Rudi Mathematici

Numero 020 - 2000-09

1. Editoriale

Sono lieto di notare che siete sopravvisuti all Editoriale di Piotr, cosi` come io sono sopravvisuto alle ferie.

Abbiamo anche un po` di risposte e, una volta tanto, non sono tutte di Luca. (come al solito, fa comunque l en-plein... quasi). A quanto pare, le ferie fanno bene ad un mucchio di gente (me incluso... una volta o l altra vi racconto cos e` successo).

Siccome l e-mail comincia a somigliare in velocita` alle Poste Italiane, Luca ha mandato le soluzioni del numero 018 poco prima che uscisse il numero 019; avendo pero` alcuni spunti interessanti, volentieri pubblichiamo, oltre logicamente alle soluzioni del numero di agosto (queste sono arrivate in tempo).

Non ci sono piu` stagioni.

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Un gioco da ragazzi

In realta` sono bambini (si, Alberto e Federico); ottimo per tenerli calmi in macchina.

Alberto dice un numero, tra 1 e 10 (inclusi).

Federico dice un altro numero (sempre tra 1 e 10 inclusi) e lo somma al numero precedente.

...E avanti cosi`: il primo che riesce a dire 100 ha vinto.

Quale deve essere la strategia del primo giocatore per vincere?

2.2 Attenti alle parole...

Ve l ho detto, quindi attenti.

Avete un quadrato 3x3, fatto di caselle.

In quanti modi si possono mettere tutte le cifre da 1 a 9 in modo tale che due cifre in caselle contigue (orizzontalmente o verticalmente: diagonali non importa) non diano ***mai prodotto o somma entrambi pari***? Non vi ho chiesto di farlo, ma di dirmi solo quante sono (altrimenti ci vuole qualche mega...).

2.3 Cosi` non fanno male

...Anche se l affidabilita` dei dati statistici e`, a quanto pare, piuttosto scarsa... Sto parlando delle sigarette.

Avendone a disposizione un buon numero (per intenderci: lo stretto indispensabile per venti minuti di sopravvivenza di Piotr: giusto quelle 2-3000...), possiamo fare un giochino.

Siamo in due, davanti a un tavolo circolare.

Io poso una sigaretta (orizzontale, verticale, come vi pare, purche` resti intera).

Piotr posa una sigaretta

Ogni sigaretta posata sul tavolo non deve toccare nessuna delle altre.

Perde il primo che non puo` posare una sigaretta.

Esiste una strategia che mi permetta di vincere?

3. Soluzioni e Note

3.1 [018]

Come vi dicevo, sono arrivate le soluzioni di Luca;

3.1.1 Di nuovo il prof di mate!

Una sola modifica, Luca: non ho il simbolo dell Euro, quindi lo scrivo per esteso...

Per aiutare il teppistello ho cominciato con il dividere le banconote in maniera uguale: cinque banconote da 5 euro e cinque banconote da 20 euro in ogni capello. La probabilità di estrarre una banconota da 20 euro è:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Poi ho provato a muovere le banconote da un cappello all altro ma sempre lasciando 10 banconote per cappello. Il risultato non cambia:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10-k}{10} = \frac{k+10-k}{20} = \frac{1}{2}$$

dove k è il numero di banconote da 20 euro nel primo cappello e di conseguenza 10-k sono le banconote da 20 euro nel secondo.

A questo punto ho avuto una illuminazione: se in un cappello metto solo una banconota da 20 euro, ho già probabilità = ½ di estrarre una banconota da 20 euro. Il contributo del secondo cappello mi fa solo crescere la probabilità che diventa:

$$P = \frac{1}{2} \cdot + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = 0.7368$$

Quindi hi cercato di esprimere la probabilità di estrarre una banconota da 20 euro rispetto al numero delle banconote in ciascun cappello:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{v+c} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10-v}{20-c-v}$$

dove v sono le banconote da 20 euro nel primo cappello e c quelle da 5. Si nota che per c = 0 il primo termine raggiunge in effetti il valore massimo pari a ½. Analogamente il secondo termine è massimo per c = 10 (ovvero tutte le banconote da 5 euro nel primo cappello).

Ho cercato di fare la derivata in due variabili, ma sinceramente non me la ricordo. Allora mi sono rivolto ad Excel ed ho fatto la tabellina, ovvero il grafico della probabilità per c e v che variano tra 0 e 10 ed ho effettivamente riscontrato che il caso in cui in un capello c è una sola banconota da 20 euro e le altre 19 banconote sono nell altro cappello è il più favorevole per estrarre una banconota da 20 euro.

