# Colpo di Fulmine

Davide Fiacconi

Studio probabilistico del manifestarsi di “colpi di fulmine” in comunità eterogenee di uomini e donne.

## Assunti iniziali

Il cosiddetto "colpo di fulmine"(CDF) accade quando un uomo e una donna, pressoché istantaneamente, trovandosi uno di fronte all'altra, si innamorano, o quantomeno manifestano un forte interesse reciproco. Il processo avviene molto velocemente, cioè senza implicare una conoscenza approfondita tra i protagonisti dell'evento, tanto da manifestarsi in una maniera apparentemente del tutto casuale (anche se in realtà, seppur in tempi brevissimi, entrano in gioco parametri come la bellezza dei soggetti, e soprattutto il loro gusto personale, se non moltissimi altri ancora, difficilmente quantificabili): questa è la prima semplificazione introdotta, ovvero il CDF verrà considerato come un evento puramente casuale con probabilità di manifestarsi

$$p = \frac{1}{2}$$

da parte dell'uomo e della donna presi singolarmente (un ragazzo può esser colpito o meno da una ragazza e viceversa). Di conseguenza la probabilità che non avvenga un CDF è

$$q = 1 - p = \frac{1}{2} = p$$

Il CDF sarà dunque trattato come un evento puramente casuale e statisticamente indipendente tra uomo e donna. Inoltre possiamo considerare la nascita di un CDF come dipendente unicamente dalle due persone considerate, e non relazionata alla restante popolazione, in quanto, considerando un uomo e una donna, il CDF tra loro non scatta se e solo se uno dei due non è interessato all'altro, e il fatto che vi possa essere una terza persona, innamorata di uno dei due, non influisce sulle probabilità che nasca l'interesse tra i due elementi considerati inizialmente.

## Un CDF in una comunità

Si considerino due distinti insiemi: il primo,

$$U = \{u_i \mid i = 1, ..., n\}$$

è un insieme costituito da $n$ individui di sesso maschile, mentre il secondo,

$$D = \{d_j \mid j = 1, ..., m\}$$

è costituito da $m$ individui di sesso femminile. Su questi due campioni si tenterà di modellizzare la probabilità che si manifesti un CDF. Inzialmente, è possibile rilevare come la probabilità che un elemento di uno qualsiasi dei due insiemi si innamori di *uno e un solo particolare elemento* dell'altro insieme sia data dal prodotto logico delle probabilità che si innamori di un rappresentante e delle probabilità che non si interessi a nessun altro. Dunque, la probabilità $p_u$ che un uomo si interessi ad una donna è data da

$$p_u = p \cdot q^{m-1} = p^m$$

mentre, la probabilità $p_d$ che una donna si interessi ad un uomo è data invece da

$$p_d = p \cdot q^{n-1} = p^n$$

Si noti come la probabilità che un uomo si interessi ad una donna dipenda dal numero delle donne “a disposizione” e vice versa. Effettivamente, se la scelta è ampia, è meno probabile che si sviluppi un interesse per una singola persona specifica, mentre, se la scelta è fortemente limitata, in linea teorica è più facile che possa nascere un CDF (secondo l'assunzione che sia un evento totalmente casuale con una determinata probabilità di manifestarsi). Inoltre, è possibile notare che un uomo e una donna hanno rispettivamente $m$ ed $n$ possibilità di scelta, da cui si ottiene

$$p_u = m \cdot p^m$$

$$p_d = n \cdot p^n$$

> *Queste espressioni manifestano unicamente la probabilità che un elemento di un determinato insieme si innamori di un particolare elemento dell'altro insieme, senza tener conto in alcun modo del fatto che tale interesse debba esser ricambiato affinché si manifesti un CDF. Non riesco a quantificare la probabilità di tale corrispondenza. Per il momento sviluppo la versione che utilizza semplicemente il prodotto logico tra le due espressioni, anche se non sono convinto fino in fondo che sia corretta.*

