Rudi Mathematici

Rivista fondata nell`altro millennio

Numero 024 - 2001-01

1. Editoriale

....Anche quest`anno il Boss mi ha fatto fare una lossodromica, quindi l`ultimo a ricevere il regalo e` stato Paolo: infatti il nostro piu` remoto lettore (Sidney) si e` avvicinato di nuovo a casa! Al momento e` al Polo Sud. *Ciononostante scrive, **lui!***

Alcuni di voi che (come uno dei sottoscritti) hanno dei tools paleolitici per l`ascolto degli MP3, mi hanno chiesto cos`era "la lagna" che vi abbiamo mandato. Semplicemente, sto preparando una cosina che richiedera` dei files MP3 e, per allenarmi, ho provato a passare una canzone natalizia del 1700; volevo vedere, piu` che altro, di che dimensione veniva. La canzone e` "God Rest Ye, Merry Gentlemen", e il cantante non sono io, anche perche` quelli gentili definiscono i miei tentativi nel ramo come "pietosi" (trattasi di Bing Crosby).

Credo la "cosina" finira` nel dimenticatoio... Sono venuti fuori sei files e il piu` magrolino viaggia verso i sedici mega.

A Natale siamo stati tutti piu` buoni. Ora, possiamo tornare a divertirci.

Rudy d`Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Testa o Croce o Testa o Croce?

Bene, giochiamo un po` con le monetine?

Stufo di perdere all`appassionante gioco del  Testa o Croce , mio figlio piu` piccolo (Fred) minacciava di abbandonare l`agone: a questo punto, ho fatto la seguente proposta:

 Anziche` tirare una moneta a testa, io ne tiro una, tu ne tiri due: se fai piu``Teste` di me, hai vinto; altrimenti, ho vinto io .

Il giovine ha l`aria meditativa...Secondo voi, a chi conviene il gioco?

2.2 Natale al Paesello!

E, logicamente, i parroci dei paesi limitrofi e circonvicini hanno allietato dalle 06:00 la popolazione che, essendo andata a nanna all`ora beata, non aveva la minima intenzione di dormire...

Le tre chiese sono dotate di campane (*sese concordes*, come si diceva una volta): anziche` "a", "b" e "c" chiameremo le nostre variabili "din", "don" e "dan"...

Insomma, hanno cominciato a scampanare tutte assieme allegramente alle sei: la prima dava un rintocco ogni 25 secondi, la seconda ogni 29 secondi e la terza ogni 33 secondi. La prima suona meno di mezz`ora, la seconda smette 18 secondi dopo la prima e la terza smette 21 secondi dopo la prima.

Per quanto tempo i pazienti cittadini hanno resistito, prima di passare in ognuno dei paesi a vie di fatto nei confronti dei parroci e silenziare le rispettive campane?

2.3 Un altro taglio della torta

Il problemino di qualche tempo fa sul taglio della torta aveva avuto un successo degno della Weight Watchers; proviamo con questo?

Siamo in un po` di amici (***12***: se non sapete cosa fare, provate con ***N***, intero maggiore di zero...) e dobbiamo tagliare una torta quadrata: una roba con tre strati di cioccolato, due di pistacchio e uno di nutella (una cosina dietetica).

Il guaio e` che la torta ha la glassa sopra e di fianco; questo branco di golosi non solo vuole che le fette abbiano tutte lo stesso volume, ma che *ognuno abbia la stessa quantita` di glassa!* Prima che si ritrovino a trattare con un numero primo facendo fuori il tagliatore, date loro una mano!

3. Soluzioni e Note

3.1 [022]

3.1.1 Un po` meno terra-terra

Ve l`avevo detto che era tosto ...

Diamo un po` di nomi ad un po` di cose, altrimenti non e` divertente. Spero si riesca a capire, nella figura sotto ("Fa schifo". "Lo so. Grazie") che abbiamo infilato il dito in ***S*** e, tirando, la cintura e` diventata tangente in ***P*** e ***Q***. Il raggio terrestre e` ***r*** e l`altezza per cui abbiamo tirato` su e` ***h***.

Quello che sappiamo e` che ***r=6400 Km*** e che abbiamo aggiunto ***d=0,006 Km***. Lavorando in radianti,

$TP = r * J$

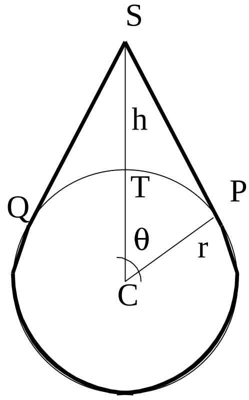
e, considerando che per tirare su devo fare l`aggiunta, ho:

$$SP = TP + \frac{d}{2} = rJ + \frac{d}{2}$$

Inoltre, $CP = r$ e $CS = r + h$

da cui,

$$\tan J = \frac{SP}{CP} = \frac{Jr + \frac{d}{2}}{r}$$



...e questa non la risolverete mai (confesso: ci ho pensato un bel po` anch`io...). Il trucco consiste nel ricordarsi della ***Formula di Taylor***:

$$\tan J \approx J + \frac{J^3}{3}$$

da cui

$$J * r + \frac{d}{2} = J * r + \frac{J^3 r}{3} \Rightarrow J^3 = \frac{3d}{2r}$$

ossia, $J \approx 0.0133$ radianti

ora, con lo stesso trucco per semplificarsi la vita, si ha:

$$\cos J = \frac{r}{r+h} \approx 1 - \frac{J^2}{2} + \frac{J^4}{24}$$

...e, facendo i calcoli, ***h»401 metri***. La prima volta che l`ho calcolato ero praticamente sicuro di aver sbagliato i conti...

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 I Numeri "Catalani"

Piotr e` stato in Spagna, e ci ha portato un ricordino: i numeri Catalani[1]!

Piaciuto, il pezzetto sui labirinti?

Non crediate sia tutto cosi` semplice. Far di conto, da queste parti, puo` richiedere strumenti di calcolo decisamente sofisticati.. Ad esempio, ben **due** biro di colori **diversi**! Vediamo con calma.

OK, carino, ma *quanti sono i labirinti SAT di livello* ***n***?

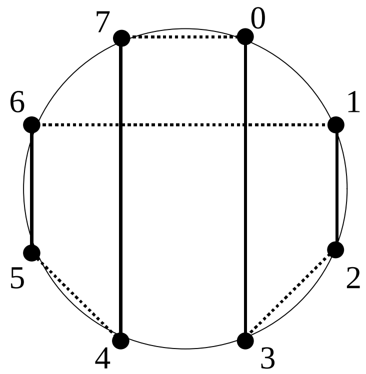
Spiacente deludervi, ma al momento non esiste una formula. In compenso, un po` di gente ci sta lavorando sopra. Vediamo dove sono arrivati...

---

[1] OK, I`m joking...In realta` i numeri non sono catalani, ma sono i numeri di Catalan (Eugene Charles: 1814-1894), allievo di Liouville espulso dall`Ecole Polytechnique (mi sta gia` piu` simpatico).

Se volete sapere da dove nasce questo pezzo, provate a guardare piu` avanti: Luca, qualche numero fa, aveva fatto una bella trattazione teorica che mi ha fatto pensare ci fosse qualcosa sotto. Questo e` quello che e` venuto fuori dopo un po` di ricerche. Grazie, Luca!

Un modo piuttosto rozzo e` procedere per elencazione; applicando le tre regolette che abbiamo visto, si generano tutte le permutazioni degli ***n*** numeri da ***0*** a ***n-1***, si buttano via quelli che non funzionano e si conta quanti ne restano. Il computo, in questo modo, fornisce l`interessante (?) serie ***1, 1, 1, 2, 3, 8, 14, 42, 81, 262,...*** esponenziale quant`altro mai. Decisamente sconsigliabile, anche durante le riunioni. Fortunatamente Koehler (credo insegni a Jena...) dalle parti del 1968, parlando d`altro, ha notato un paio di cosette carine.



