Rudi Mathematici

Numero 021 - 2000-10

1. Editoriale

Supponiamo riceviate udienza da x, dove x puo` assumere i valori (sceglietene uno, quello che preferite):

1. Il Papa
2. Stephen Hawkins
3. Herbert von Karajan
4. Rudy d Alembert

e, chiaccherando del piu` e del meno, vi capiti di citare l equivalente y:

1. La Lettera ai Tessalonicesi (vi consiglio la versione di Re Giacomo, ma anche la CEI non e` male)
2. Il quarto volume del Dau (che sarebbe Fisica quantistica Teoria Relativistica di Landau e Lifchitz)
3. Il Baynes (Storia delgli strumenti musicali: c e` una traduzione BUR che costa pochissimo, forse la trovate in bancarella)
4. Il Boyer (Storia della Matematica: anche questo costa poco, e` negli Oscar Mondadori)

...e supponete che x vi dica: Eh? Non lo conosco... Sembra interessante... .

Quella che fate e` la faccia di Piotr quando gli ho detto che non conoscevo il Boyer.

Volendo porre rimedio a questa lacuna, l ho letto durante le ferie (anche se ci vorrebbe un anno sabbatico): ragazzi, e` una miniera...

Moi!

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Due fabbri

Premessa: se usate Excel, non vi pubblico la soluzione. E mi incavolo.

Al paesello (non quello solito, l altro), di recente si e` svolta una fiera in cui veniva data dimostrazione di antiche arti e mestieri scomparsi[1]; ad un paio di inetti, era stato dato l incarico di mostrare come *non* si fa a fare i fabbri; dopo un certo periodo di smoccolamenti e pestate di dita, sono riusciti a mantenere il ritmo per mezz ora.

Il primo batteva 12 colpi in 7 minuti; il secondo 17 colpi in 9 minuti, e hanno cominciato assieme.

Nella mezz ora senza pestaggi di dita, quali sono i colpi (uno del primo e l altro del secondo) che si sono avvicinati di piu` alla coincidenza?

2.2 Il triello

Questa e` particolarmente sanguinaria. Il nome deriva dal fatto che si tratta di un duello a tre.

I soliti ***A***, ***B*** e ***C*** si sfidano a duello a tre con queste regole:

1. Viene deciso l ordine di tiro, primo secondo e terzo
2. Ci si dispone ai lati di un triangolo equilatero
3. Il primo spara (una volta) a scelta verso il secondo o il terzo; poi (se e` ancora vivo) il secondo spara (una volta) verso quello che preferisce degli altri due e avanti cosi` sin quando non ne resta uno solo.

Il guaio e` che ***A*** e` un tiratore infallibile, ***B*** e` preciso nell 80% dei casi (nel senso che fa padella 20 volte su cento, negli altri ci coglie) e ***C*** e` preciso nel 50% dei casi.

La domanda e`: se tutti adottano (per se medesimi) la miglior strategia, chi ha le maggiori probabilita` di sopravvivere?

3. Soluzioni e Note

3.1 [020]

3.1.1 Un gioco da ragazzi

Luca! Capisco che, dato il primo passaggio, il resto segue per induzione, pero`...

Il nostro eroe sostiene: *Il trucco per il 1° è riuscire a dire 89. Infatti, il 2° è obbligato a dire un numero tra 90 e 99, lasciando al 1° giocatore la vittoria.*

Giusto, correttissimo. Portiamo un po` avanti il ragionamento, pero`...

Per dire ***100*** l ultima volta, al giro precedente Alberto deve aver detto ***89***; in questo modo, impedisce a Fred di dire ***100*** e si garantisce un numero che dista al piu` ***10*** da ***100*** (e quindi puo` dirlo).

Per essere sicuro di dire ***89***, al giro precedente Alberto deve aver detto ***78***: in questo modo, potra` dire 89 al giro dopo.

[1] La mia esibizione consisteva nella moltiplicazione alla veneziana e nella risoluzione del Cubo di Rubik (*RdA*)

E avanti cosi`: Alberto deve poter dire: ***89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1***. Con questa successione, si assicura la vittoria.

...E questo li terrebbe buoni? Certo, Federico non l ha ancora capito!

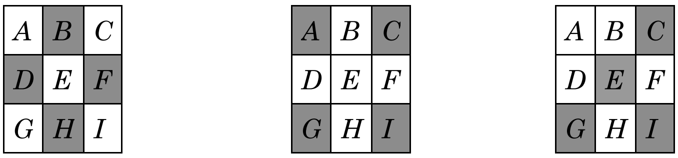
3.1.2 Attenti alle parole

Ho la certezza che Luca lo ha risolto *senza usare Excel*. Non chiedetemi perche` (legge sulla privacy).

Affinché due numeri abbiano sia somma che prodotto pari devono essere entrambi pari. Consideriamo le varie possibilità nella seguente tabella:

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
pari	*pari*	*pari*	*pari*
pari	*dispari*	*dispari*	*pari*
dispari	*pari*	*dispari*	*pari*
dispari	*dispari*	*pari*	*dispari*

Quindi dovendo disporre i numeri da 1 a 9, ci sono 4 numeri pari che non possono essere vicini. Considero le possibili disposizioni dei numeri pari e dispari all interno del quadrato 3x3, segnando con la casella scura la posizione di un numero pari ed indicando le caselle con le lettere da A ad I:



In realtà di disposizioni gamma ce ne sono 4 a seconda che la casella d angolo contenente il numero dispari sia A, C, G o I. Quindi in totale ci sono 6 differenti tipi di distribuzione dei numeri.

Resta ora da verificare per ogni singola disposizione di numeri pari e dispari quanti modi ci sono per scrivere i numeri da 1 a 9. Ricordando un po di statistica dovrebbero essere pari al numero delle permutazione di 4 elementi (i numeri pari) per il numero delle permutazioni di 5 elementi (i numeri dispari), ovvero:

$$N_{alpha} = N_{beta} = N_{gamma} = 4! \cdot 5! = 2880$$

ricordando che ci sono 4 differenti disposizioni gamma, il numero totale di modi per scrivere i numeri è pari a sei volte quello della singola distribuzione ovvero pari a 17280.

Voglio sperare nessuno si sia messo a contarli...

3.1.3 Cosi` non fanno male

Le uniche risposte che ho ricevuto erano richieste di lumi in merito alla prima affermazione, quella relativa alla statistica sulle sigarette.

Quello che intendevo dire e` che delle statistiche utilizzate per dimostrare che il fumo (di sigaretta) fa male, non ce n e` una che passi il test del χ^2 con l affidabilita` standard al 5%. Quindi, matematicamente parlando, *puo`* far male, ma non e` sicuro.

Tornando al problema: la strategia per il primo giocatore che garantisce la vittoria e`:

1. Mettere una sigaretta al centro del tavolo
2. Giocare simmetricamente rispetto al secondo giocatore

In questo modo, ci sara` sempre una posizione libera per ogni giocata del secondo giocatore al giro successivo del primo giocatore, e quindi il primo che non avra` una posizione libera sara` il secondo giocatore.

Comunque, ho smesso con le sigarette: sono cinque anni[2] che fumo la pipa. Fa meno male, tranne quando ti cade su un dito.

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 I numeri geometrici

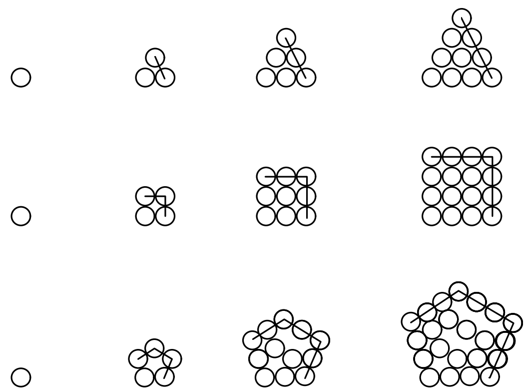
...E` con gioia e commozione che vi comunico il ritrovamento della mia vecchia dama cinese.

E a noi? Non e` neanche una meraviglia di gioco...

Gia`, ma ha dentro un mucchio di *biglie*!

Sin dai tempi di Pitagora, i matti hanno esplorato le interessanti proprieta` di un certo numero di sassolini messi in forme geometriche, cercando di ricavarne leggi universali in grado di rispondere ai quesiti sulla vita, l'universo e tutto quanto. Piu` modestamente, vorremmo semplicemente "farci un giro"...

I ***numeri triangolari***, ***quadrati*** e compagnia cantando si definiscono come da figura; no, gli esagonali non ve li faccio; voglio sperare ci riusciate a capire come si generano per conto vostro. Le righe sul disegno hanno giustappunto lo scopo di attirare la vostra attenzione su come, dato un certo numero geometrico, costruire il successivo.



Nel caso (come me) troviate piu` divertente usare le biglie, vi consiglio dal punto di vista meramente pratico di trovarvi un tavolo con una tovaglia avente un notevole coefficiente di attrito e, soprattutto, dei *bordi rialzati*, se non volete inseguire i numeri per tutta la casa.

E` abbastanza facile, giocherellandoci opportunamente, ottenere una serie di interessanti regolette:

Tipo	**1^**	**2^**	**3^**	**4^**	**(N+1)^**
Triangolare	1	3	6	10	$T_{N+1}=T_N+1N+1$
Quadrato	1	4	9	16	$Q_{N+1}=Q_N+2N+1$
Pentagonale	1	5	12	22	$P_{N+1}=P_N+3N+1$
Esagonale	1	6	15	31	$E_{N+1}=E_N+4N+1$

[2] Come diceva Mark Twain: sin quando li conti, non hai smesso sul serio

X-gomale	1	X	3(X-1)	6(X-2)+4	$X_{N+1}=X_N+(X-2)N+1$

Voi fate come vi pare, ma qualcuno (semplifica alcuni calcoli) preferisce considerare il numero geometrico del primo ordine (1) come di ordine zero. Per me, l'ordine zero e\` sempre a valore zero.

Voglio comunque sperare che, a questo punto, abbiate capito l'antifona e non sia un problema per voi ricavare le opportune formulette per gli altri casi.

Certo, sarebbe meglio un metodo non ricorsivo...

Siccome sono un buono, ve lo passo; siccome pero\` ***non*** sono cosi\` buono come sembro, non ve li passo tutti: gli altri, se vi interessa, calcolateveli!

Tipo	**Formula**
Triangolare	$T_N = \frac{N(N+1)}{2}$
Quadrato	$Q_N = N^2$
Pentagonale	$P_N = \frac{N(3N-1)}{2}$
Esagonale	$E_N = N(2N-1)$

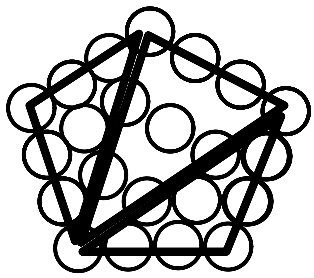
Comunque, avendo a disposizione abbastanza biglie, e\` immediato vedere alcune cose piuttosto divertenti, ad esempio:

Un numero quadrato di ordine N ***e\` dato dalla somma del triangolare di ordine*** N ***con il triangolare precedente***

O anche, se vogliamo complicarci la vita:

Un numero pentagonale di ordine N ***e\` dato dal triplo del triangolare di ordine*** N ***meno il doppio dell'ordine***.

Quest'ultima non e\` propriamente "immediata", ma se considerate i gruppi indicati nella figura qui di fianco probabilmente diventa piu\` chiara: i tre gruppi indicati sono dei triangolari di ordine 4, solo che i due "lati" in comune li contiamo due volte.



Un mucchio di numeri "X-gonali" si possono ridurre a somma di triangolari: mi aspetto che siate in grado di ricavare da soli l'espressione in funzione dei triangolari per gli esagonali (ricordatevi di sottrarre i lati contati due volte).

Per il prossimo passaggio, credo possiate mettere via le biglie, in quanto e\` quasi sicuro che vi cadrebbero per buona parte per terra.

Lo stesso giochino e\` estendibile anche ai solidi, almeno a quelli piu\` semplici; l'unico problema consiste nel mettersi d'accordo su come impilare le biglie (o, in alcuni casi, i cubetti: sono decisamente piu\` trattabili).

I numeri ***tetraedrici*** sono di trattazione relativamente semplice: il primo e\` 1 (tanto per cambiare), per ottenere il secondo devo aggiungere 3 biglie "sotto" e avanti cosi\`. Vi risparmio il disegno, ma credo riusciate a visualizzarlo. La formula, comunque, risulta una cosa del genere[3]:

[3] Voglio sperare vi ricordiate come si scompone un polinomio di secondo grado...

$$X = \frac{N^3 + 3N^2 + 2N}{6} =$$
$$= \frac{N*(N^2 + 3N + 2)}{6} =$$
$$= \frac{N*(N+1)*(N+2)}{6}$$

Che trovo abbastanza elegante; tra l'altro, appena calcolata mi e` sorto il dubbio: "Ma questa, siamo sicuri che da` sempre degli interi?". Il problema si e` risolto pensando che, di tre numeri consecutivi, almeno uno e` divisibile per tre e almeno uno e` divisibile per due, quindi il prodotto e` divisibile per sei.

Le cose si semplificano "un po`" se consideriamo i numeri triangolari e l'espressione ricorsiva; infatti, ***Il numero tetraedrico di ordine*** *N* ***e` dato dalla somma del tetraedrico di ordine*** *N-1* ***e del triangolare di ordine*** *N*.

Per quanto riguarda quelli ***cubici***, voglio sperare ci arriviate da soli; in realta`, in questo caso si potrebbe discutere sull'impacchettamento, ma normalmente (per problemi connessi alla definizione matematica di "impilamento": mi rifiuto!) si usano dei cubetti (ho anche quelli: rubate le costruzioni ai pargoletti!).

A questo punto, ormai scafati costruttori di ardite strutture, non dovreste aver problemi con i numeri ***piramidali*** (si considera la base quadrata, altrimenti si cade nei tetraedrici). Infatti, il metodo generale e`: ***il numero piramidale di ordine*** *N* ***e` dato dalla somma del tetraedrico di ordine*** *N-1* ***e del quadrato di ordine*** *N*.

Per quanto riguarda la formula, era piu` bella quella prima, trovo: si arriva ad una cosa del tipo:

$$X = \frac{2N^3 + 3N^2 + N}{6} =$$
$$= \frac{N*(2N^2 + 3N + 1)}{6} =$$
$$= \frac{N*(N+1)*\left(N + \frac{1}{2}\right)}{6}$$

...qui dimostrare che sono sempre interi non e` cosi` semplice, ma si puo` provare...

Bene, direi che possiamo fermarci qui. L'estensione a piu` di tre dimensioni mi pare eccessivo, per il livello della rivista (e poi, non trovo piu` le iperbiglie...)

Liberate il tavolo, che e` ora di pranzo!

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms