Rudi Mathematici

Numero 017 - 2000-06

1. Editoriale

Omne bene,
Sine poenae,
Tempus est ludendi;

Venit hora,
Absque mora,
Libros deponendi

...Mi piace pensare "Graffita su un banco in un *gymnasium* di Pompei" (in realta` e` medievale).

Io capisco che il miglior matematico che conoscete e che vi da` pazientemente una mano a risolvere i problemi di RM adesso ha l'esame di quinta elementare, ma almeno uno sforzo potevate farlo. O state cercando di uguagliare il record dell'edizione inglese? Sappiate che ce l'avete fatta.

Qualcuno, scarsamente intenzionato a risolvere i problemi (quindi la stragrande maggioranza di voi) mi ha chiesto: "Ma quanto tempo prima prepari 'sta roba?"

Beh, dipende. Voglio sperare che voi stiate cercando di risolvere i problemi corroborati da una bella giornata di giugno; sappiate che, mentre sto scrivendo queste note, c'e` un grazioso clima di tipo (mi dicono) irlandese: piove, e` grigio, meno male che tra un po` e` Pasqua.

In compenso (liberi di invidiarmi), sappiate che sono *io* a spaparanzarmi al sole adesso... Tranquilli, ho dietro carta, matita e cervello (organico: quello elettronico e` rimasto a casa). Qualche problemino ve lo trovo comunque.

Non portate dentro la sabbia

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms

2. Problemi

2.1 Ancora sulle bilance

La serie di problemini sulle monete dell'altra volta me ne ha fatto venire in mente un altro.

Supponiamo siate l'assistente di un fruttivendolo (l'ho sempre detto: braccia sottratte all'agricoltura!); vostro compito e` portare la bilancia (e i pesi), mentre il capo acquista la frutta; a voi, l'incarico di pesarla. E` vostra intenzione andare in giro con la bilancia (una bella bilancia a due piatti, robusta, come non ne fanno piu`... Ma senza scala graduata) e il minor numero (e peso) di pesi possibili, tutti multipli dell'unita` fondamentale. Considerato che dovete essere in grado di pesare "piu` pesi" possibile, che pesi vi portate dietro?

2.2 Estrazioni del lotto

Si, stavolta diamo i numeri...

Abbiamo un'urna con "N" numeri, ed estraiamo delle terne "simultanee" (cioe` tiriamo fuori tre numeri contemporaneamente); il famoso professore di matematica Massimo DellaNoia sostiene che si possono formare 111111111111100 terne; cosa ne dite, del gioco?

3. Soluzioni e Note

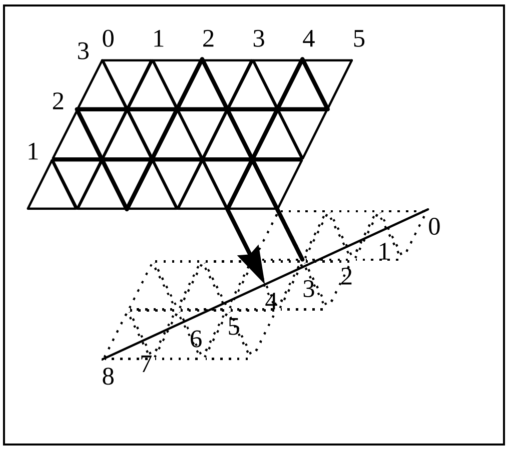
3.1 [016]

3.1.1 Problema dell'oste

Devo ammetterlo, qualche tentativo c'e` stato. Risultati decenti, comunque, zero.

Per risolverlo, questo, bisognava inventarsi un altro "pezzo"; qualcuno di voi ha provato con rimbalzi in bizzarri oggetti tridimensionali che sembrano derivati piu` che altro da un incubo di Escher, per poi ridursi al volgare metodo per tentativi; onore al merito, ma niente pupazzetto!

Il "pezzo" in piu` che bisognava inventare in questo caso era la ***diagonale del rombo***, che nel disegno, per comodita`, portiamo "fuori"; ogni volta che che operiamo sul recipiente "grosso", riportiamo il valore anche su questa diagonale; probabilmente, dal disegno si capisce di piu` che dalle parole; di seguito, le operazioni nececssarie e, tra parentesi tonde, lo stato dei contenitori da 8, 5 e 3 litri (la prima e` la situazione iniziale):




```
[    :(8,0,0)] - [8->5:(3,5,0)]
[5->3:(3,2,3)] - [3->8:(6,2,0)]
[5->3:(6,0,2)] - [8->5:(1,5,2)]
[5->3:(1,4,3)] - [3->8:(4,4,0)]
```

Semplice, vero? non so se ve ne siete accorti, ma la scala del contenitore grosso e` invertita: questo perche` parto con il contenitore pieno, e cosi` vedo quanta ne "resta dentro".

Caso mai foste interessati, potete provare a verificare il fatto che *se il terzo recipiente ha capacita` maggiore o uguale alla somma dei primi due e gli altri due recipienti hanno* *capacita` prime tra loro, posso ottenere qualsiasi valore tra **1** e il valore di capacita` intermedio* (cioe`, nel nostro caso, qualunque valore tra 1 e 5). Se invece il recipiente piu` grande e` *minore* della somma dei due piu` piccoli, devo "tagliare" la punta in alto a destra del rombo, in modo da farci "stare" la diagonale. Siete caldamente invitati, con recipienti da 9, 7 e 12 litri, a ***non*** cercare di ottenere 6.

Non crediate di poter sfuggire al problema tosto della serie.

L'altro giorno, essenda prevista una riunione del comitato di redazione, mi sono procurato un contenitore da **10** litri di birra; non essendo sicuro che fosse buona, ne ho assaggiato "un po`", utilizzando recipienti da **3** e **5** litri.

Quando finalmente arrivano Piotr e Fran (che non sanno niente del mio "assaggio" precedente), riusciamo a dividerlo in tre parti uguali, usando gli stessi contenitori. Quanta birra beve ciascuno di noi (in particolare, quanta ne bevo io in totale)?

3.1.2 Bilance

Hmmm, qualcosa avete provato a fare... Poca roba, comunque...

Allora, con calma:

Il primo, come vi dicevo, e` facile; sapendo quanto pesano (in *meno*) le monete false, ne posso prendere ***una*** dal primo mucchio, ***due*** dal secondo mucchio, ***tre*** dal terzo mucchio,..., ***dieci*** dal decimo mucchio. Se fossero tutte vere, peserebbero ***(1+2+3+...+10)*15***, ossia ***55*15***. La *differenza* tra questo valore e il valore ottenuto e` il *numero* del mucchio incriminato. Facile, vero?

Il secondo non e` cosi` facile... Tant'e` che, la prima volta, l'ho sbagliato.

Devo prendere abbastanza monete da poter individuare il numero d'ordine dei tre gruppi "sbagliati"; ossia, non mi basta prenderne uno dal primo, due dal secondo, tre dal terzo eccetera, in quanto la situazione di "uno e due falsi" sarebbe equivalente alla situazione "tre falso". Quindi, la mia idea era quella di prendere una dal primo, due dal secondo, *quattro* dal terzo, *sette* dal quarto e avanti in questo modo: ogni volta prendo un numero di monete pari alla somma dei tre valori precedenti (con l'eccezione del terzo, dove devo prendere 4 monete perche` 3=2+1). Alla fine, il mio risultato era che mi servivano dei mucchi di (almeno) 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44 monete. (Non molto) graziosamente, pero`, mi hanno fatto notare che, se *non prendo nessuna moneta* dal primo mucchio, e poi ne prendo 1, 2, 4, 7, 13, 24, il giochino riesce lo stesso... Che figura!

L'ultimo, devo dire, era duro. La soluzione (trovata "al volo" da Piotr, con un po` piu` di lentezza da me) e`:

Mettete su un piatto le monete 1-2-3, sull'altro le monete 4-5-6

Tenete il gruppo che pesa meno (se pesano uguale, tenete il gruppo 7-8-9).

Scegliete due monete da questo gruppo e pesatele (ad esempio, pesiamo 7 e 8)

Se pesano uguale, la moneta falsa e` 9; in caso contrario, e` la piu` leggera.

Carino, vero?

4. Paraphernalia Mathematica

4.1 Equazioni Diofantee

"Un contadino, al mercato, vende dei polli ad ***A*** lire l'uno e dei conigli a ***B*** lire l'uno; considerato che ha ricavato dalla vendita ***C*** lire, si chiede quanti conigli e quanti polli ha venduto".

Avete di fronte a voi un raro esemplare di problema noioso, scarsamente divertente e enormemente rompiscatole; quando pero` l'intelligentone di turno ve lo propone e voi gli dite che problemi del genere non vi interessano, lui fa la faccia contenta e strilla: "*Aaaah, vuol dire che non sei capace!*". La cosa verra` opportunamente strombazzata ai quattro venti, ad indubbio detrimento della vostra autorita` matematica. Tra l'altro, questi problemi sono talmente vecchi che, di solito, ben che vada il villico ricava 30-40 lire: avessero almeno il lampo di genio di passarlo in euro...

Quello che ci interessa, come si arguisce facilmente, e` trovare le soluzioni *intere* dell'equazione:

$$Ax + By = C \qquad \textbf{[001]}$$

Per risolvere questa equazione, si cercano, per prima cosa, le soluzioni dell'***equazione associata***:

$$Ax + By = 1 \qquad \textbf{[002]}$$

Ora, se andate a riprendere questa rubrichetta qualche mese fa ("Frazioni Continue Aritmetiche - 01" -so che in realta` i numeri precedenti brillano scolpiti nel vostro cuore e nella vostra mente...), ci era passata davanti un'espressione del tipo:

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \qquad \textbf{[003]}$$

che, ammetterete, mostra una sospetta parentela con la nostra equazione associata: infatti, le ridotte che vi compaiono non sono altro che le ridotte di ***A/B***.

L'unico guaio sono i segni... ma questi non rappresentano un grosso problema; il secondo membro, infatti, e` funzione del numero di termini dello sviluppo in FCA; dovreste anche ricordare, pero`, che possiamo far diventare il numero dei termini *pari* o *dispari* a nostra scelta. In particolare, se l'equazione e` nella forma ***Ax+By*** ci serviranno un numero ***dispari*** di termini, mentre se e` nella forma ***Ax-By*** ce ne serviranno un numero ***pari*** (no, non ve lo dimostro... appartiene all'insieme delle noiosaggini).

Da questo, otteniamo le ***soluzioni particolari dell'equazione associata***:

$$\begin{cases} x_0 = q_{n-1} \\ y_0 = -p_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{[004]}$$

...e da queste, utilizzando ***t*** come parametro, si hanno le ***soluzioni generali dell'equazione originaria***:

$$ax + by = c \Rightarrow \begin{cases} x = cq_{n-1} - tb \\ y = at - cp_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{[005]}$$

$$ax - by = c \Rightarrow \begin{cases} x = cq_{n-1} + tb \\ y = at + cp_{n-1} \end{cases}$$

Siccome oggi sono in buona, vi faccio un esempietto: il contadino, i polli e i conigli metteteli voi, partiamo dall'equazione.

$$120x - 49y = 7 \qquad \textbf{[006]}$$

Dunque, per prima cosa calcoliamo la serie delle ridotte di 120/49 (vi siete accorti che e` la stessa frazione dell'altra volta? E` per risparmiare calcoli):

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	2	4	2	2

p_i	0	1	**2**	**5**	**22**	**49**	**120**
q_i	1	0	**1**	**2**	**9**	**20**	**49**
$c_i = \frac{p_i}{q_i}$			$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{120}{49}$

da cui, i nostri valori ***dovrebbero essere*** 49 e 20, se non fosse per il fatto che devo avere un numero ***pari*** di termini (c'e` il segno meno nell'equazione); quindi, devo "riaggiustare" il mio sviluppo:

$$\frac{120}{49} = [2,2,4,2,2] = [2,2,4,2,1,1]$$ **[007]**

da cui la nostra tabella diventa:

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			2	2	4	2	1	1
p_i	0	1	**2**	**5**	**22**	**49**	**71**	**120**
q_i	1	0	**1**	**2**	**9**	**20**	**29**	**49**
$c_i = \frac{p_i}{q_i}$			$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{71}{29}$	$\frac{120}{49}$

e, utilizzando la **[005]** per ***t=0***, otteniamo la soluzione:

$$120x - 49y = 7 \Rightarrow \begin{cases} x = 7*29 = 203 \\ y = 7*71 = 497 \end{cases}$$ **[008]**

Che e` la soluzione "base" della nostra equazione.

E` utile notare che condizione necessaria per la risoluzione dell'equazione e` che ***A*** e ***B*** (cie`, nell'esempio, 120 e 49) devono essere ***primi tra loro***, ossia ***(A,B)=1***.

Riepilogando e aggiungendo anche il caso per il segno positivo, il metodo generale e`:

L'equazione diofantea generale:

$$Ax \pm By = C \text{ con } (A, B) = 1 \qquad \textbf{[009]}$$

Si risolve come:

Sviluppare A/B in frazione continua

Nel caso di segno positivo, in un numero* dispari *di termini

Nel caso di segno negativo, in un numero* pari *di termini

Generare la serie delle ridotte

$$p_{-1} = 0$$

$$p_0 = 1$$

$$q_{-1} = 1$$

$$q_0 = 0$$

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \qquad \textbf{[010]}$$
$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

Note le soluzioni particolari dell'equazione associata $Ax \pm By = 1$***, pari a***

$$\begin{cases} x_a = q_{n-1} \\ y_a = -p_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{[011]}$$

Si ricavano le soluzioni generali dell'equazione data

Nel caso di segno* positivo*:

$$\begin{cases} x = cq_{n-1} - tb \\ y = at - cp_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{[012]}$$

Nel caso di segno* negativo*:

$$\begin{cases} x = cq_{n-1} + tb \\ y = at + cp_{n-1} \end{cases} \qquad \textbf{[013]}$$

Semplice, chiaro e (abbastanza) poco faticoso, se avete studiato...

Per concludere, vi passo un problemino da rifilare all'antipatico di cui all'introduzione mente ha ancora la bocca aperta dallo stupore per la vostra soluzione (il metodo per risolverlo e` una diofantea con numeri "grossi": tranquilli, vi do` anche la soluzione):

Su un'isola deserta, fanno naufragio cinque marinai; appena arrivati, raccolgono un mucchio di noci di cocco, allietati da una scimmietta che saltella loro intorno (no, non ruba le noci...). Essendosi fatto tardi, decidono di rinviare la divisione delle noci tra di loro al giorno successivo.

Durante la notte, uno dei marinai si sveglia e, considerando che molto probabilmente il giorno dopo ci sarebbero stati dei litigi per la divisione, senza chiamare gli altri divide il mucchio in cinque parti uguali; la divisione fa si` che avanzi una noce, che da` alla scimmietta; dopo aver nascosto il "suo" quinto di noci, torna a dormire.

Per farla breve, tutti i marinai si svegliano (uno per volta all'insaputa degli altri), si avvicinano al mucchio reduce dalla divisione del marinaio precedente, fanno la divisione, nascondono la loro parte, danno la noce avanzata alla scimmia (tutti avanzano una noce) e tornano a dormire.