3.1.2 Problema di traghetti

...Beh, il calcolo di Luca e\` andato avanti suppergiu\` come gli altri, con una *piccola* differenza, che a momenti mi fa cadere dalla sedia: vi cito il punto cruciale:

Considerando la forma dei traghetti, con la prua appuntita e la poppa piatta, ho pensato che l effetto sulla velocità della corrente sia differente a seconde che il traghetto si muova secondo la corrente o controcorrente. In poche parole ho supposto:

$$V_{sc} = V_m + V_c$$
$$V_{cc} = V_m - e \cdot V_c$$

dove V_{sc} è la velocità del traghetto quando segue la corrente, V_{cc} quando va controcorrente ed e un coefficiente che varia tra 0 e 1 (ho pensato che la forma dei traghetti dovrebbe essere più efficiente nel contrastare una corrente contraria al moto).

...Beh, no, questa volta non lo considero un errore da parte mia... Qui trattiamo di matematica, non di idrodinamica dei traghetti e, come diceva un matematico in una barzelletta, Per semplicita\`, consideriamo una mucca perfettamente sferica... . Inoltre (oggi sono genialmente polemico) mi pare di ricordare che i ferry-boat[1] siano uguali dalle due parti e non ci sia distinzione tra poppa e prua...

[1] Se preferite il termine italiano, piropontone

3.1.3 Scacchiera senza pezzi

...Indovinate un po`? Si, Luca.

Io ho considerato un quadrato all interno della scacchiera come l intersezione di una fascia verticale e di una orizzontale della stessa dimensione (misurata in caselle, ovviamente). Quindi ad esempio un quadrato contenente 1 casella è l intersezione di una fascia verticale e di una fascia orizzontale larghe 1 casella ciascuna.

A questo punto il numero di quadrati contenenti 1 casella è dato dalle combinazioni di fasce orizzontali e verticali che posso avere. In particolare 8 fasce orizzontali ed 8 verticali di 1 casella di lato per un totale di 64 quadrati da 1 casella (e questo si sapeva). Passando ai quadrati da 4 caselle, ci sono 7 possibili fasce orizzontali ampie 2 caselle ed altrettante verticali, per un totale di 49 quadrati da 4 caselle. Le possibili fasce ampie 3 caselle sono 6, quindi i quadrati da 9 caselle presenti sulla scacchiera sono 36.

Ormai abbiamo capito il meccanismo, per cui il numero dei possibili quadrati con un numero qualsiasi di caselle presenti su una scacchiera è:

$$N = 8\cdot 8 + 7\cdot 7 + 6\cdot 6 + 5\cdot 5 + 4\cdot 4 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1 = 204$$

Perfetto, logico, correttissimo. Nel caso non riusciate a visualizzare le fasce di Luca, provate a considerare (ad esempio) che un quadrato ***7x7*** potete metterlo in basso a sinistra (che copra da ***A1*** a ***G7***, per intenderci), in basso a destra (da ***B2*** a ***H7***) in alto a sinistra o in basso a destra; io, quando l ho risolto, ho visualizzato il quadrato (1x1, con 4 vertici) dove poteva starci l angolo in alto. da qui, la generalizzazione e` (quasi...) immediata.

3.2 [019]

Anche per questo numero, e` arrivata un po` di roba da Luca, ma prima parliamo d altro.

3.2.1 Boh?

No, non vi do la soluzione. Voglio solo chiarire che, per convenzione (ed induzione),

$$N^{N^{\cdot^{\cdot^{N}}}} = N^{\left(N^{\left(\cdot^{\cdot^{N}}\right)}\right)}$$

Ossia (ad esempio, con ***N=3*** e 4 passaggi anziche` infiniti),

$3^{3^{3^{3}}} = 3^{3^{27}} = 3^{7625597484987} = \ldots$ (l ultimo passaggio fatelo voi per vedere se avete capito)

Insomma, attenti. Sono potenze di potenze, ma prima si fa la piu` alta . Altrimenti, vengono fuori delle cose un po` strambe.

3.2.2 Le mele di Coleridge

Due soluzioni! In compenso, nessuno ha trovato il verso cui mi riferivo. Beh, non era facile (oppure siete matti almeno quanto me). La frase era (vado a memoria)

The horned Moon, with one bright star
Within the nether tip

Situazione chiaramente impossibile dal punto di vista astronomico.

Allora, prima di vedere cos ha combinato Luca, vediamo Franco (il padrone del libro con il secondo capitolo, ricordate?)