Consideriamo un ***n-SAT*** nella sua forma cammino e, dall`altra parte, un ***n-agono*** definito dai suoi vertici su una circonferenza (prendiamo l`ottagono, che e` piu` facile da disegnare- questo significa labirinti nella forma 0...7). Ora, procuriamoci le due famose matite di colore diverso; nel caso particolare, la linea normale e la tratteggiata. Tracciamo sul nostro ottagono un labirinto, ad esempio ***03216547*** *alternando i due colori ad ogni passo* e, giusto per l`estetica, uniamo lo ***0*** al ***7***. Se andiamo a rivederci le regole, ci accorgiamo che e` un labirinto qualsiasi percorso a colori alternati in cui due segmenti dello stesso colore non si incontrano. In pratica, se consideriamo il cammino, ad ogni segmento sul lato destro del percorso corrisponde una linea piena, ad ogni segmento sul lato sinistro corrisponde una linea tratteggiata. La condizione di nidificazione vuole esattamente dire che due righe dello stesso colore non devono mai intersecarsi.

Vabbo`, e allora? E allora, il numero dei cammini di due colori di questo tipo e` (parzialmente) noto; dati ***n=2k*** punti su un cerchio, il numero di questi cammini e` il ***k-esimo numero di Catalan***.

La cosa in realta` l`ha dimostrata Motzkin verificando che il numero delle corde soddisfa la relazione ricorsiva:

$$Cat(k+1) = \sum_{i=0}^{k} Cat(i) * Cat(k-i)$$

Imponendo *Cat(0)=Cat(1)=1*. Per grandi ***k***, possiamo applicare la formula di Stirling e otteniamo (suppergiu`):

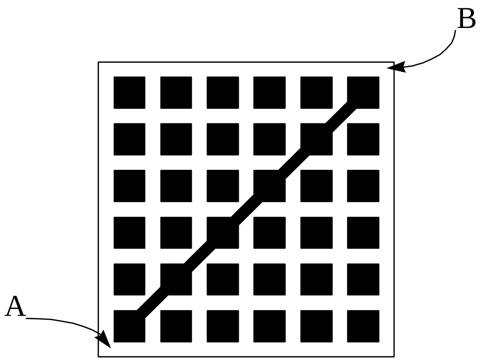
$$Cat(k) \approx \sqrt{p} * 4^k * k^{-\frac{3}{2}}$$

Ora, siccome questo aggeggio schizza come un`esponenziale, anche il numero dei labirinti (almeno quelli con un numero pari di livelli, contando lo zero) deve essere un`esponenziale.

Giusto per darvi un`idea di dove puo` portarvi il labirinto, nel 1988 Warren Smith lavorando ad un algoritmo di ricerca del cammino minimo che fosse subesponenziale, ha calcolato J(N) per N=10, ossia il numero di modi topologicamente distinti in cui una curva di Jordan incrocia una linea sul piano in esattamente ***2N*** punti; questo non e` altro che il nostro vecchio amico, il numero dei labirinti di livello 20. Sono 8152860.

Uela, ma non dovevi parlare dei numeri di Catalan?

Vero, mi sono perso un attimo. Cominciamo da un problemino, quello che ha scatenato tutta la buriana.



Supponiamo che, nella solita Torino, un sindaco particolarmente sadico (non per niente e\` un prof del Poli...) costruisca un muro come indicato in figura. E\` (abbastanza) evidente che non posso piu\` applicare le formule ricavate da Luca... Bene, adesso quanti sono i percorsi?

Consideriamo il triangolo sulla sinistra, e supponiamo di limitare i nostri percorsi a questa zona. La prima idea che viene e\` che, in un qualsiasi punto, il numero dei movimenti verso Nord deve essere sempre maggiore o uguale al numero dei movimenti verso est; e\` logico che, quando arrivo, il numero e\` uguale, ma durante il percorso dovro\` sempre avere questa disuguaglianza valida.

Proviamo a prenderla da un altro lato, che "gli somiglia".

Calcoliamo quante sono le sequenze identificate dalla relazione:

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i \geq 0 \qquad a_i = \pm 1$$

Definiamo una sequenza come "accettabile" se soddisfa la relazione indicata, altrimenti la sequenza e\` "inaccettabile" (a questo punto, l\`equivalenza con il problema dei blocchi dovrebbe essere piuttosto chiara: ***+1=Nord, -1=Est***).

Bene, il numero vale:

$$Cat(n) = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$$

ossia l\`**n-esimo** numero di Catalan ("***C***", qui, indica la combinazione degli oggetti).

Ora, *tutte* le combinazioni (accettabili e inaccettabili) sono:

$$C(2n, n) = \frac{(2n)!}{n! * n!}$$

e quindi, se ***A(n)*** e ***N(n)*** sono rispettivamente il numero delle sequenze accettabili e non accettabili, dobbiamo avere che ***A(n)+N(n)=C(2n,n)***. Ossia, possiamo calcolare ***A(n)*** valutando prima ***N(n)*** e poi sottraendolo da ***C(2n,n)***.

Consideriamo ora una sequenza non accettabile; appunto perche\` inaccettabile, esiste un ***k minimo*** per cui la somma parziale e\` minore di zero (alias quando vado a sbattere contro il muro):

$$\sum_{i=1}^{k} a_i < 0$$

Allora, a questo punto (eventualmente riordinando i termini), possiamo dire che e\`:

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i = 0 \text{ e } a_k = -1$$

In pratica, se ***k*** e\` il valore minimo per cui la serie e\` strettamente minore di zero, deve essere colpa di un solo elemento della serie. Tra l\`altro, notate che, essendo tutti ±***1***, ed essendo la somma uguale a zero, ***k-1*** deve essere ***pari***, e quindi ***k*** e\` ***dispari***.

Consideriamo di nuovo la nostra serie sino a ***2n*** inaccettabile: *cambiamo segno ai primi **k** termini, e manteniamo invariati gli altri*: ossia, piu\` formalmente, definiamo una nuova serie per cui:

$$\sum_{i=1}^{2n} a'_i = \sum_{i=1}^{k} -a_i + \sum_{i=k+1}^{2n} a_i$$

Formalmente e\` complicata, ma spero la spiegazione precedente chiarisca il tutto.

Ora arriva il colpo gobbo.

Tanto per cominciare, la serie e\` *accettabile*, visto che abbiamo cambiato il segno ai "colpevoli". Inoltre, visto che abbiamo cambiato segno agli "strettamente necessari", vuol dire che e\` accettabile per un pelo, cioe\` il valore deve essere ***1***. Da cui, la serie e\` composta da ***n+1*** elementi che valgono ***+1*** e da ***n-1*** elementi che valgono -1.

Notate che la cosa funziona anche al contrario, nel senso che potete rendere inaccettabile qualsiasi serie accettabile.

Quindi *il numero di sequenze inaccettabili e\` uguale al numero delle sequenze di **n+1** valori* **+1** *e di **n-1** valori* -1.

Il numero di queste sequenze inaccettabili e\`: $C(2n, n-1) = \frac{2n!}{(n+1)!*(n-1)!}$

Sottraendo questo valore dal numero totale delle sequenze si ottengono le sequenze accettabili:

$$\begin{aligned}
A(n) &= \frac{(2n)!}{n!*n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!*(n-1)!} = \\
&= \frac{(2n)!}{n!*(n-1)!} * \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\
&= \frac{(2n)!}{n!*(n-1)!} * \frac{1}{n*(n+1)} = \\
&= \frac{1}{n+1} * \frac{(2n)!}{n!*n!} = \\
&= \frac{1}{n+1} C(2n, n)
\end{aligned}$$