Al mattino, quando si svegliano tutti, nessuno ha la coscienza propriamente pulita, quinsdi nonostante le dimensioni del mucchio siano "strane", effettuano come se niente fosse la divisione di quanto rimasto; questa volta, la scimmietta resta a digiuno.

Quante noci dovevano avere almeno raccolto i nostri eroi per riuscire a fare una divisione del genere?

Allora, se ***N*** e` il numero totale delle noci all'inizio, ***A*** il numero di quelle nascoste dal primo marinaio, ***B*** quelle nascoste dal secondo e avanti sino ad ***F*** che sono quelle che si dividono fraternamente al mattino, il sistema risolutivo viene ad essere:

$$\begin{cases} N = 5A + 1 \\ 4A = 5B + 1 \\ 4B = 5C + 1 \\ 4C = 5D + 1 \\ 4D = 5E + 1 \\ 4E = 5F \end{cases} \qquad \textbf{[014]}$$

Notare che, se sostiuite il secondo membro dell'ultima equazione con ***5F+1***, date una noce alla scimmietta anche nell'ultimo giro e vi ritrovate con dei numeri decisamente piu` grandi.

Comunque, sostituendo in salita, la nostra equazione si riduce alla:

$$1024N - 15625F = 8404 \qquad \textbf{[015]}$$

La frazione si sviluppa:

$$\frac{1024}{15625} = [0,15,3,1,6,2,1,3,3] = \\ = [0,15,3,1,6,2,1,3,2,1] \qquad \textbf{[016]}$$

E otteniamo la successione delle ridotte:

ai			0	15	3	1	6	2	1	3	2	1
pi	0	1	0	1	3	4	27	58	85	313	**711**	1024
qi	1	0	1	15	46	61	412	885	1297	4776	**10849**	15625

Da cui, le soluzioni particolari dell'equazione associata e dell'equazione data:

$$\begin{cases} N_A = 10849 \\ F_A = 711 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = 8404 N_A = 91174996 \\ F_0 = 8404 F_A = 5975244 \end{cases} \qquad \textbf{[016]}$$

E le soluzioni generali:

$$\begin{cases} N = 91174996 + 15625t \\ F = 5975244 + 1024t \end{cases} \qquad \textbf{[017]}$$

Le soluzioni per ***t*** che forniscono il valore minimo (positivo) per ***N*** e ***F*** sono:

$$t > -\frac{919174996}{15625} = -5835{,}2\dots$$ **[018]**

$$t > -\frac{5975244}{1024} = -5835{,}1\dots$$

Dovendo ***t*** essere un intero, il valore cercato e` ***t=-5835***. sostituendo nelle **[017]**, si ottengono i valori finali:

$$\begin{cases} N = 3121 \\ F = 204 \end{cases}$$ **[019]**

Che e` il nostro risultato.

L'altra formulazione del problema fornisce un valore, per ***N***, pari a ***15621*** (beh, questa, se volete, ve la calcolate voi; si, i conti li ho fatti a mano!).

Il problema e` piuttosto vecchiotto ma lo conoscono in pochi visto che, per tentativi, ci vuole un mucchio di tempo; e` esistita un'unica persona al mondo che abbia dato istantaneamente la risposta alla versione in cui veniva data una noce alla scimmia anche l'ultima volta; trattavasi di P.A.M. Dirac (Nobel per la fisica, caso mai non ve lo ricordaste...), che ha immediatamente risposto: "Quattro noci *negative*". Il primo marinaio da` una noce positiva alla scimmia e si ritrova con cinque noci negative; ne nasconde una; il secondo marinaio da` una noce positiva alla scimmia e.... Dirac sosteneva che la sua soluzione era decisamente piu` elegante: tanto per cominciare, i numeri in valore assoluto sono piu` piccoli, e poi al mattino i marinai non dicono nulla in quanto le noci (negative) sono quattro, come la sera prima...

L'avete chiuso, l'ombrellone?

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle