranne una". Come dice una tizia citata sul libro che mi ha regalato il GC, "... fate finta che le porte non siano 3, ma 1.000.000; e che il presentatore televisivo le apra tutte

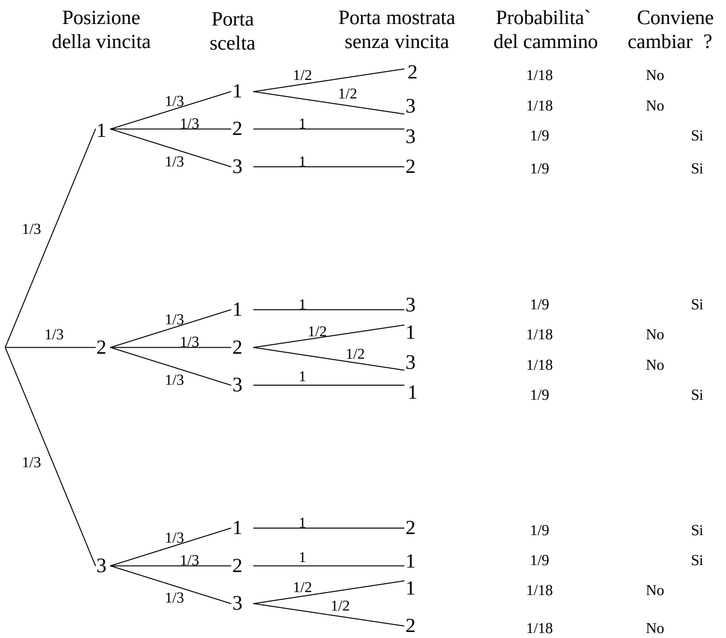
[4] Tutte risposte autentiche, ricevute in diretta dal sottoscritto, e generalmente assai più frequenti della risposta esatta.

tranne la numero 777.777. Vero che la voglia di cambiare la vostra numero 1 con la numero 777.777 sale vertiginosamente?".

E` un bell`esempio, a parer mio.... Su **n** porte, la vostra prescelta numero 1 avrà sempre 1/n probabilità di vittoria, perché nessuna azione viene fatta su di essa dal presentatore. Ma, dopo che le n-2 porte sono aperte, tutta la probabilità residua (1-1/n) è condensata nell`unica altra porta rimasta chiusa. Quindi, nel nostro caso, la porta numero 3 ha 2/3 di probabilità di vittoria, e la vostra scelta iniziale della porta numero 1 (che resta col suo 1/3 di probabilità) è da abbandonare.

Questo è già un problema meno banale... ma BJ lo snobberà ugualmente. Come sarebbe a dire, perché? Non avete visto? Mezza pagina di soluzione, e manco una formula, un artificio, un passaggio algebrico! Gli elastici di BJ saranno zeppi di operatori e sommatorie, non di chiacchiere accademiche come queste.

[Piccola Nota (R.d`A.)] *Porca pupazza, Piotr! Era uno dei problemi per l`estate! Per punizione, ti rifilo l`albero decisionale delle scelte: partendo dalla radice alla sinistra, sono esaminati tutti i casi e per ogni ramo e` calcolata la probabilita` di finirci; la probabilita` totale del cammino e` data dal prodotto delle probabilita` di ogni ramo che lo compone. Nell`ultima colonna, si guarda (in funzione di "Posizione della vincita" e "Porta scelta") se conveniva o no cambiare. Morale della favola, il "cambio" vince in dodici diciottesimi (ossia due terzi) dei casi, mentre il "non cambio" e` una strategia vincente nei sei diciottesimi (conosciuto anche come "un terzo") dei casi. So che Piotr e` un fanatico del "no calcoli" (non usa mai i passaggi matematici dove e` possibile una "grattata" della frizione del ragionamento), quindi sicuramente **non** apprezzera` una soluzione dove c`e` da far di conto...*



Adesso devo trovarne un altro equitosto, per l`estate.

Perché BJ rifiuta i Sacchi

Questo, almeno, lo avete risolto?

Se la risposta è un limpido "SI!", datemi retta: scrivete la soluzione in bella copia, in formato elegante, e mandatene una copia alla redazione di RM. Ma prima, per sicurezza, fotocopiatene un migliaio di altre copie, autenticatele, e inviatele a tutte le riviste e a tutte le facoltà di matematica del mondo... vi farete un sacco di nuovi amici, diventerete famosi e presumibilmente diventerete pure ricchi.

Se nel leggere l`esposizione del problema l`ambientazione vi è sembrata un po` tirata, fittizia, campata per aria, il fatto presumibilmente dipende che se è già difficile romanzare un problema di matematica, romanzare una congettura è anche peggio. Se dimenticate i nanetti, i sacchi e tutte le scemenze di contorno, il problema si riduce a dimostrare che qualsiasi numero intero è esprimibile come somma di al più tre numeri primi. La qual cosa è una fanciullesca sintesi di due più sobrie congetture assai famose: la congettura "debole" di Goldbach (*ogni intero pari è somma di due numeri primi*) e la congettura "forte", sempre di Goldbach (*ogni intero dispari è somma al più di tre numeri primi*).

Il secondo millennio si è concluso senza dimostrazioni delle congetture[5], e pure senza aver trovato alcuna controprova delle stesse.

E su Bungee Jumpers non troverete niente del genere... per ovvia mancanza di elastici.

5. Paraphernalia Mathematica

5.1 Il triangolo di interpolazione

Vi faccio un giochino; siccome siete dei geni, non pensate ad un numero, pensate a un`equazione (di secondo grado e a coefficienti interi, per favore). Adesso sostituite a $\boldsymbol{x}$ i valori ***0***, ***1*** e ***2*** e ditemi i risultati. Allora, avete detto 22, 36 e 44? Bene, l`equazione che avete pensato e` $-3x^2+17x+22$.

Liberi di non crederci ma, se ci fate un po` la mano, ci vuole un attimo per fare i calcoli.

Il metodo e` semplice: guardate la tabellina di fianco.

22		36		44
	14		8	
		-6		

La prima riga mi aspetto la riconosciate: non sono altro che i valori che mi avete detto, ordinati.

La seconda riga e` la ***differenza*** tra i due valori del "piano di sopra", il numero alla destra meno il numero alla sinistra. la terza riga e` calcolata nello stesso modo.

Ora:

1. Prendete l`ultima riga e dividete per due; quello e` ***a***.
2. Prendete il primo termine della seconda riga e sottraete ***a***; quello e` ***b***.
3. Prendete il primo termine della prima riga e quello e` ***c***.

Infatti, considerate come avete calcolato la prima riga e portate avanti il calcolo del triangolo (***a***, ***b***, ***c*** incogniti):

c		a+b+c		4a+2b+c
	a+b		3a+b	
		2a		

Quindi, funziona sempre.

Se il giochino fosse tutto qui, devo ammettere sarebbe piuttosto noioso; il bello e` che funziona per qualsiasi successione ***purche` basata su un polinomio***: supponiamo di avere una successione di valori di un polinomio per i valori interi da ***0*** a ***n***, ma di non sapere nulla sul polinomio che la genera; ad esempio (2,13,42,95,178) e di cercarne il polinomio:

[5] A volte, smarrire un libro fa bene. Da tempo immemorabile avevo smarrito la pietra miliare delle pubblicazioni matematiche (R. Courant & H.Robbins, "Che cos`è la matematica?") e solo recentissimamente sono riuscito a ricomprarmelo. E, surprise-surprise, nella nuova edizione ci sono dei "supplementi" a cura di Ian Stewart, dove si raccontano gli ultimi sviluppi. Ho cosi` scoperto che la congettura "forte" è stata dimostrata (nel 1937!!!) da I. Vinogradov, e che la "debole" ancora resiste ma... beh, pare prossima al crollo. Al momento attuale, si è dimostrato che che ogni intero pari è, al piu`... "esprimibile come somma tra un numero primo ed un numero composto i cui fattori sono al piu` tre primi (Wang Yuan, 1957)". Se questa cosa vi pare strana e complicata, considerate che il primo passo verso la dimostrazione della congettura di Goldbach l`ha fatto un russo semisconosciuto (Schnirelmann, morto a 33 anni come un GC piu` famoso del nostro GC), dimostrando che "ogni intero positivo è esprimibile come somma, al piu`, di trecentomila numeri primi". Trecentomila! Se la trovo, questa si` che una dimostrazione carina, per BJ!

0		**1**		**2**		**3**		**4**
2		**13**		**42**		**95**		*178*
	11		**29**		**53**		*83*	
		18		**24**		*30*		
			6		*6*			
				0				

Il fatto di avere solo quattro righe significative ci garantisce che il polinomio e` di terzo grado (cioe` dobbiamo trovare quattro incognite); quindi, sostituendo i valori nel generico polinomio, si ha:

0		**1**		**2**		**3**
d		a+b+c+d		8a+4b+2c+d		27a+9b+3c+d
	a+b+c		7a+3b+c		19a+5b+c	
		6a+2b		12a+2b		
			6a			

Da cui vi ricavate facilmente i valori del polinomio (a=1, b=6, c=4, d=2).

...Gia`, ma io raramente so che e` un polinomio... Beh, questi sono fatti vostri... Io, quando parlavamo di numeri geometrici, ero *sicuro* che erano dei polinomi di secondo e terzo grado[6]; costruiti i primi, il resto veniva da se:

Per fare un esempio, ricordiamoci dei numeri geometrici e cerchiamo di ricavare la formula per i numeri ettagonali: con il metodo costruttivo indicato della "coroncina" attorno al valore precedente, ho i valori in prima riga della tabellina (non mi sogno neppure di disegnare un ettagono regolare di palline), e sono sicuro che bastano in quanto ho gia` ottenuto una riga che sara` composta di termini costanti (il valore ***5***); posso quindi, applicando le formulette viste prima, calcolare i valori di ***a***, ***b***, ***c***, che risultano 5/2, -3/2 e 0; potro` quindi dire che l`n-esimo numero ettagonale e`:

0		**1**		**2**		**3**
0		1		7		18
	1		6		11	
		5		5		
			0			

$$
{}^{7}X_{N} = \frac{5N^{2} - 3N}{2} = \\
= \frac{N(5N-3)}{2}
$$

Ammetterete che, una bestia di questo genere, non l`avreste mai trovata per elencazione; la potenza di questo metodo e` appunto quella di trovare le "simmetrie nascoste" all`interno di una successione di valori.

Sento qualcuno che sostiene che questo aggeggio "gli ricorda qualcosa". Beh, mai detto di averlo inventato io (se proprio volete saperlo, e` colpa di Isaac)... E neanche mai detto che *debba* convergere. Proviamo a costruire il triangolo con una sequenza infinita, ad esempio quella dei reciproci e a fare le differenze.

[6] Non crederete mica che mi ricordi tutte quelle formulacce?!?!

```
1          1/2          1/3            1/4            1/5           1/6
    -1/2        -1/6         -1/12          -1/20          -1/30
          1/3          1/12           1/30           1/60
                -1/4         -1/20          -1/60
                       1/5            1/30
                             -1/6
```

Evidentemente, la tabella e` infinita, ma voglio sperare che riusciate ad andare avanti da soli. Di passaggio, possiamo notare l`interessante (?) fenomeno per cui le righe sono alternativamente una positiva e una negativa.

Attenti che ora viene la parte difficile.

Prendete il coso di cui alla figura prima e ruotatelo in senso orario di sessanta gradi (insomma, prendetelo per l`uno in alto a sinistra e fatelo diventare il vertice).

```
                                    1
                          -1/2             1/2
                   1/3           -1/6            1/3
            -1/4          1/12          -1/12           1/4
      1/5          -1/20          1/30          -1/20          1/5
-1/6         1/30          -1/60          1/60          -1/30         1/6
```

```
                 1
            1         1
       1         2         1
   1        3         3        1
1       4        6         4       1
1      5       10       10       5      1
```

Resistete allo slogamento da sbadiglio solo per un paio di passaggi. Qui di fianco, moltiplichiamo ogni riga per il reciproco del primo termine della riga e ignoriamo i segni.

Cucu`! Lo riconoscete? Ma, come amava dire George Lucas alla fine di ogni film, "Questa e` un`altra storia"[7].

Svelti, che questo mese e` corto.

Rudy d`Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

[7] Per chiudere il discorso sempre con lo stesso argomento: durante le riunioni noiose, questo lo calcolava *mio padre*. E, una volta tanto, sto parlando sul serio.