Rudi Mathematici

Numero 019 - 2000 - 08

1. Editoriale **1**

2. Problemi **4**

2.1 Boh?! 4
2.2 Le mele di Coleridge 4
2.3 Qualcuno ha un cappello? 4

3. Soluzioni e Note da [018] **4**

3.1 Di nuovo il prof di mate! 4
3.2 Problema di traghetti 5

4. Paraphernalia Mathematica **5**

4.1 Eallaipi-iaiei, Eallaipi-iaiai 5

1. Editoriale

"Piotr, scrivili tu l'editoriale e i Paraphernalia, questa volta"

"Pronti!"

Lo ammetto, e` colpa mia. Quella di Pandora, al confronto, era una marachella da niente...

I più ingegnosi tra voi forse sospettano che RM abbia un Comitato di Redazione, e qualche ardimentoso forse arriva addirittura a paventare l'esistenza di qualche saltuaria Riunione del CdR. Bene, quell'ardimentoso ha ragione. Dalla sua nascita, RM ha già visto ben due staff-meeting del Comitato di Redazione, e corre seriamente il rischio di vederne un terzo all'inizio dell'estate[1]. Ciò che neanche il più fantasioso degli ardimentosi può però immaginare è quello che in realtà avviene, durante queste riunioni...

Va bene, rischio la radiazione per violazione di segreto d'ufficio, e vi racconto qualche cosa... non potrò entrare troppo in dettaglio (rischieremmo di dare troppi elementi alla feroce concorrenza che ci sta facendo il Bostonian Mathematical Journal), quindi non cominciate a lamentarvi; l'approssimazione è voluta.

Il luogo è un locale arredato alla tedesca, imbucato come una casbah, gestito da asiatici, nel quale aleggia normalmente la peggiore delle canzonette italiane... ma riescono a portare sui tavolacci sia involtini primavera che spaghetti all'arrabbiata, e noi ci contentiamo di poco. La birra continuano a portarla finchè hai la forza di chiederla, e questa è la vera ed unica conditio sine qua non.

Quando le tre paia d'occhi e le due paia di occhiali riescono a vedersi reciprocamente con una messa a fuoco inferiore al metro, il CdR comincia.

---

[1] *Come tutte le previsioni di Piotr, anche questa si e` rivelata sbagliata; e` agosto, e dobbiamo ancora vederci. Non era lui, che consigliava l acquisto di junk bonds indonesiani? [R.d A.]*

Premessa fondamentale: il CdR è composto da tre persone, proprietarie dei tre nomi che vedete in calce ad ogni editoriale.... Ma da qui a pensare che RM sia equamente realizzato(1/3 Rudy, 1/3 Piotr, 1/3 Alice), ce ne corre. La ripartizione più fedele del lavoro è più o meno la seguente: Rudy fa, più o meno, il (100-ε)%, dove quell'ε non è solamente "piccolo a piacere", come dicevano i testi liceali di una volta, ma ancora più piccolo. Alice fa ε/9, e a me tocca tutto il resto. Da ciò, si può facilmente evincere il comportamento di Rudy durante i CdR. Con il suo ormai proverbiale sorriso strafottente, difficilissimo da individuare a causa dell'interferenza prodotta dal bocchino della sua Savinelli preferita, ci saluta cordialmente, ma le mie orecchie traducono istantaneamente il suo "Ueilà, ciao gente!" in un più realistico "Eccovi qua, fagnani maledetti. A bere sempre pronti, eh, ma col piffero che scrivete una riga...". Alice, di solito, a quel punto sorride e fa ondeggiare la treccia ma, visto che ottiene solo un ulteriore digrignare di denti, passa solerte a sotterrarlo di scatole di Dunhill Elizabethan, unico placebo possibile per lui, a parte quello che sta già trangugiando (birra: vanno bene quasi tutte, a patto che la funzione temperatura abbia un massimo attorno ai 283 Kelvin e la funzione quantità un asintoto che punta diritto a più infinito). A quel punto, si mette comodo nel suo posto a capotavola (a dire il vero, non si mette mai a capotavola, ma per qualche ragione ovunque si sieda sembra che sia "capotavola") e comincia....

...comincia a metterci nei casini.

- "Ho scoperto una cosa interessante sulla funzione Toziente di Gauss...."

- "...auss", penso io, e do di gomito ad Alice per sapere se lei sa qualcosa. Lei decide che è il momento giusto per rifarsi la treccia, spara un sorriso alla minicameriera cinese in minigonna con spacchi e faccia da acido lisergico, ordina la terza media rossa, e ripete diligente:

- "Toziente? Uhm, interessante...".

Oppure, Rudy la prende più alla lontana, passa dagli scioperi dei Cobas ferrotranviari, articola una correlazione degli stessi col principio di esclusione di Pauli, conciona sulla possibile soluzione ai problemi occupazionali con il solo ausilio del Needham e del Courant-Robbins, per infilare poi, spietato e crudele, un

"BTW! Lo sapete che sul Courant-Robbins si cita l'assiomatizzazione di Kolmogorov che ha risolto il Sesto Problema di Hilbert?" ... e ride, dietro il fumo denso della sua Peterson. Io accendo un'altra MS e fingo di dover andare in bagno, Alice prende carta e penna, si aggiusta la maglia e accetta la sfida

- "Fammi un esempio reale, con mele e pere....", e intanto affila il regolo calcolatore da trenta centimetri che ha innestato nel cervello.

Beh, questa è la norma.... Qualche volta, però, sul tardi, forse a causa del ripieno allucinogeno di un involtino primavera ribelle, Rudy riesce persino a metterla sul metafisico.

"Ma insomma" - dice allontanando il cadavere dell'ultima Ceres - "quand'è che un problema è "tosto"? O, "bello"?" chiede, sicuramente più a sé stesso che a noi.... E Alice raccoglie il momento lirico, e agita mani capelli e birre, e ci racconta di come il suo prof al Politecnico andasse in estasi di fronte al capolavoro di Eulero, di come la scrivesse spessa e pulita sulla lavagna d'ardesia, di quelle basculanti, giù una lavagna, su l'altra, e infine la lanciasse, formula e lavagna, verso il soffitto e il cielo, con un estatico:

"Non è bellissima?"

Bellissima...

Alice sorride, forse ripensando a com'era buffo il prof in estasi, manco avesse fissato un appuntamento con Megan Gale. Rudy sorride, con l'aria saggia di chi capisce che la formula è davvero bellissima (e soprattutto con l'aria di chi l'appuntamento con Megan Gale ce l'ha avuto già...). Io sorrido, del mio solito sorriso ebete.

Insomma, questo che vedete è una specie di compito a casa.

Anziché scrivere cento volte "Io sono un asino", devo spiegare perchè la formula di Eulero è bella. Se ci riesco, resto nel CdR; se fallisco, Rudy mi presenta Megan Gale, la convince a darmi un appuntamento e poi a disdirlo all'ultimo minuto, quando ormai mia moglie mi ha già cacciato di casa. Lo conosco...capace di farlo davvero.

E allora, eccovela, la Megan Gale della matematica:

$$e^{ip} + 1 = 0$$

E il compitino svolto su di lei lo trovate nei Paraphernalia... dove a Megan Gale toglieremo ogni capo di vestiario.

Qualcuno lo fermi...

Rudy d'Alembert

Alice Riddle

Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Boh?!

Questo problema l ho trovato un anno fa; non riuscirete a risolverlo, ma almeno sarebbe carino trovargli un ambientazione nella vita reale... E` da allora che ci provo.

Dato il numero

$$R = N^{N^{\cdot^{\cdot^{N}}}}$$

(si vede, si? N alla N alla N... elevazione infinita), qual e` il massimo valore di ***N*** per cui ***R*** e` finito?

Ho remato un po`, ma sono riuscito a risolverlo; pero` non sono riuscito ad inventarci niente attorno, quindi ve lo presento cosi`.

2.2 Le mele di Coleridge

FacileFacile, questo... Lo ha risolto anche Coleridge, e si divertiva a farlo ai colleghi.

Sono andato in un giardino a rubare delle mele; il giardino pero` ha tre guardiani. Al primo guardiano, per uscire, do` la meta` delle mele piu` mezza mela. Al secondo guardiano do` la meta` delle mele rimaste piu` mezza mela. Al terzo guardiano do` la meta` delle mele rimaste piu` mezza mela. Libero, finalmente, mi mangio l ultima mela rimasta.

Quante mele avevo rubato?

C e` da dire che il buon Samuel si impegnava di piu` nella letteratura... Qualcuno di voi si ricorda l immagine per mostrare quanto sia folle il mondo nel quale si ritrovano i marinai? Alla prima lettura della ballata , non me ne ero neppure accorto (il che dimostra quanto sia matto io...).

Se volete espanderlo (o se questo per voi e` troppo facile), provate a stabilire quante mele devo rubare per superare ***N*** guardiani e restare con ***K*** mele.

2.3 Qualcuno ha un cappello?

In realta` ce ne servono tre, ma due li rubiamo al prof di mate.

Abbiamo dunque tre cappelli, che mettiamo in testa (senza che ne vedano il colore) a tre logici perfetti; successivamente, facciamo la seguente dichiarazione:

I cappelli sono neri o beige; non tutti i cappelli sono neri .

Dopo un po` di tempo, ogni logico sa il colore del proprio cappello. Come ha fatto?

...Mi ha sempre stupito la stoica pazienza dei logici in questi giochi...

3. Soluzioni e Note da [018]

3.1 Di nuovo il prof di mate!

Comincio a pensare che la tirchieria sia ereditaria: vinti i 20 euro, neppure si e` sognato di dire "Ragazzi, pago io!"...

Scusate l euforia, ma e` arrivata una soluzione! Un neolettore, mi dicono, (Roberto, detto Bob) ha inviato la seguente:

"*metto una banconota da 20 euro in un chap e tutto il resto nell'altro chap*"

Tra le risposte esatte e`, quantomeno, la piu` breve...Margini troppo stretti?

Facciamoci un po` di calcoli...

In questo modo, se con probabilita` ½ sceglie il primo cappello, poi con probabilita` 1 caccia il ventone.

Se sceglie il secondo cappello (anche qui, probabilita` ½) gli restano 9/19 di probabilita` di beccare il bigliettone. Quindi, la probabilita` totale di cacciare l'euro dal secondo cappello e` 9/38. A questa va pero` aggiunta la mezza probabilita` del primo cappello, arrivando a 28/38 ossia a 14/19; praticamente, tre probabilita` su quattro...

3.2 Problema di traghetti

Beh, la soluzione piu` interessante non e` corretta, ma e` giusta.

Il pirata della matematica si e` espresso esattamente in questi termini:

*"Rudy, ci hai dato un problema, quindi deve esistere una soluzione. I dati sono talmente pochi che la risposta **deve** essere "Recupera il salvagente quando si incontrano di nuovo".*

Il risultato e` esatto, ma avrebbe fatto piacere un po` di ragionamento al contorno... Io l'ho risolta cosi`:

Consideriamo il salvagente *fermo*: siccome i due traghetti identici partono allo stesso numero di giri, si allontaneranno dal salvagente alla stessa velocita`; invertita la rotta, si avvicineranno al salvagente alla stessa velocita`; quindi, si incontrano "sul salvagente".

Piotr per risolverlo e` andato a scomodare la teoria della relativita` (il buon vecchio Durrell, La relativita` con le quattro operazioni . Come titolo, fa il paio con Il calcolo differenziale reso facile e attraente . E ha anche il coraggio di chiedermi se ce l ho ...).

Mi pare che usasse qualcosa di molto simile per illustrare l'importanza della scelta del sistema di riferimento opportuno. Come dire... nel Sdr della "terra", hai Vc=velocita' Corrente, Vt=velocita' Traghetti, e si dovrebbe piazzare un sistema con Velocita(salvagente)=Vc; Velocita Traghetto Controcorrente=Vt-Vc; Velocita Traghetto Secondocorrente=Vt+Vc, e poi smazzarsi il tutto..... Pero', nel Sdr del Salvagente, vc=0, e v1=v2, e verrebbe proprio da dire che il nostro amico raccoglie il salvagente at the same time in which incontra il collega.

4. Paraphernalia Mathematica

Non crediate di sfuggire a questo orribile destino... Ha anche trovato un titolo (da una vecchia canzone di Woody Guthrie).