Il prodotto logico delle due espressioni restituisce la probabilità che un uomo e una donna si innamorino, e tale è data da

$$P(m, n) = p_u \cdot p_d = m \cdot n \cdot p^{n+m}$$

Introducendo il rapporto tra numero di uomini e di donne

$$\zeta = \frac{n}{m} \Rightarrow n = \zeta \cdot m$$

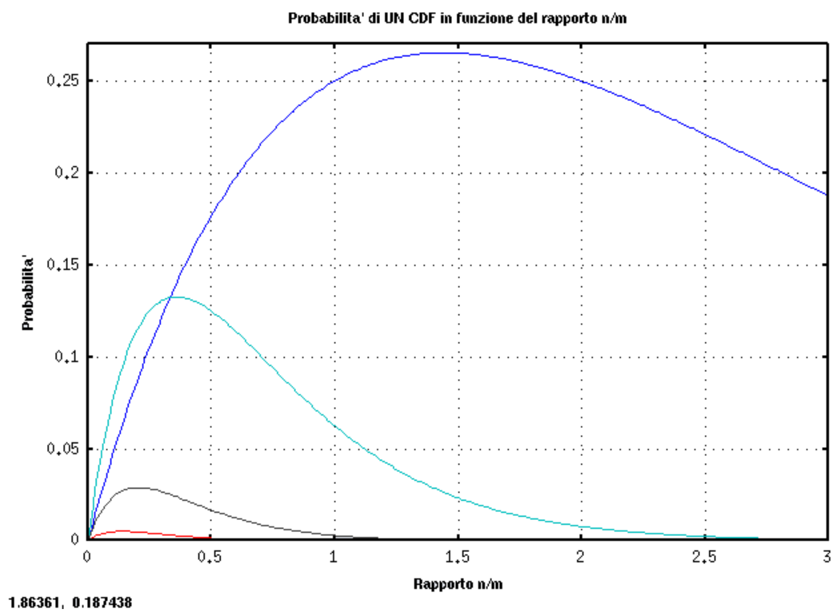
che permette di estendere a $\mathbb{Q}$ il dominio della funzione, da cui si ottiene

$$P_m(\zeta) = \zeta m^2 p^{m(1+\zeta)}$$

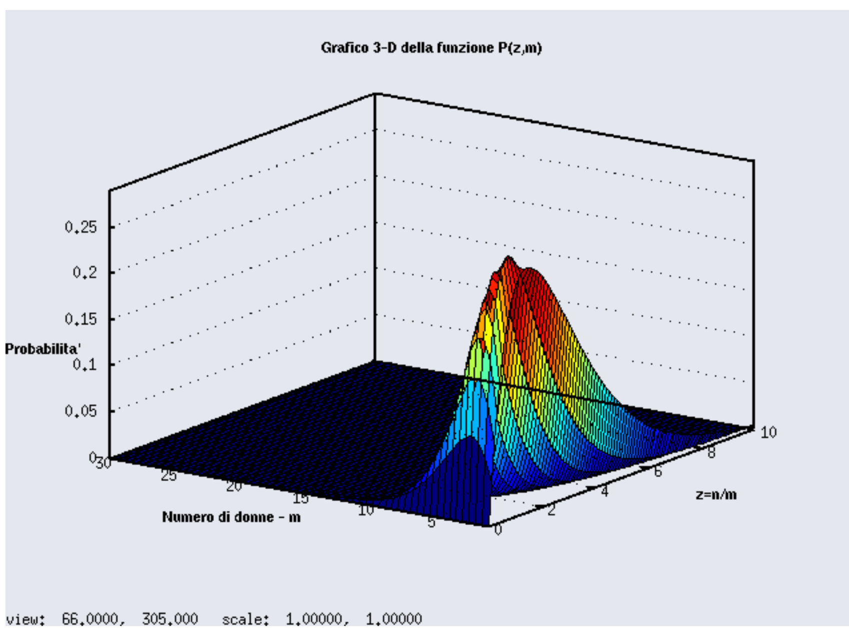
con

$$\begin{cases} m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \\ \zeta \in \mathbb{Q},\ \zeta \in [0, +\infty) \end{cases}$$

che esprime la probabilità che si manifesti un CDF in funzione del rapporto tra numero di uomini e donne, in relazione al parametro $m$ che rappresenta proprio il numero di elementi dell'insieme $D$. E' di seguito riportato un grafico che mostra le probabilità per $\zeta \in (0, 3)$ e con $m = \{1, 4, 7, 10\}$.




E' riportato anche il grafico 3-Dimensionale di $P$ espressa in funzione di $\zeta$ e di $m$.



Derivando la funzione $P_m$ rispetto a $\zeta$ si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}P_m(\zeta) = m^2 2^{-m-m\zeta} - \ln(2)\zeta m^3 2^{-m-m\zeta}$$

e, ponendo tale derivata uguale a 0, si ottiene

$$\zeta_{max} = \frac{1}{\ln(2)\cdot m}$$

da cui risulta evidente che il valore del rapporto $\zeta$ che determina la probabilità massima nella funzione $P_m(\zeta)$ dipende da $m$, in particolare si ha

$$P_m(\zeta_{max}) = \psi(m) = \frac{m}{\ln(2)\cdot 2^{m\left(1+\frac{1}{\ln(2)m}\right)}}$$

La derivata di $\psi(m)$risulta essere

$$\frac{d}{dm}\psi(m) = \frac{1}{\ln(2)\cdot 2^{m\left(1+\frac{1}{\ln(2)m}\right)}} - \frac{m}{2^{m\left(1+\frac{1}{\ln(2)m}\right)}}$$

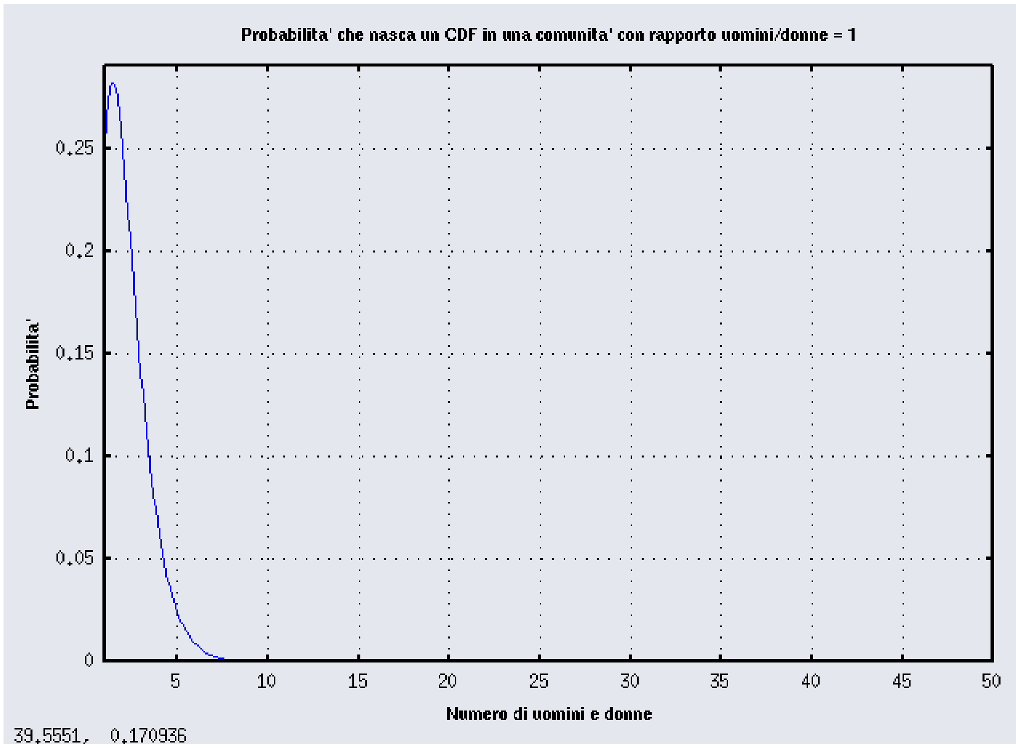
che, posta uguale a 0, restituisce il valore

$$m = \frac{1}{\ln(2)}$$

Dunque, la condizione che massimizzerebbe, in linea teorica, la probabilità che si verifichi un CDF in una comunità di $m$ donne con un rapporto uomini/donne $\zeta$ risulta essere

$$\begin{cases} \zeta = 1 \\ m = \frac{1}{\ln(2)} \end{cases}$$

(è difficile che siano presenti $\frac{1}{\ln(2)}$ donne, comunque...) ed in tali condizioni si raggiunge una probabilità del 28% circa che si manifesti *un* CDF. Il grafico seguente mostra le probabilità che si manifesti *un* CDF in funzione del numero di donne nel caso particolare di $\zeta = 1$.




Si nota il massimo nella posizione precedentemente identificata, ed è evidente come all'aumentare delle donne, e dunque degli uomini, la probabilità diminuisce vertiginosamente, il che potrebbe avere due spiegazioni

- All'aumentare di $m$ risulta poco probabile che si manifesti *un solo* CDF, mentre è più probabile che se ne manifestino in quantità maggiore
- All'aumentare di $m$, la scelta, per un elemento di $U$ quanto per uno di $D$, aumenta, il che rende meno probabile l'interesse verso una sola persona specifica, essendo molta la possibile "concorrenza".

## Manifestazione di più CDF in una comunità

Consideriamo ancora una volta i due insiemi

$$U = \{u_i \mid i = 1, ..., n\}$$

$$D = \{d_j \mid j = 1, ..., m\}$$

Precedentemente, si è giunti alla conclusione che la probabilità che si manifesti un CDF sia data dalla funzione $P_m(\zeta)$, dove $\zeta = \frac{n}{m}$ e il parametro $m$ rappresenta il numero di donne di una comunità eterogenea. E' possibile identificare due metodi per estendere lo studio delle probabilità ad un generico numero $k$ di CDF in tale comunità.

> *Di seguito riporterò due approcci alla questione della probabilità che si manifestino più CDF. Il primo si basa, similmente a quanto fatto per il caso di un singolo CDF, sulle distribuzioni binomiali, variando un parametro dei coefficienti binomiali associati, in modo da vedere le probabilità che* $\binom{n}{k}$ *uomini e* $\binom{m}{k}$ *donne si innamorino. Anche in tal caso, mi sembra venga solo considerata la probabilità che uomini e donne si innamorino, non che tali innamoramenti siano raciprocamente corrisposti. Il secondo metodo si basa sul prodotto logico di una "sequenza di scarti", ovvero sul fatto che, avendo n uomini e m donne, una volta sviluppato un primo colpo di fulmine tra* $u_i$ *e* $d_j$*, tali elementi non possono più rientrare tra i possibili protagonisti di un nuovo CDF, quindi si dovrà poi considerare la probabilità di un CDF tra n-1 uomini e m-1 donne, e così via. Un numero k di "iterazioni" di questo tipo e il loro prodotto logico daranno la probabilità di ottenere k CDF. In questo caso, le perplessità si basano su quelle esposte per la probabilità sul singolo CDF, in quanto viene riutilizzata più volte la stessa formula e, se essa è sbagliata o imprecisa, tale sarà il risultato anche in questo caso.*

### Primo approccio

Il primo metodo per ottenere la probabilità che si manifestino $k$ CDF in un gruppo di $n$ uomini e $m$ donne si basa sul rimaneggiamento delle funzioni $p_u$ e $p_d$, in particolare è possibile notare come

$$p_u = \binom{m}{1} \cdot p \cdot q^{m-1} = m \cdot p^m$$

$$p_d = \binom{n}{1} \cdot p \cdot q^{n-1} = n \cdot p^n$$

ovvero che $p_u$ e $p_d$ non siano altro che distribuzioni binomiali nel caso particolare in cui $k = 1$. Introducendo nuovamente il rapporto

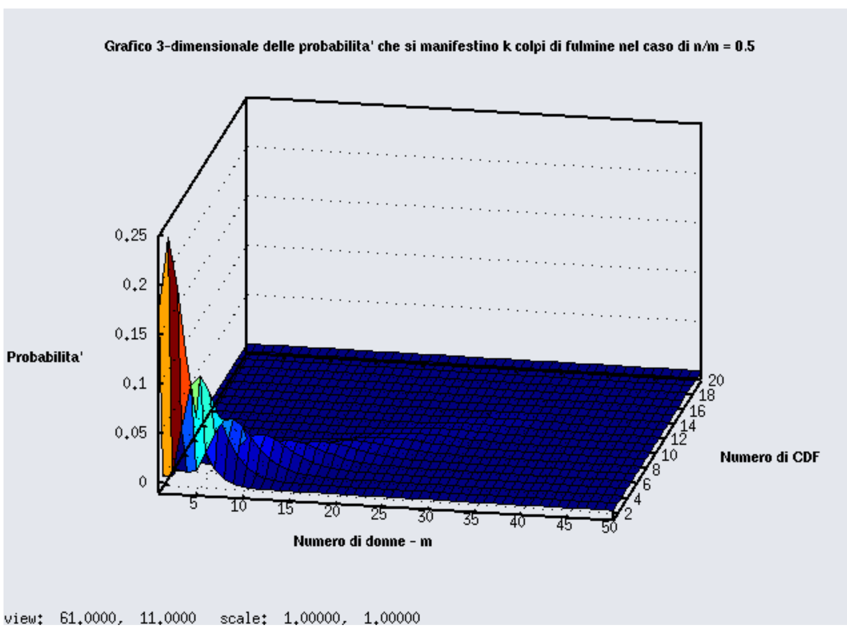
$$\zeta = \frac{n}{m} \Rightarrow n = \zeta \cdot m$$

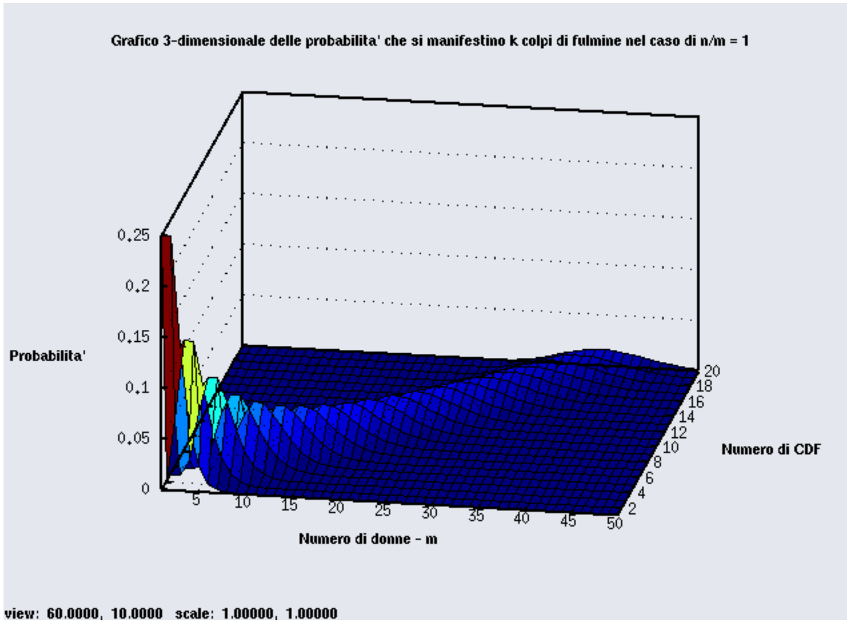
è possibile denotare una nuova funzione $\Phi_\zeta(k, m)$ che descriva le probabilità che si manifestino $k$ CDF in una comunità di $m$ donne in dipendenza dal parametro di rapporto uomini/donne $\zeta$, ovvero

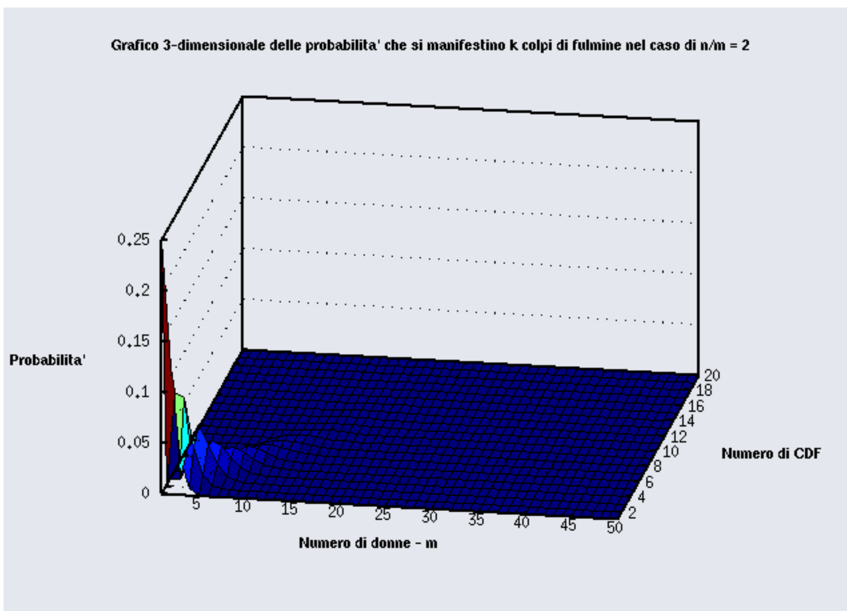
$$\Phi_\zeta(k, m) = \left( \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \zeta m \\ k \end{array} \right) \cdot p^{m(1+\zeta)} = \frac{m! \cdot (\zeta m)!}{(m-k)! \cdot (\zeta m - k)! \cdot (k!)^2} \cdot \frac{1}{2^{m(1+\zeta)}}$$

Di seguito sono rappresentati i grafici 3-dimensionali di $\Phi_\zeta(k, m)$ rispettivamente nei casi specifici di $\zeta = \{0,5; 1; 2\}$ con

$$\begin{cases} k \in \mathbb{N}, k \in [1, 20] \\ m \in \mathbb{N}, m \in [1, 50] \end{cases}$$






Risulta abbastanza evidente come "l'onda" di maggiore probabilità che attraversa la superficie, sviluppata dalla funzione, sia fortemente più estesa lungo il piano e in altezza nel caso di $\zeta = 1$ che negli altri casi, il che risulta abbastanza plausibile, in quanto un rapporto 1:1 rende evidentemente più facile la possibilità che si sviluppino CDF, in quanto non svantaggia le possibilità di incontro né alla componente maschile del gruppo, né a quella femminile.

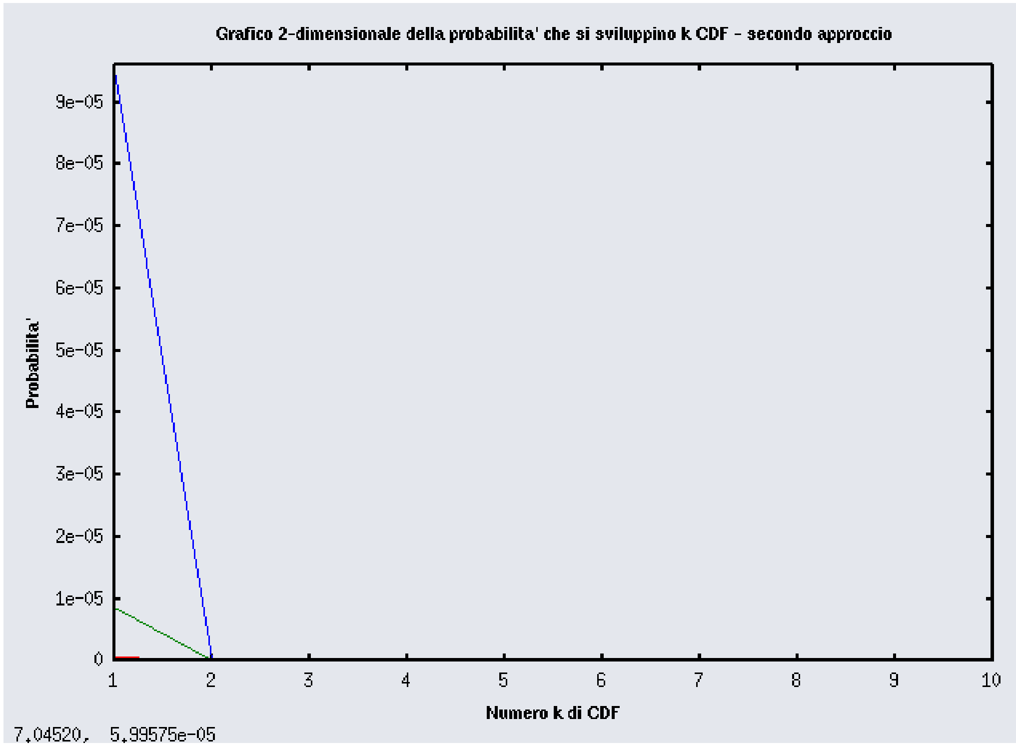
*Con la matematica in mio possesso, al momento faccio fortemente fatica a sviluppare di più la funzione a causa principalmente dei fattoriali. Stavo pensando se sotituirli con le funzioni* $\Gamma$ *di Eulero o utilizzare l'approssimazione di Stirling, in modo da poter tentare di derivare la funzione e studiarne le variazioni per ottenere l'ipotetico numero più probabile di CDF in funzione del numero di donne* $m$ *per un dato rapporto* $\zeta$*.*

## Secondo approccio

Lo svilupparsi di differenti CDF può essere analizzato anche da un altro punto di vista, cioè considerando il fatto che, nel momento in cui si sviluppa un particolare CDF nella comunità, i due protagonisti non possono più partecipare alla formazione di un nuovo CDF, il che fa variare le probabilità che se ne formi un successivo in quanto meno elementi hanno la possibilità di concorrerne. Partendo dagli insiemi $U$ e $D$, dal momento che due elementi particolari, $u_0$ e $d_0$, si combinano in un CDF, le probabilità che si sviluppi un secondo CDF possono esser considerate come le probabilità che se ne sviluppi uno singolo tra $n-1$ uomini e $m-1$ donne, ed il prodotto logico di tali probabilità risulta esser la probabilità totale che si sviluppino due CDF. Tale approccio può ovviamente esser esteso a $k$ CDF in una comunità. In formule, considerando una comunità di $m$ donne ed un rapporto $\zeta = \frac{n}{m}$, la probabilità che si sviluppino $k$ CDF è data da

$$\Psi_{m,\zeta}(k) = \prod_{\substack{m-k+1 \leq i \leq m \\ \zeta m-k+1 \leq j \leq \zeta m}} i \cdot j \cdot p^{i+j}$$

Di seguito è riportato il grafico bidimensionale delle probabilità che si verifichino $k$ CDF secondo la predizione di tale espressione nel caso di $\zeta = 1$ e $m = n = \{10, 12, 14, 16, 18, 20\}$(nel grafico sono discernibili solo i primi tre casi, dove quello con la maggiore probabilità è *m=10*). Tale rappresentazione mostra come questo secondo approccio ridimensioni fortemente (forse in maniera esagerata) le probabilità che si manifestino $k$ CDF rispetto al precedente approccio, inoltre le probabilità tendono a diminuire vertiginosamente all'aumentare del numero di CDF considerati, non incontrando più dei massimi relativi di probabilità.




## Conclusioni & Considerazioni

Il “problema” del calcolo delle probabilità che si sviluppino colpi di fulmine in una comunità eterogenea di uomini e donne non è risultato essere assolutamente semplice, pur essendosi introdotte le semplificazioni precisate inizialmente. Inoltre, non è da dimenticare che i risultati mostrati derivano unicamente da elucubrazioni teoriche, e tali sono, per quanto, da un punto di vista qualitativo, possano sembrare relativamente attinenti alla realtà. A conoscenza di ciò, è possibile dire che si è constatato che il più favorevole rapporto uomini/donne è 1, risultato solo apparentemente banale, e che, all'aumentare del numero di persone costituenti la comunità, diminuisce la probabilità che si sviluppino colpi di fulmine, il che è dovuto ovviamente all'ampia scelta possibile e alla difficoltà che, in un contesto di tale casualità, l'amore sbocci da entrambe le parti. Nonostante ciò, il primo approccio alla questione dei $k$ CDF mostra probabilità approsimatamente comprese tra lo 0,5% e il 5% per un'ampia gamma di valori di persone (considerando il rapporto 1:1) e di numeri di colpi di fulmine, un risultato tutto sommato incoraggiante, pur sapendo bene che nella vita reale le cose risultano essere immensamente più complesse...e immensamente più belle.