Secondo i miei ragionamenti le mele erano 15.

La formula mi risulta essere con M=mele da rubare; K=mele da avere alla fine; N=numero guardiani:

*M = (2^N) * (K + 1) - 1*

Ciao e buone vacanze

Franco, toglimi una curiosita`: le e-mail, ve le fanno pagare un tanto al byte, che risparmi cosi`? O avevi gia` secchiello, paletta & famiglia in macchina?

Luca e` stato un po` piu` prolisso; in particolare, trovo molto interessante la prima considerazione che fa, riguardo al partire dalla fine:

Ci ho messo un po a trovare la soluzione giusta. Ci sono riuscito quando invece di partire dall inizio sono partito dalla fine. Appunto, alla fine Coleridge ha una sola mela. Supponendo che Coleridge non dia un numero di mele frazionario al guardiano, prima dell ultimo guardiano doveva avere 3 mele (ovvero 1 · 2 + 1). Analogamente prima del secondo guardiano doveva avere 7 mele ed all inizio aveva rubato 15 mele.

Per generalizzare, considero la formula che mi ha portato a determinare che Coleridge aveva rubato 15 mele:

$$M = \left(2\cdot\left(2\cdot\left(2\cdot 1+1\right)+1\right)+1\right) = 8\cdot 1+4+2+1 = 15$$

Indi, il Nostro prosegue:

Generalizzando, se dopo N guardiani voglio avere K mele, dovrò rubarne un numero M pari a:

$$M = \left(2\cdot\ldots\left(2\cdot\left(2\cdot 1+1\right)+1\right)\ldots+1\right) = 2^N\cdot K+2^{N-1}+\ldots+2+1 = 2^N\cdot K+\sum_{i=0}^{N-1}2^i$$

La formula dovrebbe funzionare anche per il nostro caso N=3 e K=1.

Beh, non solo due soluzioni, ma anche due formule.... Sento puzza di bruciato. Voi cosa ne dite?

3.2.3 Qualcuno ha un cappello?

Luca sviluppa alcune interessanti ipotesi:

Credo che sia la prima volta che risolvo un problema di questo tipo la cosa mi preoccupa! Prima di procedere però mi chiedo perché i tre logici per scoprire il colore dei propri cappelli non:

- *alzino lo sguardo e lo vedano direttamente;*
- *si mettano di fronte ad uno specchio*
- *chiedano agli altri due logici di che colore e il proprio cappello*
- *si dicano a vicenda il tuo cappello è*

Lo so che in questi modi non ci sarebbe divertimento.

Non sono d accordo; se i logici cominciassero a comportarsi cosi`, ***loro*** si divertirebbero moltissimo.

Passiamo alla soluzione vera e propria. Per far meno confusione suppongo che i tre logici si chiamino Asdrubale, Baldassarre e Coriolano, per gli amici A, B e C.

Sappiamo (e lo sanno anche A, B e C) che non tutti e tre i cappelli sono neri. Per cui possiamo avere al massimo due cappelli neri. Se uno dei logici vede che gli altri due hanno un cappello nero in testa, allora lui sa di avere un cappello beige in testa. Se invece vede che gli altri due hanno un cappello nero ed uno beige o due cappelli beige, lui non sa di che colore è il suo cappello (non c è limite al numero di cappelli beige).

Vediamo i tre casi possibili:

- *A e B hanno in testa un cappello nero, C ha un cappello beige: C sa subito che il suo cappello è beige perché vede due cappelli neri. Lo dichiara e gli altri due capiscono che C sa che il suo cappello è nero perché i loro due sono beige.*
- *A ha un cappello nero, B e C hanno in testa un cappello beige: all inizio tutti e tre dicono di non sapere di che colore è il proprio cappello. A questo punto poiché B vede che A ha un cappello nero, se anche lui avesse avuto un cappello nero in testa allora C avrebbe saputo di avere un cappello beige (come nel caso precedente). In modo analogo anche B capisce di avere un cappello beige in testa. A questo punto A dovrebbe aver capito come hanno fatto B e C a scoprire il colore del proprio cappello a capisce di avere un cappello nero in testa.*
- *Tutti e tre A, B e C hanno un cappello beige in testa: come prima tutti e tre dicono di non sapere di che colore è il proprio cappello. Poiché, contrariamente a prima, a nessuno dei tre l informazione che uno degli altri logici non sa di che colore è il proprio cappello non è di nessun aiuto, i tre logici capiscono che tutti e tre i cappelli sono beige.*

Ottimo! Il tutto non e` proprio semplicissimo; qualcuno, per risolverlo, si e` anche inventato una notazione: viene un aggeggio di questo genere (l autore e` Giorgio, ma ha confessato che lo conosceva gia`):

Siccome il ragionamento e` complicato, proviamo con l indentazione, per renderlo un po` piu` chiaro. Siano i tre logici ***A, B, C*** *(Aristotele, Boole e Cartesio):*

A *pensa:*

> ***B*** *e* ***C*** *hanno un cappello beige (lo vedo); supponiamo il mio sia nero.*
>
> > ***B*** *allora direbbe:*
> >
> > > ***A*** *ha il cappello nero e* ***C*** *ha il cappello beige (lo vedo); supponiamo il mio sia nero.*
> > >
> > > > ***C*** *allora direbbe:*
> > > >
> > > > > *Siccome non tutti sono neri, il mio deve essere beige.*
> > > >
> > > > *Ma* ***C*** *sta zitto*
> > >
> > > *Quindi vede due cappelli beige; allora il mio e` beige.*
> >
> > *Ma* ***B*** *sta zitto*
>
> *Quindi vede due cappelli beige.*
>
> *Quindi il mio cappello e` beige*

In sostanza, tutti e tre i cappelli sono beige.

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Il teorema di Pitagora

Ultime notizie: la somma dei quadrati costruiti sui cateti e` uguale al quadrato costruito sull'ipotenusa[2]. Lo sapevate gia`? In effetti, sull'autostrada dell'informazione mi sento un po` come il pedone del ragionamento...

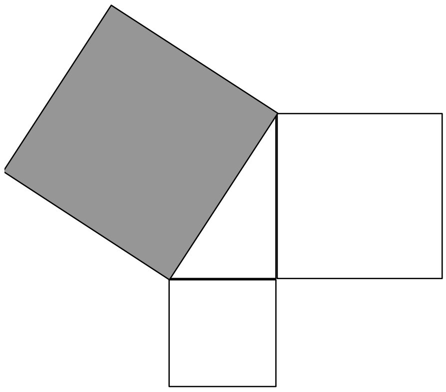
[2] Leggenda vuole che Pitagora abbia festeggiato sacrificando agli dei un'*ecatombe* di buoi. Non mi pronuncio, lascio lo facia Lewis Carroll: "Anche oggi, in questi tempi cosi` lassisti, una scoperta matematica potremmo pensare di festeggiarla con tre colleghi e qualche buona bistecca, ma un'ecatombe... significa una scorta di carne ben scomoda da maneggiare ."

Piu` seriamente: sapete dimostrarlo? Ho trovato un paio di dimostrazioni piuttosto interessanti.

La dimostrazione di Baravalle

Questa e` la mia preferita.

Partiamo dal triangolo e dai quadrati; scopo del gioco e`, abbastanza chiaramente, effettuare delle operazioni (piu` o meno) logiche e spostare l'area grigia negli altri due quadrati.



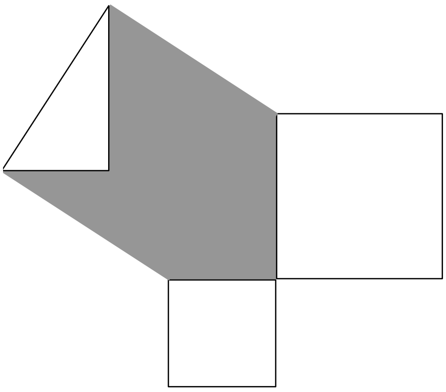


Figura 1

All'uopo, cominciamo con il sottrarre dal quadratone un triangolo uguale a quello base; l'area annerita, mi pare abbastanza chiaro, resta identica (ho sottratto e sommato quantita` uguali), ed essendo l'area un quadrato posso sempre disporre il triangolo "sottratto" come indicato. A questo punto, se non avete combinato guai, dovreste ottenere un qualcosa del tipo della ***Figura 1***. Se preferite una formulazione piu` pignola, considerate che i due triangoli sono simili in quanto i lati sono paralleli e sono uguali in quanto l'ipotenusa e` uguale per costruzione.

Il prossimo passo, ossia la ***FIgura 2***, e` un po` piu` duro.

Le due parallele lungo le quali abbiamo spostato la zona colorata formano angoli uguali o complementari con le parallele ai due cateti (sarebbero la riga sulla destra e quella in basso); considerando (ad esempio) che l'ipotenusa e` perpendicolare alle due rette di spostamento, la parallela secante il lato superiore del quadrato del cateto verticale forma un angolo che e` uguale all'angolo tra l'ipotenusa e il cateto verticale nel triangolo originario; quindi il triangolo che avanza dal quadrato del cateto verticale e il triangolo originario sono simili con un lato uguale e quindi uguale; stesso ragionamento si puo` fare per il triangolo in basso. In pratica, con l applicazione del postulato delle parallele ci si arriva (abbastanza) facilmente[3].

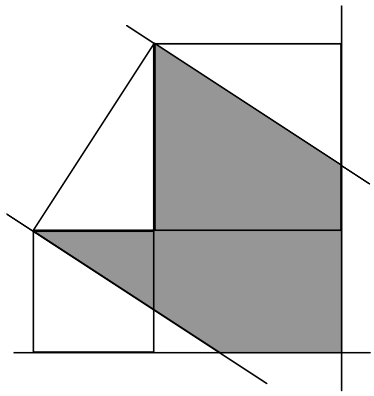


Figura 2

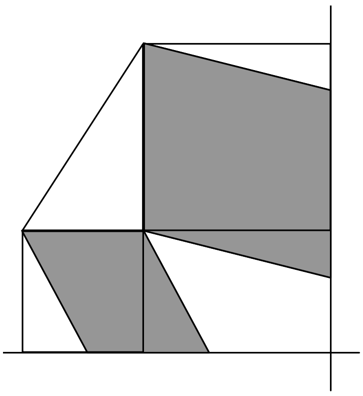


Figura 3

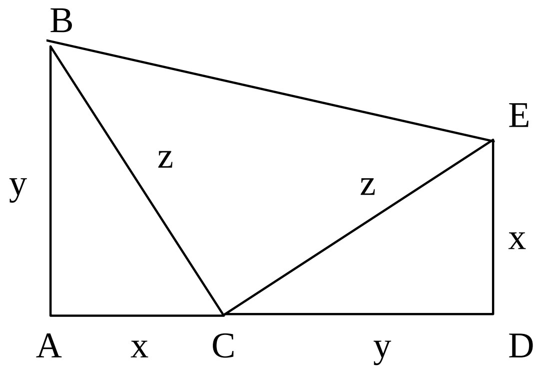
[3] Confesso: io, qui, ho sempre remato . Spero di essere stato chiaro...

Per il prossimo passo, siete pregati di ricordarvi il ***Teorema di Cavalieri***: due parallelogrammi aventi ugual base ed ugual altezza hanno la stessa area; in particolare (vi ricordate l'area del parallelogramma?) se uno dei due e` un rettangolo (o un quadrato, nel nostro caso), possiamo effettuare lo spostamento indicato in ***Figura 3***, arrivando (se si continua il movimento) a riempire i due quadrati. Quod Erat Demostrandum.

La dimostrazione di Garfield

Questa, invece, e` una dimostrazione algebrica; il bello e` che rappresenta l'unico contributo alla matematica dato da un presidente degli Stati Uniti d'America; guardate cosa e` riuscito a tirare fuori Garfield (cito) "...durante una riunione particolarmente noiosa; penso che questa sia una delle poche cose su cui sia possibile ottenere l'unanimita` dal Parlamento".

Sia ***ABC*** il nostro triangolo; su di esso costruiamo il triangolo ***CDE*** (uguale ad ***ABC*** e con ***CD*** prosecuzione di ***AC*** e il triangolo ***BCE*** che risulta per costruzione isoscele (per costruzione, i lati ***BC*** e ***CE*** sono uguali).



In sostanza, abbiamo una cosa come in figura.

Ora, considerato che l'angolo in ***A*** e` retto, si ha che e` ***ACB+ECD=90^***, in quanto angoli interni non retti di triangoli rettangoli uguali; da questo, si ha che per costruzione e` ***BCE=90^***.

Consideriamo ora il trapezio di basi ***BA*** e ***BD***; La sua area vale (sommabasiperaltezzafrattodue):

$$S = \frac{(x+y)*(x+y)}{2} = \frac{(x+y)^2}{2}$$

Ma quest'area deve essere uguale alla somma delle aree dei tre triangoli che formano il trapezio:

$$S = \frac{x*y}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x*y}{2} = \frac{z^2+2xy}{2}$$

Uguagliando le due aree e moltiplicando ambo i termini per 2:

$$(x+y)^2 = z^2 + 2xy \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 2xy \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = z^2$$

Che e` la tesi. Vediamo come se la cava il prossimo Presidente.

Fate una festa, per il solstizio?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms