Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

Rudi Mathematici

Numero 014 - 2000-03

1. Editoriale

...Direi che il problema degli aeroplanini e delle gondole hanno avuto un certo seguito...Comunque, non sono stato inoperoso

Sorpresa! C'e` una rubrica nuova! A cominciare da questo numero, assisterete ad una serie di sproloqui matematici da parte nostra (non ho la minima intenzione di scriverli da solo) relativi ai primi argomenti che ci vengono in mente, purche` vagamente correlati con la matematica. Come sempre, liberi di *arzigogolarci* sopra, proponendo espansioni, commenti, problemini derivati e quant'altro possa passarvi per la testa. Oltretutto, con una voce in piu` nell'indice, c'e` meno spazio stupidaggini nell'editoriale.

Buon compleanno di Einstein

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

2. Problemi

2.1 Viaggio in macchina

...Come avrete potuto dedurre dal problemino dell'altra volta e dalle soluzioni di questo numero, si, siamo stati a Venezia (famiglia & amici); se c'e` una cosa che mia moglie non sopporta, sono i giochini matematici. Quindi, non appena possibile, le mie risposte alle sue domande sono degne dell'oracolo di Delfi.

Il viaggio era stato attentamente pianificato, prevedendo anche di fermarci a mangiare presso un ristorantino di mia conoscenza (col cavolo, che vi do` l'indirizzo...); in macchina, al mattino, si e` svolto (nel ridente paesello che per convenzione chiameremo ***A***) il seguente dialogo:

"Quanta strada abbiamo fatto?"

"Meta` di quella che c'e` da qui al ristorante"

Raggiunto il ristorante, sopiti i morsi della fame e ripartiti, abbiamo raggiunto il ridente paesello che per convenzione chiameremo ***B*** quando...

"Quanta strada ci resta da fare?"

"Meta` di quella che c'e` dal ristorante a qui"

Considerato che tra ***A*** e ***B*** ci sono (oltre al ristorante) 200 kilometri e che mia moglie mi sta picchiando con un mappamondo, quanto e` lungo il percorso totale?

2.2 Il libro

Oibo`! Questa volta non mi e` arrivata la soluzione, ma ***un problema!*** Un grazie a Franco; non solo, ma lo trovo molto carino: cito testuale (in corsivo, non essendo io...):

Un libro ha 225 pagine.

La somma delle cifre delle prime due pagine del secondo capitolo e` uguale a 18.

La somma delle cifre delle ultime due pagine del secondo capitolo e` uguale a 18.

Quanto e` lungo il secondo capitolo?

Bello, conciso[1], chiaro... E c'e` una sorpresa.

2.3 Divisione

Questa e` successa al paesello, tanto per cambiare; e` incredibile come l'aria di montagna stimoli le capacita` matematiche.

Dovete sapere che le due pesti che mi ritrovo come figli sono particolarmente amici di una ragazzina (piu` grande), da cui il soprannome del gruppo come le tre disgrazie; questa volta, sono riusciti a mettere le mani su 24 cioccolatini e stanno discutendo di come dividerli "equamente" senza passare a vie di fatto.

La proposta di Consuelo (sarebbe la ragazzina) e`: "Possiamo dividerli in modo tale che ognuno di noi abbia un numero di cioccolatini pari alla propria eta`".

Ora dovete sapere che Federico (il piu` piccolo), quando si parla di matematica applicata ai cioccolatini e` tutt'altro che un asino; resosi conto che in questo modo "ci perde", fa una controproposta: "Facciamo la divisione come dice Consuelo, ma poi dividiamoli ancora

[1] Non voglio rovinare la concisione del problema, ma mi pare corretto specificare che la risposta "due pagine" non e` ammessa. E non vi lascio neanche usare Excel!

cosi`: io tengo meta` dei cioccolatini che secondo Consuelo dovrei avere e l'altra meta` ve la dividete equamente tra voi due; poi Alberto (quello di mezzo) tiene la meta` dei cioccolatini che ha accumulato e la divide a meta` con me e Consuelo; alla fine, Consuelo tiene la meta` dei cioccolatini che ha accumulato e divide equamente con me e Alberto"

Gli altri due (non esattamente dei geni in matematica) accettano e, finite tutte le operazioni, ciascuno dei bambini si ritrova con 8 cioccolatini.

Quanti anni hanno?

3. Soluzioni e Note

3.1 [011]

3.1.1 Problema da un altro Rudolph

Beh, direi che ci siamo divertiti abbastanza... L'unica cosa che mi resta da fare e`, effettivamente, formalizzare un po` il metodo: nessuno ha cercato di ricavare una formuletta abbastanza generale. Lavoriamo in base 10, eventuali variazioni mi sembrano immediate.

Ragioniamo sulle cifre da **1** a **9**; non potendo mai essere la cifra piu` significativa, lo zero verra` sempre utilizzato meno degli altri.

Allora, cominciamo col dire che un numero **N** e` esprimibile come:

$N = k*10^i + m$ sotto le condizioni $\begin{cases} k < 10 \\ m < 10^i \end{cases}$.

Il numero di volte che uso la cifra **d** tra **1** e **N** e` esprimibile come la somma di **tre** termini:

$f(d;N) = (1) + (2) + (3)$ dove:

1. Numero degli usi di **d** come **prima** cifra ("prefisso") nel contare tra $\mathbf{10^i}$ e **N**. In questo termine, devono essere distinti *tre* ulteriori casi:
   1.1. Se **d<k** sara` prefisso per tutti i numeri da **d0...0 a d9...9**, che sono $\mathbf{10^i}$.
   1.2. Se **d=k** sara` prefisso da **d0...0** sino a **dm**, che sono **m+1**
   1.3. Se **d>k** non verra` mai usato come prefisso.
2. Numero degli usi di **d** in una posizione compresa tra la **seconda** e **l'ultima** cifra ("infisso") per contare da $\mathbf{k*10^i}$ a **N**; in questo caso, utilizzo la cifra **d** per **k** volte e ogni volta la uso $\mathbf{i*10^{i-1}}$ volte; quindi, la cifra e` usata $i*k*10^{i-1}$ volte.
3. Numero degli usi di **d** tra **1** e **m**. In questo caso, sara` pari a **f(d;m)**.

(L'ultimo punto e` risolvibile rendendo la somma *ricorsiva*: quant'era che non vedevate un caso del genere?)

Nel montare **N** aerei, R. ha avuto a disposizione, di ogni cifra, **2N** copie; bisogna quindi trovare **d** e **N** per cui:

$f(d;N) > 2*N$

E` facile notare che **d** non entra mai nel calcolo (serve solo a stabilire "che formula" usare); se considero un intervallo **[1,9...9]**, utilizzero` lo stesso numero di volte tutte le cifre; quindi, *la prima cifra che finisco sono gli 1*. Quindi, devo trovare **N** tale che **f(1;N)>2*N**.

Se cerchiamo il numero nella forma **19...9**, a calcolare la parte 3 della formula c'e` da diventare vecchi; notiamo pero` che il numero "dopo" l'estremo superiore dell'intervallo considerato e` $2*10^q$ (che non contiene "1") e per questo la parte 3 della formula e` bellamente uguale a 0.

Ora, quello che devo verificare e` per quale valore di **q** vale $f(1;2*10^q) > 4*10^q$, considerato che devo contare solo i termini 1 e 2 della formuletta; estrinsecando questi ultimi, deve essere:

$$10^q + 2*q*10^{q-1} > 4*10^q$$

Ossia (semplificando un po`...)

$$2*q > 30$$

da cui, **q=14** va ancora bene, ma per **q=15** ho gia` avuto dei problemi; deve quindi essere:

$$N < 2*10^{15}.$$

Procedendo per interpolazioni successive (sono altamente consigliati metodi piu` "brutali" della dicotomica...) si giunge "rapidamente" alla soluzione (qui la parte ricorsiva va calcolata, poco da fare...)

$$N = 1{,}999{,}919{,}999{,}999{,}981$$

Il che, considerato che ci vuole un'oretta per ogni modellino, mi pare possa tranquillizzare abbastanza il nostro amico.

3.2 [012]

3.2.1 Al paesello si scia!

...Se aspettavo voi, il calcolo lo facevo in costume da bagno, in riva al mare...

Beh, effettivamente era difficoltosetto... Procediamo con calma.

Sia ***B*** l'altezza della neve a mezzogiorno e ***A*** il rateo di incremento dell'altezza; inoltre, supponiamo il tempo 0 a mezzogiorno.

Se al tempo **t** l'altezza della neve e` **At+B**, il momento di inizio della nevicata sara` $t_0 = -\frac{B}{A}$ e quindi lo spazzaneve avanzera` ad una velocita` (derivata dello spazio rispetto al tempo)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{k}{At + B}$$

Se lo spazzaneve parte a ***S=0*** abbiamo, integrando, che

$$S(t) = \left(\frac{k}{A}\right)*\ln\left(1 + \frac{At}{B}\right)$$

Dai dati del problema si ha che ***S(2h)=1.5S(1h)***, ossia che (***a=A*1h)***

$$\ln\left(1 + \frac{2a}{B}\right) = 1.5*\ln\left(1 + \frac{a}{B}\right)$$

imponendo ***x=a/B***, moltiplicando per ***2*** e eliminando i logaritmi,

$$(1 + 2x)^2 = (1 + x)^3$$

risolvendo (OK, Excel... anche se con la formula di Cardano ci si arriva abbastanza facilmente[2]) e ricordando che e\` $t_0 = -\frac{1h}{x}$ si ha $t_0 = 11{:}(90 - 30 * \sqrt{5}$ ossia (suppergiu\`) 11:22:55 (e 77 millesimi...).

3.3 [013]

Questi erano facili... Infatti ce l'avete fatta in "un po\`".

3.3.1 MathLand Airlines

Senza calcoli! Giorgio, in segno di spregio, l'ha liquidato in una nota a pie\` pagina.

Il tempo in cui l'eroplano e\` favorito dal vento e\` un tempo *minore* rispetto a quello in cui e\` contrastato dal vento; quindi, indipendentemente dalla velocita\` del vento, sara\` sempre in ritardo rispetto al tempo impiegato senza vento.

3.3.2 Problema di gondole

...Ma avete deciso di intasarmi la mailbox? Addirittura ***due*** soluzioni! E diverse tra loro! Fortunatamente, i risultati sono uguali.

3.3.2.1 Franco (The Great)

Non solo propone i problemi, ma *li risolve*, anche! Questo ragazzo mi preoccupa...

Essendo pervenuta in modo testo, mi limito ad "aggiustare" le formule.

Il gondoliere A e il più veloce quindi percorrerà fino al primo incontro (L-720) mt, dove L=larghezza del canale.
Il gondoliere B percorre fino al primo incontro 720 mt.
I tempi di percorrenza fino al primo incontro sono rispettivamente (L-720)/v_a e 720/v_b.
Dove v_a e v_b sono le velocità dei gondolieri A e B, essendo uguali i tempi:

$$\frac{L-720}{v_a} = \frac{720}{v_b} \qquad \textbf{[001]}$$

Il tempo di percorrenza di A tra il primo e il secondo incontro è:

$$\frac{720}{v_a} + 10' + \frac{L-400}{v_a}$$

Il tempo di percorrenza di B tra il primo e il secondo incontro è:

$$\frac{L-720}{v_b} + 10' + \frac{400}{v_b}$$

Eguaglio i due tempi e metto a fattore comune ottenendo:

$$(720 + L - 400)v_b = (L - 720 + 400)v_a \qquad \textbf{[002]}$$

Metto a fattore comune l equazione **`[001]`**:

$$(L-720)v_b = 720 v_b \qquad \textbf{[003]}$$

Con le equazioni **`[002]`** *e* **`[003]`** *ho un sistema, ricavo v_a da* **`[003]`** *e sostituisco in* **`[002]`**

$$v_a = \frac{L-720}{720} v_b$$

$$(L+320)v_b = (L-320)\frac{L-720}{720} v_b$$

semplifico v_b e ricavo l:

[2] Tra l'altro, non era sua: l'ha rubata (a Tartaglia, credo) in cambio di un posto da statale...

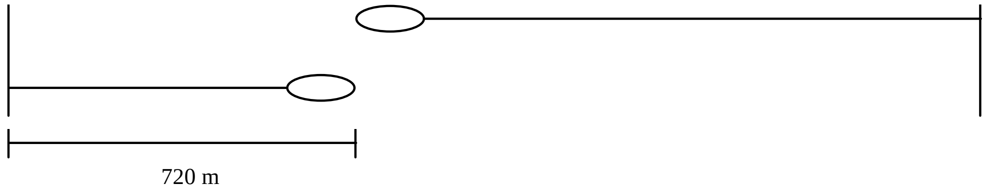
$L = 1760 \text{ mt}$

...Ineccepibile, effettivamente. Perfetto. Ma guardate un po` cosa combinano le signore, quando si mettono d'impegno...

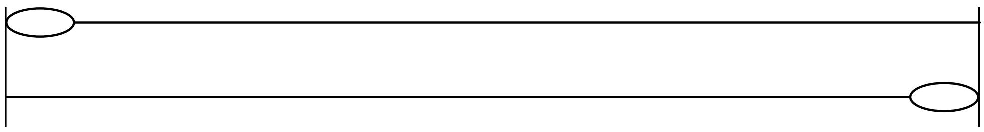
3.3.2.2 Anna

La qui (non) presente, preferisce disegnare, piuttosto che calcolare... Tant'e` che se la cava senza variabili, quindi mi limito a "tradurre" i disegnini...

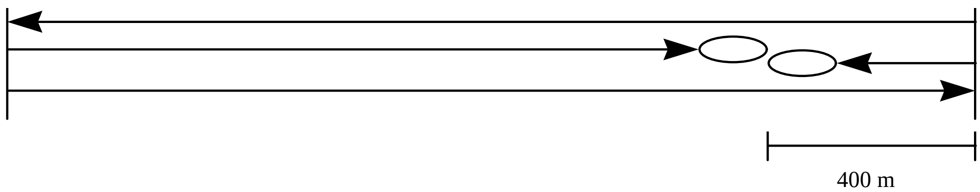
All primo incontro, la somma delle distanze dalla riva e` pari alla larghezza del canale:



Quando sono entrambe ormeggiate, la distanza percorsa e` pari al doppio della larghezza del canale:



Mentre, quando si reincontrano, la distanza percorsa e` il triplo della larghezza del canale:



*Dato che le due gondole hanno viaggiato a velocita` costante per lo stesso periodo di tempo, ogni imbarcazione ha percorso nel terzo disegno il **triplo** della strada percorsa al primo incontro (cioe`, per la barca in basso, 720 metri); da cui, al secondo incontro (terzo disegno) la barca in basso ha percorso 720*3=2160 metri.*

Dal terzo disegno, si vede che questa distanza e` maggiore della larghezza del canale di 400 metri; quindi, il canale e` largo 1760 metri.

La cosa ha, inoltre, avuto un seguito: Anna (*che la xe de Venesia*) mi fa "gentilmente" notare che a Venezia non c'e` un canale cosi` largo: in effetti e` vero, ma S.Marco-Giudecca ci va abbastanza vicino...

Bene signori; potete scegliere...***Un*** problema, ***Due*** soluzioni!

3.3.3 E` il compleanno di qualcuno!

Beh, questo non ci avete neanche provato... Cos'e`, glicemia alta?

L'N-esimo taglio, per garantire il massimo numero di divisioni, deve incrociare i precedenti ***(N-1)*** tagli.Ora, questi ***(N-1)*** tagli dividevano il piano in ***N*** regioni e quindi l'ultimo taglio "crea" ***N*** nuove regioni, dividendo ognuna di queste in due. Quindi, avro` un numero di regioni "aggiunte da ogni taglio pari a:

$$1+2+\ldots+N=\frac{1}{2}N*(N-1)=\frac{N^2}{2}-\frac{N}{2}$$

E fin qui, il calcolo e` *sbagliato*...Infatti, devo tener conto della "regione zero" (la torta senza tagli) che e`, a tutti gli effetti, una "fetta"; quindi,

$$\frac{N^2}{2}-\frac{N}{2}+1$$

4. Paraphernalia Mathematica

Come promesso, la nuova rubrica... Cominciamo con una cosa alla quale sono particolarmente affezionato, anche se ne so poco piu` di quello che vi scrivo di seguito. Da quando me l'hanno raccontata (dalle parti delle medie), ha cominciato a piacermi la matematica. E` mia ferma intenzione, in questi pezzetti, darvi solo le "dritte" strettamente necessarie; mi aspetto, da assatanati della matematica quali siete, che andiate avanti da soli...

4.1 Frazioni Continue Aritmetiche - [001]

Alcune dimostrazioni, da queste parti, sono oltremodo noiose e quindi ve le risparmio; se non ci credete, comunque, sempre pronto... (in caso d'emergenza, rompere il vetro con scritto sopra "*induzione*").

Notazioni

Si definisce *frazione continua* l'espressione:

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\ddots}}$$

e, nel caso $b_1=b_2=\ldots=1$, l'espressione si definisce *frazione continua aritmetica.*

Una frazione continua aritmetica (per evitare incubi al tipografo) si scrive nella forma:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots}}}\equiv[a_1,a_2,a_3,\ldots]$$

E adesso, qualche teoremino...

Calcolo

Teorema 1.1 *Ogni frazione continua aritmetica limitata e` un numero razionale. Viceversa, ogni numero razionale* $\frac{p}{q}$ *si puo` esprimere come frazione continua aritmetica limitata; con l'eccezione indicata nel punto successivo, questo sviluppo e` unico.*

Se uno sviluppo e` finito, effettuando i calcoli a ritroso e` sempre possibile riportare il tutto ad una frazione ordinaria.

Viceversa, sia $\frac{p}{q}$ una qualsiasi frazione ($q>0$); dividendo p per q, si ottiene

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{r_1}{q} \qquad 0 \le r_1 < q$$

In cui a_1 e\` l'unico intero per il quale il resto $r_1$ e\` maggiore o uguale a 0 e minore di q. Se r_1=0 e lo sviluppo vale [a_1].

Se $r_1 \neq 0$ allora

$$\frac{p}{q} = a_1 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}} \qquad 0 < r_1 < q \qquad \textbf{[001.01]}$$

Dividendo nuovamente, si ha:

$$\frac{q}{r_1} = a_2 + \frac{r_2}{r} \qquad 0 < r_2 < r_1 \qquad \textbf{[001.02]}$$

Il primo membro e\` una frazione positiva, quindi $a_2$ e\` l'unico intero positivo per cui il resto r_2 e\` compreso tra 0 e r_1.

Proseguendo in questo modo, il procedimento termine quando ottengo un resto $r_n=0$. Ora, i resti costituiscono una successione decrescente di interi non negativi: $q > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$ sicuramente limitata. Da cui, ripescando tutti i valori:

$$\frac{q}{p} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ldots}} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] \qquad \textbf{[001.03]}$$

Sviluppando l'inversa, si ha:

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

Teorema 1.2 *Ogni numero razionale si puo\` esprimere mediante una funzione continua aritmetica limitata nella quale l'ultimo termine puo\` essere modificato in modo che il numero dei termini dello sviluppo sia pari o dispari.*

Infatti, dall'identita\` sull'ultimo termine dello sviluppo $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$ si puo\` sostituire lo sviluppo [001.03] con lo sviluppo

$$\frac{q}{p} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n - 1, 1] \qquad \textbf{[001.04]}$$

Che ha un termine *in piu\`* della [001.003]. Nel caso particolare in cui sia $a_n=1$ si ha $\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{a_{n-1} + 1}$ e quindi l'espressione diventa:

$$\frac{q}{p} = [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1} + 1] \qquad \textbf{[001.05]}$$

Che ha un termine *in meno* della [001.03]

Ridotte

Dato uno sviluppo in frazione continua aritmetica ***[a₁,a₂,...aₙ]***, formiamo le frazioni:

$$c_1 = \frac{a_1}{1} \ ,$$

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} \ ,$$

$$c_3 = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

e avanti in questo modo, generando le varie *ridotte* della frazione originaria; l'*n-esima* ridotta e\` uguale alla frazione continua medesima. Le approssimazioni delle ridotte vengono indicate con la notazione $c_i = \frac{p_i}{q_i}$.

Teorema 2.1 *I numeratori e i denominatori delle ridotte di una frazione continua soddisfano le uguaglianze*

$$p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2} \qquad i=3,4,5,...n \qquad \textbf{[002.01]}$$
$$q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$$

con i valori iniziali

$$p_1 = a_1 \qquad p_2 = a_2 a_1 + 1 \qquad \textbf{[002.02]}$$
$$q_1 = 1 \qquad q_2 = a_2$$

Questa non ve la dimostro... E\` lunga, noiosa e scarsamente soddisfacente.

Dal punto di vista pratico, ***imponendo*** i valori:

$$p_0 = 1 \qquad p_{-1} = 0 \qquad \textbf{[002.03]}$$
$$q_0 = 0 \qquad q_{-1} = 1$$

si giunge allo stesso risultato.

Il calcolo di solito viene effettuato tabulando i valori; ad esempio,

$$\frac{120}{49} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} = [2,2,4,2,2]$$

Si ricava:

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	2	4	2	2
p_i	0	1	**2**	**5**	**22**	**49**	**120**
q_i	1	0	**1**	**2**	**9**	**20**	**49**
$c_i = \frac{p_i}{q_i}$			$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{120}{49}$

In cui la parte in grassetto e` calcolata attraverso le [002.01] e [002.03].

Per verificare di aver fatto correttamente il calcolo, l'ultima delle ridotte deve coincidere con la frazione originale.

Teorema 2.2 *Dato uno sviluppo in ridotte, e`:*

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \qquad \textbf{[002.04]}$$

...Che, anche se sembra di un'inutilita` quintessenziale, assumera` la sua importanza quando meno ve l'aspettate.

Couriously and Couriously!

Per "far di calcolo", un metodo divertente e` quello che segue, con la stessa frazione di prima:

```
                        120 | 49
                         98 |___
                  49 | 22      2
                  44 |___
            22 | 5      2
            20 |___
       5 | 2      4
       4 |___
  2 | 1      2
  2 |___
 ---     2
  0
```

Si, lo so, non e` molto chiara... Provateci voi, a fare una divisione "a manina" usando Word.

In sostanza, divido 120 per 49: quoto 2, resto 22.

Prendo il divisore di prima (49) e lo divido per il resto ottenuto (22): quoto 2, resto 5.

...E avanti cosi`, sin quando non ho resto 0; i quoti (oh, stupore!) sono i termini dello sviluppo in frazione continua aritmetica.

Direte: "E cosa ci faccio, la birra?" Non lo so, fate voi. Io le trovo una meraviglia, durante le riunioni noiose...

EpaEpaEpaAndale!

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

Alice Riddle