4.1 Eallaipi-iaiei, Eallaipi-iaiai

Eccola qua, che arriva dritta dritta da un cut-and-paste eseguito sull'editoriale:

$$e^{ip} + 1 = 0 \qquad (1)$$

Cominciamo a prenderci delle libertà, tanto parliamo di estetica, e si può andare tranquilli: niente è più opinabile dell'estetica. Ad esempio, qualcuno tra voi potrebbe subito affermare che preferisce la rappresentazione sintetica:

$$e^{ip} = -1 \qquad (2)$$

e io potrei aver il mio bel daffare a mostrare le ragioni per cui preferisco la prima... diciamo pure che il bello della forma estesa sta, secondo me, nella presenza del segno **+**, dell'**1** e dello **0** esplicitato. In fondo, avere in visione quelle due cifre (una elemento neutro dell'addizione, l'altra elemento neutro della moltiplicazione), legate da quell'"uguale" (che è il simbolo cardine della matematica, no? Cosa fa la matematica, a parte uguagliare grandezze?) e da quel "**+**" che, dite quello che vi pare, ma è sicuramente il primo operatore inventato (il "meno" è una sua emanazione (contraria), e il "per" una sua iterazione (diretta)), insomma, mi piace di più. Ripeto, tutto opinabile... ma facciamo il paragone, sempre e soltanto estetico, con la formula più famosa della fisica:

$$E = mc^2 \tag{3}$$

Bella, vero? Ma, a voler fare i pignoli, forse è ora che ci abituiamo, come già fanno i fisici seri, a svincolare le costanti universali da unita' di misura arbitrarie. Quindi, poche balle: altro che 300.000 o giù di li' chilometri al secondo; **c=1**, dicono, e basta. E poi, un po' di precisione, diamine.... Quella **E** della formula non è l'energia tout court, ma è l'energia "a riposo", evitiamo di confondere il pubblico, che potrebbe pensare all'energia cinetica o a chissà cos'altro. Chiamatela $\mathbf{E_0}$, ed evitiamo pastrocchi. Così, l'arcinota formuletta einsteniana diventa:

$$E_0 = m \tag{4}$$

E siccome il suo mestiere è proprio quello di mostrare l'equivalenza tra massa ed energia, è palese che in questa sua forma "spiega" meglio il concetto.... Come dite? Che vi piace di più nella sua forma originaria? Anche a me. Quindi smettetela di mugugnare se continuerò a parlare di Megan Gale nella forma $e^{i\pi}+1=0$.

Ordunque, si è già detto dei numeri e degli operatori riconoscibili (**1**,**0**,**+**,**=**): sono i più immediati dell'universo matematico. Gli altri tre simboli, invece, sono semplicemente i tre numeri non immediati più famosi del mondo. Ed Euler dice che stanno tutti insieme così.... Vero che sembra che ci prenda per i fondelli? Sia ben chiaro, gente: in questo testo non troverete la dimostrazione che la formula sia vera. Questo potete scoprirlo per esercizio[2], richiederlo esplicitamente al caporedattore o al padreterno, ripassarvi l'opera omnia di Eulero o qualsiasi testo di analisi. Quello che voglio spiegare è perchè questa formula è bella.

Prendete ***e***, ad esempio: bel numero trascendente[3], base dei logaritmi naturali. Adesso fate finta di avere uno studente intelligente ma ignaro di matematica, e cercate di spiegargli cosa è **e**. Avete molte possibilità, certo, ma come cominciate? Parlate di logaritmi? Potrebbe essere un'idea niente male, ma io al liceo mi chiedevo sempre perchè cavolo non tornavamo ai cari vecchi logaritmi in base 10, che maneggiavo assai meglio di quelli naturali. Naturali perché, poi? Una certa idea di "naturalezza" ho cominciato ad averla solo all'università, quando ho visto che la derivata di $\mathbf{f(x)=10^x}$ non era $\mathbf{f(x)=10^x}$, mentre quella di $\mathbf{f(x)=e^x}$ era proprio $\mathbf{f(x)=e^x}$. Allora? Gli propinate subito il crudelissimo limite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{5}$$

[2] Se proprio volete un paio di indizi, partite dalle formule di Eulero che legano funzioni trigonometriche e funzioni esponenziali di una variabile complessa. Insomma, dato $z\in\mathbf{C}$, (z=x+iy), cercate di ricordarvi come si esprimono sen(x) e sen(y) usando un po' di e^z .... Oppure (ma dopo diventa troppo facile...) andate a rinfrescarvi lo sviluppo in serie di potenze di e^x, sen(x) e cos(x); passate ai complessi (numeri, non orchestrine!) e giocate con gli sviluppi di e^z, sen(z) e cos(z). Poi, considerate quello z particolare della forma $i\phi$; infine, prendete il caso specifico in cui $\phi=\pi$.

[3] Non so se si merita una nota, ma, tanto per levarci il dente: diconsi trascendenti i numeri che non sono soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Insomma, i numeri reali si possono dividere in **Razionali** (quelli esprimibili come rapporto tra Interi) e **Irrazionali** (tutti gli altri); ma si possono anche dividere in **Algebrici** (soluzioni di equazioni di qualsivoglia grado a coefficienti razionali) e **Trascendenti** (tutti gli altri). Per un bel periodo di tempo, l'unico trascendente noto come tale era proprio **e** (dimostrazione di Hermite)... in quello stesso mirabile anno (1873), Cantor dimostrò che c'erano più trascendenti che algebrici.... Ma questa è un'altra storia.

Suvvia...Ma allora che facciamo? Aspettiamo le gioie del calcolo, prima di arrivare ad incontrare e a capire **e**? È vero che la derivata misura una variazione, quindi, in senso lato e meno preciso, una "crescita", e che **e** è spesso accoppiato a concetti come "crescita naturale", "decrescita, dimezzamento"... ma per questo non serve mica il calcolo differenziale: bastano le banche.

Andate in banca, sorridete al direttore, mostrategli reggicalze o bicipiti (in funzione del vostro sesso e/o delle preferenze del direttore), ed estorcete un bell'interesse del 100% annuo (certo che è fantascienza... stiamo parlando di matematica, mica di mutui prima casa). Versate una lira (visto che è proprio fantascienza?) e tornate a casa. Un anno dopo, tornate in banca, e vi danno 2 lire (soprassediamo, momentaneamente, al fatto che nel contempo vi fanno pagare mezzo milione di spese per la gestione del conto..). Dopodiché, cominciate a pensare... chiedere più del 100% pare proprio brutto, persino i biologi parlano di riproduzione, non di "super-riproduzione".... Cosi', pensate che, se invece di fruttare una volta all'anno, la vostra lira fruttasse ogni sei mesi, le cose andrebbero meglio... comprate un reggicalze nuovo, oliate e abbronzate i tricipiti, e ottenete tali condizioni dal direttore cerebroleso. Cosi', dopo i primi sei mesi, vi trovate subito una lira e mezzo, invece della vostra lira; e, dopo l'anno canonico, trovate che anche quella mezza lira restata in banca per sei mesi ha fruttato (mezza lira per mezzo anno, fa un quarto di lira..) e a fine anno avete in saccoccia 2,25 lirette. A questo punto diventate spudorati... fate due conti in casa, e scoprite che se i vostri interessi vengono contabilizzati ogni quadrimestre, le lire diventano 2,37, se ogni trimestre salgono a 2,44... e allora chiedete che i vostri soldi fruttino trimestralmente, poi mensilmente, poi ogni settimana, poi ogni giorno (nel frattempo avete esaurito tutti i vostri risparmi in reggicalze e creme abbronzanti, ma per la matematica questo e altro.....), fino alla richiesta più assurda: volete che gli interessi sulla vostra liretta siano "istantanei", nel senso che devono fruttare in ogni istante. Credete cosi' di aver trasformato la vostra misera lira in una infinita' di miliardi?

Ovviamente no (stiamo parlando di **e**, mica dell'infinito...), quindi sapete già che tutto quello che vi torna in saccoccia, in capo all'anno, sono esattamente **e** lire, cioè 2,718281828.....

Già... i "puntini di sospensione" in matematica sono sempre pericolosi (specie quando seguono la frase "dopo alcuni semplici ma noiosi passaggi...") e i puntini che ho lasciato dopo quell'8 lo sono assai assai. Ma di questo parleremo dopo.

Altro approccio demenziale alla matematica? Sostituite allo studente intelligente ma ignaro di matematica Rossella O'Hara di Via Col Vento. Ella vive d'amore e d'amor romantico, frega un accidente a lei di serie, logaritmi e interessi bancari. Non accetta altra unità di tempo che non sia "tutta la vita", nessuna frazione che non sia "ogni attimo". Ella ama, e vuol farlo ad ogni istante, e amore significa fare bambini. Beh, traducete per quanto possibile la (5) in termini appassionati e sospirosi, ed eccovi la filosofia di Rossella... la sua volontà di amare per quanto possibile è data dall'esponente **n**, il tempo che può dedicare a tale azione è pero' limitato (istanti!), quindi, niente più che un misero **1/n** di incremento (il "più") a sé stessa (l'uno). Come approccio, è più idiota del film stesso, ma magari a lei piace cosi'.... Specie quando le predirete che avrà, su solide basi matematiche, ben 1,718281828.... figli.

Insomma, **e** sembra essere il numero magico dei bancari e di Rossella O'Hara; il pilastro della funzione che è identica a se' stessa, il ponte tra matematica e biologia; ciononostante è trascendente. Ed è solo grazie a lui, che si è poi dimostrata la trascendenza di π. Già, π... troppo famoso, per parlarne diffusamente. Rapporto tra diametro e circonferenza (che i greci chiamavano periferia, e adesso indovinate perché si è scelta proprio la lettera π... se invece volete fare una vera opera di bene, cercate di scoprire perché **e** si chiama **e**) il problema veramente grosso, con lui, è che perfino Rossella O'Hara si aspetta che cominciate a parlare di cerchi, per introdurlo in società. Quindi, evitiamo.... Introduciamolo parlando di quadrati.

Da quando le hanno scoperte, i matematici hanno subito goduto un sacco nel sommare le serie infinite. Quando hanno capito che la serie armonica (6):

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} \tag{6}$$

aveva somma infinita, si sono assai dispiaciuti. Ma si sono subito rifatti scoprendo che invece la serie che sta alla base del paradosso di Achille e la Tartaruga

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i} \tag{7}$$

aveva somma pari a 2. Avere un valore finito per un'infinità di termini è molto divertente, specialmente se questo vi consente, dopo un paio di migliaia di anni di tentativi, di mandare a quel paese Zenone di Elea.

Ovvio, si prova con un sacco di altre, e una delle prime è la serie degli inversi dei quadrati:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2} \tag{8}$$

La (8) inizia bene: si capisce in fretta che converge, non è una fetentona come l'armonica. Ma finisce male... converge infatti ad un valore che inizia con 1,644..., e non si capisce che razza di numero sia. Narrasi che abbiano provato a cavare il ragno dal buco Newton, Leibniz, e tutta la famiglia Bernoulli. Ma la seriuccia restava indomita. Fino all'arrivo della nostra star svizzera... (no, no... Alice non c'entra, stavolta: parlavo sempre di lui, il solito Leonhard Euler). Con un metodo che strappa applausi a scena aperta e lacrime di commozione e invidia alla comunità matematica del tempo, il prode Leonardo mostra che vale:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{p^2}{6} \tag{8}$$

e adesso anche Rossella O'Hara è accontentata: "Voilà il numero π, miss Scarlett: è pari a sei volte la radice quadrata della somma infinita di tutti i reciproci dei quadrati. Come lei desiderava, neanche un piccolissimo cerchio, in tutto ciò".[4]

Riepilogo-riepilogo-riepilogo....

Abbiamo appurato che **e** è un numero associabile ad un sacco di cose, e che **π** non è necessariamente legato ai cerchi. Non ci resta che aggiungere **i**, la leggendaria radice di -1, e siamo quasi arrivati alla fine. Ora, **i** non è un numero reale, ma quantomeno ha la

[4] Se proprio non sapete come passare il tempo, cercate di scoprire a quanto converge la serie degli inversi dei quadrati dei soli numeri pari, e a quanto quella dei soli numeri dispari... è ovvio che la loro somma sarà esattamente la (8), ma mi auguro che non siate così ingenui da sperare che ognuna delle due valga $\pi^2/12$... Mettiamola cosi': la dimostrazione di Eulero della convergenza della serie degli inversi dei quadrati è davvero bella, e se inondate la redazione di suppliche e tentativi di seduzione, magari ci lasceremo convincere a pubblicarla per esteso. Nota quella, derivare le altre due è facile, basta applicare lo stesso metodo. Se invece volete un approccio più campagnolo, provate a confrontare membro a membro le serie (1 con 1/4, 1/9 con 1/16, 1/25 con 1/36, e cosi' via...) c'è qualcuno che, per questa via, riesce a dimostrare che la serie dei dispari è tre volte tanto l'altra? Accidenti.... Ormai l'ho detto, che una vale $\pi^2/8$ e l'altra solo $\pi^2/24$....

decenza di essere algebrico (infatti, per definizione risolve l'equazione algebrica a coefficienti razionali $\mathbf{x^2=-1}$). Una delle ragioni per cui la (2) appare così bella e strana sta probabilmente nascosta proprio nell'avere un membro totalmente immaginario ($e^{i\pi}$) che si attorciglia su sé stesso e produce un secondo membro assolutamente reale, anzi, intero (-1). Rimanessimo legati ai cari vecchi numeri reali, sostituendo **i** con il suo modulo, 1, ci ritroveremmo con una banale

$$e^p = 23.,14... \tag{9}$$

....di scarsissima soddisfazione[5]. Invece **i** ci porta verso tutt'altra direzione, grazie a questa sua graziosa abitudine di disegnarsi come ortogonale all'asse dei reali. Altre cose, su **i**, mi vengono difficili da dire.... È troppo immaginifico, per essere solo un immaginario.

Così, deo gratia, abbiamo la nostra Megan Gale così com'è... e i matematici continuano a chiedersi se lì dentro c'è scritto ancora qualcosa che non capiscono, i fisici e gli ingegneri si coccolano tutte le forme del tipo $e^{i\varphi}$ perché non c'è niente di meglio per rappresentare cose sfuggenti come le fasi d'onda, e cosi' via....

Già, perché per avere qualcosa di bello, questo qualcosa deve dare un po' di più di quello che promette. E la nostra eroina, ad esempio, ha risolto il vecchio problema della quadratura del cerchio. I passi sono stati quasi tutti senza calcoli, a vederli col senno di poi....

A) Euler (1748) congettura l'esistenza di numeri trascendenti, più specificatamente che **e** sia trascendente.

B) Wanzel (1837) mostra che i numeri possono essere "costruibili" o "non costruibili" (con riga e compasso). Alcuni irrazionali (come la radice di 2) possono essere costruibili, ma tutti i "costruibili" devono essere almeno algebrici (cioè non trascendenti).

C) Liouville (1844) dimostra che i numeri trascendenti esistono.

D) Hermite (1873) dimostra la trascendenza di **e**. Ne segue direttamente la trascendenza di $\mathbf{e^x}$, a patto che **x** sia razionale e diverso da zero.

E) Lindemann (1882) mostra che $\mathbf{e^x}$ è trascendente anche se **x** è solo algebrico (ma sempre diverso da zero, obviously...)

F) Si nota (quantomeno lo nota bene Lindemann) che e^{ip} non è trascendente, visto che vale 1.

G) Si conclude che l esponente $\mathbf{i\pi}$, (per quanto dice il punto E) deve allora essere non algebrico, cioè trascendente.

H) Si nota che **i**, povero piccolo, è assolutamente algebrico.

I) Si conclude che il trascendente deve necessariamente essere quel puzzone di π.

J) Si ricorda che se un numero è trascendente non è algebrico, e se non è algebrico non è costruibile, e se non è costruibile col cavolo che riesci disegnare un segmento lungo $\boldsymbol{\pi}$.

K) Si stappa la bottiglia di champagne, (un Pommery, per me, grazie...) e si rutta in faccia a tutti i quadratori del cerchio della storia e ad un sacco di vecchi barbogi dell Antica Grecia.

Ma secondo voi, Euclide se lo sarebbe mai aspettato che tutto il gran mistero di non riuscire a disegnare un segmento pari al lato del quadrato di un cerchio di area data

[5] Beh, poi, "di scarsissima soddisfazione" forse è eccessivo... Se avete tempo libero nei week-end, provate a dimostrare che $\mathbf{e^{\pi}}$ è pure lui trascendente: finora non ci è riuscito nessuno, e se ce la fate, beh.... Magari non l'immortalità, ma una Medaglia Fields probabilmente ve la danno.

sarebbe stato risolto (meglio: dimostrato come impossibile) da uno studio sulla natura dei numeri (e quindi senza chiamare in ballo alcuna figura geometrica)? Non so che impressione faccia voi, ma a me sembra qualcosa come rimorchiare Megan Gale perché si incoccia nel suo numero telefonico mentre si fanno telefonate a caso per un sondaggio sull'uso degli ammorbidenti. Forse, il prof di Alice stava pensando a questo, quando andava in estasi di fronte alla lavagna... a come rimorchiare, intendo.

...Ma secondo voi, cosa fuma il ragazzo?

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms