Stavolta avevo provato ad essere più breve, credetemi… Però poi ho iniziato a giocherellare con affinamenti ed estensioni varie del *Problema*, e quindi ancora una volta siete costretti a beccarvi una trattazione fiume… ;-)

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Allora, dato un insieme di 10 interi consecutivi N ≡ {**N**, **N** + 1, …, **N** + 9}, 5 di essi sono necessariamente pari; di questi 5 *almeno* 2 (ed al più 3) sono divisibili per 4, e di questi ultimi *almeno* 1 (al più 2) sono divisibili per 8.

Scomponendo i 10 interi di cui sopra, il fattore 2 appare quindi *almeno* **8** volte. Il testo del Problema gioca sulla possibilità di nullificare l'effetto *parificante*[1] dei *fattori 2*, chiedendo di cancellarli con almeno altrettanti *fattori 5*, in modo da ottenere dei *conglomerati (2 · 5)* tali da produrre zeri in coda al prodotto globale, in numero sufficiente per far sì che l'ultima cifra non nulla del prodotto stesso dei nostri 10 interi sia dispari.

Dati 10 interi consecutivi, solo 2 di essi possono contenere tali *fattori 5*: quelli che hanno rispettivamente 5 e 0 come ultima cifra (denominiamoli qui $\mathbf{N_5}$ ed $\mathbf{N_0}$, e $\mathbf{N_{05}}$ uno generico dei due) . Due *fattori 5* sono sempre garantiti, come già notato nel testo del *Problema*; per procurarci gli (*almeno*) altri 6 *fattori 5* occorre che il prodotto $\mathbf{N_5} \cdot \mathbf{N_0}$ contenga (*almeno*) il fattore $\mathbf{5^8}$ suddiviso in qualche modo fra $\mathbf{N_5}$ ed $\mathbf{N_0}$ stessi; si deve poi avere che la differenza (in valore assoluto) fra $\mathbf{N_5}$ ed $\mathbf{N_0}$ sia 5, per rispettare la condizione che entrambe appartengano alla lista N dei 10 interi consecutivi.

Affinché un intero qualsiasi $\mathbf{N_{05}}$ contenga *almeno* un *fattore 5* nella sua scomposizione, deve essere:

$$1)\ N_{05} = a \cdot 5^K$$

Dove si intende che il termine **a** è un intero qualsiasi, e **K ≥ 1**, con **K** intero anch'esso; da quanto visto sopra, sappiamo che qualsiasi insieme come N contiene due e solo due termini del tipo $\mathbf{N_{05}}$; per uno di essi **a** è pari, in modo da produrre uno 0 come ultima cifra. Per l'altro, **a** è dispari, e conduce ad un valore di $\mathbf{N_{05}}$ che ha 5 come ultima cifra.

A noi interessa il sottoinsieme delle *coppie* di termini $\mathbf{N_{05}}$ (uno con **a** pari ed uno con **a** dispari; siano $\mathbf{a_P}$ ed $\mathbf{a_D}$ questi fattori. E $\mathbf{K_P}$ e $\mathbf{K_D}$ i rispettivi esponenti del numero 5)[2] con cui si riesca a costruire un insieme di 10 interi consecutivi che moltiplicati fra loro abbiano l'ultima cifra significativa, zeri esclusi, dispari.

Per quanto visto sopra, bisogna *neutralizzare* almeno **8** *fattori 2* presenti nella scomposizione dei 10 termini che compongono N; forse conviene adesso distinguere in qualche modo i casi relativi ai differenti valori di **a**, dispari o pari che siano. In generale, un intero multiplo di 5 ha la forma espressa dalla 1); se però decidiamo di attribuire una diversa espressione algebrica alle due categorie, si ha:

$$2)\ \begin{array}{c} N_5 = a_D \cdot 5^{K_D} = (2 \cdot I_D - 1) \cdot 5^{K_D} \\ N_0 = a_P \cdot 5^{K_P} = 2 \cdot I_P \cdot 5^{K_P} \end{array}$$

---

[1] Nulla a che fare con le Scuole *Parificate*, neh…

[2] Attenzione; $\mathbf{K_P}$ e $\mathbf{K_D}$ non è detto che siano pari o dispari essi stessi… L'essere pari o dispari di $\mathbf{N_{05}}$ dipende solo dal valore di **a**, pari per $\mathbf{a_P}$, dispari per $\mathbf{a_D}$.

Al variare di $\mathbf{I_D}$ ed $\mathbf{I_P}$[3] nel campo dei numeri interi positivi, le 2) forniscono tutti i multipli di 5, pari e dispari. Se per una coppia {$\mathbf{N_5}$, $\mathbf{N_0}$} si ha:

$$3)\quad \begin{aligned} &K_P + K_D \geq 8 \\ &\left|N_5 - N_0\right| = 5 \end{aligned}$$

Allora la coppia è una buona candidata per generare numeri che soddisfano la condizione richiesta dal *Problema*.

Dalla seconda delle 3), e ricordando le 2), si può scrivere:

$$4)\quad \left|(2 \cdot I_D - 1) \cdot 5^{K_D} - 2 \cdot I_P \cdot 5^{K_P}\right| = 5$$

Da cui, essendo $\mathbf{K_P} \geq 1$e $\mathbf{K_D} \geq 1$, si può ricavare:

$$5)\quad \left|(2 \cdot I_D - 1) \cdot 5^{K_D - 1} - 2 \cdot I_P \cdot 5^{K_P - 1}\right| = 1$$

Supponiamo inizialmente che $\mathbf{K_P}$ sia minore di $\mathbf{K_D}$; si può allora scrivere:

$$6)\quad 5^{K_P - 1} \cdot \left|(2 \cdot I_D - 1) \cdot 5^{K_D - K_P} - 2 \cdot I_P\right| = 1$$

I due addendi nel modulo a primo membro sono necessariamente due interi, il primo dispari e l'altro pari: il primo membro della 6) è quindi un multiplo dispari di una potenza di 5: l'unico modo per soddisfare la 6) è allora che sia $\mathbf{K_P} = 1$. Dalla prima delle 3), si ricava quindi che $\mathbf{K_D} \geq 7$.

Se è invece $\mathbf{K_P}$ ad essere maggiore di $\mathbf{K_D}$, la 6) assume la forma:

$$7)\quad 5^{K_D - 1} \cdot \left|(2 \cdot I_D - 1) - 2 \cdot I_P \cdot 5^{K_P - K_D}\right| = 1$$

E valgono ragionamenti simmetrici rispetto al caso precedente, per cui in questo caso sarà necessariamente $\mathbf{K_D} = 1$ e $\mathbf{K_P} \geq 7$. Se infine $\mathbf{K_D} = \mathbf{K_P}$, si ha:

$$8)\quad 5^{K_D - 1} \cdot \left|(2 \cdot I_D - 1) - 2 \cdot I_P\right| = 1$$

Che non ammette soluzioni, poiché in base alla prima delle 3) l'esponente del *fattore 5* vale almeno 3. In definitiva, possiamo aspettarci due classi di soluzioni per il *Problema*, cioè quelle per le quali i termini $\mathbf{N_5}$ ed $\mathbf{N_0}$ assumono rispettivamente la forma:

$$9a)\quad N_5 = (2 \cdot I_D - 1) \cdot 5^{K_D} \qquad N_0 = 2 \cdot 5 \cdot I_P \qquad K_D \geq 7 \qquad Int(I_P/5) \neq I_P/5$$

$$9b)\quad N_5 = (2 \cdot I_D - 1) \cdot 5 \qquad N_0 = 2 \cdot I_P \cdot 5^{K_P} \qquad K_P \geq 7 \qquad Int[(2 \cdot I_D - 1)/5] \neq I_D/5$$

Le ultime condizioni sulla destra, cioè l'assenza del *fattore 5* nella scomposizione di $\mathbf{I_P}$ e di (2 $\mathbf{I_D}$ - 1), impediscono ad $\mathbf{N_0}$ ed $\mathbf{N_5}$ rispettivamente di avere nella loro scomposizione un ulteriore *fattore 5* oltre a quello evidenziato in chiaro nelle 9), così come visto in precedenza nel discutere la 6) e la 7).

---

[3] Di nuovo, $\mathbf{I_P}$ ed $\mathbf{I_D}$ non sono pari e dispari essi stessi, o almeno non necessariamente; sono interi qualsiasi che concorrono a formare i valori di $\mathbf{N_5}$ ed $\mathbf{N_0}$ forniti dalle 2).

Il minimo valore possibile su cui fare esperimenti si ha per $\mathbf{I_D} = 1$ e $\mathbf{K_D} = 7$, per cui $\mathbf{N_5} = 78125$; gli insiemi N che contengono tale intero sono i dieci che si possono formare a partire dal numero 78116. E già al secondo tentativo, cioè con:

$$\mathsf{N}_{78125,2} \equiv \{\mathbf{78117}, \mathbf{78118}, \mathbf{78119}, \mathbf{78120}, \mathbf{78121}, \mathbf{78122}, \mathbf{78123}, \mathbf{78124}, \mathbf{78125}, \mathbf{78126}\}$$

si becca la prima soluzione… Essa è stata trovata utilizzando la tabella che segue:

78117	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	78117
78118	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	1	0	39059
78119	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	OK	0	0	78119
78120	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		3	1	1953
78121	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	78121
78122	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	39061
78123	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	78123
78124	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		2	0	19531
78125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0		0	7	1
78126	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0	39063

Nella parte violetta della tabella, si testava quante volte ciascun intero fosse divisibile per 2, nella parte in arancio per 5; i due **8** nelle celle azzurre in alto a destra *contano* il numero di 1 presenti nei blocchi violetto ed arancio, mentre l'**OK** verde segnala che il numero di *fattori 5* è almeno uguale a quello dei *fattori 2*… Le ultime tre colonne in bianco servono a dividere i numeri di partenza per tali fattori, e lasciano residui tutti dispari… Moltiplicati fra loro, questi valori forniscono il prodotto complessivo cercato, moltiplicando ovviamente (almeno in questo caso) anche per 10^8…

Mi sono divertito a calcolarlo, il *numeretto* che vien fuori… Esso è abbondantemente al di fuori della portata della precisione di calcolo sia di Excel che della calcolatrice di Windows (che arrivano rispettivamente a 15 e 32 cifre significative, poi appendono zeri…), per cui son dovuto ricorrere a qualche trucchetto Excel, che allego come regalo per Halloween… Il risultato è:

8466535472635609758623586533222693974221900000000

L'ultima cifra non nulla del *numeretto* è un **9**, che dà il nome a questo file…

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Bene… A questo punto il *Problema* si poteva considerare risolto, ma l'appetito vien mangiando, per cui mi sono divertito a generare un bel po' di soluzioni ulteriori, tanto per vedere cosa spuntava fuori… La parte del testo che segue, consideratela *facoltativa*, nel senso che all'esame non viene chiesta, se non per la Lode…

Prima cosa, ho chiamato l'insieme dei 10 interi che generano la soluzione vista sopra $\mathsf{N}_{78125,2}$ per la seguente ragione: $\mathbf{N_5} = 78125$ è un *potenziale generatore di soluzioni* del *Problema*, nel senso che un numero del tipo $\mathbf{N_5}$ (o $\mathbf{N_0}$) deve *necessariamente* essere presente nell'insieme. Per ogni $\mathbf{N_5}$ (o $\mathbf{N_0}$), esistono 10 insiemi di interi consecutivi candidati a generare una soluzione; ad esempio, nel caso visto sopra, essi sono:

$$\mathsf{N}_{78125,1} \equiv \{\mathbf{78116, 78117, 78118, 78119, 78120, 78121, 78122, 78123, 78124, 78125}\}$$
$$\mathsf{N}_{78125,2} \equiv \{\mathbf{78117, 78118, 78119, 78120, 78121, 78122, 78123, 78124, 78125, 78126}\}$$
$$\mathsf{N}_{78125,3} \equiv \{\mathbf{78118, 78119, 78120, 78121, 78122, 78123, 78124, 78125, 78126, 78127}\}$$

$N_{78125,4}$ ≡ {**78119**, **78120**, **78121**, **78122**, **78123**, **78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128**}
$N_{78125,5}$ ≡ {**78120**, **78121**, **78122**, **78123**, **78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**}
$N_{78125,6}$ ≡ {**78121**, **78122**, **78123**, **78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**, **78130**}
$N_{78125,7}$ ≡ {**78122**, **78123**, **78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**, **78130**, **78131**}
$N_{78125,8}$ ≡ {**78123**, **78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**, **78130**, **78131, 78132**}
$N_{78125,9}$ ≡ {**78124**, **78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**, **78130**, **78131, 78132, 78133**}
$N_{78125,10}$ ≡ {**78125**, **78126, 78127, 78128, 78129**, **78130**, **78131, 78132, 78133, 78134**}

Nella lista qui sopra, il nostro $\mathbf{N_5}$ è evidenziato in rosso, ed il suo *aiutante* $\mathbf{N_0}$ (che, come visto, contribuisce con *un solo* misero 5 alle soluzioni), in blu. Si osserva che, a parità di $\mathbf{N_5}$, $\mathbf{N_0}$ assume due valori distinti, 78120 per i primi 5 insiemi, e 78130 per gli altri.

Se si analizzano i 10 insiemi di cui sopra, ci si accorge che, oltre a $N_{78125,2}$, solo $N_{78125,3}$ costituisce una soluzione del *Problema*. Gli altri 8 insiemi, no. Ci si può porre allora una lunga serie di domande…

- Dato un qualsiasi $\mathbf{N_5}$ (o $\mathbf{N_0}$), come definiti dalle 9), esiste sempre almeno una soluzione nei 10 insiemi del tipo $N_{\mathbf{N05,X}}$?
- Esistono soluzioni con $\mathbf{N_5}$ (o $\mathbf{N_0}$) distribuiti su tutte le 10 possibili posizioni negli insiemi? In altri termini, negli insiemi $N_{\mathbf{N05,X}}$, **X** può assumere tutti i 10 possibili valori?
- Se sì (o anche se no), come sono distribuite queste soluzioni?
- Quante soluzioni sono possibili al variare di $\mathbf{N_5}$ (o $\mathbf{N_0}$)? Delle 10 *potenziali*, al massimo quante possono essere *effettive*?
- Le soluzioni, generalmente parlando, sono *regolari*, seguono qualche criterio cadenzato, oppure spuntano fuori a casaccio, come i numeri primi?

Beh, qui ho dovuto in parte lasciar perdere il rigore matematico, e mi sono dedicato agli *esperimenti*(!)… Mi sono costruito un programmino capace di generare soluzioni a iosa, separato in due sezioni ben distinte, quella cioè capace di tirar fuori soluzioni dai potenziali generatori di soluzioni di tipo $\mathbf{N_5}$, e quella di far lo stesso con i generatori di tipo $\mathbf{N_0}$.

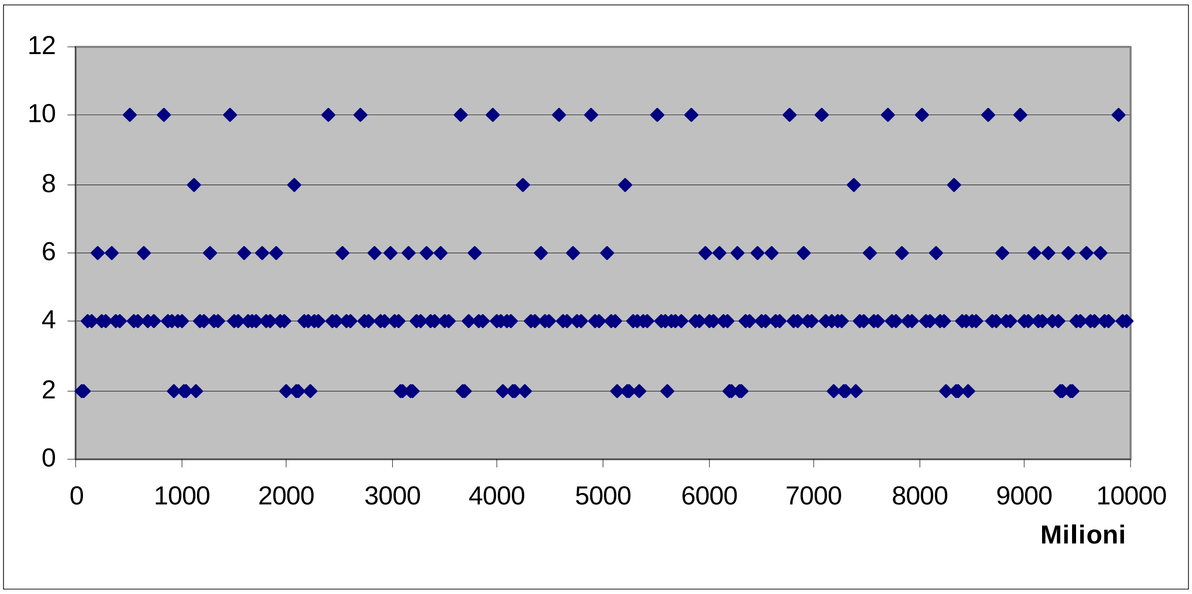
Ho ricavato tutte le soluzioni fino a 100.000.000.000 … Tempo di calcolo, un minuto o poco più... Vediamo un po' cosa è venuto fuori…

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Stiamo discettando qui di *Matematica Sperimentale*… Nel senso che si fanno calcoli e si osserva cosa ne viene … Di *dimostrazioni rigorose*, manco a parlarne…

Partiamo dalle soluzioni generate da numeri del tipo $\mathbf{N_5}$; *tutti* i numeri fino a 100 miliardi che siano del tipo $\mathbf{N_5}$ (come definito nelle relazioni 2) *generano soluzioni*. E ne generano 1, o 2 o, 3, fino a 10… E quindi esistono anche valori di $\mathbf{N_5}$ per i quali *tutti* i 10 insiemi coinvolti sono soluzioni del *Problema*. Il più piccolo valore di $\mathbf{N_5}$ per cui ciò si verifica è $\mathbf{N_5}$ = 29.296.875; cioè *tutti* i 10 insiemi di interi consecutivi che partono da $N_{29296875,1}$ e vanno fino a $N_{29296875,10}$ soddisfano le condizioni del *Problema*… Stupefacente… Ce ne sono poi infiniti (o almeno indeterminati…) altri, dopo, che contemplano tutte le 10 soluzioni possibili… Questi sono cadenzati in modo sistematico; distano fra essi sempre 2, 4, 6, 8 o 10 volte il fattore 5^{10}, cioè 9.765.625… Ad esempio, $\mathbf{N_5}$ = 48.828.125 è il primo intero che segue quello visto in precedenza in questa speciale classifica, e dista appunto 2×5^{10} da 29.296.875…

La cadenza dei valori $\mathbf{N_5}$ *record* che conseguono *tutte* le 10 soluzioni del *Problema* non è omogenea; il grafico che segue mostra le soluzioni per i primi 10 miliardi di interi (in ascissa), classificate in ordinata per distanza fra esse, normalizzata in base al fattore 5^{10}; se ne vedono tante, di soluzioni, con distanza 4×5^{10}, molto poche con distanza 8×5^{10}… Non vi sono ovviamente multipli dispari del fattore 5^{10} come distanza fra le soluzioni, poiché altrimenti l'$\mathbf{N_5}$ si trasformerebbe in un $\mathbf{N_0}$…



Comunque, si apprezza una qualche regolarità periodica…

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Ricordando la 9a), e incrementando via via I_D, il termine $(2\times \mathbf{I_D} - 1)$ assume tutti i possibili valori interi dispari; ogni 5 incrementi unitari di $\mathbf{I_D}$, il fattore $(2\times\mathbf{I_D} - 1)$ è multiplo di 5 e fa in pratica crescere di un'unità il valore di $\mathbf{K_D}$. Ogni **25** incrementi di $\mathbf{I_D}$, $\mathbf{K_D}$ cresce di due unità, e così via.

I valori di $\mathbf{N_5}$ sono cadenzati con passo $5^7 = 78125$; nei primi 100 miliardi di interi ve ne sono allora 100.000.000.000 / 78.125 = 128.000. Di essi, i 4/5 non sono multipli di **5**, cioè 1.024.000, ed hanno $\mathbf{K_D} = 7$; dei rimanenti, i 4/5 non sono multipli di **25**, ed hanno $\mathbf{K_D} = 8$, e così via… La tabella che segue mostra quanti termini del tipo $\mathbf{N_5}$ dovrebbero essere attesi con i vari valori di $\mathbf{K_D}$; l'ultima colonna, indicata con **R**, segnala il rapporto fra il numero di $\mathbf{N_5}$ atteso per ciascun $\mathbf{K_D}$ ed il precedente valore:

K_D	Quantità di N_5	Di cui col K_D	R
7	1280000	1024000	
8	256000	204800	5
9	51200	40960	5
10	10240	8192	5
…	…	…	…

Se ci si basasse su questa tabella, si potrebbe aspettare un numero di soluzioni al *Problema* che degrada di un *fattore 5* ogni volta che $\mathbf{K_D}$ si incrementa di una unità… Invece no… Vediamo…

La tabella seguente mostra quante soluzioni *effettive* al *Problema* vi siano, nei primi 100 Miliardi di interi, generate da termini di tipo $\mathbf{N_5}$:

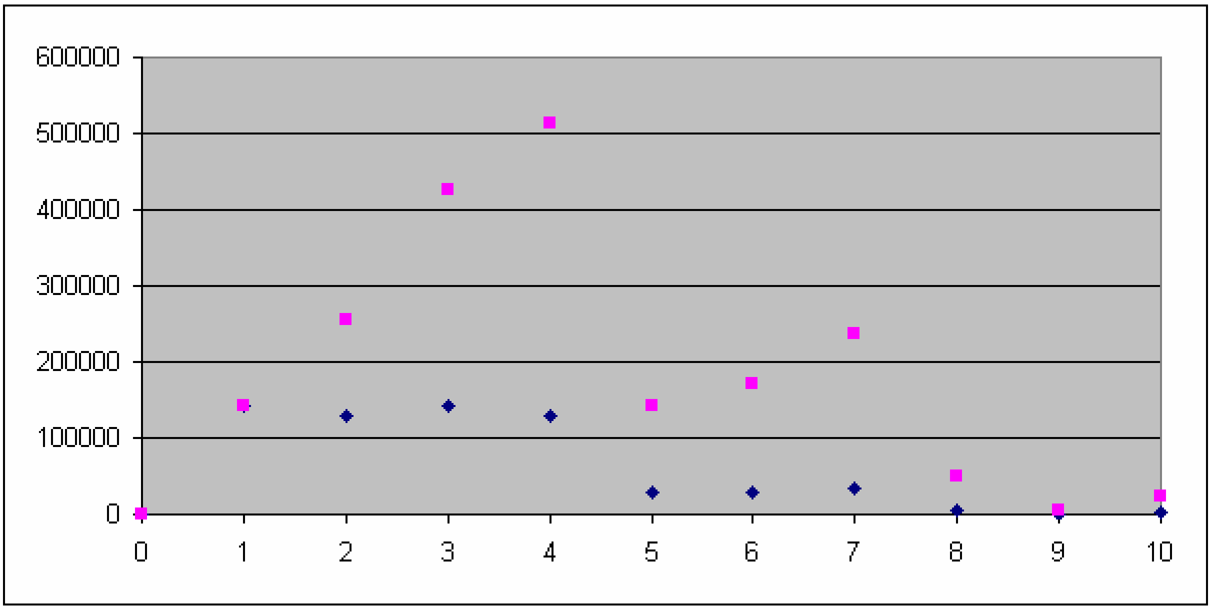
K_D	$N_{N5,1}$	$N_{N5,2}$	$N_{N5,3}$	$N_{N5,4}$	$N_{N5,5}$	$N_{N5,6}$	$N_{N5,7}$	$N_{N5,8}$	$N_{N5,9}$	$N_{N5,10}$	Totale
7	160000	160000	160000	160000	160000	160000	160000	160000	160000	160000	1600000
8	32000	32000	32000	32000	32000	32000	32000	32000	32000	32000	320000
9	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200	3200	32000
10	960	960	960	960	960	960	960	960	960	960	9600
11	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	960
12	8	11	11	10	10	8	8	10	10	12	98
13	3	1	1	2	2	0	0	1	1	1	12
14	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	2

Le soluzioni *effettivamente trovate* sono classificate per posizione nei 10 insiemi associabili a ciascun valore di $\mathbf{N_5}$ (colonne), e si osserva che sono equamente distribuite fra i 10 insiemi. Sono poi classificate per valore di $\mathbf{K_D}$ (righe), e si vede che le soluzioni con $\mathbf{K_D = 7}$ sono il quintuplo di quelle con $\mathbf{K_D = 8}$, come ci si aspettava per quanto visto nella tabella precedente… Però al passo successivo il rapporto diventa **10** (!), e quindi **3,33…**; e poi ancora **10**… Mistero…

Le ultime righe della tabella (le ultime 3) non devono esser prese per oro colato; i valori indicati in tabella, letti in orizzontale, sono diversi fra loro ed *instabili* solo perché i 100 Miliardi di interi esaminati non sono sufficienti a *stabilizzarle*. Se si arrivasse, chessò, a 10.000 Miliardi di interi, presumibilmente le righe della tabella con $\mathbf{K_D}$ = 12 e successive si fisserebbero su valori costanti, come appare per le righe superiori.

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

Altro quesito; quante volte capita che, al variare di $\mathbf{N_5}$, vi siano 1, o 2, o 3 o… fino a 10 soluzioni? Cioè quanti insiemi del tipo $N_{N5,X}$ soddisfano al *Problema* per ciascuno dei termini $\mathbf{N_5}$? Il grafico che segue (con **X** in ascissa) mostra la risposta, per interi al di sotto dei 100 Miliardi:



Gli indicatori in blu evidenziano quante volte un certo $\mathbf{N_5}$ è in grado di generare soluzioni al *Problema*; quelli fucsia quante siano le soluzioni complessive generate[4]. Si osserva una palese discontinuità fra le 4 e le 5 soluzioni; e poi fra le 7 e le 8… Altra coppia di misteri… E poi, perché così poche soluzioni per **X = 9**? Visto che **X = 10** ne fornisce di più? Il *rapporto* fra il numero di soluzioni complessive fra un dato valore di **X** ed il precedente è sempre minore di **1,8**, tranne che per **X=10**, quando di colpo balza a circa **4,5**…

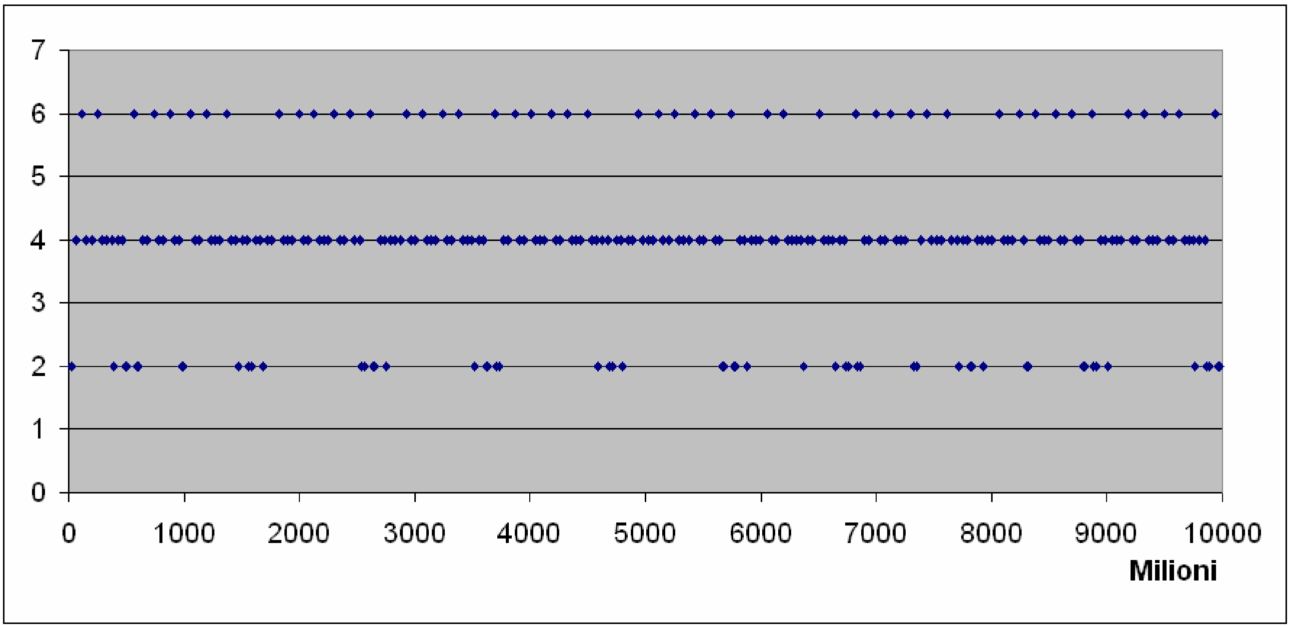
[4] Forse un chiarimento è doveroso… Meglio con un esempio; con **X=4** vi sono 128000 valori di $\mathbf{N_5}$ fino a 100 Miliardi (indicatore **blu**) che generano **4** soluzioni ciascuno, totale 512000 soluzioni (indicatore **fucsia**). Con **X=5** vi sono 28444 valori di $\mathbf{N_5}$ fino a 100 Miliardi che generano ciascuno **5** soluzioni, totale 142220 soluzioni…

Per la discontinuità fra 4 e 5 soluzioni si può azzardare qualcosa; un paio di pagine fa si è visto che, a parità di $\mathbf{N_5}$, $\mathbf{N_0}$ assume due diversi valori scorrendo le 10 *potenziali* soluzioni, cioè dato $\mathbf{N_5}$, $\mathbf{N_0} = \mathbf{N_5} \pm 5$… Casomai ciò incide… Al cambio dello $\mathbf{N_0}$ collegato allo $\mathbf{N_5}$ in esame, potrebbero scattare meccanismi che giustifichino la discontinuità…

♦ ♦ ♦ ♦ ♦

E passiamo al caso degli $\mathbf{N_0}$; l'altra metà del cielo… Il primo valore di $\mathbf{N_0}$ si ha con $\mathbf{I_P} = 1$ e $\mathbf{K_P} = 7$, dalla relazione **9b**), per cui $\mathbf{N_0} = 156250$; questo particolare valore di $\mathbf{N_0}$ genera 4 soluzioni al *Problema*, cioè $N_{\mathbf{156250,1}}$, $N_{\mathbf{156250,2}}$, $N_{\mathbf{156250,5}}$, $N_{\mathbf{156250,6}}$; ma è solo un campione…

Di nuovo, abbiamo un numero indeterminato di valori *record* che con un dato $\mathbf{N_0}$ generano *tutte* le 10 soluzioni possibili; il più piccolo è $\mathbf{N_0}$ = 19.531.250. Il grafico corrispondente a quello già visto sopra per $\mathbf{N_5}$, per valori inferiori a 10 Miliardi, evidenzia che le soluzioni *record* distano fra loro 2×5^{10}, o 4×5^{10}, o 6×5^{10}, ma *non* 8×5^{10} o 10×5^{10}… Questo si mantiene vero anche per i successivi 90 Miliardi di interi, fino a tutti i 100 Miliardi esaminati…



Ecco, una differenza sostanziale dal caso $\mathbf{N_5}$ è che *non è più vero* che tutti i possibili valori di $\mathbf{N_0}$ generino soluzioni (almeno fino a 100 Miliardi). La *maggior parte* dei valori di $\mathbf{N_0}$ multipli di 1.250.000 = $2^4\times5^7$ non genera nessuna soluzione; troppi **2** come fattori? Dico *la maggior parte* perché non è *sempre* vero; se scorriamo gli $\mathbf{N_0}$ multipli di 1.250.000 si vede che i primi **4** non generano soluzioni; ma il quinto, $\mathbf{N_0}$ = 625.000, ne genera 4 ($N_{\mathbf{625000,3}}$, $N_{\mathbf{625000,4}}$, $N_{\mathbf{625000,7}}$, $N_{\mathbf{625000,8}}$).

Poi ve ne sono altri **9** senza soluzioni, quindi il 15°, $\mathbf{N_0}$ = 18.750.000, ne genera ancora 4 (le stesse di prima), e così via per **3** gruppi analoghi con cadenza 10 (cioè il 25°, 35° e 45° multiplo di 1.250.000 generano, gli altri no). Abbiamo trovato quindi una cadenza regolare? Cioè:

- $\mathbf{N_0} = \mathbf{K}\times1.250.000 \Rightarrow$ nessuna soluzione, se $\mathbf{K} \neq 5 + 10\times\mathbf{I}$
- $\mathbf{N_0} = \mathbf{K}\times1.250.000 \Rightarrow$ *qualche* soluzione, se $\mathbf{K} = 5 + 10\times\mathbf{I}$

Manco a parlarne… Dopo il 5°, 15°, 25°, 35° e 45° multiplo di 1.250.000 come eccezione all'eccezione della regola di generazione di soluzioni, ecco che il valore successivo non dista più 10 volte il fattore 1.250.000 dal precedente, ma solo 5 volte… E quindi il multiplo successivo al 45° di 1.250.000 che genera soluzioni non è il 55°, ma il 50°… Eccezione dell'eccezione dell'eccezione… Cioè ogni tanto si interrompe pure questa sequenza…

Non vi annoio ulteriormente; solo un'ultima cosa; il valore $\mathbf{N_0} = 156.250.000 = 2^4 \times 5^{10}$ che fa parte di quelli che in prima istanza non dovrebbero generare soluzioni, invece è il più piccolo che le genera *tutte*, cioè $N_{\mathbf{156250000,X}}$ con qualsiasi **X** (e tanti altri dopo di lui)…

Riguardo alle *eccezioni delle eccezioni*; proprio oggi mi son trovato a dover organizzare una conference call con alcuni colleghi della mia Azienda in una sede negli USA; per gli orari, non sapendo bene quanti fusi orari vi fossero da considerare, ho esplorato su Internet… Per scoprire poi che gli USA hanno 5 fusi, 3 continentali più Alaska ed Hawaii; il più vicino all'Europa dista 6 ore. Tutti gli States seguono l'ora legale, ad *eccezione* dell'Arizona, che per motivi a me ignoti non desidera adattarsi… Ma, sempre nell'Arizona, c'è una *eccezione all'eccezione*; i territori Navajo seguono invece la regola degli altri States, ed adottano l'ora legale (DST; Daylight Saving Time)…

Saluti,
BR1