Rudi Mathematici

Numero 010.doc - 1999-11

1. Editoriale

Cala novembre e le inquietanti nebbie / Gravi coprono gli orti...

F. Guccini

...che mi pare un'ottima ragione per starsene a casa, con una pipa carica (beh, io.. Voi fate come vi pare), il caminetto acceso e qualche problemino da risolvere.Siccome pero` vorrei che mi rispondeste entro il millennio[1], i problemi questa volta sono facilifacilifacili; sto prendendo la rincorsa per il numero di Natale.

Tra l'altro, alcuni di voi hanno avuto il coraggio di ammettere che alcuni problemi erano "un po` duri"; effettivamente, i problemi degli ultimi numeri erano pesanti, e posso capire che vi sia necessario un tempo maggiore per risolverli; a partire da questo numero, a insindacabile giudizio della redazione, per i problemi tosti raddoppieremo il tempo a disposizione; del numero 9, quindi, trovate la soluzione di un solo problema (quello facile) mentre per l'altro (che era tosto ma carino) dovrete aspettare il prossimo numero.

Giu` dalle brande!

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

[1] Mi raccomando: quando e` passata a tutti la sbronza per le feste del 2000, spiegate che questa era solo la prova generale e che il millennio comincia il 1° gennaio 2001. Mi aspetto che *almeno questo* problema riusciate a risolverlo...

2. Problemi

Come promesso, facili, questa volta...

2.1 Corri & cammina

Allora, questa volta sto attento a non sbagliare le parole.

Supponiamo di avere due bambini (presi a prestito dal problema successivo), che camminano e corrono alla stessa velocita`. Partono tutti e due dallo stesso punto, devono arrivare tutti e due nello stesso punto e fanno la stessa strada.

Uno corre per meta` della strada e cammina per l'altra meta`; l'altro cammina per meta` del tempo e corre per l'altra meta`.

Quale arriva prima?

2.2 Anche in matematica ci sono i buchi neri!

Questo era un "pesce d'aprile" fuori stagione per Piotr che, devo dire, non c'e` cascato.

1. Scrivete un numero "grosso" (7-8 cifre, per intenderci) (ad esempio, 314159265358979)
2. Considerando lo zero pari, formate un nuovo numero ottenuto scrivendo di seguito il numero di cifre pari, il numero di cifre dispari, il numero di cifre totali (ad esempio, 41115)
3. Iterate il passo (2) (al passo successivo, ad esempio, 145 e avanti cosi`).

Oibo`! Perche`?

2.3 Sempre dal paesello

Non so se si e` capito, ma e` un po` che passiamo i fine settimana al paesello; i pargoletti hanno socializzato con una banda di giovani teppisti (coetanei) e quando si trovano a casa nostra, l'Orda d'Oro di Gengis Khan sembrava un convento di orsoline. Questo mi ha dato l'idea per un grazioso giochetto.

Supponiamo di avere un numero infinito di bambini (e quello c'e`) e un numero infinito di scatole (basta dire a ogni bambino di portarne una). Il gioco si svolge in questo modo:

All'inizio, tutte le scatole sono chiuse.

Passa il primo bambino e, cominciando dalla prima, apre tutte le scatole

Passa il secondo bambino e, cominciando dalla seconda, cambia stato a una scatola si e una no.

Passa il terzo bambino e, cominciando dalla terza, cambia stato a una scatola si e due no

E avanti cosi`, sino ad esaurimento dei bambini.

Alla fine, che scatole sono aperte? E quali chiuse? E perche`?

3. Soluzioni & Note

3.1 [008]

3.1.1 La coda a teatro

Data l'antipatia per Excel e il calcolo automatico, ho cercato una soluzione indipendente.

Bene, la mia idea e`, approssimativamente, questa:

Sia ***P(k)*** la probabilita` che il ***k***-esimo della fila vinca; questo significa, tra l'altro, che i primi ***(k-1)*** della fila davanti a lui hanno compleanni distiniti.

Sia inoltre ***Q(k)*** la probabilita` che i primi ***k*** abbiano compleanni distinti; questo vuol dire che nessuno dei primi ***k*** vince. Deve essere:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{k} P(i) = 1 - Q(k) \\ \sum_{i=1}^{k-1} P(i) = 1 - Q(k-1)\end{array}\right\} \Rightarrow P(k) = Q(k-1) - Q(k) \qquad [1]$$

Ora, per amor di complicazione, sia ***D*** il numero di giorni dell'anno; se i primi ***(k-1)*** hanno compleanni distinti, allora per la ***k***-esima persona si ha che:

$$P(vincere) = \frac{k-1}{D}$$

e che (il tilde sta per "non")

$$P(\sim vincere) = \frac{D-k+1}{D}$$

Questo secondo caso significa che si sono generati ***k*** compleanni distinti; allora deve essere:

$$Q(k) = Q(k-1) * \frac{D-k+1}{D} =$$

$$= Q(k-1) * \left(1 + \frac{k-1}{D}\right) =$$

$$= Q(k-1) - Q(k-1) * \left(\frac{k-1}{D}\right)$$

Si noti che dalla prima di questo gruppo si ottiene anche

$$Q(k-1) = Q * \frac{D}{D-k+1} \qquad [2]$$

Mentre dall'ultima:

$$Q(k-1) - Q(k) = Q(k-1) * \left(\frac{k-1}{D}\right) \qquad [3]$$

Sostituendo **[2]** in **[3]**, si ottiene:

$$Q(k-1) - Q(k) = Q(k) * \frac{k-1}{D} * \frac{D}{D-k+1} =$$

$$= Q(k) * \frac{k-1}{D-k+1} \qquad [4]$$

sostituendo ***k=i+1***, si ha:

$$Q(i-1) - Q(i) = Q(i) * \frac{(i-1)}{D-i+1}$$

$$Q(i) - Q(i+1) = Q(i) * \frac{i}{D}$$

Da cui:

$$P(k) - P(k-1) = P(i+1) - P(i) =$$
$$= \left(Q(i) - Q(i+1)\right) - \left(Q(k-2) - Q(k-1)\right) =$$
$$= Q(i) * \left(\frac{i}{D} - \frac{i-1}{D-i+1}\right)$$

Il massimo di questa funzione risulta essere quello per cui:

$$\frac{x}{D} - \frac{x-1}{D-x+1} = 0$$

Ossia::

$$x^2 - x - D = 0$$

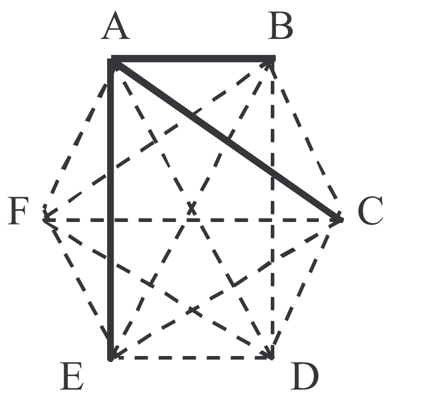
Da cui (per ***D=365***) si ricava ***x=19*** e quindi ***k=20.***

...Tutta 'sta manfrina per non pagare un biglietto.

3.2 [009]

3.2.1 Antipatico!

Il modo migliore per non capirci niente e` fare un disegnino; supponiamo **A,...,F** sia il branco di scemi, e che le linee rappresentino rapporto che c'e` tra di loro; Non essendoci un gruppo di persone che si trovano mutuamente simpatiche significa semplicemente che *non ci devoo essere triangoli formati da linee dello stesso tipo*.



Nel caso in esame, consideriamo **A**; siano linee simpatiche o antipatiche, almeno **tre** devono essere dello stesso tipo.

1. Supponiamo che le tre linee continue del disegno siano di antipatia. Consideriamo **B, C, E**: tra le linee che li uniscono deve essercene almeno una di antipatia (altrimenti avremo un triangolo simpatico, vietato). In questo modo, con **A** come terzo vertice, abbiamo trovato il triangolo di antipatici. Q.E.D.

2. Supponiamo ora che le tre linee continue del disegno siano di simpatia. In questo caso, nessuna delle linee che uniscono tra di loro **B, C, E** puo` essere di simpatia (formerebbe lo stesso triangolo simpatico di prima); quindi, in questo caso **BCE** deve essere un triangolo di persone che si stanno antipatiche. Q.E.D.

3.2.2 Salvate l'anatra!

Siccome nessuno si e` degnato di cercare una soluzione, non ve lo dico. Tutti presi dal problemino del compleanno, nessuno si e` curato di fare qualcosa per il simpatico pennuto; dipendesse da voi, la specie si estinguerebbe nel giro di un mese...

Vabbuono, vi do un aiuto; si puo` fare a mano, ma alla fine il risultato e` un'eq uazionaccia per la quale **anch'io ho usato Excel**... quindi, avete il mio placet ad utilizzarlo anche voi...

ValeValete

Rudy d'Alembert
Piotr R. Silverbrahms
Alice Riddle