Salve;

stavolta scrivo alla vostra nuova *identità* su “Le Scienze”; mi è piaciuto il problema del mese e di seguito allego la mia proposta di soluzione. Avevo iniziato con una versione Extra-Large della mia descrizione, poi mi sono reso conto che stava diventando troppo lunga e dispersiva, se non grottesca, per cui ho lasciato perdere… Ma anche questa più stringata non è che sia tanto succinta…

I quesiti erano due, un po’ diversi fra loro dato che il primo contemplava un mezzo di supporto logistico biposto, mentre nel secondo era monoposto… Mi occupo qui solo del primo, quello della motocicletta…

Prima di cominciare, fissiamo alcune ipotesi operative:

1. La velocità $\mathbf{v_i}$ alla quale i componenti la comitiva si muovono è rigorosamente costante per ciascuno di essi, esclusi ovviamente i periodi in cui viaggiano eventualmente in motocicletta;
2. Lo stesso vale anche per la motocicletta, che inoltre mantiene la sua velocità $\mathbf{v_M}$ sia che trasporti il solo guidatore, sia anche il passeggero (che non può essere più d’uno);
3. I camminatori procedono sempre nel verso che va dalla partenza verso l’arrivo, senza inversioni di marcia;
4. Viceversa, alla motocicletta è consentito viaggiare in senso inverso; in tal caso, la motocicletta non porta mai passeggeri (o *quasi* mai, come vedremo…);
5. Le inversioni di marcia della moto, e le salite e discese del passeggero, avvengono sempre in un tempo nullo;
6. Si assume che la motocicletta sia guidata sempre dal più lento dei componenti la comitiva; nel seguito, si indica con **N** il numero di partecipanti alla spedizione *meno 1*, quello che guida la moto;
7. Tutti i partecipanti e la moto si muovono idealmente su percorsi rettilinei: non si tiene conto degli spostamenti trasversali necessari alla moto per prelevare e depositare i vari passeggeri;
8. Si assume $\mathbf{v_M > v_i > 0}$, per tutti gli **i** relativi agli **N** camminatori;
9. Si assume **N > 1**: per **N = 1** il partecipante e l’autista arrivano in moto al traguardo senza fare un solo passo a piedi;
10. Si definisce **D** come distanza da percorrere, e **T** il tempo impiegato dall’ultimo partecipante che raggiunge la meta, da minimizzare con opportuna strategia. Se consideriamo la velocità $\mathbf{v_M}$ della moto come velocità limite dei camminatori, allora, ammesso che tutti la adottino:

$$\textbf{R01)}\quad T_{\min} = \frac{D}{v_M}$$

Questa relazione fissa il limite minimo a cui si può ambire. Qualsiasi strategia si adotti, nelle ipotesi fatte sarà $\mathbf{T > T_{min}}$, ed il rapporto fra questi due tempi misura la bontà delle soluzioni proposte.

Come ipotesi operativa iniziale, poniamo sia vero che più la moto resta in azione, maggiore sarà l’effetto accelerante sul complesso della comitiva, per cui la moto deve essere necessariamente l’ultima a giungere alla meta, presumibilmente con un passeggero a bordo.

Supponiamo poi per il momento (ma attenzione! Ciò si rivelerà poi sbagliato!) che la strategia giusta sia quella di ripartire il supporto-moto fra i vari partecipanti in modo da farli giungere *tutti insieme all’arrivo*. Dietro a quest’assunzione c’è il seguente ragionamento: se ripartissimo la durata del supporto-moto in modo tale che uno dei partecipanti arrivasse prima degli altri, si può sempre immaginare di togliere all’anticipatario un tempuscolo $\boldsymbol{\tau}$ del suddetto supporto, e ripartirlo fra tutti gli altri, concedendo loro un sub-tempuscolo addizionale **$\varepsilon = \tau$ / (N - 1)**. In questo modo, l'anticipatario arriverebbe alla meta "*appena*" un po' dopo, e tutti gli altri "*appena / (N – 1)*" un po' prima… Nel complesso, ci si guadagna, perché ciò che conta è quanto impiega l'ultimo ad arrivare, e costui arriva "*appena / (N – 1)*" in anticipo, o qualcosa di simile… Reiterando il ragionamento, prima o poi l'anticipatario si trova deprivato di tutto il suo vantaggio, ed all'arrivo il più avanzato degli inseguitori è alle sue costole, o meglio affiancato. A questo punto immaginiamo di tirar via un tempuscolo **τ** del loro supporto-moto ad entrambe i suddetti personaggi, e così via… Alla fine, lo scenario ipotetico prevede che *tutti* i camminatori giungano alla meta contemporaneamente…

Vediamo come funziona questo modo di ragionare con **N = 3**, sperando che sia facile estendere poi i calcoli ad **N** qualsiasi:

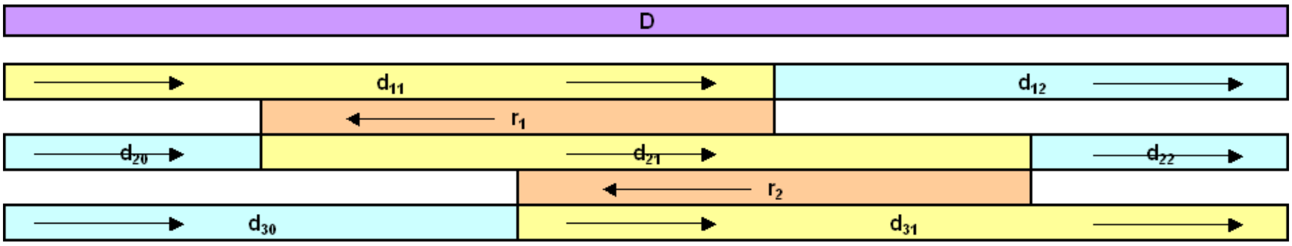

Figura 1: strategia con N = 3

Il disegno rappresenta graficamente quanto segue:

- La distanza da percorrere **D**, è rappresentata dalla barra violetta in alto;
- La moto, alla partenza, carica il partecipante alla gita N°1, e lo trasporta per una distanza $\mathbf{d_{11}}$ (barra giallina in alto)
- Poi torna indietro, a riprendere il partecipante N°2. Il rientro della moto è rappresentato dalla barra rosa, la prima delle due in alto, di lunghezza $\mathbf{r_1}$
- Nel frattempo, il partecipante N°1 continua a percorrere a piedi il suo secondo tratto di percorso $\mathbf{d_{12}}$ …
- Ed il N°2 ed il N°3 contemporaneamente procedono sui rispettivi primi tratti $\mathbf{d_{20}}$ e $\mathbf{d_{30}}$, cosa che già facevano in precedenza; tutti i percorsi a piedi sono illustrati dalle barre azzurre…
- Prima o poi, la moto procedendo all'indietro intercetta il partecipante N°2, che camminava sul percorso $\mathbf{d_{20}}$, lo carica a bordo e lo trasporta per il tratto $\mathbf{d_{21}}$; poi lo scarica, inverte la marcia, percorre il tratto $\mathbf{r_2}$ e va a prendere il partecipante N°3
- Lo carica a bordo, ed insieme giungono alla meta, contemporaneamente agli altri due…
- Insomma:
    - Azzurro: percorsi a piedi dei partecipanti alla gita
    - Giallino: percorsi in avanti della motocicletta, un passeggero a bordo della moto
    - Rosa: percorsi all'indietro della moto senza passeggeri
    - Violetto: percorso complessivo

Per far quadrare le cose, bisogna inventarsi un numero di equazioni pari al numero delle incognite; assumiamo allora che le incognite siano i percorsi parziali dei partecipanti (**3** nell'esempio di cui sopra) ed i percorsi di ritorno della moto (**2** nel caso esaminato). Quindi $\mathbf{d_{11}}$ e $\mathbf{d_{12}}$ per il primo partecipante, $\mathbf{d_{20}}$ e $\mathbf{d_{21}}$ e $\mathbf{d_{22}}$ per il secondo, $\mathbf{d_{30}}$ e $\mathbf{d_{31}}$ per il terzo, $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$ per la moto. Nove incognite. Per più partecipanti, appare da subito intuitivo che le incognite siano ancora **2** per il primo e l'ultimo, e **3** per tutti i trasportati intermedi, e pari al numero di trasportati *meno 1* per la moto… Cioè **4N – 3** in totale… E poi va aggiunto il tempo di trasferimento **T**, supposto uguale per tutti… Quindi, **4N – 2** incognite nel complesso, **10** se **N = 3**…

Vediamo che relazioni algebriche si possono scrivere; possiamo riassumerle in quattro gruppi:

- Il percorso totale di ciascun partecipante deve essere pari alla distanza complessiva **D**; quindi:
  - **R02)** $d_{11} + d_{12} = D$
  - **R03)** $d_{20} + d_{21} + d_{22} = D$
  - **R04)** $d_{30} + d_{31} = D$
  - Cioè **N** relazioni, una per ogni partecipante…
- Per assunto, il tempo **T** complessivo di trasferimento è una costante (incognita, ma costante…). Ed allora se ciascuno dei **3** partecipanti alla gita dell'esempio impiega lo stesso tempo **T**, parzialmente viaggiando sulla moto e parzialmente a piedi; devono valere quindi le relazioni:
  - **R05)** $T = \frac{d_{11}}{v_M} + \frac{d_{12}}{v_1}$
  - **R06)** $T = \frac{d_{20} + d_{22}}{v_2} + \frac{d_{21}}{v_M}$
  - **R07)** $T = \frac{d_{30}}{v_3} + \frac{d_{31}}{v_M}$
  - Ancora **N** relazioni, una per ogni partecipante. Il personaggio intermedio (quello col pedice ***2***), deve raggruppare un percorso iniziale ed uno finale a piedi, condotti alla stessa velocità $\mathbf{v_2}$. Lungi dall'essere un'eccezione, ciò è quanto vale indifferentemente per tutti i partecipanti tranne il primo ed ultimo, nel caso di numero arbitrario di aderenti alla gita…
- Il terzo gruppo di relazioni riguarda il calcolo dei percorsi eseguiti dalla motocicletta all'indietro. Osservando la figura **1**, si vede che:
  - **R08)** $r_1 = d_{11} - d_{20}$
  - **R09)** $r_2 = d_{20} + d_{21} - d_{30}$
  - E sono altre **N – 1** relazioni… Con più partecipanti, è facile immaginare che le ulteriori formule saranno simili alla **R09**, incrementando di una unità i pedici non nulli delle incognite
- L'ultimo insieme di condizioni è un po' più difficile da descrivere… Quando la moto deposita un passeggero dopo averlo trasportato, torna indietro e carica il successivo… Il *rendez-vous* con l'accoglimento sulla moto del passeggero seguente prevede sincronia estrema… Vediamo cosa accade:
  - Il tempo trascorso a piedi dal secondo (o **i**-mo) passeggero prima che sia raccolto dalla moto è dato da $\mathbf{d_{20} / v_2}$ (o $\mathbf{d_{i0} / v_i}$, in genere per gli altri…)
  - Questo tempo deve essere ovviamente imposto uguale a quello che la moto impiega contemporaneamente per raggiungere lo stesso punto, dove raccatta il secondo passeggero (o gli altri)…
  - Per cui viene fuori che (sempre con **N = 3**):
    - **R10)** $\frac{d_{20}}{v_2} = \frac{d_{11} + r_1}{v_M}$
    - **R11)** $\frac{d_{30}}{v_3} = \frac{d_{11} + r_1 + d_{21} + r_2}{v_M}$
    - Cioè altre **N – 1** equazioni. Con più partecipanti, il secondo membro di ciascuna si allunga via via sempre più… Si può però osservare che la formula generale si può compattare come segue:

      $$\frac{d_{i0}}{v_i} = \frac{d_{(i-1)0}}{v_{i-1}} + \frac{d_{(i-1)1} + r_{i-1}}{v_M}$$

E quindi, ritroviamo in complesso **N + N + (N – 1) + (N – 1) = 4 N – 2** equazioni, proprio ciò che serve… Lavorando algebricamente sul sistema costituito dalle relazioni da **R02** a **R11**, si ricava con qualche calcolo che:

R12) $$\frac{4D}{Tv_M - D} = \frac{2v_1}{v_M - v_1} + \frac{2v_2}{v_M - v_2} + \frac{v_M + v_3}{v_M - v_3}$$

Che contiene la sola incognita **T**; osservando poi che:

R13) $$\frac{2v_i}{v_M - v_i} = \frac{v_i + v_M + v_i - v_M}{v_M - v_i} = \frac{v_M + v_i}{v_M - v_i} - 1$$

Si può scrivere:

R14) $$\frac{4D}{Tv_M - D} = \sum_{i=1}^{3} \frac{v_M + v_i}{v_M - v_i} - 2$$

Se poniamo adesso:

R15) $$S_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{v_M + v_i}{v_M - v_i}$$

si ricava che:

R16) $$T = \frac{D}{v_M} \cdot \frac{S_3 + 2}{S_3 - 2}$$

Il termine $\mathbf{S_3}$, o più in generale $\mathbf{S_N}$, può essere considerato quasi come un dato del problema, dipendendo esclusivamente da fattori predeterminati (velocità dei camminatori e della motocicletta); ciascuno degli addendi che compongono $\mathbf{S_N}$ (ricordando l'ipotesi **8** fatta sopra), è superiore ad **1**, per cui $\mathbf{S_N}$ stesso, con **N > 1**, è necessariamente maggiore di **2**. Ricordando la **R01**, si può poi scrivere:

R17) $$\frac{T}{T_{\min}} = \frac{S_3 + 2}{S_3 - 2}$$

La **R17** indica di quanto il tempo complessivo ottimale (nelle ipotesi fatte, con la strategia adottata) sia superiore al tempo minimo ideale (tutti veloci quanto la motocicletta).

Non è difficile estendere le **R15** ed **R16** al caso di **N** arbitrario; con qualche considerazione di carattere generale si arriva a:

R18) $$S_N = \sum_{i=1}^{N} \frac{v_M + v_i}{v_M - v_i}$$

R19) $$T = \frac{D}{v_M} \frac{S_N + (N-1)}{S_N - (N-1)}$$

Una considerazione; S_N (e quindi **T)** è *simmetrico* rispetto al pedice **i** della sommatoria; nel senso che non c'è alcuna preferenza per il calcolo di S_N relativamente all'ordine con cui i vari camminatori vengono prelevati. Cioè la moto, nel fornire i suoi supporti ai trasportati, può prelevarli in un ordine qualsiasi… Se la strategia complessiva è rispettata, il risultato sarà lo stesso.

Ricavato **T**, le altre incognite del problema vengono fuori da calcoli algebrici; resta il fatto che il primo e l'ultimo partecipante portati a bordo della moto sono particolari, nel senso che percorrono il tratto a piedi senza interruzioni…

E' utile valutare preliminarmente la quantità $\mathbf{Tv_M - D}$, che ricorre spesso come fattore nei calcoli che seguono; dalla **R19** si ricava:

$$\textbf{R20)}\ Tv_M - D = \frac{2D \cdot (N-1)}{S_N - N + 1}$$

Sempre tornando per memento alla figura **1**, con le debite estensioni per il caso di **N** camminatori, per i tratti percorsi a piedi viene fuori che:

$$\textbf{R21)}\ d_{12} = \frac{v_1 \cdot (Tv_M - D)}{v_M - v_1} = \frac{v_1}{v_M - v_1} \cdot \frac{2D \cdot (N-1)}{S_N - N + 1}$$

$$\textbf{R22)}\ d_{i0} + d_{i2} = \frac{v_i \cdot (Tv_M - D)}{v_M - v_i} = \frac{v_i}{v_M - v_i} \cdot \frac{2D \cdot (N-1)}{S_N - N + 1}$$

$$\textbf{R23)}\ d_{N0} = \frac{v_N \cdot (Tv_M - D)}{v_M - v_N} = \frac{v_N}{v_M - v_N} \cdot \frac{2D \cdot (N-1)}{S_N - N + 1}$$

E si osserva che il secondo membro della **R22** vale per un *qualsiasi* percorso a piedi, anche quando **i = 1** ed **i = N**; denominiamo $\mathbf{d_{iP}}$ tale quantità.

Il generico percorso come passeggero a bordo della moto si ricava facilmente come differenza fra distanza complessiva ed il rispettivo percorso a piedi:

$$\textbf{R24)}\ d_{i1} = D - d_{iP} = D \cdot \left[1 - \frac{v_i}{v_M - v_i} \cdot \frac{2(N-1)}{S_N - N + 1}\right]$$

Più complesso risulta invece ricavare i percorsi parziali a piedi, per tutti i camminatori intermedi (esclusi cioè il primo e l'ultimo). Si consideri il terzo partecipante; per il suo primo tratto di cammino $\mathbf{d_{30}}$ continua a valere la relazione **R11**, introdotta per il caso **N = 3** ma valida anche per **N** generico. Sostituendo in essa le espressioni per **r1** ed **r2** forniti dalle **R08** ed **R09**, dopo qualche calcolo si ricava che:

$$\textbf{R25)}\ d_{30} = \frac{2v_3}{v_M + v_3} \cdot (d_{11} + d_{21})$$

Con qualche tentativo di estensione a più di 3 camminatori, ci si convince che per il generico di essi vale la relazione:

$$\textbf{R26)}\ d_{i0} = \frac{2v_i}{v_M + v_i} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} d_{j1}$$

Utilizzando la **R24** per esprimere i termini sotto sommatoria, dopo qualche passaggio si perviene a:

$$\textbf{R27)}\ d_{i0} = \frac{2Dv_i}{(v_M + v_i)\cdot(S_N - N + 1)} \cdot \left[(i-1)\cdot S_N - (N-1)\cdot \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_M + v_j}{v_M - v_j}\right]$$

Ricordando la **R18**, possiamo definire la sommatoria contenuta nella **R27** come segue:

$$\textbf{R28)}\ S_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{v_M + v_j}{v_M - v_j}$$

E la **R27** si può quindi così riscrivere:

$$\textbf{R29)}\ d_{i0} = \frac{2Dv_i}{(v_M + v_i)\cdot(S_N - N + 1)} \cdot [(i-1)\cdot S_N - (N-1)\cdot S_{i-1}]$$

Anche i termini $\mathbf{S_{i-1}}$, come $\mathbf{S_N}$, sono predeterminati dai dati del problema, per cui tutto il secondo membro della **R29** è calcolabile da essi. A riprova della validità della **R29**, ponendo in essa **i = N** si ritrova la **R23**.

Resta da valutare la distanza del secondo tratto percorso a piedi, per i camminatori che abbiano il loro percorso spezzato in due parti; questo si ricava per differenza dal percorso complessivo:

$$\textbf{R30)}\ d_{i2} = D - d_{i0} - d_{i1}$$

Sostituendo le espressioni fornite dalla **R24** e dalla **R29** nella **R30**, dopo qualche passaggio si perviene a:

$$\textbf{R31)}\ d_{i2} = \frac{2Dv_i}{(v_M + v_i)\cdot(v_M - v_i)\cdot(S_N - N + 1)} \cdot \{(v_M + v_i)\cdot(N-1) - (v_M - v_i)\cdot[(i-1)\cdot S_N - (N-1)\cdot S_{i-1}]\}$$

Conforta il fatto che ponendo **i = N** nella **R31**, si ottiene $\mathbf{d_{N2} = 0}$, come ci si aspetta che sia.

♦ ♦ ♦ ♦

A questo punto, il problema è (*apparentemente*…) risolto. Tralasciando il calcolo poco interessante dei percorsi $\mathbf{r_i}$ eseguiti dalla moto all'indietro, il procedimento da seguire prevede il calcolo preliminare di tutti gli $\mathbf{S_i}$, compreso $\mathbf{S_N}$, tramite le **R18** ed **R28**, per poi passare a ricavare le lunghezze di tutti i tragitti da percorrere, ed il tempo necessario al trasferimento:

- Tratti iniziali percorsi a piedi, tramite la **R29**;
- Tratti intermedi percorsi in moto, tramite la **R24**;
- Tratti finali percorsi ancora a piedi, tramite la **R31**;
- Tempo totale impiegato, tramite la **R19**.

C'è però un grosso ***MA***, preannunciato ad inizio trattazione… Vediamo ad esempio cosa può accadere in un caso pratico: supponiamo che il percorso sia di 20 Km, e che la motocicletta viaggi a 60 Km/h. Se, con **N = 3**, i primi due partecipanti hanno velocità infinitesima, per trasportali la moto percorre tre volte i 20 Km, due in avanti coi passeggeri a bordo e la terza all'indietro per recuperare il secondo di essi. Copre cioè 60 Km (meno qualche micron; i primi due hanno velocità bassissima ma non nulla, altrimenti la strategia complessiva non potrebbe farli giungere contemporaneamente al traguardo ma solo in successione cadenzata), ed impiega quindi *quasi* un'ora esatta.

Se il terzo partecipante è Haile Gebrselassie, detentore del primato mondiale di maratona alla media di 20,346 Km/h, quando la moto arriva a depositare il secondo passeggero a pochi micron dal traguardo, Haile è già 346 metri oltre … L'implacabile ed asettico meccanismo della strategia impone alla moto di andarlo a prendere *in avanti*, raccattarlo recalcitrante e riportarlo *all'indietro* al traguardo, giungendovi esattamente nell'istante in cui i primi due percorrono l'ultimo micron…

Cioè si verifica una situazione simile a quella descritta qui sotto in figura:

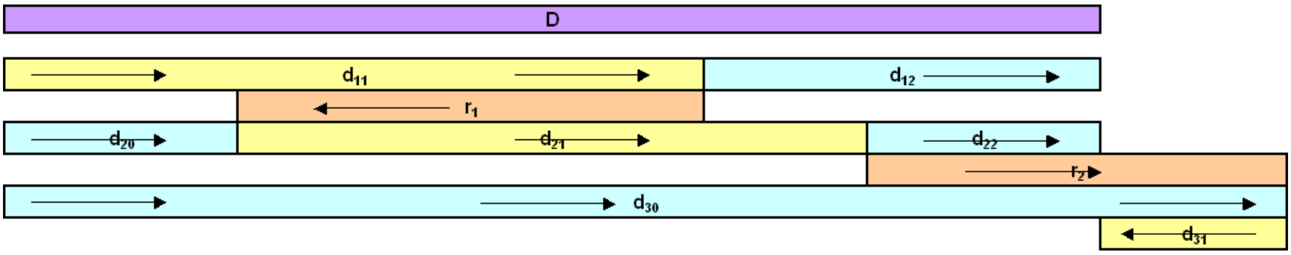

Figura 2: fallimento della strategia

Quindi, abbiamo $\mathbf{d_{31}}$ negativo… Cosa è successo? E' accaduto che la strategia descritta *non* minimizza il tempo totale per il trasbordo di tutti dalla partenza all'arrivo, bensì rende uguale tale tempo per tutti loro… In pratica, la moto *spreca* risorse per aiutare coloro che sono troppo veloci da averne bisogno, e toglie queste stesse risorse agli altri, i più lenti, che opportunamente aiutati potrebbero arrivare prima…

Addirittura, è tutto l'impianto di calcolo basato sulle relazioni da **R02** ad **R11** che crolla: se $\mathbf{d_{31}}$ vien fuori negativo, così come $\mathbf{r_2}$, occorrerebbe cambiarne il segno nelle **R07** ed **R11**, che rappresentano calcoli di *tempi*… Mentre la **R04** ed **R09** restano valide (in quanto distanze negative sono concepibili, una volta definito il verso di percorrenza), per i tempi ciò non vale, poiché anche le distanze negative vengono percorse in tempi positivi, da cui la necessità di cambiare i segni…

Del resto, era possibile accorgersene sin quasi dall'inizio: torniamo alla **R19**, che fornisce il tempo di percorrenza della comitiva. Sia $\mathbf{v_G}$ (dove il pedice è lì in onore di Gebrselassie) la velocità del più lesto dei partecipanti. Se costui rinunzia al supporto della moto, impiega un tempo $\mathbf{T_G = D / v_G}$ per percorrere l'intera distanza. Se ora tale tempo è inferiore (o anche uguale) a quello fornito dalla **R19**, allora costui va escluso dal gruppo dei trasportati, ed è solo ai residui **N – 1** che la moto deve dedicarsi…

Analiticamente, ciò si verifica se $\mathbf{T_G \leq T}$, cioè se:

$$\textbf{R32)}\quad \frac{v_M}{v_G} \leq \frac{S_N + (N-1)}{S_N - (N-1)}$$

Entrambe i membri della **R32** sono necessariamente maggiori di 1, nelle ipotesi fatte. Ma non è affatto detto che quanto espresso dalla relazione non possa capitare, come visto nell'esempio!

Vediamo un altro caso limite, più generale, in cui **N – 1** partecipanti hanno velocità infinitesima, ed uno solo proceda in maniera regolare. In tal caso si ha, dalla **R18**:

$$\textbf{R33)}\ S_N = N - 1 + \frac{v_M + v_G}{v_M - v_G}$$

Sostituendo nella **R32**, dopo qualche calcolo si arriva a:

$$\textbf{R34)}\ \left(\frac{v_G}{v_M}\right)^2 \cdot (2N-2) + \left(\frac{v_G}{v_N}\right) \cdot (2N-3) - 1 \geq 0$$

La **R34** ammette soluzioni per:

$$\textbf{R35)}\ \frac{v_G}{v_M} \geq \frac{1}{2 \cdot (N-1)}$$

Cioè, già con **N = 6** basta che il più veloce cammini ad **1 / 10** della velocità della moto per mandare in crisi tutto il procedimento… Naturalmente, per casi più realistici le cose stanno un po' meglio dell'esempio visto, poiché bene o male gli **N – 1** di cui sopra in realtà non staranno lì fermi o quasi ad aspettare la moto, però si intuisce come con **N** abbastanza grande, e con velocità svariate, prima o poi quanto sopra descritto possa capitare…

♦ ♦ ♦ ♦

Per non gettare alle ortiche tutta la trattazione di cui sopra, bisogna allora pensare di complicare la strategia, con qualche ragionamento in più… Immaginiamo di ordinare i partecipanti per velocità crescente, e supponiamo di fornire supporto-moto solo al più lento di essi. In tal caso, egli arriverà per primo alla velocità della moto, nel tempo $\mathbf{T_{min}}$ fornito dalla R01, con tutti gli altri a seguire… Essendo evidente che il secondo camminatore ha un tempo di percorrenza superiore, estendiamo il supporto-moto anche a lui, che non potrà che averne vantaggio; ciò toglierà parte della risorsa-moto al primo, per cui il tempo **T** per la coppia dei primi due non potrà che crescere, rispetto a quando solo il primo partecipante veniva trasportato.

Ciò non è più vero a partire dal terzo, come visto in precedenza nell'esempio: quest'ultimo potrebbe avere un proprio tempo individuale inferiore a quello dei primi due accoppiati, per cui il supporto-moto gli arrecherebbe danno, come nel caso di Gebrselassie… Ovviamente, lì l'esempio è costruito ad arte affinché la crisi si verifichi per **N = 3**, ma in generale, con velocità più realistiche, man mano che si aggiungono partecipanti ci si avvicina sempre più alla crisi…

Quando ciò si verifica, come visto il calcolo di **T** secondo la **R19** perde di significato: addirittura **T** diminuisce all'aumentare dei partecipanti, in quanto ciascuno degli ulteriori di essi porta un contributo negativo alla **R19**, calcolato in base alle **R07** ed **R11** sbagliate…

Un esempio pratico; con:

- $\mathbf{v_M}$ **= 100 Km/h**
- **D = 10 Km**
- **N = 40**
- $\mathbf{v_i}$ **= 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19 Km/h** rispettivamente per i 40,

l'andamento di **T** valutato aggiungendo un partecipante alla volta ed applicando brutalmente la **R19** assume l'aspetto mostrato nella figura che segue:

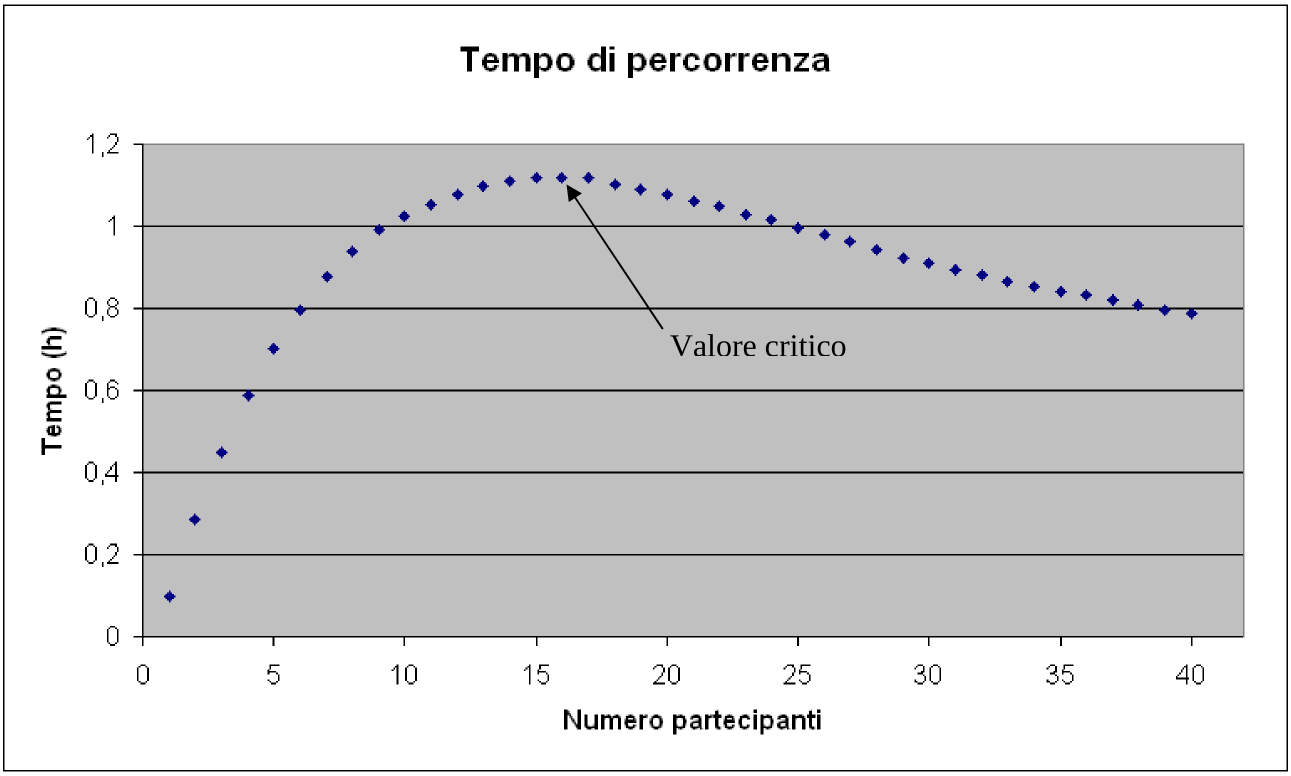

Figura 3: la crisi della R19

In questo caso specifico, la crisi si verifica con l'introduzione del 16° partecipante, primo dei 40 a subire un aiuto non richiesto…

Sembra estremamente difficile (almeno al sottoscritto…) trovare una relazione in forma chiusa che fornisca il valore critico di **N**, in funzione dei dati del problema; è però adesso possibile concepire un processo operativo ricorsivo che consenta di trovarlo.

Vediamo come si può procedere:

1. Si calcolano gli **N** termini $\mathbf{T_i = D / v_i}$, che forniscono il tempo che ciascuno impiegherebbe procedendo esclusivamente a piedi, e li si ordina dal minore al maggiore;
2. Si definiscono *camminatori lenti* quelli che necessitano del supporto della moto, e *camminatori veloci* quelli che possono farne a meno;
3. Si inserisce inizialmente il solo partecipante più lento nel primo di tali gruppi, e tutti gli altri nel secondo;
4. Si valuta **T** tramite la **R19**, tenendo conto dei soli *camminatori lenti*;
5. Si confronta **T** con $\mathbf{T_G}$, tempo fra quelli calcolati al punto **1**, relativo al *più lento dei camminatori veloci*. Vi sono 2 possibilità:
    a. $\mathbf{T} < \mathbf{T_G}$: si sposta il *più lento dei camminatori veloci* nel gruppo dei *camminatori lenti*, e si riparte dal punto **4**.;
    b. $\mathbf{T} \geq \mathbf{T_G}$: si è trovato il valore critico di **N**; ai *camminatori lenti* viene applicata la strategia descritta in precedenza col supporto moto, gli altri procederanno a piedi lungo tutto il percorso.

♦ ♦ ♦ ♦

Finito? Non ancora… Questo processo pare lavorare *a scatti*, in modo *discreto*… Un salto di valori per **T** e tutte le altre variabili ogni volta che si aggiunge un *camminatore veloce* all'elenco dei trasportabili con la moto… Viene allora in mente il seguente scenario ipotetico: supponiamo di avere ottenuto, in una delle varie iterazioni, **T = 59'** e $\mathbf{T_G}$ = **60'**. Allora includiamo il *camminatore* *veloce* fra i *lenti* e ricalcoliamo il tempo **T**, come descritto sopra. Costui rallenta tutto il resto della comitiva, necessariamente, in quanto toglie risorsa-moto a ciascuno degli altri: può venir casomai fuori che sia adesso **T = 60’01”**? In tal caso, non era forse meglio *non spostare* fra i *lenti* il più *lento* dei *veloci*? Il tempo complessivo del trasferimento sarebbe stato di un secondo inferiore…

Può avvenire realmente quanto appena illustrato? Per verificarlo, chiamiamo **T’** il primo dei due tempi suddetti, quello calcolato prima di aggiungere l’ultimo dei *camminatori veloci* al gruppo dei *lenti*. Il caso sopra ipotizzato capita se:

R36) $T' \le T_G \le T$

Cioè, osservando che **T’** va calcolato su **N – 1** partecipanti, se:

R37) $$\frac{D}{v_M}\frac{S_{N-1}+(N-2)}{S_{N-1}-(N-2)} \le \frac{D}{v_G} \le \frac{D}{v_M}\frac{S_N+(N-1)}{S_N-(N-1)}$$

Da cui:

R38) $$\frac{S_N - \frac{v_M+v_G}{v_M-v_G}+(N-2)}{S_N - \frac{v_M+v_G}{v_M-v_G}-(N-2)} \le \frac{v_M}{v_G} \le \frac{S_N+(N-1)}{S_N-(N-1)}$$

Sviluppando la parte sinistra della **R38**, si arriva alla risolvente:

R39) $$\left(\frac{v_G}{v_M}\right)^2 \cdot (S_N+N-1) - 2S_N \cdot \left(\frac{v_G}{v_M}\right) + (S_N-N+1) \ge 0$$

La **R39** ammette soluzioni per:

R40) $$\frac{v_M}{v_G} \ge 1$$ $$\frac{v_M}{v_G} \ge \frac{S_N+(N-1)}{S_N-(N-1)}$$

Ma attenzione! La prima delle **R40** non è accettabile, non soltanto perché nessuno per ipotesi è più veloce della motocicletta, bensì poiché nel derivare la **R39** occorre in un passaggio moltiplicare ambo i membri della disequazione per il seguente fattore:

R41) $v_M \cdot (S_N - N + 1) - v_G \cdot (S_N - N + 3)$

Affinché sia lecita tale moltiplicazione senza invertire il senso della disequazione, occorre che questo fattore sia positivo. Esso lo è quando si verifica che:

R42) $$\frac{v_M}{v_G} > \frac{S_N - N + 3}{S_N - N + 1}$$

Poiché il secondo membro della **R42** è necessariamente superiore ad 1, tale dovrà anche essere il primo, per cui la prima delle **R40** va scartata.

Allora, dalla seconda delle **R40** e dalla parte destra della **R38** prese insieme, si vede che esse valgono contemporaneamente solo in caso di eguaglianza, e quindi è impossibile che l'aggiunta del *più lento dei camminatori veloci* provochi il fenomeno suddetto…

C'è però da esaminare un sottocaso rimasto fra le pieghe del ragionamento… La **R42** è già servita a scartare la prima delle **R40**, ma è sempre possibile ipotizzare che sia:

$$\textbf{R43)}\ 1 \le \frac{v_M}{v_G} < \frac{S_N - N + 3}{S_N - N + 1}$$

In tal caso, la **R41** assume segno negativo, e la **R39** va rianalizzata con segno di disuguaglianza invertito; in tal caso essa sembra ammettere soluzioni per:

$$\textbf{R44)}\ 1 \le \frac{v_M}{v_G} \le \frac{S_N + (N-1)}{S_N - (N-1)}$$

In realtà, la **R43** e la **R44** devono valere contemporaneamente; delle parti destre di queste due relazioni, la più stringente è *quasi sempre* la prima, infatti risulta che la disuguaglianza:

$$\textbf{R45)}\ \frac{S_N - N + 3}{S_N - N + 1} < \frac{S_N + (N-1)}{S_N - (N-1)}$$

è vera per **N > 2**; lasciamo un attimo da parte il caso **N = 2**, e vediamo cosa accade per valori superiori. Parrebbe che in caso di validità della **R43** possa ancora verificarsi che l'aggiunta del *più lento dei camminatori veloci* produca il problema. Si può provare come ciò sia impossibile sviluppando la **R43** come segue:

$$\textbf{R46)}\ \frac{v_M}{v_G} < \frac{S_{N-1} + \frac{v_M + v_G}{v_M - v_G} - N + 3}{S_{N-1} + \frac{v_M + v_G}{v_M - v_G} - N + 1}$$

Sviluppando la **R46** si perviene alla risolvente:

$$\textbf{R47)}\ (S_{N-1} - N + 2)\cdot\left(\frac{v_M}{v_G} - 1\right)^2 < 0$$

In base alla **R18**, $\mathbf{S_{N-1}}$ ha valore minimo limite pari ad **N – 1** (quando la velocità di tutti i camminatori tende a **0**), per cui il primo fattore è necessariamente positivo, così come il secondo, che è un quadrato. Per cui la **R47** non può mai esser vera, e così di conseguenza la **R43**.

Dettaglio da sistemare: nel ricavare la **R47** dalla **R46**, in uno dei passaggi vengono moltiplicati ambo i membri della disequazione per il fattore:

$$\textbf{R48)}\ (S_{N-1} - N)\cdot(v_M - v_G) + 2v_M$$

Di nuovo, occorre che tale termine sia positivo affinché non sia necessario invertire il segno di disequazione nella **R47**. Avendo già osservato sopra che il limite inferiore per $\mathbf{S_{N-1}}$ è **N – 1**, il minimo valore possibile per la **R48** è dato da $\mathbf{v_M} + \mathbf{v_G}$, che è necessariamente positivo.

Resta fuori un ultimo sotto-sottocaso… Tornando alla **R45**, con **N = 2** occorre confrontare il rapporto $\mathbf{v_M}$ / $\mathbf{v_G}$ con la parte destra della **R44**, che in queste particolari circostanze assume la seguente forma:

$$\textbf{R49)}\ \frac{v_M}{v_G} \le \frac{\frac{v_M + v_1}{v_M - v_1} + \frac{v_M + v_G}{v_M - v_G} + 1}{\frac{v_M + v_1}{v_M - v_1} + \frac{v_M + v_G}{v_M - v_G} - 1}$$

Sviluppando, si perviene alla risolvente:

$$\textbf{R50)}\ (v_M + v_1) \cdot (v_M - v_G)^2 \le 0$$

Entrambe i termini in parentesi non possono essere nulli o negativi, per cui la **R50** non si verifica mai.

Ancora una volta, per ricavare la **R50** si è dovuto moltiplicare entrambe i membri della disequazione per un fattore di cui occorre provare la positività per non dovere invertire il segno della **R50** stessa. Cioè:

$$\textbf{R51)}\ {v_M}^2 + v_M \cdot v_G + v_M \cdot v_1 - 3v_G \cdot v_1 > 0$$

Riscrivendo la **R51** come segue:

$$\textbf{R52)}\ v_M \cdot v_M + v_G \cdot v_M + v_M \cdot v_1 > v_G \cdot v_1 + v_G \cdot v_1 + v_G \cdot v_1$$

è possibile vedere che ciascuno dei tre addendi del lato sinistro è necessariamente maggiore del corrispondente di destra, essendo per assunto $\mathbf{v_M}$ superiore alle altre due velocità.

Per cui la **R51** è sempre vera, la **R49** sempre falsa, ed ancora una volta l'aggiunta del *più lento dei camminatori* non costituisce problema.

♦ ♦ ♦ ♦

E pare che ci siamo… Ovviamente, il processo iterativo sopra descritto può essere velocizzato utilizzando una tecnica dicotomica: si parte non dal solo primo camminatore nel gruppo dei *lenti*, ma dividendo i partecipanti in due gruppi uguali, **N / 2** *di qua* ed **N / 2** *di là* (OK, se sono dispari uno in più da una parte qualsiasi…), e si applica la valutazione di **T** al gruppo dei *lenti*. Se spostando un *veloce* nel gruppo dei *lenti* **diminuisce** il valore di **T**, prendiamo la metà più *lenta* del gruppo dei *veloci* e li spostiamo nel gruppo dei *lenti*, e procediamo… Altrimenti, prendiamo la metà più *veloce* del gruppo dei *lenti* e li spostiamo nel gruppo dei *veloci*… E così via fin quando se ne sposta uno solo… O qualcosa di simile…

Saluti,
BR1