Posto che interessi, i numeri di Catalan soddisfano anche una divertente espressione ricorsiva, che e\` poi il metodo usato per calcolarli (basta una biro di colore qualsiasi diverso da zero). Prendiamo la nostra espressione delle sequenze accettabili , indicando con ***C*** il numero di Catalan e esplicitando il combinatorio (odio usare un simbolo per l\`altro):

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{n+1}\binom{2*n}{n} = \\
&= \frac{1}{n+1} * \frac{(2*n)!}{n!*n!}
\end{aligned}$$

Per il numero precedente, si ha con lo stesso metodo:

$$C_{n-1} = \frac{1}{n} * \frac{(2n-2)!}{(n-1)!*(n-1)!}$$

Ossia, dividendo l`una per l`altra,

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$$

Da cui:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}$$

con la condizione iniziale $\boldsymbol{C_1=1}$.

Questi cosi hanno anche un`interessante applicazione pratica "seria": presentiamola come un problemino.

Ci sono ***2n*** persone in coda per prendere un caffe` in una macchinetta che accetta monete da 1 euro o da 50 cent. Il caffe` costa 50 cent. Per ogni moneta inserita la macchina fornisce uno e un solo caffe` (eventualmente, da` il resto). Alla partenza, la macchina non ha monete dentro (quindi non puo` dare il resto). Delle ***2n*** persone, ***n*** hanno solo una moneta da 1 euro e ***n*** hanno solo una moneta da 50 cent. In quanti modi possono sistemarsi le persone in modo tale che la macchina fornisca il resto a tutti quelli con un euro?

Se consideriamo i caffeinomani come indistinguibili, possiamo considerare la presenza di 50 cent come un ***+1*** e la presenza di 1 euro nella coda come un -1. Allora, il numero delle sequenze accettabili e`:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2*n}{n}$$

Se invece le persone sono distinguibili, si ha:

$$n!*n!*\left(\frac{1}{n+1}\binom{2*n}{n}\right) = \frac{(2n)!}{n+1}$$

Proviamo a parlare d`altro, che magari spariscono?

Supponiamo di avere quattro numeri (meglio: quattro matrici quadrate che non commutino), e di doverle moltiplicare tra loro: ***A*B*C*D***. Siccome non commutano, dobbiamo tenerle in quest`ordine, ma nulla mi vieta di fare i calcoli in ordine diverso: indicando l`ordine dei calcoli con delle parentesi, posso decidere di fare ad esempio ***(A*B*(C*D)))*** oppure ***((A*B)*(C*D))*** oppure in altri modi... Bene, quanti sono questi modi?

Visto che stiamo parlando solo di quattro "cosi", proviamo a scriverli tutti (lasciando perdere il segno di moltiplicazione). Si ha:

(((AB)C)D)

((A(BC))D)

((AB)(CD))

(A((BC)D))

(A(B(CD)))

...Ora, pero`, notiamo un paio di cose. Tanto per cominciare, l`ultima parentesi e` inutile e quindi, se non ci preoccupiamo del bilanciamento, potremmo cancellarla ("Chiudi la parentesi che fa corrente" era una delle frasi preferite del mio prof di mate delle medie). Inoltre, dalla "forma" delle parentesi precedenti possiamo determinare che cosa fare con la ***D***, quindi potremmo eliminarla. Inoltre, potremmo fare a meno anche delle eventuali parentesi chiuse *precedenti*...insomma, con buona pace del fatto che la notazione e` penosa, le nostre espressioni diventano:

(((ABC

((A(BC

((AB(C

(A((BC

(A(B(C

"...E alura?"

Beh, se sostituiamo ***0*** alle lettere e ***1*** alle parentesi, otteniamo:

111000

110100

110010

101100

101010

Tutto questo lavorando con *quattro* lettere. Spero vi accorgerete che il numero di ***1*** deve essere, in ogni momento della sequenza, *maggiore o uguale* al numero di ***0***. Proprio cosi`: la parentesizzazione di $n+1$ lettere si puo` fare in C_n modi: nel nostro caso, i cinque modi indicati.

Si, e` contorto, ma stavamo parlando di labirinti, quindi...

Rudy d`Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms