Rudi Mathematici

Numero 009.doc - 1999-10

1. Editoriale

Noto con piacere che, sul nuovo "logo" del giornalino, si e` svolto il solito cocente dibattito tra appassionati.

Siccome non avete dato segni di vita, per punizione vi racconto l'origine.

Pierre de Fermat (17/8/1601-12/1/1665) aveva scritto, a margine della sua copia dell'*Arithmetica* di Diofanto:

"$x^n+y^n=z^n$ non ha soluzioni (x,y,z,n) intere per n>2; ho trovato una bellissima dimostrazione di questo fatto, ma *questo margine e` troppo piccolo per contenerla*".

Al momento, l'ipotesi piu` accreditata e` che ,lavorando con le congruenze, si sia preso una bufala che non finiva piu`. Tra le altre cose, in nessuno dei suoi scritti successivi se ne parla. Siccome quando i problemini li faceva *lui* la gente cercava di risolverli, hanno continuato a cercare la soluzione e (per quanto ne so) c'e` arrivato *Wiles* nel 1994, con una dimostrazione di piu` di 200 pagine (alla faccia del margine...)

Sto parlando da solo.

Rudy d'Alembert

Piotr R. Silverbrahms

English Version is powered by *Alice Riddle*

2. Problemi

2.1 Antipatico!

Dal punto di vista della formulazione, questo sembra un parente stretto del problema delle strette di mano (tant'e` che arriva da Giorgio), ma la soluzione (almeno quella che ho trovato io) e` completamente diversa. Vediamo dove andate a parare voi.

Questa volta, si sa benissimo in quanti siamo: sei persone, e vengono notate alcune interessanti caratteristiche del gruppo (di alienati, per stare a discutere certe cose...).

1. Nel gruppo, le persone o si stanno antipatiche, o si stanno simpatiche.
2. Due persone, tra di loro, stanno nello stesso rapporto (se **A** e` simp./ant. a **B**, **B** e` simp./ant. ad **A**)
3. Non c'e` un sottogruppo di tre persone che si stiano mutuamente simpatiche

Riuscite a dimostrare che ci sono almeno tre persone che si stanno *mutuamente antipatiche*? Adesso non cominciate a litigare!

2.2 Salvate l'anatra!

Un altro problmena da MathLand (dove scorre il *Math River*). Qui, ci troviamo di fronte a uno dei tipici stagni perfettamente circolari di raggio **r** che abbelliscono la regione.

All'interno del nostro stagno (ragionevolmente vicino al centro) sta nuotando una papera. Una volpe affamata (che non sa nuotare) e` sulla sponda dello stagno, ad aspettare che la papera si avvicini. La volpe puo` correre piu` veloce di quanto la papera possa nuotare (diciamo che il rapporto delle loro velocita` e` **a**). Per riuscire a volare via, la papera deve raggiungere la riva. Si suppone che la papera non possa volare via partendo da dentro l'acqua.

Qual'e` la miglior strategia per la papera? Data una strategia, quanto dovrebbe essere piu` veloce la volpe rispetto alla papera per riuscire a prenderla?

3. Soluzioni & Note

3.1 [008]

3.1.1 La coda a teatro

Devo confessare che non mi aspettavo nessuna soluzione... Beh, prima vi racconto una cosa (opinione personale, quindi liberi di dissentire).

Ogni tanto (raramente), come avrete notato, vi scrivo "...provando con Excel...". Beh, non mi piace. La mia idea preferita di risoluzione di un giochino matematico e` tanta carta, matita, gomma da cancellare (grande) e verso la fine, se proprio serve, una passatina con il regolo calcolatore (credo di essere una delle ultime persone sotto i cinquant'anni in grado di utilizzarlo: ho qualche simile interessato a decantare le lodi dell'Aristo 829?). Considero Excel (o un programma scritto all'uopo: e` gia` successo anche questo) l'ultima spiaggia della forza bruta, per la soluzione dei giochi matematici. Detto questo, liberi di usarlo: le vostre soluzioni verranno pubblicate lo stesso.

Dopodiche`, passiamo al problema.

Due soluzioni! Ma il bello e` che sono *diverse*, anche nel risultato. Beh, almeno non litigano per mettersi in fila...

3.1.1.1 Piotr

Allora (con poche modifiche: le parti non in corsivo):

Mi sembra che l'ingresso gratuito sia riassumibile dalle seguenti condizioni:

A) Le m persone di fronte a me hanno tutte data di nascita (giorno-mese) diverse tra loro

B) Una di loro ha il compleanno coincidente con il mio.

Ora, come disse un noto matematico moderno nel terzo numero di una sua pubblicazione, in riferimento ad un quesitello proposto nel secondo numero della pubblicazione medesima, (cito:)

Quando io ho chiesto il compleanno alla prima persona, le probabilita` che la seconda persona sia nata lo stesso giorno sono, chiaramente, 1/365 e quindi ho una probabilita` di perdere pari a 364/365.La data di nascita della TERZA persona, per perdere, deve essere una qualsiasi sulle 363 restanti (visto che ho perso con le prime due); da cui, la probabilita` di perdere con 3 persone risulta (364/365)(363/365)....*

Ora, io ci credo e mi piglio la briga di generalizzare; detto N il numero dei giorni dell'anno (365), m il numero di persone davanti a me (se contiamo anche me, diventiamo n; insomma n=m+1), mi pare di poter concludere che la condizione A) (nessuna delle m con compleanno coincidente) sia ripilogabile in:

*(N-1)!/[N^m * (N-m-1)!]*

(che schifo scrivere le formule in una mail....).

La seconda condizione mi pare cosi' semplice da fare schifo.... Per ipotesi, ognuno degli m ha compleanno diverso; ergo, la probabilita' che io ce l'abbia uguale ad uno di loro e', papale papale, m/N. Allora, moltiplica la roba la' sopra per m/N; ricorda che N e' una costante, e quindi hai una funzioncella ad una sola variabile (perdipiu' intera....); deriva la funzioncella e poni la derivata uguale a zero e.... Vabbe', qui sto facendo lo spanizzo.... (con la variabile dentro un fattoriale, poi.... un elevazione a m al denominatore... mamma mia. Sembra una roba che mi tira fuori addirittura un logaritmo....) niente da fare. La derivata non la so fa'.... Pero, dai, con Excel....! In una colonna metti il formulone della condizione A), in quella accanto la condizione B), nella terza fai il prodotto delle due.

Ti viene fuori una serie di numeri che trova il massimo per m=19, col valore che dicevo sopra... Poi prendi la terza colonna, e ci fai un grafico. E vedi una curva abbastanza elegante, che sale in fretta fino al massimo e poi decresce piu' lentamente... Ci pensi, e ti ricorda una maxwelliana, ma non hai assolutamente idea se sia vero o no. Ci pensi ancora un attimo, e ti sembra di ricordare che le maxwelliane le incontravi con chi-quadro e funzioni Gamma (Funzione Gamma! il fattoriale dei seminteri!). Concludi che ti stai rincretinendo, e che e' ora che Rudy ti spieghi, al solito, perche' non hai capito un c....

A questo punto ho segnalato a Piotr che potevo anche essere d'accordo, ma avrei quantomeno preferito una soluzione con carta & matita; fidando piu` in Excel che nella mia capacita` di fare conti, ho chiesto di verificare effettivamente la formula e di vedere il file. La risposta e` stata:

La condizione a) e' che tutti i precedenti abbiano compleanni diversi. Quindi, per m=2, qual'e' la probabilita' che i due compleanni coincidano? Non credo esistano soluzioni diverse dal banale 1/365, con conseguente 364/365 di probabilita' che la condizione richiesta sia soddisfatta. Per m=3? again, che valga la condizione per m=2, e che sia pure soddisfatta quella che il terzo li abbia diversi da entrambi. Come dici tu in RM3, che sia insomma (364/365)(363/365). E via cosi'... Per m=10, ad esempio, abbiamo la sfilza:*

Pa(m=10)=(365/365)(364/365)*(363/365)*(362/365)*(361/365)*(360/365)*(359/365)*(358/365)*(357/365)*(356/365)*

dove ho aggiunto per completezza il caso m=1 (la probabilita' che 1 persona non abbia due compleanni coincidenti, esprimendo la certezza con 365/365)

In formulette, secondo la mia notazione, 365=N, m=10.

*Ora, il denominatore e' presto fatto (N^m). Il numeratore e' dato dal prodotto (365*364*363...*356). Ora, il fattoriale N! e' banalmente (1*2*...*365). se lo divido per (1*2*...*355), ottengo ovviamente quello che mi serve al numeratore, e poiche' 355=N-m, il mio numeratore e' N!/(N-m)!... insomma, quella pippa del binomio di Newton.*

Metto insieme numeratore e denominatore, e viene

[N!/(N-m)!][1/N^m].*

Ok, cosi' elimino il (m-1) che ti dava fastidio. Riesco a farlo grazie a quel gioco del 365/365, che ad occhio e croce non dovrebbe cambiare niente, no?

Adesso moltiplico per la condizione b (che sia uguale a m/M mi pare innegabile.... gli m sono tutti diversi per definizione, e quindi rappresentano ottimamente i casi "positivi" sul totale dei "possibili" N.

Con questa notazione, la probablita' totale mi sembra essere: (dopo facili e veloci passaggi....)

P( )= [m(N-1)!] / [N^m*(N-m)!].*

*Ora, nel foglio excel allegato trovi, nella colonna C la P(A) calcolata ricorsivamente, poi la P(B) e poi il prodotto delle due. Nelle colonne a fianco, ti ho messo anche il valore m^2-m-2N, che, come dici tu, non coincide con il mio. E non coincide mai, anche se per valori di N piccolo, ovviamente, si avvicinano molto. Ancora a fianco, c'e una colonna che calcola P(A)*P(B) direttamente, e non ricorsivamente. Ma puoi farla funzionare solo per N relativamente piccolo, perche' e' zeppa di fattoriali di N che esplodono in fretta.*

Il guaio e` che il "foglio excel allegato" e` in Office '97, mentre io sono fermo al '95... Solo due giorni dopo ho avuto a disposizione la versione corretta. Secondo voi, quanto ho dormito quei due giorni?

Per evitare le proteste di un giornalino di qualche giga, anziche` il foglio vi allego lo schema delle formule: tabulatevelo, se volete vedere "cosa succede"....

m=persone davanti alla coda

n= posizione del vincitore (=m+1)

P(a)=probabilita` che le m persone abbiano tuttte compleanni diversi

P(b)=probabilita` che una delle m persone abbia il compleanno uguale all'n-esimo

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
5	m	n	P(a)	P(b)	P(a)*P(b)	n^2-n-2N	[P(a)*P(b)]teorica
6	0	1	1	=A6/365	=C6*D6	=B6*B6-B6-2*365	=(A6*FACT(365-1)/365^A6*FACT(365-A6)
7	=A6+1	=A7+1	=C6*(365-A7+1)/$A$1	=A7/365	=C7*D7	=B7*B7-B7-2*365	=(A7*FACT(365-1)/365^A7*FACT(365-A7)

…mi pare, a dir poco, lapalissiano.

Il bello e` che, poco dopo...

3.1.1.2 Alice

Hu hu, la "Solutrix Maxima"... Anche lei con Excel ('95, questa volta...). Allora:

L'idea è che ad ogni passo la probabilità di "vincere" é data dalla probabilità di azzeccare un compleanno già passato per quella che nessuno ci sia riuscito ai passi precedenti.

Se n é la posizione nella coda sia p_n la probabilità di vincere in quella posizione:

$p_2 = p$

(1/365 o 1/366, a seconda di come preferisci complicarti la vita... l'anno bisestile ha in realtà una probabilità più bassa, ma facciamo senza...)

$p_3 = 2\, p\, (1-p_2)$

$p_4 = 3\, p\, (1-p_2)\, (1-p_3)$

$p_n = (n-1)\, p\, (1-p_{n-1})\, (1-p_{n-2})\, (1-p_{n-3})\ldots..$

Mi sembrava una funzione bruttina così, ma quando ho provato a giocarci la situazione é ulteriormente peggiorata, per cui ho provato ad aggirare il problema in un altro modo. Questa é una funzione di probabilità, che deve quindi avere il suo bell'andamento concavo verso il basso e con il suo bravo massimo quando smette di crescere, per cui ho pensato che potesse essere una buona idea calcolare p_n-p_{n-1}, e vedere quando cambia segno. A suo modo é come fare la derivata e annullarla.

Per prima cosa mi sono ricavata p_{n+1} in funzione di p_n, che torna anche utile per fare i conti con Excel:

$$p_{n+1} = \frac{n}{n-1}\,(1-p_n)\,p_n$$

Da cui:

$$p_{n+1} - p_n = \frac{p_{n+1}}{n-1}\,(1 - n\,p_n)$$

Per cui la probabilità é massima quando n p_n si avvicina a 1.

Questo non aiuta tantissimo, ma viene anche facendo i conti in Excel:

Come sopra, vi inserisco solo i valori:

	A	B	C	D	E	F
	n	p	1-p	Prod(1-p)	1-1/np	pn-pn-1
3	2	=1/365	=1-B3	=PRODUCT($C$3:C3)	=ABS(1-1/A3*B3)	
4	=A3+ 1	=(A4-1)*D3/365	=1-B4	=PRODUCT($C$3:C4)	=ABS(1-1/A4*B4)	B4-B3

...e anche qui, la comprensione e` lasciata come facile esercizio allo studente...

3.1.1.3 E Allora?

Se vi prendete la briga di fare i conti, vedete che a Piotr viene 20, mentre ad Alice viene 27.

Fermo restando che le signore hanno sempre ragione, cosa ne dite? Questa volta il problema e`: "Date due soluzioni, chi ha ragione?".

3.1.2 La bionda o la bruna?

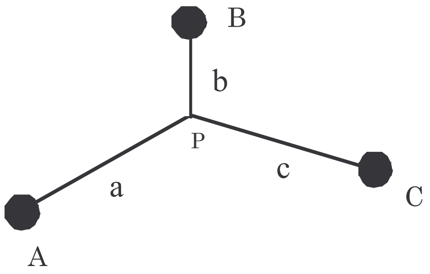
Beh, questo era facile...

Come ricordate, vi ho detto che i tram passano (in entrambe le direzioni) ogni 10 minuti; supponiamo (senza perdere ne` generalita` ne` tram) che quello diretto verso Barriera di Milano (la bruna) passi agli 00, 10, 20, 30, 40, 50. Il fatto che *nove volte su dieci* il Nostro si ritrovi a Mirafiori vuol dire che *l'intervallo* tra il tram della bruna e quello della bionda e` *9 volte* l'intervallo tra il tram della bionda e quello della bruna; quindi il tram per Mirafiori (la bionda) passa ai 09, 19, 29, 39, 49, 59. No, non so se si sono sposati. E non vi faccio neppure il grafo logistico.

3.1.3 Il problema dei tre sindaci

Questo, invece, e` noto come il problema di Steiner.

Il problema e` equivalente alla ricerca del punto **P** tale che **a+b+c** sia minimo, come in figura.



Supponiamo, nel triangolo **ABC**, l'angolo maggiore sia quello in **C**

E` abbastanza chiaro che i casi sono due:

1. **P** coincide con **A**, **B** o con **C**

   Se **P** coincide con uno di questi punti deve coincidere in **C** in quanto (essendo l'angolo in **C** il maggiore) la disuguaglianza triangolare raggiunge il valore minimo.

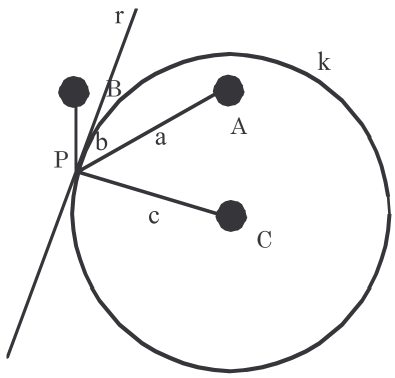
2. **P** e` interno al triangolo **ABC**

   Tracciamo il cerchio **k**, di centro **C** e raggio uguale a **c** (quindi passante per **P**) e la retta **r** tangente a **k** in **P**:

   Liquidiamo subito un caso particolare:

   2.1. *Supponiamo **A** interno al cerchio **k**.*

   In questo caso, la soluzione non e` ottimale, in quanto e` (disegnino!)



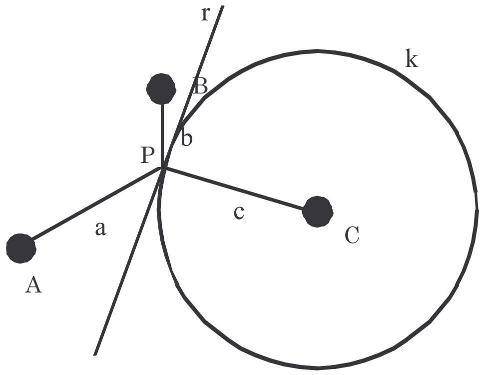
$$c > \overline{A}\overline{C}$$

$$a + c > \overline{A}\overline{B}$$

(la prima deriva dal fatto che **c** e` il raggio del cerchio e **C** il centro).

Sommando, si ha $a+b+c > \overline{AB} + \overline{AC}$ e quindi il minimo si avrebbe per **P** coincidente con **A**, contrasrio all'ipotesi di **A** interno a **k**. Liquidato il caso particolare, passiamo a quello interessante:

2.2. *Siano **A** e **B** esterni al cerchio **k**.* Disegnino.



Essendo **r** tangente al cerchio, formera` con $\overline{PC}$ un angolo retto.

In questo caso, $A\hat{P}r = B\hat{P}r$ e` la condizione di percorso minimo per **A** e **B** (problema di Erone: ve lo siete gia` dimenticato?); in particolare, dato che **r** e` perpendicolare al raggio del cerchio, si ha $A\hat{P}C = B\hat{P}C$.

Lo stesso ragionamento si puo` applicare a **A** e **B**, quindi i tre angoli in **P** devono essere ***uguali tra di loro***, quindi saranno angoli di 120^o.

Carino, vero? Vi chiederete: "E Steiner, chi era? Uno dei tre sindaci?" No, lui aveva trovato un altro modo per risolverlo, meno matematico; aveva preparato un telaio formato da due piani paralleli e dei separatori nelle posizioni delle citta` A, B e C; immerso tutto nell'acqua saponata[1] e fatte scoppiare le bolle di troppo, la lamina tende a disporsi nella posizione di superficie minima (che per noi e` il gruppo delle strade); dopodiche`, ha misurato gli angoli. Potendo mettere "n" citta` nelle posizioni piu` strane (risolvere i casi per **n>3** non e` facile), si e` trovato tra le mani un calcolatore analogico che consuma pochissima corrente.

Bidibu`.

Rudy d'Alembert
Piotr R. Silverbrahms
Alice Riddle

[1] I soliti Courant e Robbins consigliano l'aggiunta di glicerina (ma voi vi fidate di due matematici che danno consigli del genere?)