Hanc Marginis Exiguitas Non Caperet

# Rudi Mathematici

Numero 011.doc - 1999-12



# 1. Editoriale

*Ogni festa porta con se` un po` di cupidigia*
**Linus van Pelt**

Per voi si approssima un tranquillo periodo di ferie, in cui (almeno speravate) non avrete altro oneroso incarico che aprire lo spumante, finire il panettone e risolvere i problemi di matematica dei fratellini.

**E invece no!**

Lo sapete come si chiama la renna davanti di Babbo Natale, quella che ha il naso rosso e illumina il percorso alla slitta? Beh, ve lo dico io. Si chiama Rudolph. Oltretutto, da quando il capo "si e` un po` irrobustito" (dice lui), indovinate chi deve scendere per i camini...

Capite quindi che, in questo periodo dell'anno, tra i *Rudi Mathematici* e questo lavoraccio della notte di Natale mi ritrovo un po` impegnato; mi pare giusto, quindi, rifilarvi un altro problema di quelli tosti.

Buon Natale[1]

*Rudy d'Alembert*
*Piotr R. Silverbrahms*
English Version is powered by *Alice Riddle*

[1] **Nota per i curiosi**: i miei colleghi si chiamano Dasher, Dancer, Prancer, Vixen, Comet, Cupid, Donner e Blitzen.

# 2. Problemi

## 2.1 Problema da un altro Rudolph

Si, lo so che e` un nome poco diffuso, tant'e` che al paesello (600 abitanti) ce ne sono solo tre.

Uno di questi (che per comodita` chiameremo R.) e` un appassionato di modellismo, e si diverte a montare (tra le altre cose) aeroplanini (il terzo e` un geometra, quindi non conta).

Questi aeroplanini hanno una caratteristica particolare: in ogni scatola di montaggio, oltre all'aeroplanino, sono presenti **due** serie complete delle cifre da 0 a 9.

Il Rodolfo R. (che e` molto ordinato) ha deciso di spiccicare un numero di serie su ognuno degli aeroplanini, usando queste cifre (solo quelle necessarie) e tenendo le cifre restanti per la numerazione dei prossimi modellini. Per intenderci meglio: il primo aeroplanino e` marcato "**1**" (e vi restano una serie completa piu` le cifre 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 per i prossimi modellini), il secondo e` targato "**2**" (e vi restano tre serie nuove -due dal nuovo modellino piu` quella di prima- e le cifre 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), il centesimo e` targato "**100**" (e vi restano...). Insomma, nessuno zero davanti. Inoltre e` da notare che sin quando non ha finito un modello (numerazione compresa) non apre la scatola del successivo.

Ora, il problema che ci si pone e`: *qual'e` il primo aereoplanino che non posso numerare?*

Il mio consiglio e` di trovare una formula generale e poi di procedere per tentativi, comunque fate voi.

## 2.2 Auguri per Natale

Dovete sapere che i calcoli crittografici proprio non mi piacciono; questo, comunque, mi pare troppo in tema per non presentarlo...

```
              A U G U R I   X
              N A T A L E
           -------------------
             * * * * * * *
           * * * * * * *
         1 9 * * * * *
         * * 3 * 7 *
     * * * * * * * *
   * * * * * * *
   -----------------------------
   * * * * * 0 0 * 0 * * *
```

Sappiate che a lettere diverse corrispondono cifre diverse e **gli unici zeri sono quelli che compaiono nel risultato** (la "X" e` un segno di moltiplicazione, non un numero).

Come vi ho detto, questo tipo di problemi non mi piace molto; comunque, se a voi piacciono, fatemelo sapere e ne cerco altri.

# 3. Soluzioni e Note

## 3.1 [009]

### 3.1.1 Salvate l'anatra!

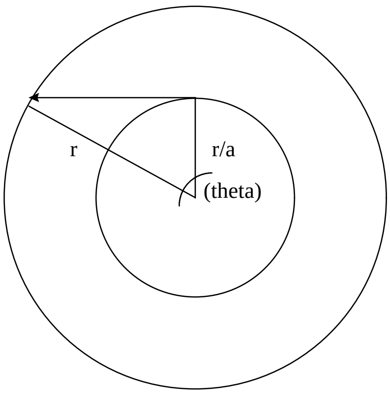
Possibile che a nessuno gliene freghi niente di una simpatica paperottola che vuole fare l'intelligente?

Si presuma che il rapporto tra le due velocita` sia **a** e il raggio dello stagno sia **r**. La miglior strategia della papera sembra essere:

1. Nuotare lungo un cerchio di raggio $\frac{r}{a} - d$ concentrico con lo stagno sin quando si trova diametralmente opposta alla volpe.
2. Nuotare per una distanza $d$ lungo una linea radiale verso la riva opposta alla volpe
3. Verificare da che parte gira la volpe per percorrere la circonferenza e girare ad **angolo retto** nella direzione opposta (se la volpe non si muove, ripetere il passo (2)).
4. Tenere d'occhio la volpe; se cambia direzione in modo tale da ritrovarsi diametralmente opposta alla papera, tornare al passo (2); altrimenti, continuare dritti sin quando non si raggiunge la riva
5. Volare via

Il valore $d$ deve essere abbastanza piccolo da permettere comunque la fuga dalla volpe.

Vi faccio un disegnino, a parte il delta:




La chiave di questa strategia e` che la papera all'inizio segue un cammino radiale che la allontana dalla volpe sin quando la volpe decide da che parte girare. In questo momento, la papera inizia un nuovo percorso che interseca il cerchio in un punto ad una distanza **maggiore** della semicirconferenza rispetto alla posizione e al verso del moto attuale della volpe; in pratica, la papera si muove sulla tangente ad un cerchio di raggio $\frac{r}{a}$; se definiamo:

$$q = \arccos\left(\frac{1}{a}\right)$$

allora la papera deve nuotare per un percorso di lunghezza:

$$L_p = r * \sin q + d$$

Mentre la volpe deve correre per un percorso di lunghezza:

$$L_v = r * (p + q) - a * d$$

lungo il cerchio. Se $d \to 0$, la papera riuscira` a fuggire solo se e`:

$$r * (p + J) < a * r * \sin J$$

cioe` se

$$p + \arccos\left(\frac{1}{a}\right) - a * \sqrt{a^2 - 1} < 0$$

e si risolve in **a**.

Giocherellando in Excel (come vi dicevo e` concesso, questa volta...), ci vuole poco a vedere che il valore critico e` (suppergiu`) **a** = 2.17.

## 3.2 [010]

### 3.2.1 Corri & Cammina

Effettivamente, era facile. La soluzione migliore e` addirittura *senza calcoli*.

Tanto per cominciare, e` assolutamente insignificante se un bambino prima cammina e dopo corre o viceversa; quindi, supponiamo prima corrano tutti e due (e dopo cammininio tutti e due); in questo modo, per "un po`", andranno assieme; poi, uno dei due smettera` di correre mentre l'altro continuera` per assolvere al suo compito; sara` di sicuro questo ad arrivare prima.

Arrivati a meta` della distanza, il primo bambino comincera` a camminare; l'altro, dovendo correre per meta` del tempo, dovra` **continuare a correre**; il primo, per fare la restante meta` del trasporto impieghera` di sicuro piu` tempo del secondo. Quindi, si impiega piu` tempo a camminare per meta` della distanza.

### 3.2.2 Anche in matematica ci sono i buchi neri!

Come hanno avuto modo di notare quelli che si sono presi la briga di provare con qualche numero, dopo un po` ci si stabilizza sul 123; trovo la cosa, effettivamente, piuttosto carina.

"...Ma perche` i pesci d'aprile fuori stagione?" Semplice; mi pareva che Piotr stesse passando un periodo di disamore per la matematica ricreativa, quindi ho deciso di vedere se era solo disattenzione momentanea o una cosa piu` grave. Grande e` stata la mia gioia nel vedere (a stretto giro di posta) la soluzione. Dunque:

*A) Per costruzione, qualunque sia il numero iniziale, ad un certo punto diventano di tre cifre (vedi nota "c" in fondo...)*
*B) Da A consegue che il terzo e successivi numeri della serie avranno sempre come ultima cifra "3"*
*C) Poiche' la terza cifra e' sempre la somma delle due precedenti, i casi possibili si stabilizzano in:*
   *(a) - 123*
   *(b) - 213*
   *(c) - 033*
   *(d) - 303*

*che sono tutti i possibili, e che generano tutti un bel "123" al passo successivo.*

*Ne concludo che:*

*a) Ci stai prendendo per i fondelli*
*b) Non esistono numeri che non finiscono con 123*
*c) Non esistono neppure numeri che "richiedono un gran lavoro", a meno che nopn cosideri quelli che costringono a scrivere "Il numero di pari/dispari/totale" con piu' cifre.... ma anche qusti si riducono, come minimo, di un fattore grosso ogni volta.(situazione: cento cifre iniziali, si trasforma al massimo in sette cifre ; dieci in tre, mille in nove....'nsomma, scende mica tanto lenta....*

*Zozzone*

...'nsomma, Piotr e` sempre tra noi, a vivacizzare con il suo turpiloquio il **lento** fluire delle vostre soluzioni...

Tra le altre cose, e` stato il primo a farmi notare che l'undici novembre era un giorno "tutto dispari": infatti, tutte le sue cifre sono dispari, come potete notare (formato ISO8601):

**19991119**

e, effettivamente, questo mese ce n'erano un po`. Numeri del genere sono piuttosto rari: riuscite a trovarne qualcuno *precedente* il 19990101? O a trovare i *prossimi*? E per i *completamente pari*? Se avete voglia di fare un po` di conti e di scrivermi qualcosa, vi prego di lavorare nel formato indicato: rigorosamente 4-2-2, senno` e` troppo facile.

### 3.2.3 Sempre dal paesello

Allora, quante scatole avete rotto cercando di risolverlo?

All'inizio, abbiamo un numero infinito di scatole chiuse; armato di santa pazienza (senno` niente regali) il primo bambino le apre tutte; a questo punto, abbiamo tutte le scatole aperte.

Ora, ogni volta che due bambini "agiscono" su una scatola la riportano nello stato di aperto; la domanda quindi e`: *quando un bambino agisce su una scatola?*

E` evidente che l'azione avviene quando un bambino e` un **divisore** (non necessariamente primo) della scatola; siccome pero` quando un numero ha un divisore ne ha di solito anche un altro, queste scatole (almeno in prima istanza) dovrebbero essere tutte aperte; ad esempio, la scatola **10** sara`:

1. Aperta dal bambino 1
2. Chiusa dal bambino 2
3. Aperta dal bambino 5
4. Chiusa dal bambino 10

Tutti i bambini successivi la ignorano bellamente.

Consideriamo pero` la scatola **9**: essa sara`:

1. Aperta dal bambino 1
2. Chiusa dal bambino 3
3. Aperta dal bambino 9

Quindi, le scatole aperte sono quelle che hanno un numero *dispari di divisori*; siccome per ottenere un numero bisogna moltiplicarne uno per un altro (teorema fondamentale dell'algebra, molto mal posto), gli unici numeri che hanno un numero dispari di divisori *sono i quadrati*.

E` implicito che ci aspettiamo il regalo.

*Rudy d'Alembert*
*Piotr R. Silverbrahms*
*Alice Riddle*